

0.1 Hydrodynamika srážek asteroidů

Při srážkách pevných těles se potýkáme s následujícím problémem: tělesa na začátku zabírají jen omezený prostor a okolo je vakuum. Po srážce se však rozpadnou na úlomky, které odlétají vysokou rychlostí. Výpočetní doména by tak musela být zbytečně velká a kdyby se ukázalo, že úlomky letí „do Prčic“, byli bychom tamtéž. Proto je mnohem výhodnější pro srážky použít popis *lagrangeovský*, při kterém se pozorovatel pohybuje s prouděním kamkoliv.

0.1.1 Lagrangeův popis

Sepišme nejprve potřebné rovnice. Říkali jsme, že sledujeme pohyb, čili na levé straně používáme zásadně totální časové derivace. Rovnice kontinuity je tedy (v jednotkách $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1)$$

Navierova–Stokesova rovnice (m s^{-2}):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (2)$$

1. věta termodynamická ($\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}$):

$$\frac{dU}{dt} = -P \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \quad (3)$$

Poissonova rovnice ($\text{J kg}^{-1} \text{m}^{-2}$):

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (4)$$

stavová rovnice pro pevnou látku (Tillotson 1962; Pa)¹:

$$P = \begin{cases} A\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) + B\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)^2 + a\rho U + \frac{b\rho U}{\frac{U}{U_0} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} + 1} & \text{pro } U < U_{iv}, \\ a\rho U + \left[\frac{b\rho U}{\frac{U}{U_0} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} + 1} + A\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) e^{-\beta\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)} \right] e^{-\alpha\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)} & \text{pro } U > U_{cv}, \end{cases} \quad (5)$$

konstituční rovnice pro pevnou látku (Hookeův zákon; Pa s^{-1}):

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = 2\mu_1 \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \left(\mu_2 - \frac{2}{3}\mu_1\right) \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I}. \quad (6)$$

¹ Přibližně zohledňuje i fázové přechody, ostatně člen ρU odpovídá ideálnímu plynu; dokonalejší stavovou rovnicí by byla ANEOS (Melosh 2000), ale tato není volně dostupná.

Značení jest následující: ρ hustota, \mathbf{v} rychlost, P tlak (izotropní část), \mathbf{S} tenzor napětí (deviatorická část), U měrná vnitřní tepelná energie, ρ_0 hustota při nulovém tlaku, U_0 vnitřní energie při nulovém tlaku, U_{iv} při počínajícím vypařování, U_{cv} při úplném vypaření, $A, B, a, b, \alpha, \beta$ další parametry stavové rovnice, μ_1 dynamická (první) viskozita, μ_2 objemová viskozita, \mathbf{I} jednotkový tenzor.^{2,3}

Kdybychom chtěli konstituční rovnici rozepsat maticově, viděli bychom, že:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} = 2\mu_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} +$$

$$+ (\mu_2 - \frac{2}{3}\mu_1) \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že se zde tenzor napětí \mathbf{S} velmi liší od tekutin! Napětí je v pevné látce přítomno, i když pohyb ustane. V tekutinách by napětí existovalo pouze při vzájemných pohybech; konstituční rovnice by proto byla bez časové derivace vlevo, tzn. $\mathbf{S} = \mu_1 [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + (\mu_2 - \frac{2}{3}\mu_1) \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I}$.

0.1.2 Elasticita, plasticita a praskliny

U pevných látek musíme být obezřetní, neboť platnost Hookeova zákona je omezena. Platí pouze v *elastické oblasti* (viz obr. 1), ve které je vztah mezi deformací (tj. relativní změnou délky) a napětím lineární, schematicky $\varepsilon = E\sigma$; kde E označuje Youngův modul pružnosti.

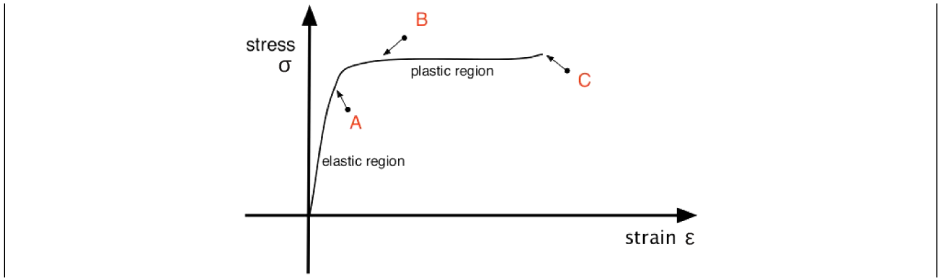
Pak ovšem následuje *plastická oblast*, kde deformace rostou i při takřka konstantním (velkém) napětí. Toto popisují poddajné vztahy (angl. yielding), například von Misesovo kritérium. Jde o horní mez pro tenzor napětí, resp. jeho neizotropickou část:

$$\mathbf{S} = f\mathbf{S}, \quad f = \min \left[\frac{Y^2}{3J_2}, 1 \right], \quad J_2 = S^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}, \quad (7)$$

kde Y označuje mez pružnosti.

² Symboly $\nabla \mathbf{v}$, $(\nabla \mathbf{v})^T$ jsou tenzory druhého řádu se složkami $\nabla_i \mathbf{v}_j$, resp. $\nabla_j \mathbf{v}_i$.

³ Faktor $-\frac{2}{3}\mu_1$ je před $\nabla \cdot \mathbf{v}$ proto, že izotropní působení již bylo vyčleněno jako tlak, resp. ∇P , čili zde ho musíme odečíst! V Navierově–Stokesově rovnici, tzn. po provedení $\nabla \cdot \mathbf{S}$, by odpovídal faktoru $+\frac{1}{3}\mu_1$.



Obr. 1 — Typická závislost mezi napětím a deformací pro pevné látky. Převzato z Maindl (2013).

Nakonec musíme uvážit *mez pevnosti*, po jejímž překročení se nepatrné poruchy v materiálu rozvíjejí jako praskliny, rostoucí řádově poloviční rychlostí zvuku. Grady a Kipp (1980) pro popis těchto jevů zavedli parametr *poškození* D (angl. damage), $0 \leq D \leq 1$, a provádějí logickou úpravu celkového tenzoru napětí pro případ stlačování nebo roztahování:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{cases} -P\delta_{\alpha\beta} + (1-D)S_{\alpha\beta} & \text{pro } P \geq 0, \\ -(1-D)P\delta_{\alpha\beta} + (1-D)S_{\alpha\beta} & \text{pro } P < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Zcela zničený materiál (rozuměj rozdrčený na prach) s $D = 1$ nevykazuje žádná napětí ani se nijak nebrání roztahování.

Související a neméně důležitou vlastností materiálu je koncentrace poruch, respektive její rozdělení (Weibull 1939):

$$n(\epsilon) = k\epsilon^m \quad (9)$$

dle aktivační meze ϵ , nad kterou se začnou poruchy rozvíjet v praskliny; k, m jsou materiálové parametry. Rovnice pro vývoj poškození je:

$$\frac{dD^{\frac{1}{3}}}{dt} = \left[\left(\frac{c_g}{R_s} \right)^3 + \left(\frac{m+3}{3} \alpha^{\frac{1}{3}} \epsilon^{\frac{m}{3}} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (10)$$

kde c_g je rychlost růstu poruch (řádově polovina rychlosti zvuku c_s), R_s poloměr příslušný objemu, ve němž poruchy studujeme, a parametr $\alpha \equiv 8\pi c_g^3 k / [(m+1)(m+2)(m+3)]$. Podrobný popis této složité problematiky je uveden v Benz a Asphaug (1994).

0.1.3 Metoda hlazená částicová (SPH)

Pro numerické výpočty se často používá metoda SPH (z angl. smoothed particle hydrodynamics), čili metoda hlazená částicová. Namísto kontinua uvažujeme množinu vzájemně interagujících částic. Hustota je prostě daná jejich počtem v daném objemu. Pohybují se jako by šlo hmotné body (dle lagrangeovských rovnic), ale mají samozřejmě přisouzeno vícero vlasností (\mathbf{v} , U , P , \mathbf{S}). Možná bychom jim proto neměli říkat částice, ale raději „numerická vozidla“.

Vezměme nejprve rovnici kontinuity (1). Jde nám o to, abychom se elegantně zbavili prostorových derivací, konkrétně $\nabla \cdot \mathbf{v}$. Začneme obdobně jako při konvoluci s δ funkcí:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega,$$

ale tato nespojitá funkce pro nás evidentně není vhodná. Proto provedeme vyhlazení konvolucí s funkcí W zvanou *kernel*:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \doteq \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega, \quad (11)$$

kde Ω označuje oblast prostoru, h hladíci délku; jde o aproximaci s přesností $\mathcal{O}(h^2)$. Pak vyjádříme divergenci:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \int_{\Omega} [\nabla_{r'} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \nabla_{r'} \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h)] d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{r'} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \overbrace{W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h)}^{= 0 \text{ na hranici}} d\vec{\Gamma} - \dots = \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{r'} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_r W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega, \quad (12) \end{aligned}$$

kde jsme využili derivaci součinu, Gaussovu větu a skutečnost, že na hranici je kernel W roven nule. Poznamenejme, že operátor ∇ nejprve působí na r' , ale na konci jsme uplatnili antisymetrii ∇W . Derivace samozřejmě nezmizely úplně; zůstal nám zde ale jakýsi vážený průměr gradientu W , který lze při zvoleném W předpočítat.

Diskretizace v prostoru spočívá v nahrazení integrálu sumou:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i \doteq \sum_{j=1}^{N_{\text{okolo}}} \mathbf{v}_j \cdot \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (13)$$

přičemž sčítáme pouze přes částice nacházející se v okolí $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < h$.

Nejjednodušší diskretizace v čase by zřejmě byla:

$$\frac{d\rho}{dt} \doteq \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t}; \quad (14)$$

výsledné explicitní integrační schéma je pak:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \Delta t \rho_i^n \sum_j \mathbf{v}_j^n \cdot \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j^n}.$$

Pro Navierovu–Stokesovu rovnici (2) bychom potřebovali ∇P :

$$\nabla P(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} [\nabla_{\mathbf{r}'} P(\mathbf{r}')] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \int_{\Omega} P(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega,$$

což po diskretizaci vede na:

$$\nabla P_i \doteq \sum_j P_j \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (15)$$

Tento výraz však není symetrický vzhledem k i, j , což se ukazuje jako nebezpečné z hlediska numerického. Obdobně musíme vyjádřit $\nabla \cdot \mathbf{S}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} [\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}')] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega,$$

čili:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_i \doteq \sum_j \mathbf{S}_j \cdot \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (16)$$

s touž poznámkou.

Pro energetickou rovnici (3) bychom potřebovali ještě znát diskretizaci tenzoru (psáno raději ve složkách):

$$\nabla_{\alpha} v_{\beta} = \int_{\Omega} [\nabla_{\alpha} v_{\beta}] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \sum_j v_{\beta j} \nabla_{\alpha} W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}.$$

Celá metoda SPH by tedy mohla vypadat takto (píšeme ovšem stručněji $W_{ij}(h)$ namísto $W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$):

$$\begin{aligned}\rho_i^{n+1} &= \rho_i^n - \Delta t \rho_i^n \sum_j \mathbf{v}_j^n \cdot \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n}, \\ \mathbf{v}_i^{n+1} &= \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} \sum_j P_j^n \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n} + \frac{\Delta t}{\rho_i^n} \sum_j \mathbf{S}_j^n \cdot \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n}, \\ U_i^{n+1} &= U_i^n - \Delta t P_i^n \sum_j \mathbf{v}_j^n \cdot \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 S_{\alpha\beta}^n \frac{1}{2} \sum_j \left[v_{\beta j}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} W_{ij}(h) + v_{\alpha j}^n \frac{\partial}{\partial x_\beta} W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n} \right].\end{aligned}$$

Pro jednoduchost jsme si dovolili vynechat gravitační zrychlení ($-\nabla\Phi$), abychom nemuseli řešit Poissonovu rovnici, nicméně viz Canup (2004).

0.1.4 Alternativní vyjádření prostorových derivací

Existují ovšem i alternativní lepší formulace (ekvivalentní až na $\mathcal{O}(h^2)$), které jsou numericky stabilnější (Cossins 2010, Price 2008). Vycházejí z lagrangiánu nebo z následující vektorové identity, resp. gradientu součinu:

$$\nabla P \rho^a = \rho^a \nabla P + P a \rho^{a-1} \nabla \rho,$$

odkud:

$$\nabla P = \frac{1}{\rho^a} [\nabla P \rho^a - P a \rho^{a-1} \nabla \rho].$$

Speciálně pro $a = 1$:

$$\nabla P = \frac{1}{\rho} [\nabla P \rho - P \rho^{-1} \nabla \rho],$$

což by mimochodem přesně řešilo konstantní P . Pro $a = -1$ bychom obdrželi:

$$\nabla P = \rho \nabla P \rho^{-1} + P \rho^{-1} \nabla \rho,$$

což by naopak zachovávalo celkovou hybnost. Tlakový člen by měl po provedení příslušných diskretizací podobu buď:

$$\nabla P_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_j (P_i - P_j) W_{ij}(h) m_j,$$

nebo:

$$\nabla P_i = \rho_i \sum_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) W_{ij}(h) m_j ;$$

obzvláště poslední je krásně symetrický.

0.1.5 Kernel čili hladící funkce

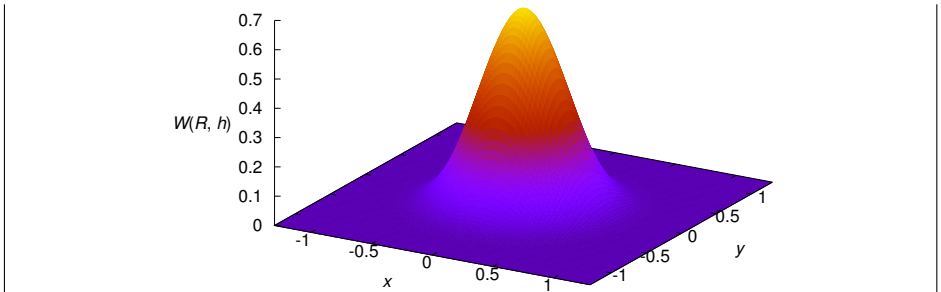
Ideálně by měl kernel W splňovat tyto požadavky: i) normalita, ii) kompaktnost, iii) limita pro $h \rightarrow 0$ je δ funkce, iv) pozitivita, v) být ryze klesající, vi) symetrie, vii) hladkost. Splnit všech sedm najednou je takřka nemožné, například Gaussova funkce postrádá ii). Nicméně nejpoužívanější kubický spline na tom není špatně, lze mu vytýkat jen vii) (obr. 2):

$$W(R, h) = \frac{3}{2\pi h^3} \begin{cases} \frac{2}{3} - 4R^2 + 4R^3 & \text{pro } 0 \leq R < \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} - 4R + 4R^2 - \frac{4}{3}R^3 & \text{pro } \frac{1}{2} \leq R < 1, \\ 0 & \text{pro } R \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

Jeho první derivace je:

$$W'(R, h) = \frac{3}{2\pi h^3} \begin{cases} -8 + 12R^2 & \text{pro } 0 \leq R < \frac{1}{2}, \\ -4 + 8R - 4R^2 & \text{pro } \frac{1}{2} \leq R < 1, \\ 0 & \text{pro } R \geq 1, \end{cases} \quad (18)$$

druhá je lomená a třetí nespojitá. Volba hladící funkce může ovlivnit přesnost řešení a je nutné jí věnovat zvýšenou pozornost, obzvláště v případech derivací vyšších řádů.



Obr. 2 — Kubický spline $W(R, h)$ dle rovnice (17).

0.1.6 Počáteční a okrajové podmínky

Vytvoření počátečních podmínek pro simulace srážek je jednoduché — spočívá generování požadovaného počtu částic SPH, jejich rozmístění uvnitř koule, resp.

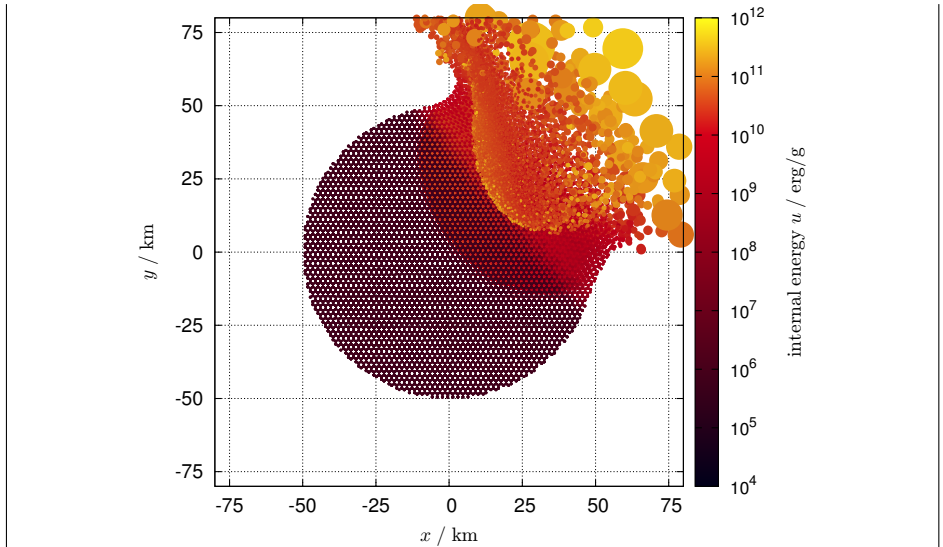
simulovaného tělesa, přiřazení počátečních ρ_0 , \mathbf{v}_0 , U_0 . Často se používá rovnoměrné rozmístění částic; nelze použít zcela náhodné, protože by vznikaly nereálně velké gradienty. Možná je optimální něco mezi tím (viz Diehl aj. 2012).

Okrajové podmínky jsou ještě jednodušší, neboť okolo je vakuum, čili nemusíme dělat nic. Ostatně metoda SPH je pro tento případ zvláště vhodná.

V opačném (horším) případě bychom museli vytvářet *virtuální částice* s vhodnými vlastnostmi, které by vymezovaly hranici. Připisuje se jim odpudivá síla, která brání unikání normálních částic z daného prostoru. Druhou možností je použití *duchařských částic*, které aktuální stav částic uvnitř prostoru zrcadlí vně.

0.1.7 Fragmentační fáze

Po kontaktu projektilu a terče začíná první fáze srážky, a to fragmentace terče. Pro terče o velikosti planetek ($D \lesssim 100$ km) lze simulaci provádět metodou SPH (Benz a Asphaug 1994) bez vlivu gravitace, tzn. bez řešení Poissonovy rovnice. Požadujeme, aby její trvání odpovídalo přinejmenším době průchodu rázové vlny terčem tam a zpět, $\Delta t = 2D/v_{\text{imp}}$. Průběh jedné takové simulace zachycuje obr. 3.



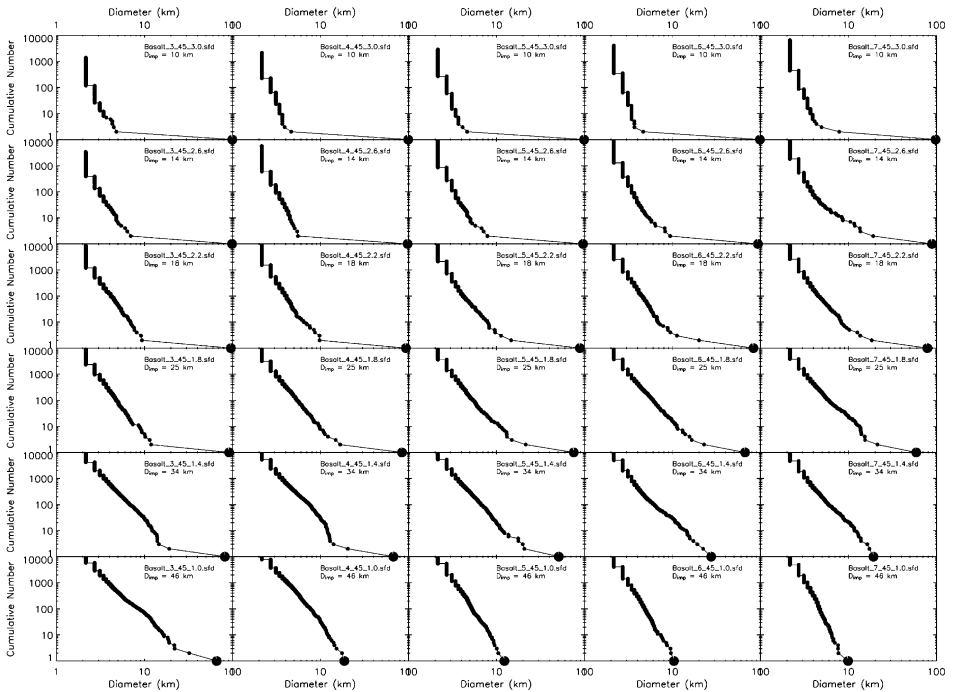
Obr. 3 — Simulace srážky mezi terčem o průměru $D = 100$ km a projektilem s $D = 30$ km, s impaktní rychlostí $v_{\text{imp}} = 15$ km/s a úhlem $\varphi_{\text{imp}} = 30^\circ$. Graf ukazuje polohy (x, y) přibližně $1.56 \cdot 10^5$ SPH částic; jejich barvy odpovídají logaritmu měrné vnitřní energie U (v jednotkách erg g^{-1}). Integrace byla řízena Courantovým číslem $C = 1.0$, typický časový krok byl tedy $\Delta t \simeq 10^{-5}$ s trvání $t_{\text{stop}} = 6.0$ s. Materiálové parametry pro bazalt (Benz and Asphaug 1999): hustota při nulovém tlaku $\rho_0 = 2.7 \text{ g cm}^{-3}$, objemový modul $A = 2.67 \cdot 10^{11} \text{ erg cm}^{-3}$, nelineární tlakový člen $B = 2.67 \cdot 10^{11} \text{ erg cm}^{-3}$, Tillotsonovy parametry $U_0 = 4.87 \cdot 10^{12} \text{ erg g}^{-1}$, $a = 0.5$,

$b = 1.5$, $\alpha = 5.0$, a $\beta = 5.0$, počínající vypařování $U_{iv} = 4.72 \cdot 10^{10} \text{ erg g}^{-1}$, úplné vypaření $U_{cv} = 1.82 \cdot 10^{11} \text{ erg g}^{-1}$, modul pružnosti ve smyku $\mu = 2.27 \cdot 10^{11} \text{ erg cm}^{-3}$, mez pružnosti $Y = 3.5 \cdot 10^{10} \text{ erg g}^{-1}$, měrná energie tavení $U_{melt} = 3.4 \cdot 10^{10} \text{ erg g}^{-1}$, parametry Weibullova rozdělení poruch $k = 4.0 \cdot 10^{29} \text{ cm}^{-3}$, a $m = 9.0$. Počítáno programem SPH5 (Benz and Asphaug 1994).

0.1.8 Reakumulační fáze

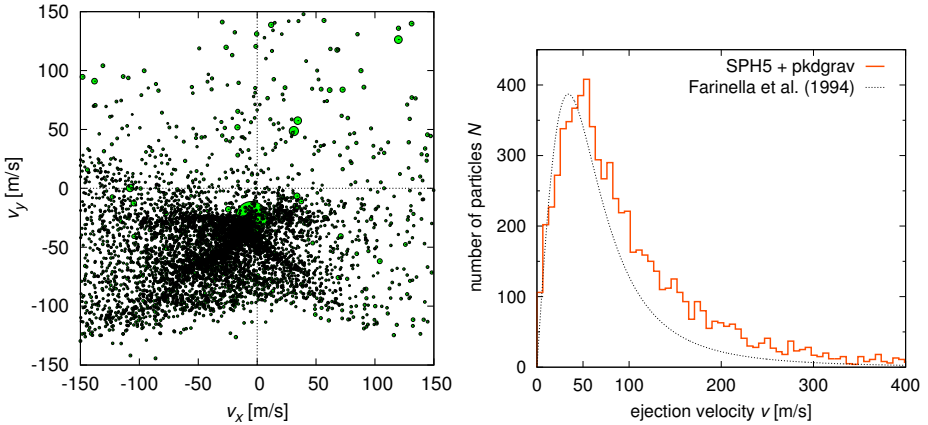
Druhou navazující fází je reakumulace. Tu je možno v prvním přiblížení počítat naopak *bez* jakékoliv hydrodynamiky, jako čistě gravitační interakci fragmentů počítanou N -částicově (Richardson et al. 2000). Výsledek hydrodynamického výpočtu se ovšem musí nějak transformovat do podoby počátečních podmínek pro pevné částice. Dalšími obvyklými zjednodušujícími předpoklady jsou: i) všechno jsou koule; ii) při prvním dotyku se koule spojují do větší koule. Ztrácíme tím samozřejmě jakékoliv informace o rotaci nebo tvaru fragmentů. Navíc, aby byla úloha výpočetně zvládnutelná, používá se metoda k -d stromu (konkrétně třírozměrného stromu), čili působení vzdálených částic se nepočítá jednotlivě, ale hromadně.

Výsledek celé simulace (obr. 5) lze porovnávat například s pozorovaným rozdělením velikostí členů dané rodiny asteroidů (Durda aj. 2007, Benavidez aj. 2012), případně s pozorovaným rychlostním polem (Nesvorný aj. 2006). Musíme samozřejmě uvážit, že obojí mohlo být změněno při dlouhodobém orbitálním vývoji rodiny a sekundárních srážkách.



Obr. 4 — Kumulatívní rozdělení velikostí $N(>D)$ pro podmnožinu 30 různých simulací srážek monolitických asteroidů s průměrem terče $D = 100$ km a impaktním úhlem $\phi_{\text{imp}} = 45^\circ$. Jednotlivé simulace se liší rozměrem projektilu $d = 10, 14, 18, 25, 34$ a 46 km (směrem shora dolů) a impaktní rychlostí $v_{\text{imp}} = 3, 4, 5, 6$ a 7 km/s (zleva doprava). To odpovídá rozsahu od pouhého kráterování po katastrofický rozpad, což se projevuje i zřetelně odlišnými histogramy $N(>D)$.

Převzato z Durda aj. (2007).



Obr. 5 — Vlevo konečné rychlosti těles po simulaci srážky terče $D = 100$ km a projektilu $d = 25$ km, s rychlostí $v_{\text{imp}} = 5 \text{ km s}^{-1}$ a úhlem $\phi_{\text{imp}} = 45^\circ$. Velikosti symbolů odpovídají hmotnostem. Vpravo odpovídající diferenciální histogram rychlostí výhozu $dN(v_{\text{ej}})$, v porovnání s jednoduchým modelem Farinella aj. (1994). Vidíme, že vrchol histogramu je na hodnotě srovnatelné s únikovou rychlostí v_{esc} původního mateřského tělesa. Počítáno programem Pkdgrav (Richardson aj. 2000).

0.1.9 Škálovací zákon pro terče

Z celé sady simulací lze odvodit škálovací zákon $Q_D^*(r)$ (Benz a Asphaug 1999), čili závislost pevnosti (v jednotkách J kg^{-1}) na poloměru r , která je nejdůležitějším vstupem pro statistické modely srážek (viz kap. ??). Stačí pomocí interpolace zjistit, při jaké kinetické energii E_k projektilu dochází k rozptýlení poloviny hmotnosti terče.

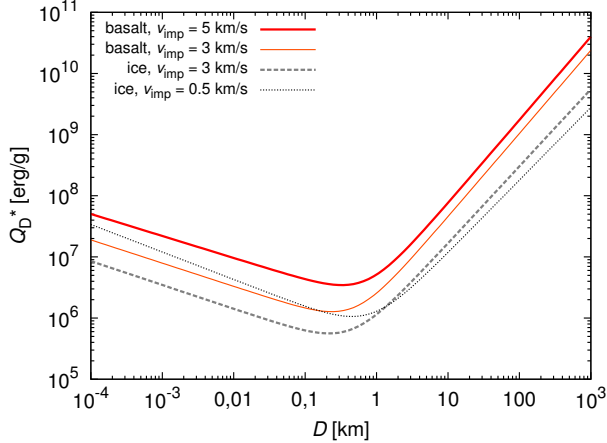
Průběh funkce lze vystihnout polynomem:

$$Q_D^* = \frac{1}{q_{\text{fact}}} (Q_0 r^a + B \rho r^b), \quad (19)$$

kde hodnoty parametrů pro různé materiály shrnuje tab. 1 a funkci obr. 6. Faktor q_{fact} se užívá pouze tehdy, chceme-li vyjádřit, že pevnost je q krát menší než nějaký standardní materiál; jinak nemá smyslu. Všimněme si, že a je záporné a b kladné. Důvodem prvního je skutečnost, že v malých balvanech je málo poruch (prasklin), a tudíž jsou pevnější. Tato část škálovacího zákona je ostatně ověřena laboratorními experimenty. Důvodem druhého je rostoucí gravitační vazebná energie E_v , ale závislost nebývá tak strmá jako $b = -2$, neboť nerozptylujeme celý terč, nýbrž pouze nějakou polovinu.

	v_{imp}	Q_0	B	a	b
	km s	erg g ⁻¹	erg cm ³ g ⁻²		
basalt	5	9,0·10 ⁷	0,5	-0,36	1,36
led	3	1,6·10 ⁷	1,2	-0,39	1,26

Tab. 1 — Parametry škálovacího zákona (19) pro basaltický a ledový materiál s monolitickou strukturou. Převzato z Benz a Asphaug (1999).



Obř. 6 — Škálovací zákon Q_b^* , neboli závislost pevnosti na průměru D , pro monolitický basalt a led a různé hodnoty impaktní rychlosti v_{imp} . Podle Benz a Asphaug (1999).

- [1] BENAVIDEZ, P. G., DURDA, D. D., ENKE, B. L., BOTTKÉ, W. F., NESVORNÝ, D., RICHARDSON, D. C., ASPHAUG, E., MERLINE, W. J. *A comparison between rubble-pile and monolithic targets in impact simulations: Application to asteroid satellites and family size distributions. Icarus*, **219**, 57, 2012.
- [2] BENZ, W., ASPHAUG, E. *Impact simulations with fracture. I. Method and tests. Icarus*, **107**, s. 98–116, 1994.
- [3] BENZ, W., ASPHAUG, E. *Catastrophic disruptions revisited. Icarus*, **142**, s. 5–20, 1999.
- [4] CANUP, R. M. *Simulations of a late lunar-forming impact. Icarus*, **168**, 433, 2004.
- [5] COSSINS, P. *Smoothed particle hydrodynamics. ArXiv*, 1007.1245v2, 2010.
- [6] DIEHL, S., ROCKEFELLER, G., FRYER, C. L., RIETHMILLER, R., STATLER, T.S. *Generating optimal initial conditions for Smooth Particle Hydrodynamics simulations. ArXiv*, 1211.0525, 2012.
- [7] DURDA, D. D., BOTTKÉ, W. F., NESVORNÝ, D., ENKE, B. L., MERLINE, W. J., ASPHAUG, E., RICHARDSON, D. C. *Size-frequency distributions of fragments from SPH/N-body simulations of asteroid impacts: Comparison with observed asteroid families. Icarus*, **186**, 498, 2007.
- [8] FARINELLA, P., FROESCHLÉ, C., GONCZI, R. *Meteorite delivery and transport. IAUS Conf.*, **160**, 205, 1994.

-
- [9] MAINDL, T. I., SCHÄRFER, CH., SPEITH, R. *SPH for simulating impacts and collisions* [online]. [cit. 2014-08-12], ⟨⟩, 2013.
- [10] MELOSH, H. J. *A new and improved equation of state for impact computations. LPI Conf.*, **31**, 1903, 2000.
- [11] NESVORNÝ, D., ENKE, B. L., BOTTKÉ, W. F., DURDA, D. D., ASPHAUG, E., RICHARDSON, D. C. *Karin cluster formation by asteroid impact. Icarus*, **183**, 296–311, 2006.
- [12] NIEDOBA, P. *Bezsiťové metody ve výpočetní dynamice tekutin*. Diplomová práce, VUT Brno, 2012.
- [13] PRICE, D. J. *Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics. J. Comp. Phys.*, **231**, 759, 2012.
- [14] RICHARDSON, D. C., QUINN, T., STADEL, J., LAKE, G. *Direct large-scale N-Body simulations of planetesimal dynamics. Icarus*, **143**, 45, 2000.
- [15] TILLOTSON, J. H. *Metallic equations of state for hypervelocity impact. General Atomic Report*, GA-3216, 1962.

Literatura

Učebnice

Reference