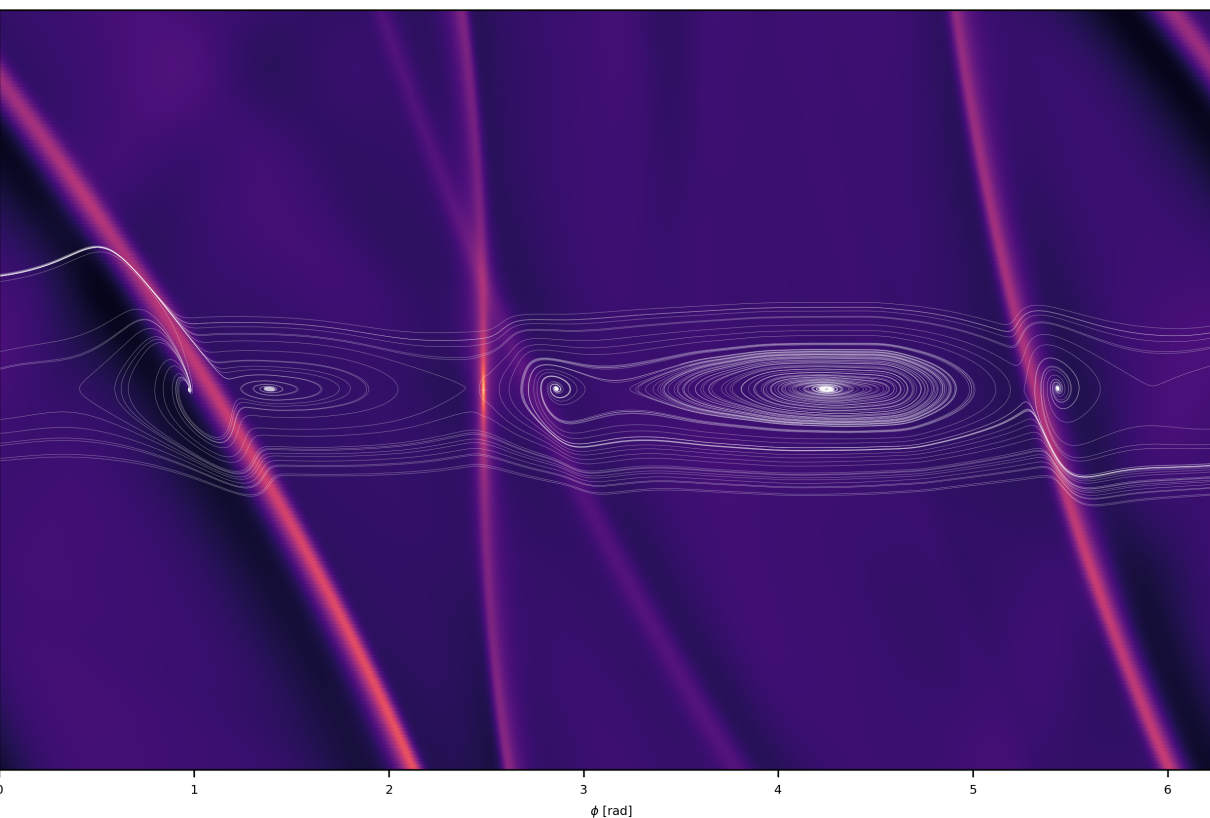


HYDRODYNAMIKA V ASTRONOMII



Miroslav Brož

HYDRODYNAMIKA V ASTRONOMII

PRAHA 2020

Titulní obrázek: Relativní plošná hustota $(\Sigma - \bar{\Sigma}(r))/\Sigma$ protoplanetárního disku, v němž jsou vnořeny vznikající terestrické planety. Na ose x je polární souřadnice φ , na ose y radiální vzdálenost r (mezi 0,9 až 1,1 au); Σ je zobrazena barevnou škálou (černá $\rightarrow$ fialová $\rightarrow$ žlutá). Bílé linie znázorňují proudnice plynu, ovlivněné přítomností protozemě (o hmotnosti $0,5 M_{\oplus}$) a také sousedních protoplanet. V plynu jejich gravitační působení způsobuje jednak spirální ramena a jednak korotační zóny. Naopak nerovnoměrné rozložení plynu způsobuje migraci protoplanet. Výpočet programem Fargo–Thorin (Chrenko aj. 2017).

Obsah

Slovo úvodem	11
Označení veličin	13
1 Hydrodynamika protoplanetárního disku	21
1.1 Magnetohydrodynamika s přenosem záření, Eulerův popis	21
1.2 Vliv částic a dalších fyzikálních jevů	24
1.3 Vztah Eulerova a Lagrangeova formalismu	26
1.4 Kelvinova–Helmholtzova nestabilita	26
Vertikální stříhová nestabilita.	
1.5 Rayleighova–Taylorova nestabilita	27
Baroklinická nestabilita.	
1.6 Magneto–rotační nestabilita	29
1.7 Nestabilita dvou proudění	30
1.8 Gravitační nestabilita	31
1.9 Počáteční a okrajové podmínky	32
1.10 Formalismus v programu Pluto	33
1.11 Metoda konečných objemů (FVM)	34
Škálované jednotky.	
1.12 Adaptivní zjemňování sítě a víceprocesorové výpočty	35
AMR. MPI.	
1.13 Migrace planet v plynném disku	38
Typ II. Typ I. Turbulentní viskozita.	
2 Hydrodynamika srážek asteroidů	43
2.1 Lagrangeův popis	43
2.2 Elasticita, plasticita a praskliny	44
2.3 Metoda hlazená částicová (SPH)	46
2.4 Alternativní vyjádření prostorových derivací	48
2.5 Kernel čili hladící funkce	49
2.6 Umělá viskozita	50
2.7 Metoda k -d stromu	50
2.8 Multipólový rozvoj	53
2.9 Počáteční a okrajové podmínky	54
2.10 Fragmentační fáze	55

2.11	Reakumulační fáze	55
2.12	Škálovací zákon pro terče	58
3	Rovnice vedení tepla	61
3.1	Fourierovský rozvoj zářivého toku	61
3.2	Analytické jednorozměrné řešení	62
3.3	Metoda konečných diferencí (FDM)	64
	Explicitní schéma. Implicitní schéma. Hybridní schéma.	
3.4	Slabá formulace problému	67
3.5	Metoda konečných prvků (FEM)	69
3.6	Implementace v programu FreeFem++	70
	Triangulace. Radiační síla.	
3.7	Nekonvexní stínění, tepelný a rozptýlený tok	72
	Balvany na Itokawě.	
4	Elasticita	77
4.1	Hookeův zákon a Lamého rovnice	77
4.2	Metoda konečných prvků (FEM)	78
4.3	Implementace v programu FreeFem++	79
4.4	Testovací příklad s jednoduchým nosníkem	80
4.5	Výpočet deformace montáže	82
5	Atmosféry a oceány	85
5.1	Hydrostatická rovnováha	86
5.2	Cyklostrofické proudění	87
5.3	Geostrofické proudění	88
5.4	Rossbyho vlny	90
5.5	Termální vítr ve výšce	92
5.6	Ekmanova spirála v hloubce	92
5.7	Semiempirická konvekce	94
	Adiabatický gradient teploty. Bruntova–Väisäläova frekvence.	
5.8	Kolmogorovovo spektrum turbulence	97
6	Radiační bilance	101
6.1	Skleníkový jev	101
6.2	Opacita vzduchu	103
6.3	Emise CO ₂	106
6.4	Globální oteplování	107

7	Přenos záření	109
7.1	Elementární procesy	110
7.2	Elementární přenosy	112
	LTE. Non-LTE.	
7.3	Opacita plynu	116
	Dvouhadinový atom. Profil čáry.	
7.4	Opacita prachu	117
	Geometrická absorpce. Geometrický rozptyl.	
	Rayleighova absorpce. Rayleighův rozptyl.	
7.5	Rovnice přenosu a statistické rovnováhy	119
7.6	Metoda Monte Carlo	120
	Λ iterace. Akcelerovaná Λ iterace. Úniková metoda.	
	Sobolevova metoda.	
7.7	Příklady interpretace spektra	124
7.8	Mezihvězdná extinkce	125
7.9	Monochromatický a integrální popis	127
8	Geochemie a radiometrie	131
8.1	Geochemické rovnice	132
8.2	Diferenciace Země	135
8.3	Předměsíční impakt	135
8.4	Variabilní rozdělování	138
8.5	Izotopická dichotomie NC a CC	139
8.6	Systém U/Pb	142
9	Chemie fázových přeměn	145
9.1	Termodynamické potenciály	145
	Chemický potenciál.	
9.2	Gibbsova–Duhemova rovnice	147
9.3	Clausiova–Clapeyronova rovnice	147
9.4	Popis chemické reakce	149
9.5	Popis fázové přeměny	151
9.6	Depoziční sekvence	152
9.7	Bowenovo reakční schéma	153
10	Kosmologie homogenního izotropního vesmíru	159
10.1	Kosmologický princip	159
10.2	Einsteinovy rovnice pole	159
10.3	Metrika FLRW	161
10.4	Fridmannovy rovnice	162

10.5	Kosmologické parametry	167
10.6	Teplota záření	171
10.7	Co je zdrojem temné látky?	172
10.8	Co je zdrojem temné energie?	174
11	První hvězdy	177
11.1	Způsob pozorování	177
11.2	Simulace popisující vznik	179
11.3	Reionizace vesmíru	183
11.4	Simulace explozí supernov	184
11.5	Párově nestabilní supernovy	187
12	Druhé hvězdy	191
12.1	Rovnice kontinuity	191
12.2	Hydrostatická rovnováha	192
12.3	Energetická rovnováha	193
12.4	Přenos energie	194
	Přenos zářením. Adiabatická konvekce. Semiempirická konvekce. Semikonvekce. Termohalinní cirkulace. Konvektivní přestřelování.	
12.5	Stavová rovnice a Sahovy rovnice	199
12.6	Okrajové podmínky v centru	199
12.7	Okrajové podmínky na povrchu	199
	Šedá atmosféra. Hydrostatická rovnováha.	
12.8	Vývojové rovnice stavby	202
12.9	Počáteční podmínky	203
12.10	Numerické řešení metodou FVM	204
12.11	Značení vývojových stadií	205
12.12	Vývojové procesy	206
12.13	Vývoj hvězd různých hmotností	208
A	Skaláry, vektory a operátory	217
	Skalární součin. Vektorový součin. Operátor gradientu. Operátor divergence. Operátor rotace. Křivočaré souřadnice. Sférické souřadnice.	
B	Tenzorový počet	221
	Diáda. Elipsoid. Operátor divergence. Další příklady. Kontravariantní a kovariantní složky. Inverzní tenzor. Kovariantní derivace.	

C	Co když zapomenu...	227
C.1	Co když zapomenu Schrödingera?	227
C.2	Co když zapomenu Plancka?	228
C.3	Co když zapomenu Sahu?	229
C.4	Co když zapomenu Maxwella?	230
C.5	Co když zapomenu indukovat?	233
C.6	Co když zapomenu Lorentze?	234
C.7	Co když zapomenu Einsteina?	236
C.8	Co když zapomenu geodetiku?	239
C.9	Co když zapomenu Schwarzschilda?	240
C.10	Co když zapomenu Laplace?	241
C.11	Co když zapomenu Lanea–Emdena?	244
C.12	Co když zapomenu Gausse?	245
C.13	Co když zapomenu Lagrange?	246
C.14	Co když zapomenu Tisseranda?	247
	Rejstřík	249
	Literatura	257

Slovo úvodem

Hydrodynamika má v astronomii výsadní postavení. Dovoluje nám fyzikálně popísat jevy v jejich složitosti a úplnosti, a umožňuje nám tak proniknout k podstatě věci. Pokud nás jako nejzazší cíl zajímá vznik planety Země — který ovšem úzce souvisí se vznikem a vývojem centrální hvězdy, ostatních planet, asteroidů i komet, jejich vzájemnými srážkami, interakcemi s meziplanetárním plynem, prachem, zářením, atd. — bez hydrodynamiky se prostě neobejdeme.

Učebnice Hydrodynamika v astronomii je určitým pokračováním Fyziky sluneční soustavy (vydané v roce 2013), ale zde se zabýváme obtížnějšími problémy a pokročilejšími metodami. Základem jsou pojednání o protoplanetárním disku, srážkách asteroidů nebo vedení tepla, což jsou úlohy, na nichž se můžeme dobře naučit eulerovskému i lagrangeovskému popisu, a také vícero numerickým metodám (FDM, FVM, FEM nebo SPH).

Zároveň rozšiřujeme učebnici Stavba a vývoj hvězd (vydanou v roce 2011). Nejenže o hvězdách pojednáváme jiným, obecnějším způsobem — diskutujeme vítr v atmosféře, přenos záření — ale pro popis prvních hvězd ve vesmíru potřebujeme znát i kosmologický kontext, abychom mohli hydrodynamiku aplikovat na těch největších měřítkách.

Uvědomme si již nyní, že nás čekají opravdu *zásadní* obtíže. Vyjádřeno čtyřmi slovy: i) turbulence, ii) nevratnost, iii) chaos a iv) stochasticita. Více slovy: hydrodynamické rovnice vykazují několik nevyhnutelných nestabilit, které se projevují jako turbulence. Procesy jako srážky těles jsou termodynamicky nevratné, čili rovnice nelze integrovat zpět v čase; měření počátečních podmínek v čase $t = 0$ — který ani neznáme *a priori* — je zhora nemožné. I v jednoduchých systémech N těles vzniká deterministický chaos, ovlivňující vývoj celého systému. A konečně, některé události jsou zřídkavé a buď nastanou, nebo ne; uvážit ovšem musíme obě možnosti.

Poděkování za spolupráci v posledních letech patří přinejmenším: Ondřeji Chrenko, Pavlovi Ševečkovi, Jakubovi Rozehnalovi, Davidovi Vokrouhlickému, Petrovi Harmančovi, Milošovi Bočkovi, Tomášovi Zemanovi, Tomášovi Turkovi, Zdenku Bardonovi, Josefu Ďurechovi, Josefu Hanušovi, Martinovi Lehkému. V této učebnici jsme uplatnili poznatky získané při řešení projektů Grantové agentury ČR (P209/13/01308S, P209/18/06083S) a Technologické agentury ČR (TA 03011171).

Označení veličin

Vzhledem k velikému počtu fyzikálních veličin, které jsou v knize použité, není jejich označení bohužel unikátní. V jednotlivých kapitolách je ovšem význam patrný z kontextu. Kromě veličiny je v tabulce uvedena jednotka v soustavě SI, i když v praxi může být obvyklá jednotka jiná (cgs, arcsec, pc, apod.).

α	1	parametr konvekce
α	1	viskózní parametr
α	J kg^{-1}	měrná energie
α_{av}	1	parametr umělé viskozity
α_{sc}	1	parametr semikonvekce
α_{th}	1	parametr termohalinní cirkulace
α_V	1	koefficient teplotní roztažnosti
β	$\text{rad s}^{-1} \text{ m}^{-1}$	derivace Coriolisova parametru
β_{av}	1	parametr umělé viskozity
γ	m s^{-1}	systemická rychlost
Γ	1	adiabatický index
Γ	1	hranice oblasti
Γ^i_{kl}	m^{-1}	Christoffelův symbol
δ	1	Diracova distribuce
δ_{ij}	1	Kroneckerovo delta
Δt	s	časový krok
Δx	m	prostorový krok
ϵ	1	deformace
ϵ	1	emisivita
ϵ	Pa	aktivační mez
ϵ	W kg^{-1}	měrný výkon
ϵ_ν	W kg^{-1}	měrný výkon neutrin
ϵ_{nuc}	W kg^{-1}	měrný výkon termonukleárních reakcí
ϵ_{ij}	s^{-1}	tenzor rychlosti deformace
ϵ_{rs}	1	tenzor deformace
ϵ_{ijk}	1	Leviho–Civitův symbol
η	1	parametr excentricity
η_{ik}		Minkowskiho tenzor
θ	rad	úhel od osy
κ	$\text{m}^2 \text{ kg}^{-1}$	integrální opacita
κ_ν	$\text{m}^2 \text{ kg}^{-1}$	monochromatická opacita
κ_λ	$\text{m}^2 \text{ kg}^{-1}$	monochromatická opacita
$\kappa_\lambda^{\text{abs}}$	$\text{m}^2 \text{ kg}^{-1}$	monochromatická opacita pro absorpci
$\kappa_\lambda^{\text{sca}}$	$\text{m}^2 \text{ kg}^{-1}$	monochromatická opacita pro rozptyl

κ_P	$\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$	Planckova opacita
κ_R	$\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$	Rosselandova opacita
λ	m	vlnová délka
λ	rad	pravá délka
λ	Pa	Laméova konstanta
$\bar{\lambda}_0$	rad	střední délka epochy
λ_{lim}	1	limiter toku
Λ	m^{-2}	kosmologická konstanta
Λ		operátor Λ iterací
μ	1	střední molekulová hmotnost
μ	1	směrový kosinus
μ	1	funkce stínění
μ	Pa	Laméova konstanta
μ	$\text{m}^3 \text{s}^{-2}$	součin Gm
μ_1	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$	dynamická viskozita
μ_2	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$	dynamická objemová viskozita
μ_{vac}	N A^{-2}	permeabilita vakua
ν	Hz	frekvence
ν	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	kinematická viskozita
ν	1	funkce viditelnosti
ν	1	Poissonův poměr
π	1	Ludolfovo číslo
ϖ	rad	délka pericentra
Π_{ij}	$\text{m}^5 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$	umělá viskozita
ρ	kg m^{-3}	hustota
ρ_c	kg m^{-3}	kritická hustota
ρ_d	kg m^{-3}	hustota prachu
ρ_m	kg m^{-3}	hustota hmoty
ρ_{rel}	kg m^{-3}	hustota záření a neutrin
ρ_Λ	kg m^{-3}	hustota temné energie
ρ_S	kg m^{-3}	hustota částic
ρ_Q	C m^{-3}	nábojová hustota
σ	Pa	napětí
σ	kg m^{-3}	plošná hustota
σ_0	$\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$	elektrická vodivost
σ_{SB}	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$	Stefanova–Boltzmannova konstanta
σ_{ij}	Pa	tenzor napětí
τ	s	časová škála
τ	1	optická tloušťka
τ_ν	1	monochromatická optická tloušťka
ϕ	rad	azimutální úhel
ϕ	1	konformní faktor
ϕ_{12}	1	normalizovaný profil čáry
ϕ_G	1	Gaussův profil

ϕ_L	1	Lorentzův profil
φ	rad	zeměpisná šířka
Φ	W m^{-2}	zářivý tok
Φ	J kg^{-1}	gravitační potenciál
Φ_*	W m^{-2}	tok od hvězdy
Φ_{semi}	W m^{-2}	tok dle semiempirické teorie
Φ_{heat}	W m^{-2}	tepelný tok
Φ_{rad}	W m^{-2}	zářivý tok
χ	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	tepelná difuzivita
χ	J	ionizační energie
ψ	$\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$	rychlost disipace energie na jednotku hmoty
ω	rad s^{-1}	úhlová frekvence
ω	rad	argument pericentra
Ω	sr	prostorový úhel
Ω	1	oblast
Ω	1	relativní hustota
$\tilde{\Omega}$	rad	délka výstupného uzlu
$\tilde{\Omega}$	rad s^{-1}	úhlová rychlost
a	m	poloměr
a	m	velká poloosa
a	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-4}$	zářivá konstanta
a	1	expanzní funkce
a_J	m	velká poloosa Jupiteru
a_{vz}	m s^{-2}	vztlakové zrychlení
A	1	albedo
A_λ	mag	extinkce
A_{21}	s^{-1}	Einsteinův koeficient pro spontánní emisi
$\mathbf{a}$	m s^{-2}	zrychlení
$\mathbf{a}_C$	m s^{-2}	Coriolisovo zrychlení
$\mathbf{a}_g$	m s^{-2}	gravitační zrychlení
B_ν	$\text{W m}^{-2} \text{sr Hz}^{-1}$	Planckova funkce (pro intenzitu)
B_{12}	$\text{J}^{-1} \text{m}^3 \text{sr}$	Einsteinův koeficient pro absorpci
B_{21}	$\text{J}^{-1} \text{m}^3 \text{sr}$	Einsteinův koeficient pro stimulovanou emisi
$\mathbf{B}$	T [tesla]	magnetická indukce
c	m s^{-1}	rychlost světla ve vakuu
c_P	J kg K^{-1}	měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku
c_V	J kg K^{-1}	měrná tepelná kapacita při konstantním objemu
c_s	m s^{-1}	rychlost zvuku
C	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	měrná tepelná kapacita
C	1	součinitel odporu
C_{12}	s^{-1}	srážkový koeficient
d_L	m	luminozitní vzdálenost
d_{comoving}	m	souhybná vzdálenost

d_{proper}	m	vlastní vzdálenost
ds	m	element vzdálenosti
dN	1	diferenciální rozdělení
D	m	průměr
$\mathcal{D}$	1	poškození
e	1	excentricita
$\mathbf{e}$	1	bázový vektor
E	J	energie
E	Pa	Youngův modul pružnosti
E	rad	excentrická anomálie
E_{rad}	J kg^{-1}	měrná zářivá energie
$\mathcal{E}$	J kg^{-1}	měrná energie (vírů)
Ek	1	Ekmanovo číslo
$\mathbf{E}$	V m^{-1}	intenzita elektrického pole
f	rad	pravá anomálie
f	1	extinkční funkce
f_{12}	1	síla oscilátoru
f_{ov}	1	parametr přestřelování
f_C	rad s^{-1}	Coriolisův parametr
f_r	m s^{-2}	objemové zrychlení
F_j		j -tá rovnice stavby
$\mathcal{F}$	W m^{-2}	ozáření
$\mathcal{F}_n$	W m^{-2}	Fourierova transformace ozáření
$\mathbf{F}$	N	síla
g	1	statistická váha
g	m s^{-2}	tíhové zrychlení
g_{ik}		kovariantní metrický tenzor
g^{ik}		kontravariantní metrický tenzor
G	$\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$	gravitační konstanta
$\mathcal{G}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	složka z měrného momentu hybnosti
Gr	1	Grashofovo číslo
h	m	hladící délka
h	J s^{-1}	Planckova konstanta
$\hbar$	J s^{-1}	redukovaná Planckova konstanta
H	m	výšková škála
H	1	Heavisidova skoková funkce
H	W m^{-2}	první moment intenzity
H	s^{-1}	Hubblův parametr
H_P	m	tlaková škála
$\mathbf{H}$	W m^{-2}	první vektorový moment intenzity
$\mathcal{H}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	měrný moment hybnosti
i		komplexní jednotka
i		prostorový index
I	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$	integrální intenzita

I_λ	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{m}^{-1}$	monochromatická intenzita
I_ν	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$	monochromatická intenzita
I_a	m^4	kvadratický modul průřezu
I	1	jednotková matice
j		prostorový index
j_ν	$\text{W sr}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{kg}^{-1}$	emisní koeficient
j	A m^{-2}	proudová hustota
J	W m^{-2}	nultý moment intenzity
J_2	Pa^2	druhý moment deviátoru tenzoru napětí
J_ν	$\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$	nultý moment intenzity
J^μ	1	čtyřproud hmoty
J_{jk}		jakobián
k	cyklů m^{-1}	vlnové číslo
$\hat{k}$	1	směr
k_B	J K^{-1}	Boltzmannova konstanta
K	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	tepelná vodivost
K	W m^{-2}	druhý moment intenzity
K	m^{-2}	křivost
K	W m^{-2}	druhý tenzorový moment intenzity
k	cyklů m^{-1}	vlnový vektor
l	m	délka
ℓ	1	úhlový stupeň
ℓ	m	střední vlná dráha
ℓ	m	směšovací délka
L	m	délková škála
L	W	zářivý výkon
L_R	W	tok koulí o poloměru R
$\mathcal{L}$		diferenciální operátor
$\mathcal{L}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	měrný moment hybnosti kruhové dráhy
L	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$	moment hybnosti
m	kg	hmotnost
m_e	kg	hmotnost elektronu
m_p	kg	hmotnost protonu
m_H	kg	hmotnost atomu vodíku
M	rad	střední anomálie
M_R	kg	hmotnost koule o poloměru R
n	m^{-3}	koncentrace
n	rad s^{-1}	střední pohyb
n	m	normálová souřadnice
n_e	m^{-3}	koncentrace elektronů
n	1	normála
N	1	počet
N	Hz	Bruntova–Väisäläova frekvence
N_j	1	bázové funkce

$N(>x)$	1	kumulativní rozdělení
∇	m^{-1}	operátor gradientu (nabla)
∇_{ad}	1	adiabatický gradient
∇_{rad}	1	zářivý gradient
∇_{B}	1	Bruntův gradient
∇_{L}	1	Ledouxův gradient
o	m	obvod
p	1	pravděpodobnost
p_{esc}	1	pravděpodobnost úniku
P	s	perioda
P	Pa	tlak
P_{g}	Pa	tlak plynu
P_{rad}	Pa	tlak záření
Pr	1	Prandtlovo číslo
ρ	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$	hustota hybnosti
q	C	náboj
q	1	decelerační parametr
Q	J m^{-3}	měrné teplo
Q	1	počet volných elektronů na jeden atom
Q_D^*	J kg^{-1}	měrná energie pro rozpad
$\mathbf{r}$	m	polohový vektor
R	m	poloměr
R	m^{-2}	Ricciho skalár
R_{J}	m	Jeansova délka
R_V	1	limita extinkční funkce
$\mathcal{R}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$	poruchová funkce
R_{ik}	m^{-2}	Ricciho tenzor
R^i_{klm}	m^{-2}	Riemannův tenzor
Ra	1	Rayleighovo číslo
Re	1	Reynoldsovo číslo
Ri	1	Richardsonovo číslo
Ro	1	Rossbyho číslo
s	m	tangenciální souřadnice
$\mathbf{s}$	1	směr ke Slunci
S	m^{-2}	plocha
S_ν	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$	zdrojová funkce
$\mathbf{S}$	Pa	deviátor tenzoru napětí
t	s	čas
T	K	termodynamická teplota
T_{d}	K	teplota prachu
T_{eff}	K	efektivní teplota
$\mathcal{T}$	m s^{-2}	transverzální složka zrychlení
$\mathbf{T}$	N m	moment síly
T_{ij}		obecný tenzor

T_{ik}	J m^{-3}	kovariantní tenzor energie a hybnosti
T^{ik}	J m^{-3}	kontravariantní tenzor energie a hybnosti
u	K	teplota
u	m	posunutí
u	m s^{-1}	rychlost v tečné rovině
u	J m^{-3}	hustota energie záření
u_{eq}	K	rovnovážná teplota
u_G	m s^{-1}	rychlost geostrofického proudění
$\mathbf{u}$	m s^{-1}	rychlost (částic)
u^ν	m s^{-1}	čtyřrychlost
U	J kg^{-1}	vnitřní energie na jednotku hmoty
U	J m^{-3}	vnitřní energie na jednotku objemu
U	m s^{-1}	očekávaná rychlost
U_{cv}	J kg^{-1}	měrná energie po úplném vypaření
U_{iv}	J kg^{-1}	měrná energie na počátku vypařování
v	m s^{-1}	rychlost v tečné rovině
v_{esc}	m s^{-1}	úniková rychlost
v_G	m s^{-1}	rychlost geostrofického proudění
v_{imp}	m s^{-1}	impaktní rychlost
v_{kepl}	m s^{-1}	keplerovská rychlost
v_n	m s^{-1}	normálová rychlost
v_s	m s^{-1}	tangenciální rychlost
v_T	m s^{-1}	termální rychlost
v_{turb}	m s^{-1}	turbulentní rychlost
$\mathbf{v}$	m s^{-1}	rychlost
V	m^3	objem
$\mathcal{V}$	m s^{-1}	komplexní rychlost
w	m s^{-1}	rychlost v tečné rovině
W	J m^{-3}	práce
W	m^{-3}	kernel
W_i	1	testovací funkce
x_j^r	1	stupeň ionizace
X	1	abundance vodíku
X_j	1	abundance prvku j
X_i	1	stupeň ionizace
Y	1	abundance helia
Y	Pa	mez pevnosti
z	1	rudý posuv
z_{ion}	1	rudý posuv reionizace
Z	1	metallicita
Z_j^r	1	partiční suma

⊕

Země

⊙

Slunce

☾
*

Měsíc
hvězda

1 Hydrodynamika protoplanetárního disku

Majíc určitou představu, že ve vesmíru existují hvězdy a okolo nich plynoprachové disky (Brož a Šolc 2013), zkonstruujeme zde poměrně úplný fyzikální model tohoto disku. Budeme přitom postupovat „opačně než kolega Komenský“, čili od složitějšího k jednoduchému. Sepíšeme nejprve všechny relevantní rovnice, abychom je viděli v celé kráse, a teprve poté budeme diskutovat jednoduché situace.

Disk si budeme představovat jako *spojité prostředí*, což je značné, nicméně obvyklé zjednodušení plynu, respektive plazmatu (obsahujícího ionty, elektrony i neutrální atomy a molekuly). Umožní nám to pro fyzikální veličiny používat diferencovatelné spojité funkce.

1.1 Magnetohydrodynamika s přenosem záření, Eulerův popis

Pro popis zvolíme Eulerův formalismus, tzn. statického pozorovatele, který sleduje proudění plynu okolo. Fyzikální zákony, které nám popisují vývoj hustoty ρ disku, rychlosti $\mathbf{v}$ atd. od nějakého — zatím neznámého — počátečního stavu, jsou následující. Rovnice kontinuity (neboli zákon zachování hmoty, např. v jednotkách $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$):¹

$$\overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho}^{\text{derivace } f(\mathbf{r}, t)} = \overbrace{-\rho \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{expanze}}, \quad (1)$$

Navierova–Stokesova rovnice pro tekutiny (též pohybová, m s^{-2}):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}^{\text{konvekce}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \overbrace{\nabla \Phi}^{\text{gravitace}} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{\mu_{\text{vac}}} \overbrace{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}^{\text{Lorentz}} + \frac{1}{\rho} \overbrace{[\nabla \cdot \mu_1 \nabla \mathbf{v} + \nabla (\mu_2 + \frac{1}{3} \mu_1) \nabla \cdot \mathbf{v}]}^{\text{viskozita}}, \quad (2)$$

rovnice tepelné rovnováhy (1. věta termodynamická, $\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}$):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla U}^{\text{konvekce}} = -\overbrace{U \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{expanze}} - \overbrace{P \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{práce}} - \overbrace{\kappa_P \rho c a T^4}^{\text{emise}} + \overbrace{\kappa_P \rho c E_{\text{rad}}}_{\text{absorpce}} - \overbrace{\nabla \cdot F_{\star} \hat{\mathbf{r}}}_{\text{ozáření}} + \overbrace{\nabla \cdot K \nabla T}_{\text{difuze}}, \quad (3)$$

¹ pro připomenutí, operátor gradientu jest $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, divergence $\nabla \cdot$ (tj. skalární součin), rotace $\nabla \times$ (vektorový součin); mějme na paměti jejich české významy: stoupání, rozbíhavost a stáčení, jež mohou pochopení rovnic napomoci; viz též dodatek A

rovnice přenosu záření ($\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}$):²

$$\frac{\partial E_{\text{rad}}}{\partial t} = \overbrace{\nabla \cdot \frac{c \lambda_{\text{lim}}}{\kappa_{\text{R}} \rho} \nabla E_{\text{rad}}}^{\text{difuze}} + \overbrace{\kappa_{\text{P}} \rho c a T^4}^{\text{emise}} - \overbrace{\kappa_{\text{P}} \rho c E_{\text{rad}}}^{\text{absorpce}}, \quad (4)$$

indukční rovnice (T s^{-1}):³

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \overbrace{\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}^{\text{advekce}} + \overbrace{\nabla \cdot \eta_{\text{mag}} \nabla \mathbf{B}}^{\text{difuze}}, \quad (5)$$

Poissonova rovnice ($\text{J kg}^{-1} \text{m}^{-2}$):

$$\nabla \cdot \nabla \Phi_{\text{disk}} = 4\pi G \rho, \quad \Phi = -\frac{GM_{\star}}{r} + \Phi_{\text{planet}} + \Phi_{\text{disk}}, \quad (6)$$

stavová rovnice pro ideální plyn (Pa):

$$P = (\Gamma - 1)U = \frac{\rho}{\mu m_{\text{H}}} kT, \quad (7)$$

rovnice pro tok záření od hvězdy (včetně zeslabování opacitou prachu a plynu; $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$):

$$F_{\star} = \int_{\omega} \int_{\nu} B_{\nu}(T_{\star}) \left(\frac{R_{\star}}{r} \right)^2 e^{-\tau_{\nu}} d\nu d\omega, \quad \tau_{\nu} = \int_{R_{\star}}^r \kappa_{\nu} \rho dr. \quad (8)$$

Značení veličin je standardní: t čas, $\mathbf{r}$ polohový vektor, ρ hustota, $\mathbf{v}$ rychlost, U vnitřní energie plynu (na jednotku objemu), E_{rad} hustota energie záření, $\mathbf{B}$ magnetické pole, Φ gravitační potenciál, P tlak, T termodynamická teplota, $F_{\star}$ zářivý tok (od hvězdy), μ_1 dynamická (první) viskozita, μ_2 dynamická objemová viskozita, κ_{P} Planckova opacita, κ_{R} Rosselandova opacita, a radiační konstanta, c rychlost světla, K tepelná vodivost, λ_{lim} limiter toku (číslo $\frac{1}{3}$ až 0), η_{mag} magnetická difuzivita (nepřímě úměrná vodivosti σ_0 a magnetické permeabilitě μ_{vac}), G gravitační konstanta, Γ adiabatický index, μ střední molekulová hmotnost plynu, m_{H} hmotnost atomu vodíku, k Boltzmannova konstanta, B_{ν} Planckova funkce (pro intenzitu), ν frekvence, ω prostorový úhel, $T_{\star}$ efektivní teplota hvězdy, $R_{\star}$ její poloměr, τ_{ν} optická tloušťka, κ_{ν} monochromatická opacita.

Jedná se o soustavu 10 nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu (plus 3 algebraických), jež obsahují 13 neznámých funkcí (skalárních): $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $U(\mathbf{r}, t)$, $E_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$, $P(\mathbf{r}, t)$, $T(\mathbf{r}, t)$, $F_{\star}(\mathbf{r}, t)$; které jsou závislé

² v difuzní aproximaci omezené tokem záření (FLD; Levermore a Pomraning 1981)

³ zahrnující Maxwellovy rovnice a Ohmův zákon pro kvazineutrální plazma

na 4 nezávislých veličinách: $\mathbf{r}$, t . Dále zde máme volné parametry: $M_\star$, $R_\star$, $T_\star$, M_{planet} , μ_1 , μ_2 , η_{mag} , μ , Γ ; a dané funkce (složitě, ale dané): $\kappa_P(\rho, T)$, $\kappa_R(\rho, T)$, $\kappa_\nu(\rho, T)$, $\lambda_{\text{lim}}(E_{\text{rad}}, \nabla E_{\text{rad}})$, $\tau_\nu(\mathbf{r}, \kappa_\nu, \rho)$. Soustavu je obvyklé označovat zkratkou MHD.

K jednotlivým rovnicím si dovolíme několik praktických poznámek. Rovnici (1) je možno rozumět intuitivně: mějme vlevo hustotu velkou a vpravo nulovou. Pokud vektory rychlosti směřují zleva doprava, budeme mít za chvíli vpravo nějakou látku (a vlevo nic, respektive to, co bylo vlevo od leva). Kladná rozbíhavost rychlostí $\nabla \cdot \mathbf{v}$ by přitom odpovídala růstu (elementárního) objemu dV , čili zředění a poklesu hustoty ρ .

V rovnici (2) vystupuje na pravé straně zejména gradient tlaku ∇P , neboli makroskopický projev elektromagnetických sil mezi mikroskopickými částicemi plynu. Představme si například, že vlevo máme vyšší tlak, vpravo nižší, tudíž na ploše rozhraní jsou dvě různě velké tlakové síly opačného směru, které způsobují zrychlení $-\frac{1}{\rho} \nabla P$.

Lorentzův člen odpovídá klasickému vztahu $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, kde ovšem obecně $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{nábojů}} \neq \mathbf{v}_{\text{plynu}}$! V plazmatu je makroskopické elektrické pole $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ a hustotu proudu $\mathbf{j} = \rho_Q \mathbf{v}$ lze vyjádřit z Ampérova zákona $\mu_{\text{vac}} \mathbf{j} \doteq \nabla \times \mathbf{B}$.

Viskózní člen se zde objevuje proto, že mezi vrstvami tekutiny proudícími různými rychlostmi vznikají třecí síly; síla na jednotku plochy se označuje jako *napětí* (s jednotkou Pascal). Pro obvyklé (newtonovské) tekutiny je přitom tření úměrné rozdílu rychlostí, čili $\mu_1 \nabla \mathbf{v}$. Napětí od vrstvy horní má však opačný směr než od dolní; teprve když se jejich velikost mění (tzn. nenulovou 2. derivaci rychlosti), vzniká zrychlení $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mu_1 \nabla \mathbf{v}$.

Rovnice (3) jest obdobou (1), jen zde namísto hustoty hmoty ρ vystupuje hustota energie U . Pak jsme museli dle 1. věty termodynamické ($dU = -dW + dQ$) připsat mechanickou práci vykonanou plynem ($-PdV$) na úkor U a všechny zdroje tepla.

Rovnice (4) Skutečnost, že při emisi záření hraje roli opacita, se může zdát podezřelá, ale to je způsobeno skutečností, že emisní koeficient je za předpokladu lokální termodynamické rovnováhy dán Kirchhoffovým zákonem, $j_\nu = \kappa_\nu B_\nu$. V popisu středovaném přes všechny frekvence se používá opacita buď Planckova, tzn. středovaná přes hustotu zářivé energie, nebo Rosselandova, středovaná přes zářivý tok, podle toho, jaký jev právě popisujeme.

Tok tepla je podle Fourierova zákona úměrný gradientu teploty, $\vec{\Phi}_{\text{heat}} = -K \nabla T$, neboť teplo teče z místa s vyšší teplotou do místa s nižší teplotou. Pokud se tok navíc rozbíhá ($\nabla \cdot \vec{\Phi}_{\text{heat}}$ je kladná), děje se tak na úkor vnitřní energie U , proto je výsledné znaménko členu v (3) +. Toto platí obecněji pro difuzi čehokoliv, nejen tepla, ale též záření, částic, magnetického pole. Kdybychom chtěli, lze ze (3) odvodit klasickou rovnici vedení tepla. Pro statickou pevnou látku by totiž bylo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\rho = \text{konst.}$ (jde pak o parametr), též $V = \text{konst.}$ Stačilo by psát $\frac{\partial U}{\partial t} = K \nabla^2 T$ a použít jinou stavovou rovnici, $U = \rho c_V T$.

V rovnici (4) není advekce, protože záření není přenášeno plynem v podobě E_{rad} , nýbrž prostřednictvím U . Emise a absorpce jsou zde pochopitelně s opačným znaménkem než v rovnici (3), která se týká plynu.

Gravitační potenciál v rovnici (6) je zaveden tak, že zrychlení $\mathbf{a}_g = -\nabla\Phi$.

Uvědomme si, že výše uvedené rovnice jsou *velmi obecné*! S výjimkou kvantovky a relativity v sobě zahrnují (téměř) celou klasickou fyziku, popisující většinu jevů v našem okolí i ve vesmíru. Nicméně i tak musíme být obezřetní, protože některé členy jsou platné pouze ve stavu (lokální) termodynamické rovnováhy.

1.2 Vliv částic a dalších fyzikálních jevů

Při numerickém řešení rovnic máme vždy omezené rozlišení, což si obvykle vynucuje odlišení „malých“ pevných částic (prachu, balvanů, planetesimál, planet) od plynu (tzn. spojitého prostředí).

Občas musíme přidat další rovnice, respektive členy v rovnicích, abychom postihli „méně důležité“ fyzikální jevy, které však mohou být v dané situaci (pro vysvětlení určitého pozorování) zcela zásadní, například:

0. neinerciální členy, pokud bychom pracovali nějaké v neinerciální souřadnicové soustavě, například rotující úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$:

$$\mathbf{a}_{\text{neinerciální}} = -\overbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r})}^{\text{odstředivé}} - \overbrace{2\vec{\Omega} \times \mathbf{v}}^{\text{Coriolis}}, \quad (9)$$

kde první člen je opravdu $-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) = \vec{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \vec{\Omega}) = \mathbf{r}\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} - \vec{\Omega}\vec{\Omega} \cdot \mathbf{r} = \Omega^2 \mathbf{r}_\perp$ podle vektorové identity „bác mínus cáb“ (331);

1. pohyb částic, jejich vzájemná gravitace:

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i \neq j} -\frac{GM_i}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}, \quad (10)$$

pro jejíž řešení je dobré použít symplektický integrátor. Pokud by částic bylo obrovské množství, zavádějí se sledovací částice, reprezentující vždy učitou skupinu částic na podobných trajektoriích;

2. vazba částice $\leftrightarrow$ plyn, skrzevá gravitaci $\mathbf{a}_{\text{částice}} \doteq \int_{\text{disk}} -\frac{GdM}{r^3} \mathbf{r}$, a aerodynamické tření dle Epsteinova nebo Stokesova zákona:

$$\mathbf{a}_{\text{Epstein}} = -S\rho v_T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad \text{pro } D \ll \ell, \quad (11)$$

$$\mathbf{a}_{\text{Stokes}} = -\frac{1}{2}CS\rho|\mathbf{u} - \mathbf{v}|(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad \text{pro } D \gg \ell, \quad (12)$$

kde S označuje průřez částice, D průměr, C koeficient odporu, v_T termální rychlost (plynu), $\mathbf{u}$ rychlost částice, $\mathbf{v}$ rychlost plynu a ℓ střední volnou dráhu molekul (plynu);

3. vzájemné srážky částic, příslušná fragmentace nebo akrece, popsané relacemi $\frac{dM}{dt}(M)$, $\frac{d\mathbf{v}}{dt}(M)$, používají se simulace Monte–Carlo nebo samostatná hydrodynamika;
4. tlak záření $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$, $P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}$;
5. radiační zrychlení, $\mathbf{a}_{\text{rad}} \doteq \frac{\kappa_{\text{R}}}{c}\vec{\Phi}_{\text{rad}}$, přičemž tok už známe, $\vec{\Phi}_{\text{rad}} = \frac{c\lambda_{\text{lim}}}{\kappa_{\text{R}}\rho}\nabla E_{\text{rad}}$;
6. viskózní ohřev, čili $\mathbf{S} \cdot \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$, kde tenzor napětí $\mathbf{S}$ je týž jako ve viskózním členu $\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{S}$;
7. rezistivní ohřev, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \doteq \frac{1}{\sigma}\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \doteq \frac{\mu_{\text{vac}}^2}{\sigma}(\nabla \times \mathbf{B})^2$, dle Ohmova a Ampérova zákona, kde $\mathbf{j}$ označuje hustotu proudu a $\mathbf{E}$ elektrické pole;
8. anizotropní vedení tepla a jeho saturace, $\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{heat}}$, $\mathbf{F}_{\text{heat}} = \frac{F_{\text{sat}}}{F_{\text{sat}} + |\mathbf{F}|} \mathbf{F}$, $\mathbf{F} = K_{\parallel} \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla T) + K_{\perp}[\nabla T - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla T)]$, $F_{\text{sat}} = 5\phi\rho c_s^3$, kde $\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$, $c_s = \sqrt{\Gamma \frac{\partial P}{\partial \rho}}$ označuje rychlost zvuku a $\phi < 1$ je volný parametr;
9. radiativní rozpad, $\rho\epsilon_{\text{decay}}(X, Y, Z)$, se změnami abundancí $\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_k \frac{\epsilon_k}{\alpha_k}$;
10. částicová difuze, $\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot D\nabla n$, $D = \frac{1}{3}\ell v_T$, kde n označuje koncentraci, D difuzní koeficient, ℓ střední volnou dráhu, v_T termální rychlost;
11. fázové přeměny, depozice plynu a sublimace pevných částic;
12. chemické reakce, případně jejich katalyzace zářením nebo povrchy;
13. Hallův jev, čili člen $-\nabla \times (\frac{1}{en_e}\mathbf{j} \times \mathbf{B})$ v indukční rovnici (5) (Armitage 2010);
14. ambipolární difuze, $+\nabla \times (\frac{1}{\gamma\rho_i\rho}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})$ tamtéž, v řidším prostředí, tj. při nižší frekvenci srážek, se neutrální částice mohou pohybovat systematicky jinak než ionty, což se projeví jako tření, skrze koeficient $\gamma \equiv \langle \sigma v_i \rangle / (m_i + m_n)$.
15. změny ionizace a rekombinace, popsané rovnovážnou Sahovou rovnicí:

$$\frac{X_i^2}{1 - X_i} n_e = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi}{kT}}, \quad (13)$$

kde X_i označuje stupeň ionizace, a χ ionizační energii atomu. Nepřímo je ovlivněna i stavová rovnice prostřednictvím $\mu(\rho, T, X, Y, Z)$ a tamtéž bychom měli správně zohlednit *degeneraci* elektronového plynu faktorem $\lambda_{\text{deg}}(\rho, T)$;

16. termonukleární reakce včetně ztrát energie neutrinu, $\rho\epsilon_{\text{nuc}}(\rho, T, X, Y, Z) - \rho\epsilon_{\nu}$, a odpovídající rovnice pro změny chemického složení (abundancí X vodíku, Y helia a Z těžších prvků, resp. jednotlivých izotopů):⁴

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \sum_i \frac{\epsilon_i}{\alpha_i}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_j \frac{\epsilon_j}{\alpha_j}, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_k \frac{\epsilon_k}{\alpha_k}. \quad (14)$$

⁴ Po zahrnutí posledně jmenovaných jevů již můžeme počítat *celý* vývoj hvězd, včetně jedno-rozměrné hydrostatické aproximace, konvekce, hvězdného větru, trojrozměrné struktury, rotace, magnetického dynama, případných vnějších vlivů ($\Phi_{\text{dvoj*}}$, $F_{\text{dvoj*}}$). Na druhou stranu je nutné připustit, že některé jevy, například erupce, rekonexe, výboje, resp. pohyb svazků částic, jsou natolik *nerovnovážné*, že předpoklad LTE bychom museli opustit a mj. bychom nesměli vůbec používat teplotu T , nýbrž „divoké“ distribuční funkce jednotlivých veličin.

Čtenář se přečtením tohoto řádku vzdává jakéhokoliv nároku na úplnost výčtu...

1.3 Vztah Eulerova a Lagrangeova formalismu

Alternativně bychom mohli použít Lagrangeův formalismus, tzn. souhybného pozorovatele, který se líně nechává unášet proudící tekutinou. Neznámé jsou pak *trajektorie* (nekonečného množství) bodů kontinua $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, respektive $\rho(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$, apod. pro další veličiny, všechny závislé na čase t a „indexované“ například počátečními polohami $\mathbf{r}_0$ (v čase $t = 0$).

Namísto parciálních derivací $\frac{\partial}{\partial t}$ a vlastně celých levých stran bychom užili totálních $\frac{d}{dt}$, jejichž vztah plyne z derivace funkce $\phi(\mathbf{r}, t)$ dvou proměnných:

$$\overbrace{\frac{d\phi}{dt}}^{\text{Lagrange}} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \overbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}^{v_i} = \overbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi}^{\text{Euler}}. \quad (15)$$

Polohy $\mathbf{r}$ lze posléze spočíst z $\mathbf{v}$ jako:

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) dt \quad (16)$$

V dalším zůstaneme u našeho Eulera, nicméně je dobré tušit, že existují kódy využívající Lagrange.⁵ Výhodou Lagrangeova popisu mj. je, že nemusíme předem konstruovat (zbytečně rozlehlou) fixní síť bodů, zvláště když předem nevíme, kam se body kontinua dostanou. Opačně řečeno, výhodou Eulerova popisu je, pokud nás eminentně zajímá jen omezená oblast prostoru, nepočítáme zbytečně trajektorie, které stejně skončí mimo ni.

1.4 Kelvinova–Helmholtzova nestabilita

Řešení hydrodynamických rovnic vykazují několik zásadních nestabilit, z nichž nejzákladnější je Kelvinova–Helmholtzova. Vzniká již ve velmi jednoduché situaci⁶: dvě vrstvy nestlačitelné kapaliny, jedna proudící tam a druhá zpět, bez gravitace. Z celé soustavy (1) až (6) nám zůstanou jen dvě „očesané“ rovnice:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (18)$$

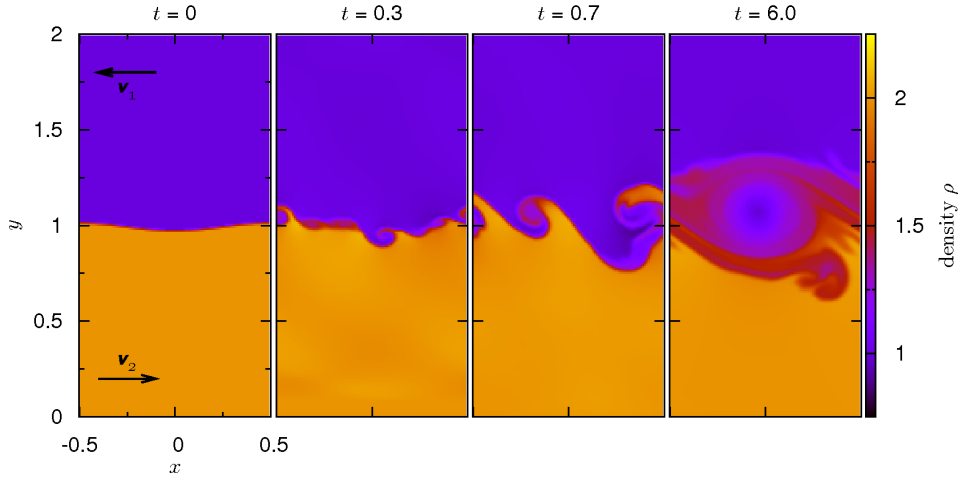
Jak vidíme z numerického řešení (obr. 1), jedná se o významný zdroj turbulence neboli vírů. Kvalitativně je možno říci, že sledujeme-li proudnice ve směru $-x$, tak

⁵ Aby se Euler a Lagrange nepletli, je potřeba se podívat na jejich podobizny. Lagrange se zdá hubenější a asketičtější, nebude mu tedy dělat problém jít sledovat trajektorie. Naopak Euler je na první pohled „tlustší a línější“, ten se za žádnou cenu nikam se nepohne.

⁶ Pozor na implikaci! Neznamená to, že nevzniká ve složitějších situacích.

nad každou vlnkou jsou zhuštěné (jako nad křídlem), kvůli kontinuitě je rychlost v_x zápornější a tlak P menší, neboť jediné, co mohlo tekutinu urychlit, je $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ (tj. ostatně v naprostém souladu s Bernoulliho rovnicí). Pod vlnkou je to přesně naopak, čímž vzniká $\frac{\partial P}{\partial y} < 0$, v_y kladné a vlnka roste. Není možno nevědět, že vlny na moři jsou způsobené právě tímto jevem.

U každé nestability bychom si měli také uvědomit, co omezuje její růst. V tomto případě je samoomezující, velikost největšího víru je dána počátečními podmínkami a případnými dalšími parametry problému (viskozitou, povrchovým napětím); zároveň těžko může být větší než okraj výpočetní domény.



Obr. 1 — Vývoj Kelvinovy–Helmholtzovy nestability z počáteční malé perturbace rozhraní. Počáteční podmínky (v bezrozměrných jednotkách): $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, $P_1 = P_2 = 10$, $\mathbf{v}_1 = (-1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (+1, 0)$. Okrajové podmínky: vlevo a vpravo periodické, nahoře a dole $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. Stavová rovnice v tomto případě odpovídala ideálnímu plynu. Výpočet byl proveden programem Pluto (Mignone aj. 2007) ve dvou rozměrech, v síti 100×200 bodů.

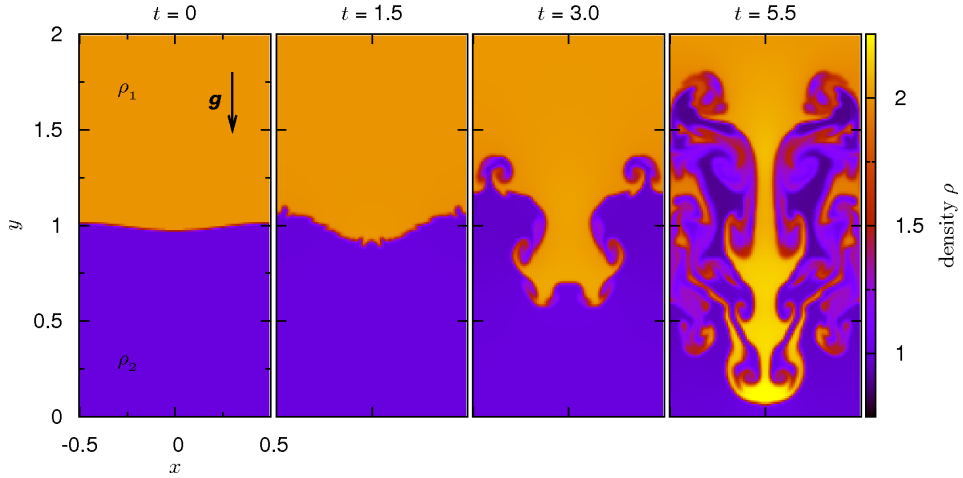
Vertikální stříhová nestabilita. V protoplanetárním disku se rozvíjí zejména ve svislém směru, neboť větší z znamená trochu větší $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ od Slunce, čili menší keplerovskou rychlost $v_{\text{kepl}} = \sqrt{GM_*/r}$ než v základní rovině, což vede ke stříhu; proto se jinými slovy nazývá vertikální stříhová nestabilita (angl. VSI).

1.5 Rayleighova–Taylorova nestabilita

Pro vznik druhé, Rayleighovy–Taylorovy nestability je třeba: hustší nestlačitelná kapalina nahoře, řidší dole, to vše v gravitačním poli. Příslušné rovnice jsou:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi. \quad (20)$$



Obr. 2 — Vývoj Rayleighovy–Taylorovy nestability z počáteční malé perturbace rozhraní. Protože dochází ke vzájemným pohybům tekutiny, nevyhnutelně se objeví i nestability Kelvinovy–Helmholtzovy. Počáteční podmínky: $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 1$, $\Phi = y$, resp. $\mathbf{g} = -\nabla\Phi = (0, -1)$, $P(y)$ odpovídá hydrostatické rovnováze, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = (0, 0)$. Okrajové podmínky: vlevo a vpravo periodické, nahoře a dole $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. Stavová rovnice odpovídá ideálnímu plynu. Výpočet programem Pluto ve dvou rozměrech, v síti 100×200 bodů.

Vývoji (obr. 2) je možno rozumět následovně: jde o stav s vyšší energií, který samovolně přejde do stavu s nižší energií a vyšší neuspořádaností (entropií). S ohledem na Archimédův zákon se tato nestabilita nazývá též *vztlaková*. Pokud bychom řešili zároveň tepelnou rovnováhu (3) a viděli bychom transport vnitřní energie, hovořili bychom o *konvekci*.

Při vývoji nestability RT vždy dochází ke vzájemným pohybům tekutin, čili se nevyhnutelně objeví i nestabilita KH. Obě nestability (kouřící komín) běžně kreslí děti v mateřské školce, rodiče jim pouze zatajili, oč se jedná.

Nestabilitu obvykle omezuje až hranice (resp. okraj domény). V atmosféře bývá vytvářena přirozeně teplotním zvrstvením či zvratem.

Baroklinická nestabilita. Jen trochu složitější variantou RT je nestabilita baroklinická (Klahr a Bodenheimer 2003, Lesur a Papaloizou 2010), ve které máme kromě kompresibilní rovnice kontinuity i difuzi vnitřní energie a nějaký ohřev:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi. \quad (22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla U = -U \nabla \cdot \mathbf{v} - P \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot K \nabla T - \nabla \cdot \Phi_* \hat{r}; \quad (23)$$

jedná se evidentně o termodynamický tepelný stroj, neustále pohánějící víření. V protoplanetárním disku je podkritická (lokální) baroklinická nestabilita (angl. SBI) patrně hlavním zdrojem turbulence.

Kvalitativně funguje takto: fluktuace posune bublinu plynu „nahoru“ (radiálně, proti $\mathbf{a}_g$), v okolí je (obvykle) nižší P_o , v bublině se vždy udržuje totéž $P_b = P_o$, nastává víceméně adiabatická expanze, při níž jak ρ_b , tak T_b klesají ($P \propto \rho T$). Pokud ale teplotní profil $T_o(r)$ klesá dostatečně strmě, například proto, že prostředí je mizerně průhledné (κ_ν velké), bývá $T_b > T_o$, $\rho_b < \rho_o$; profil je konvektivně nestabilní. Bublina je balón.

Nahoře se ovšem okolí pohybuje jinou rychlostí v_{kepl} , bublina se proto posouvá „horizontálně“, ve směru $-\hat{\phi}$. Zde je čas na difuzi vnitřní energie bubliny, která se odevzdá okolí, ρ_b , T_b klesnou na úroveň ρ_o , T_o . Protože si kontinuita a tlakový člen vynucují další pohyb, bublina padá zpět „dolu“, dochází k adiabatické kompresi, pohybu ve směru $\hat{\phi}$, a přijímání tepla z okolí, čímž se cyklus uzavírá.

V meteorologii se setkáváme s týmiž situacemi. V cyklónách nebo anticyklónách, roztočených díky spolupůsobení gradientu tlaku a Coriolisova zrychlení (viz Brož a Šolc 2013, str. 177), se chladný a teplý vzduch vyskytují takřka vedle sebe (rozhraní nazýváme fronty), přičemž jejich rozpad bývá způsoben právě baroklinickou nestabilitou, když chladný vzduch nateče pod teplý (říkáme, že nastala okluze).

1.6 Magneto–rotační nestabilita

Třetí nestabilita, magneto–rotační (Balbus a Hawley 1991, angl. MRI) vyžaduje přinejmenším toto nastavení: nestlačitelná kapalina, bez gravitace, diferenciální rotace, magnetické pole, bez difuze. Čili:

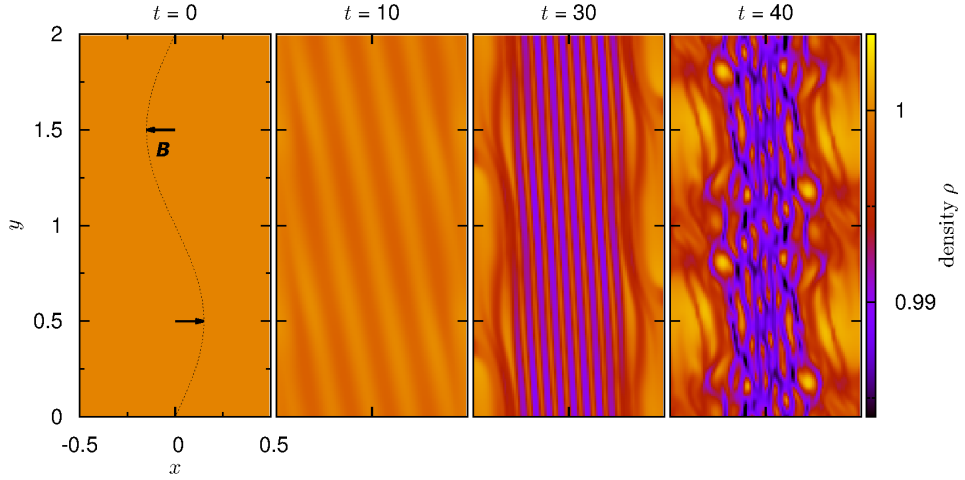
$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi_* + \frac{1}{\rho \mu_{\text{vac}}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26)$$

Základním principem je zamrznutí siločar v plazmatu a jejich navíjení v diferenciálně rotujícím prostředí (se stříhem rychlostí), čili zesilování slabých perturbací magnetického pole. Ostatně magnetické dynamo v nitru Slunce nebo Země je totéž. Rozvoj nestability je znázorněn na obr. 3. Podotkněme, že předpoklad „bez difuze“ nutně znamená nemalý stupeň ionizace látky, jinak by Lorentzův člen byl irelevantní. Dostatečný stupeň ionizace je v blízkosti Slunce, daleko od Slunce (i díky kosmickému záření), též na povrchu disku ozařovaného UV, ale není jisté, zda uprostřed. Tam může existovat *mrtvá zóna*, v níž MRI nefunguje a disk není (tak) turbulentní.

Nestabilitu rozvíjející se za výše uvedených podmínek omezuje až hranice (zde tloušťka disku) nebo difúzní člen, kdybychom ho měli. Pokud však dochází k am-



Obr. 3 — Vývoj magneto–rotační nestability z počáteční malé perturbace magnetického pole $\mathbf{B}$. Počáteční podmínky: $\rho = 1$, $\mathbf{v} = (0, -0.5x)$, $\mathbf{B} = (B_0 \sin(\pi y), 0)$, $\Phi = 0$. Okrajové podmínky: vlevo a vpravo je jednoduše předepsán stříh rychlosti (proto nepotřebujeme $\Phi \neq 0$), nahoře a dole periodické. Stavová rovnice odpovídá ideálnímu plynu. Výpočet programem Pluto ve dvou rozměrech, v síti 100×200 bodů. V časech $t > 30$ se již projevuje numerická viskozita, tzn. špatné rozlišení zejména ve směru x ; celistvost 1 buňky je poměrně silnou vazbou ($\nu \rightarrow \infty$).

bipolární difuzi, čili ionty se pohybují beze srážek s neutrálními atomy, nestabilita se rozvíjí pouze v plazmatu a její celkový vliv je víceméně zanedbatelný.

1.7 Nestabilita dvou proudění

Pozoruhodná nestabilita vzniká pro dvě proudění s určitou vazbou (Youdin a Johansen 2007, angl. streaming instability). V našem kontextu jde o plyn a prach a vazbou jest aerodynamické tření, obojí pod vlivem gravitace centra.

Príslušná nestabilita se nazývá též „dvoutekutinová“, popisujeme-li prach jako tekutinu (s hustotou ρ_S a rychlostí $\mathbf{u}$).⁷ Plyn nemusí být nutně stlačitelný, ale prach ano, což zní podezřele, ale nejedná se samozřejmě o stlačování zrn, nýbrž o jejich soustřeďování v prostoru:

$$\frac{\partial \rho_S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_S = -\rho_S \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \Phi_* - S \rho v_T (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad (28)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (29)$$

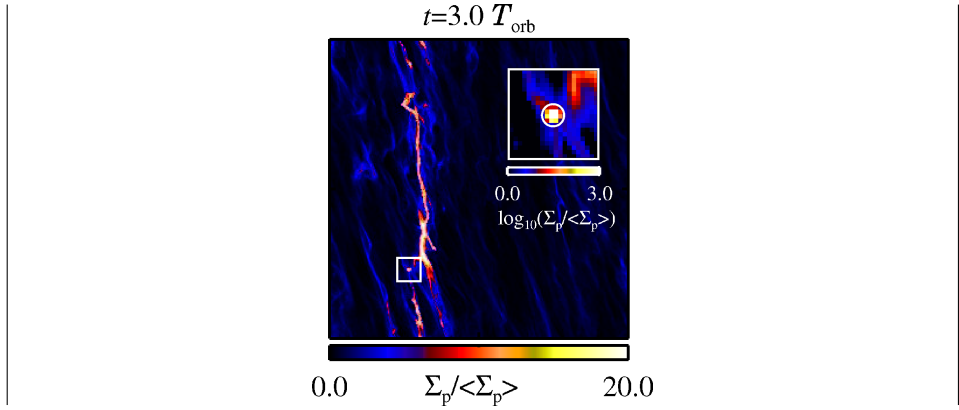
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi_* + S \rho_S v_T (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (30)$$

⁷ Nestabilita ovšem přetrvává i případě, když prach popíšeme jako částice.

V Navierově–Stokesově rovnici pro prach jsme použili Epsteinův zákon a v rovnici pro plyn totéž s faktorem $-\frac{\rho_S}{\rho}$, kvůli zachování hybnosti. Často se namísto globálních simulací provádějí lokální, v korotujícím systému, s diferenciální rotací.

Oscilace ρ_S (i ρ) vytvářejí tak vysoká lokální maxima, že v nich gravitační nestabilita (kolaps) prachu nebo balvanů může vést ke vzniku planetesimál nebo rovnou planetárních embryí (viz obr. 4).

Je tu i jistá analogie s Tour de France — cyklista na čele cítí odpor vzduchu o ostatní „lenoši“ v závětrí ho snadno dojedou. V tomto specifickém případě nestabilitu omezuje cíl.



Obr. 4 — Nestabilita dvou proudění (plynu a prachu). Znáznorněna je plošná hustota σ části disku
Převzato z Johansen aj. (2007).

1.8 Gravitační nestabilita

Pro kolaps jsou třeba dvě věci: stlačitelný plyn, vlastní gravitace. Dále potřebujeme rovnice:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi, \quad (32)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (33)$$

ze kterých je možné odvodit ještě jednu (podstatnou) podmínku, neboli *Toomreho kritérium* pro nestabilitu (Toomre 1964):

$$Q \equiv \frac{c_s n}{\pi G \sigma_0} < 1, \quad (34)$$

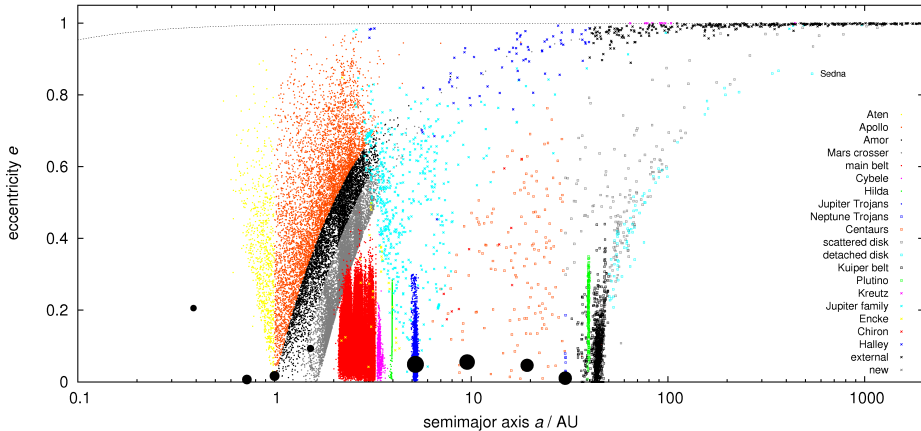
kde c_s označuje rychlost zvuku, $n = \sqrt{GM_*/r^3}$ střední pohyb na daném poloměru, σ_0 počáteční plošnou hustotu disku (odvození viz Armitage 2010, str. 135).

Růst ρ , P , Φ nade všechny meze je sice teoreticky možný, pak bychom všichni skončili v černé díře, ale obvykle se nakonec ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) ustaví dosti velký hydrostatický ∇P .

1.9 Počáteční a okrajové podmínky

Výše uvedené rovnice však neobsahují jednu veledůležitou věc: počáteční podmínky! Navíc čelíme třem takřka neřešitelným problémům: (i) rovnice *nelze* integrovat zpět v čase kvůli termodynamicky nevratným dějům (například difuzi, srážkám, unikajícímu infračervenému záření) a deterministickému chaosu, čili nemůžeme volit čas $t_0 = \text{dnes}$, kdy by bylo možné něco měřit; (ii) sluneční soustava vznikla v apriori neznámém čase $t_?$; (iii) v čase $t_?$ dávno minulém beztak nelze měřit nic.

Naštěstí je možno využít skutečnosti, že: (i) chemické složení Slunce, planet a meteoritů je totožné, až na těkavé prvky (zejména H, He); (ii) radiometrické stáří primitivních meteoritů je okolo $t = -(4,56 \pm 0,01)$ Gyr; (iii) minimální počáteční plošnou hustotu disku lze odhadnout podle pozorovaných planet, rozprostřených podél jejich drah a doplněných o zmiňované těkavé prvky. Pak již lze rozumně volit počáteční podmínky v čase $t_0 = -4,56$ Gyr, integrovat rovnice dopředu (dodnes) a nakonec posoudit model dle souladu s pozorovanou sluneční soustavou (obr. 5).



Obr. 5 — Pozorovaný stav sluneční soustavy znázorněný na grafu velká poloosa a , excentricita e . Symboly a barvami jsou rozlišeny planety a jednotlivé populace malých těles: asteroidy jsou označeny kroužky, transneptunické objekty čtverečky a komety křížky. Tečkovaná linie (nahore) odpovídá perihelové vzdálenosti rovné poloměru Slunce, $q = a(1 - e) = R_{\odot}$.

Poznámka na okraj: vnitřní okraj disku (ve sférických souřadnicích) obvykle volíme $r_1 \simeq 0,1$ AU kvůli působení magnetického pole rotující hvězdy. Hvězda totiž UV zářením ionizuje plyn, který by pod korotační orbitou obíhal rychleji, $\omega_{\text{kepl}} > \omega_{\text{rot}}$, ale je zde brzděn magnetickým polem, padá na hvězdu, čímž se vytváří mezera v disku. Vnější okraj $r_2 \simeq 40$ AU musí být dostatečně daleko, aby (příliš) neovliv-

ňoval pohyb ve studované oblasti. Ve sférických souřadnicích by okrajové podmínky mohly být voleny takto:

1. $r = r_1$ (vnitřní okraj): $v_r = v_\vartheta = 0$, $v_\phi = \sqrt{GM_\star/r_1}$, tj. keplerovská rychlost;
2. $r = r_2$ (vnější okraj): $v_r = v_\vartheta = 0$, $v_\phi = \sqrt{GM_\star/r_2}$;
3. $\vartheta = 0^\circ$ (u pólu)⁸ zrcadlové podmínky, tzn. skaláry zůstávají totožné, normálové složky vektorů mění znaménko: $\rho \rightarrow \rho$, $v_n \rightarrow -v_n$, $B_n \rightarrow -B_n$, $v_t \rightarrow v_t$, $B_t \rightarrow B_t$;
4. $\vartheta = 90^\circ$ (na rovníku) symetrické podle roviny: $\rho \rightarrow \rho$, $v_n \rightarrow -v_n$, $B_n \rightarrow B_n$, $v_t \rightarrow v_t$, $B_t \rightarrow -B_t$;
5. $\varphi = 0^\circ = 360^\circ$ periodické.

1.10 Formalismus v programu Pluto

Pro výpočetní účely se rovnice optimalizují následovně (Mignone aj. 2007). Maximum členů vyjádříme pomocí divergence, abychom se vyhnuli výpočtům rotace, které jsou náročné a při kterých hrozí větší zaokrouhlovací chyby. Pro přehlednost zde také předpokládáme $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\Phi_\star = 0$ (tj. bez přenosu záření), $K = 0$, $\eta_{\text{mag}} = 0$, $\Phi_{\text{disk}} = 0$ (beztak převažuje $\Phi_\star$):⁹

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{p} \\ E + \rho\Phi \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{B} + IP \\ (E + \rho\Phi + P)\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{v}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho\nabla\Phi \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

kde $\mathbf{p} = \rho\mathbf{v}$ označuje hustotu hybnosti, $E = U + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2\mu_{\text{vac}}}\mathbf{B}^2$ hustotu energie a $P = P_{\text{gas}} + \frac{1}{2\mu_{\text{vac}}}\mathbf{B}^2$ celkový tlak.

Identita (35) s (1) je zřejmá:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Druhý řádek odpovídá rovnici (2) (bez μ_{vac} , které je zahrnuto v $\mathbf{B}$):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{B} + IP_{\text{gas}} + I\frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \right) = \\ & = \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \dot{\nabla} \cdot \rho\mathbf{v}\mathbf{v} + \dot{\nabla} \cdot \rho\mathbf{v}\mathbf{v} + \dot{\nabla} \cdot \rho\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} - \dot{\nabla} \cdot \mathbf{B}\dot{\mathbf{B}} - \dot{\nabla} \cdot \mathbf{B}\dot{\mathbf{B}} + \nabla P_{\text{gas}} + \frac{1}{2}2\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = \\ & \mathbf{v} \text{ krát (1)} \\ & = \underbrace{\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \nabla \rho}_{\text{bác}} + \underbrace{\rho\mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{v}}_{\text{bác}} + \underbrace{\rho\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_{\text{bác}} + \underbrace{\mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0} - \underbrace{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}_{\text{bác}} + \nabla P_{\text{gas}} + \underbrace{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}_{\text{cáb}} = \\ & = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla P_{\text{gas}} - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\rho \nabla \Phi \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

⁸ pro plochý disk je zřejmě možno volit větší hodnotu, např. $\vartheta = 85^\circ$

⁹ Symboly typu $\mathbf{v}\mathbf{B}$ (nebo $\mathbf{B}\mathbf{v}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}$) jsou diády, čili tenzory druhého řádu (matice 3×3) se složkami $v_i B_j$. Někdy bývají označovány $\mathbf{v} \otimes \mathbf{B}$.

Vezmeme nyní raději 4. řádek a rovnici (5):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{v}) &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \dot{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{v}}\mathbf{B} + \dot{\nabla} \cdot \mathbf{v}\dot{\mathbf{B}} - \dot{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{B}}\mathbf{v} - \dot{\nabla} \cdot \mathbf{B}\dot{\mathbf{v}} = \\
 &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} = \\
 &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \dot{\nabla} \times (\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}) - \dot{\nabla} \times (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{B}}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{c.b.d.}
 \end{aligned}$$

Nakonec rychle porovnáme 3. řádek a rovnici (3):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \rho\Phi \right) + \nabla \cdot \left(U\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2\mathbf{v} + \rho\Phi\mathbf{v} + P_{\text{gas}}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \right) = \\
 = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot U\mathbf{v} + P_{\text{gas}}\nabla \cdot \mathbf{v} + \rho\mathbf{v} \cdot \text{Navier-Stokes} + \mathbf{B} \cdot \text{indukční rce} + \Phi \text{ krát rce kontinuity} = \\
 = 0,
 \end{aligned}$$

což bylo dokázati.

1.11 Metoda konečných objemů (FVM)

Jednou z metod používaných pro numerické řešení hydrodynamických rovnic je metoda konečných objemů (FVM, angl. finite volume method). Budeme ji zde demonstrovat na rovnici kontinuity, ale samozřejmě ji lze použít na celou soustavu rovnic (35):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{p} = 0.$$

Provedeme integraci přes nějaký objem V :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{p} dV = \int_V 0 dV,$$

a použijeme Gaussovu větu:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} = \bar{0},$$

kde na levé straně jsme napsali průměrnou hodnotu hustoty $\bar{\rho}$ v onom V a na pravé straně jsme z výukových důvodů ponechali „průměrnou nulu“.

Diskretizace v prostoru spočívá ve vyjádření integrálu přes hranici V , resp. sumy přes příslušné plošky S :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V} \int_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} &\doteq \frac{S_{i+1/2,j,k}}{V_{i,j,k}} p_{i+1/2,j,k} - \frac{S_{i-1/2,j,k}}{V_{i,j,k}} p_{i-1/2,j,k} \\
 &+ \frac{S_{i,j+1/2,k}}{V_{i,j,k}} p_{i,j+1/2,k} - \frac{S_{i,j-1/2,k}}{V_{i,j,k}} p_{i,j-1/2,k} \\
 &+ \frac{S_{i,j,k+1/2}}{V_{i,j,k}} p_{i,j,k+1/2} - \frac{S_{i,j,k-1/2}}{V_{i,j,k}} p_{i,j,k-1/2},
 \end{aligned} \tag{36}$$

kde indexy i, j, k příslušejí jednotlivým kartézským souřadnicím a mění se od 0 do počtu bodů sítě. Hodnoty $p_{i,j,k}$ v polovinách prostorového kroku (na hranicích mezi sousedními objemy) určujeme interpolací.

Diskretizace v čase je v nejjednodušším případě:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \doteq \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t}. \quad (37)$$

Schéma explicitní vnikne tak, že v (36) použijeme staré $\rho_{i,j,k}^n$ a $p_{i,j,k}^n$ (tj. z minulého časového kroku). Explicitní se jmenuje proto, že můžeme obratem vyjádřit nové $\rho_{i,j,k}^{n+1}$.

Ve schématu implicitním bychom všude použili nové (avšak neznámé!) $p_{i,j,k}^{n+1}$. Rovnice proto spolu s ostatními tvoří soustavu rovnic, kterou je třeba vyřešit. Z matematického hlediska tedy musíme provést inverzi (velké) matice. Výhodou je ovšem větší stabilita a možnost použití většího Δt .

V programu PLUTO jsou implementovány metody přesně nebo přibližně řešící Riemannův problém, který spočívá v nalezení časového vývoje nespojitosti hustoty a rychlosti pro linearizované rovnice (1) a (2). Vybírat můžeme z vícero postupů (např. Roe, HLLE, HLLC).

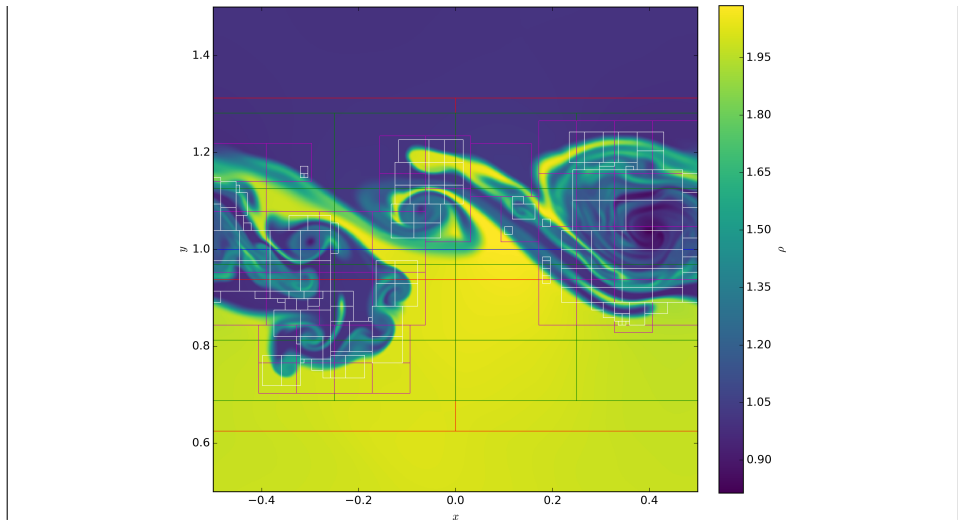
Škálované jednotky. Abychom částečně předešli numerickým problémům a zao-krouhlovacím chybám, případně ušetřili numerické operace, je dobré používat vhodné škálované jednotky. Například pro simulace protoplanetárního disku je můžeme volit následovně: $[r] = a_J$, $[\rho] = M_\odot/a_J^3$, $[v] = \sqrt{GM_\star/a_J}/(2\pi)$, odkud plyne $[m] = M_\odot$, $[t] = 2\pi/\sqrt{GM_\star/a_J^3}$, $[P] = M_\odot GM_\star/a_J^4/(4\pi^2)$.

1.12 Adaptivní zjemňování sítě a víceprocesorové výpočty

Když se při simulacích je nutné simulovat turbulenci, rázové vlny nebo obojí, bývá použití jednoduté sítě výpočetně natolik náročné, že by se problém stal prakticky neřešitelný. Naštěstí existují technologie, které řešení umožňují, ovšem za cenu určitého přírůstu algoritmu.

AMR. První pomůckou, kterou zmíníme, je adaptivní zjemňování sítě (angl. adaptive mesh refinement, AMR). Na začátku výpočtu použijeme síť hrubou a v ní identifikujeme oblasti, kde jsou velké (malé) derivace a je tedy třeba zjemnění (příp. zhrubení). Tuto identifikaci je možné provést v několika úrovních, čímž se problém stane numericky řešitelný (obr. 6). Zároveň se drasticky omezí množství ukládaných dat. Přizpůsobení sítě je možné provést jako její deformaci, zjemnění v jednotlivých buňkách nebo zjemnění v celistvých oblastech. Vzniká pak obvyklá stromová struktura (oct-tree), s pořadím oblastí ve tvaru „Z“ (Mortonovo).

Kromě samotné oblasti jsou potřeba *duchařské oblasti* okolo, a to kvůli výpočtu derivací (1. nebo 2.). Tyto se vyplňují před vlastní integrací, buď dle okrajové podmínky, nebo ze sousední oblasti stejné úrovně, případně z vyšší nebo nižší úrovně, ale pak musíme použít interpolace nebo středování a dbát zachování toku (obr. 7)



Obr. 6 — Adaptivní zjemňování sítě (AMR) při výpočtu Kelvinovy–Helmholtzovy nestability ve dvou rozměrech; zobrazena je (plošná) hustota ρ . Výpočet by proveden programem PLUTO s knihovnou Chombo. Hrubá síť má rozměry pouhých 64×128 bodů, ale při 4 úrovních zjemňování je rozlišení větší faktorem 2^4 , tzn. 1024×2048 bodů. Obdélníky různých barev označují různé úrovně.

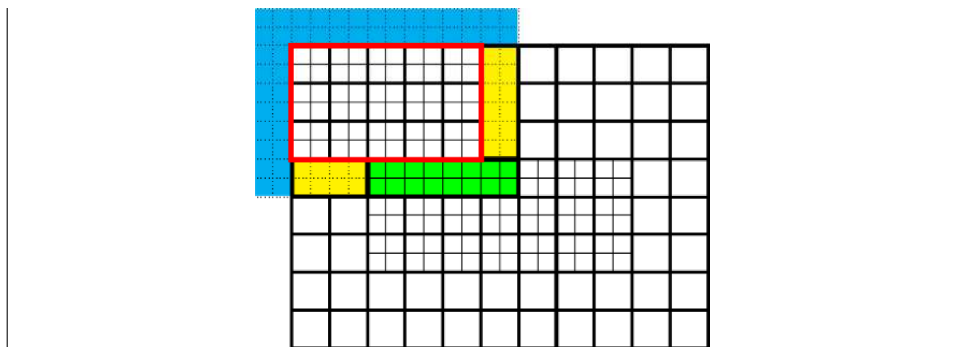
Pro AMR existují hotové knihovny (např. Chombo) i vhodné formáty pro ukládání stromových dat (HDF5).

MPI. Nestačí-li pro výpočet procesor jeden a musíme jich použít více, využijeme rozhraní MPI (angl. message-passing interface), umožňující spouštět paralelní výpočty na počítačích propojených rychlou počítačovou sítí. Struktura programu ale musí zahrnovat přinejmenším následující: inicializaci MPI, rozdělení si práce, vlastní práci, redukci a finalizaci MPI. V primitivním příkladu uvedeném níže spočívá rozdělení pouze v pečlivém určení mezí cyklů pro výpočty na jednotlivých strojích, procesorech, jádrech nebo vláknech. Jinak bývá potřeba kopírovat hodnoty ze sousedních oblastí do duchařských oblastí. Redukci se rozumí provedení nějaké operace s výsledky výpočtů na jednotlivých procesorech (zde součet mezisoučtů):

```
#include <stdio.h>
#include <mpi.h>

int main(int argc, char** argv) {
    int myrank, nprocs;
    int i, n, n1, i1, i2;
    float sum, sumsum;

    MPI_Init(&argc, &argv);
    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &myrank);
    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &nprocs);
    printf("Hello from node/cpu/core/thread %d out of %d\n", myrank, nprocs);
```

Obr. 7 — Duchářská oblast v okolí zjemnělé sítě, která se vyplňuje z okrajové podmínky (modře), z jednoho sousedního bloku se stejným rozlišením (žlutě) a z dvou sousedních bloků s odlišným rozlišením (zeleně). Převzato z [6].

```

n = 1000;
n1 = (int)(n/nprocs);
if (n1*nprocs < n) { n1 += 1; }
i1 = myrank * n1;
i2 = i1 + n1;
if (i2 > n) { i2 = n; }

sum = 0.0;
for (i = i1; i < i2; i++) {
    sum += i;
}
printf("sum = %f\n", sum);

MPI_Reduce(&sum, &sumsum, 1, MPI_FLOAT, MPI_SUM, 0, MPI_COMM_WORLD);
if (myrank == 0) {
    printf("sumsum = %f\n", sumsum);
}

MPI_Finalize();
return 0;
}

```

Pro kompilaci programu musíme používat speciální kompilátor: `mpicc hello.c -o hello`. Před spuštěním programu na více procesorech si musíme připravit `hostfile`, v němž jednotlivé řádky popisují, kolik procesů má být spuštěno na kterých strojích: `hilda20 slots=4, hilda21 slots=4, atd.` Při spuštění pak volíme počet procesorů: `mpiexec -np 8 -hostfile hostfile ./hello`. Zásadní otázkou je, jak se výpočet škáluje s rostoucím počtem procesorů. Počítáme-li například vývoj protoplanetárního disku ve dvourozměrné aproximaci a máme přitom 1024 buněk v radiálním směru, asi nemá cenu dělit výpočet na víc než 64 procesorů, protože pak na 1 procesor připadá pouhých 16 buněk a komunikace MPI začíná již převažovat.

1.13 Migrace planet v plynném disku

Je třeba především rozlišovat, zda se jedná o migraci v disku tvořeném plynem nebo planetesimálami; obojí se pochopitelně chová jinak. Zde se budeme soustředit pouze na plyn a v něm vnořenou planetu. Pak lze rozlišovat tři základní typy ustálené migrace: I, II a III — tzn. bez mezery, s mezerou a s částečnou mezerou.

Typ II. Asi nejsnadněji lze popsat typ II. Značná část plynu v okolí dráhy již spadla na planetu, čímž se vytvořila mezera. Zároveň vznikla spirální ramena neboli hustotní vlny, které jsou vlastně přímou gravitační vazbou mezi planetou a diskem. Třecí neboli viskózní síly mezi rameny a zbytkem disku mají transversální složku, která způsobuje spirálování planety dle první Gaussovy rovnice (viz (436)):

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2\mathcal{T}}{n} + \mathcal{O}(e), \quad (38)$$

kde a označuje velkou poloosu planety, $\mathcal{T}$ transversální složku zrychlení (tj. v rovině dráhy, kolmo k radiusvektoru), $n = \sqrt{GM_\odot}a^{-\frac{3}{2}}$ střední keplerovský pohyb neboli úhlovou rychlost, přičemž předpokládáme kruhovou dráhu ($e = 0$). Transverzální složka je vytvářena viskózním členem v rovnici (2):

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \mu_1 \frac{\partial}{\partial r} v_{\text{kepl}} = \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sqrt{GM_\odot} r^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mu_1}{\rho} \sqrt{GM_\odot} \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}},$$

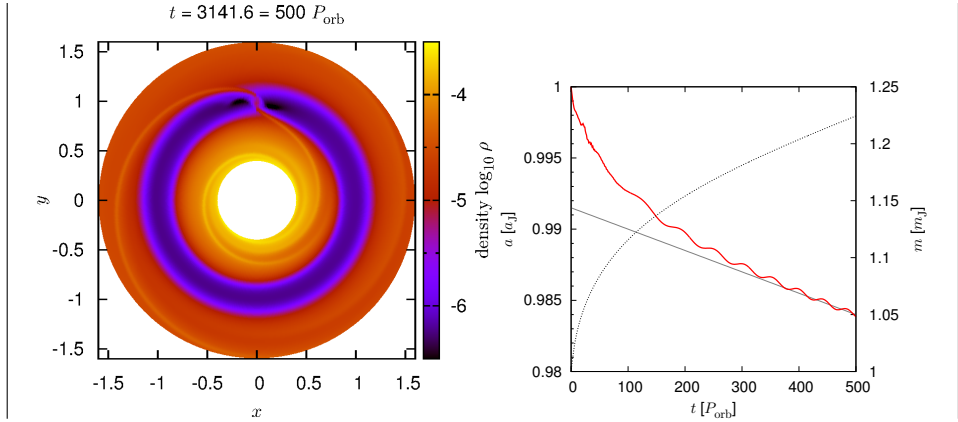
což po dosazení (a obvyklé náhradě $r \rightarrow a$) dává:

$$\left(\frac{da}{dt} \right)_{\text{II}} = -\frac{3\nu}{2a}, \quad (39)$$

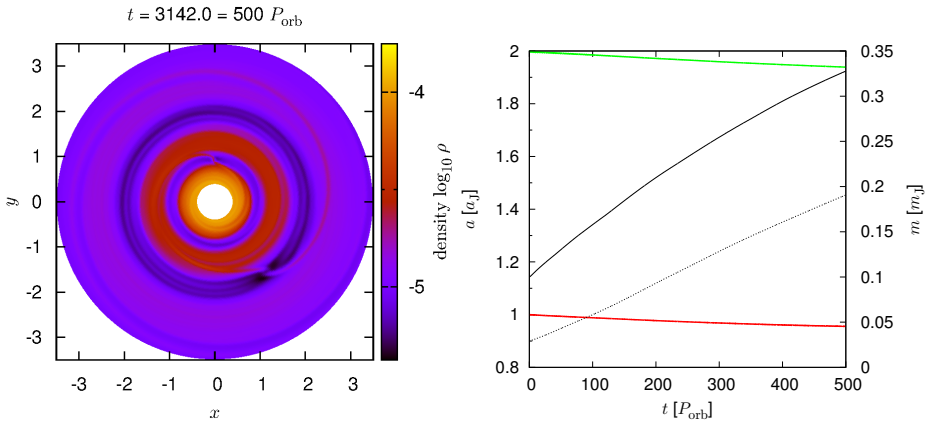
kde $\nu \equiv \mu_1/\rho$ je kinematická viskozita. Znaménko je zde záporné, neboť k planetě je blíže vnější spirální rameno, disk tam obíhá (keplerovsky) pomaleji, čili dochází k brzdění.

Situaci pro jednu planetu ukazuje obr. 8, spočtený programem Fargo (Masset 2000). Po vytvoření mezery se vývoj ustálí a změna velké poloosy odpovídá vztahu (39). Pro dvě interagující planety (obr. 9) je situace obecně složitější. Pokud se vytvoří dvě mezery a překryjí se, vnější spirální rameno je od vnitřní planety mnohem dál, takže převažuje vliv vnitřního, kde ale disk obíhá rychleji, a zmiňovaná planeta se tedy nutně také urychluje a vzdaluje od Slunce.

Typ I. V případě málo hmotných planet nebo embryí se mezera neotevře, ale to neznamená, že nic nepůsobí, naopak. Můžeme odlišit čtyři příspěvky: (i) spirální ramena, (ii) korotační oblast, (iii) studený prst a (iv) akreční ohřev. Spirální ramena jsou stejná jako předtím, dokonce sahají blíž k planetě. Protože orbity s $a < a_J$ jsou rychlejší, je vnitřní rameno před planetou (a naopak). Vnější rameno je ale obvykle blíž, jeho gravitační přitažlivost proto převažuje a samo o sobě by způsobovalo brzdění a $\frac{da}{dt} < 0$.



Obr. 8 — Plynný disk a jedna vnořená planeta, vlevo plošná hustota disku $\sigma(x, y)$, vpravo časový vývoj velké poloosy $a(t)$ (znázorněn červeně) a hmotnosti $m(t)$ planety (tečkovaně). Pro porovnání je znázorněn i pokles a dle rovnice (39), která platí poté, co se v disku vytvoří meze. Parametry simulace byly voleny takto: hmotnost centra $M = 1$, poměr $H/r = 0,05$, plošná hustota $\sigma = 6,37 \cdot 10^{-5} r^{-1,5}$, kinematická viskozita $\nu = 10^{-5}$, planeta s počáteční velkou poloosou $a = 1$, orbitální periodou $P_{\text{orb}} = 2\pi$ a hmotností $m = 0,001$. Rozsah poloměrů byl $r \in (0,4; 1,6)$, dvourozměrnou síť (r, ϕ) tvořilo 128 krát 384 bodů a časový krok $\Delta t \doteq 0,31416$. Simulace programem Fargo (Masset 2000).



Obr. 9 — Disk a dvě planety. Obdobné nastavení parametrů jako u obr. 8, s výjimkou $r \in (0,4; 3,5)$, 1-rozměrná síť sahající do $r' = 20$, planety $a_1 = 1$, $m_1 = 10^{-4}$, $a_2 = 2$, $m_2 = 2,9 \cdot 10^{-5}$. Simulace programem Fargo.

Korotační oblast podél dráhy planety se vyznačuje podkovovitými orbitami (plynu). Orbita s $a < a_J$ je opět rychlejší, za planetou planetu dohání, pak se ovšem náhle přesune na $a > a_J$. Plyn se tak z míst s vyšší teplotou T a tlakem P dostává ven, kde je okolí s nižší T, P , a proto se rozpíná. Před planetou je situace opačná, čímž vzniká hustotní asymetrie, která by (sama o sobě) způsobovala $\frac{da}{dt} > 0$.

Při pohybu v korotační oblasti navíc v potenciálové jámě u planety dochází ke stlačení plynu, zářivé difuzi tepelné energie (skrz vazbu rovnic tepelné rovnováhy a přenosu záření), dodatečnému ochlazení plynu, čímž vzniká „studený prst“, posilující výše uvedený jev (Lega aj. 2014).

Zároveň se planeta, na níž padá okolní materiál, touto akrecí zahřívá, a stává se tak významným zdrojem záření. Přispívají k tomu zejména balvany, které se v Hillově sféře mohou aerodynamicky brzdit, spirálovat a padat na planetu (Lambrechts a Johansen 2012). Plyn prolétávající kolem planety se namísto zářivého ochlazení zářivě ohřeje, asymetrie se obrátí a výsledkem může být opět $\frac{da}{dt} < 0$ (Benítez-Llambay aj. 2015). Tímto mechanismem se dokonce vytvářejí nenulové excentricity protoplanet (Chrenko aj. 2017).

Turbulentní viskozita. Otázkou je, jaká je *hodnota* viskozity? Obvyklá molekulární viskozita řídkého plynu se zdá nepatrná a planety by vlastně nemigrovaly vůbec. Turbulence ovšem efektivně způsobuje viskozitu také; i když bychom ji nebyli schopni detailně rozlišit v numerickém modelu, mohli bychom ji zahrnout jako zvýšenou hodnotu ν .

Vzhledem k tomu, jaké má ν jednotky ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), je logické ji vztáhnout k nějaké rychlosti a nějakému rozměru. Je podruhé logické zvolit buď rychlost obíhání v_{kepl} , nebo zvuku c_s , a jako rozměr výšku H disku, neboť tato omezuje maximální velikost vírů. Shakura a Sunyaev (1973) navrhli parametrizaci vztahem:

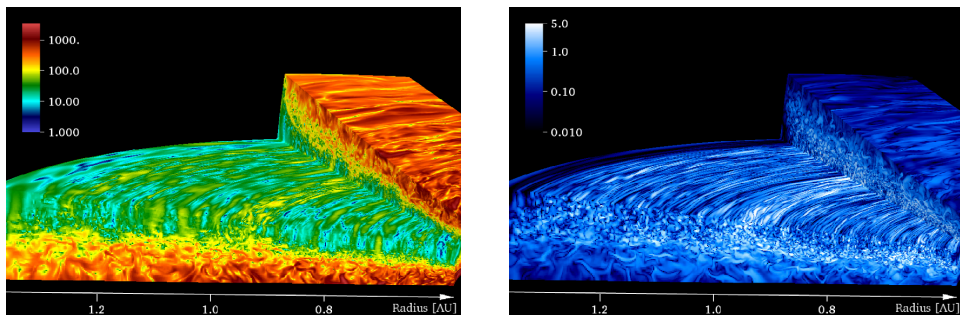
$$\nu = \alpha c_s H, \quad (40)$$

kde α je bezrozměrný parametr, nabývající hodnot od 0 do řádově 1. Ze stacionárního modelu disku (Brož a Šolc 2013, str. 206) můžeme případně dosadit za $H \simeq c_s/n_{\text{kepl}}$. Pokud bychom měli onu detailní simulaci s víry (jako na obr. 10), lze ekvivalentní hodnotu α počítat jako (Flock aj. 2013):

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle \frac{\int \rho \left(\frac{\rho v'_\phi v'_r}{P} - \frac{B_\phi B_r}{P} \right) dV}{\int \rho dV} \right\rangle,$$

kde čárkované rychlosti v'_ϕ , v'_r označují fluktuace okolo středních hodnot.

Kromě zmiňovaných nestabilit SBI, VSI, MRI, které jsou potenciálně důležitým zdrojem turbulence, a tudíž zvýšené makroskopické viskozity, může hrát roli i fotoevaporace a hvězdný vítr, který strhává ionty, odnáší tak moment hybnosti ven a zbývající hmota disku se proto sune dovnitř (a pak bychom nepotřebovali velkou hodnotu α). Jsou to ostatně tytéž procesy, jaké ve vesmíru nutí akreční disky akretovat.



Obr. 10 — Rozvinutá magneto-rotační nestabilita v protoplanetárním disku, projevující se jako turbulence rychlosti $|\mathbf{v}|$ (v jednotkách m/s, vlevo) a složitá struktura magnetického pole $|\mathbf{B}|$ (v jednotkách Gauss = 10^{-5} T, vpravo). Převzato z Flock aj. (2013).

- [1] ARMITAGE, P. J. *Astrophysics of planet formation*. New York: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780511691362.
- [2] BALBUS, S. A., HAWLEY, J. F. *A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution*. *Astrophys. J.*, **376**, 214–233, 1991.
- [3] BENÍTEZ-LLAMBAY, P., MASSET, F., KOENIGSBERGER, G., SZULÁGYI, J. *Planet heating prevents inward migration of planetary cores*. *Nature*, **520**, 63–65, 2015.
- [4] BROŽ, M., ŠOLC, M. *Fyzika sluneční soustavy*. Praha: MatfyzPress, 2013. ISBN 978807378-2368. (http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/fyzika_malych_teles/).
- [5] FLOCK, M., FROMANG, S., GONZÁLES, M., COMMERÇON, B. *Radiation hydrodynamics in global simulations of protoplanetary discs*. *Astron. Astrophys.*, **560**, A43, 2013.
- [6] GUARRASI, M. *An introduction to Adaptive Mesh Refinement*. [online] [cit. 2016-01-13]. (http://www.training.prace-ri.eu/uploads/tx_pracetmo/AMRIntroHNDSCi15.pdf)
- [7] CHRENKO, O., BROŽ, M., LAMBRECHTS, M. *Eccentricity excitation and merging of planetary embryos heated by pebble accretion*. *Astron. Astrophys.*, submitted, 2017.
- [8] JOHANSEN, A., OISHI, J. S., MAC LOW, M.-M., KLAHR, H., HENNING, T., YOUNG, A. *Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar discs*. *Nature*, **448**, 1022–1025, 2007.
- [9] KLAHR, H. H., BODENHEIMER, P. *Turbulence in accretion disks: Vorticity generation and angular momentum transport via the global baroclinic instability*. *Astrophys. J.*, **582**, 869–, 2003.
- [10] LAMBRECHTS, M., JOHANSEN, A. *Rapid growth of gas-giant cores by pebble accretion*. *Astron. Astrophys.*, **544**, A32, 2012.
- [11] LEGA, E., CRIDA, A., BITCH, B., MORBIDELLI, A. *Migration of Earth-sized planets in 3D radiative discs*. *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **440**, 683–695, 2014.
- [12] LESUR, G., PAPALOIOZOU, J. C. B. *The subcritical baroclinic instability in local accretion disc models*. *Astron. Astrophys.*, **513**, A60, 2010.
- [13] MASSET, F. *FARGO: A fast eulerian transport algorithm for differentially rotating disks*. *Astron. Astrophys. Suppl. S.*, **141**, 165–173, 2000.
- [14] MIGNONE, A., BODO, G., MASSAGLIA, S. A. *PLUTO: A numerical code for computational astrophysics*. *Astron. J. Suppl. S.*, **170**, 228, 2007.
- [15] SHAKURA, N. I., SUNYAEV, R. A. *Black holes in binary systems. Observational appearance*. *Astron. Astrophys.*, **24**, 337–355, 1973.
- [16] SHORE, S. N. *Astrophysical hydrodynamics*. Weinheim: Wiley-Vch, 2007. ISBN 978352740-6692.
- [17] TOOMRE, A. *On the gravitational stability of a disk of stars*. *Astrophys. J.*, **139**, 1217–1238, 1964.

- [18] *Wikipedia. Accretion disc* [online]. [cit. 2015-03-10].
(http://en.wikipedia.org/wiki/Accretion_disc)
- [19] YODIN, A., JOHANSEN, A. *Protoplanetary disk turbulence driven by the streaming instability: linear evolution and numerical methods*. *Astrophys. J.*, **662**, 613–626, 2007.
- [20] LEVERMORE, C. D., POMRANING, G. C. *A flux-limited diffusion theory*. *Astrophys. J.*, **248**, 321–334, 1981.

2 Hydrodynamika srážek asteroidů

Při srážkách pevných těles se potýkáme s následujícím problémem: tělesa na začátku zabírají jen omezený prostor a okolo je vakuum. Po srážce se však rozpadnou na úlomky, které odlétají vysokou rychlostí. Výpočetní doména by tak musela být zbytečně veliká a kdyby se ukázalo, že úlomky letí „do Prčic“, byli bychom tamtéž. Proto je mnohem výhodnější pro srážky použít popis *lagrangeovský*, při kterém se pozorovatel pohybuje s prouděním kamkoliv.

2.1 Lagrangeův popis

Sepišme nejprve potřebné rovnice. Říkali jsme, že sledujeme pohyb, čili na levé straně používáme zásadně totální časové derivace. Jde o obdobu pohybových rovnic, jak je známe pro hmotné body, $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m}$. Rovnice kontinuity je tedy (v jednotkách $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (41)$$

Navierova–Stokesova rovnice (m s^{-2}):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (42)$$

1. věta termodynamická ($\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$):¹⁰

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} P \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{S} : \overbrace{\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]}^{= \varepsilon_{ij}}, \quad (43)$$

Poissonova rovnice ($\text{J kg}^{-1} \text{m}^{-2}$):

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (44)$$

stavová rovnice pro pevnou látku (Tillotson 1962; Pa)¹¹:

$$P = \begin{cases} A\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) + B\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)^2 + a\rho U + \frac{b\rho U}{\frac{U}{U_0} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} + 1} & \text{pro } U < U_{iv}, \\ a\rho U + \left[\frac{b\rho U}{\frac{U}{U_0} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} + 1} + A\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) e^{-\beta\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)} \right] e^{-\alpha\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)} & \text{pro } U > U_{cv}, \end{cases} \quad (45)$$

¹⁰ Dvoutečkový součin tenzorů $\mathbf{S} : \varepsilon_{ij}$ je skalár $\sum_i \sum_j S_{ij} \varepsilon_{ij}$, kde přes opakující se indexy i a j sčítáme, i kdybychom sumy zapomněli; zde zavedené ε_{ij} se jinak nazývá tenzor malých deformací.

¹¹ Přibližně zohledňuje i fázové přechody, ostatně člen ρU odpovídá ideálnímu plynu; dokonalejší stavovou rovnici by byla ANEOS (Melosh 2000) nebo SESAME (Plesko aj. 2014), ale tyto nejsou volně dostupné.

konstituční rovnice pro pevnou látku (Hookeův zákon; Pa s^{-1}):

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = 2\mu_1 \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + (\mu_2 - \frac{2}{3}\mu_1) \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I}. \quad (46)$$

Značení jest následující: ρ hustota, $\mathbf{v}$ rychlost, P tlak (izotropní část), $\mathbf{S}$ tenzor napětí (deviatorická část), U měrná vnitřní tepelná energie (tentokrát na kg), ρ_0 hustota při nulovém tlaku, U_0 vnitřní energie při nulovém tlaku, U_{iv} při počínajícím vypařování, U_{cv} při úplném vypaření, $A, B, a, b, \alpha, \beta$ další parametry stavové rovnice, μ_1 dynamická (první) viskozita, μ_2 objemová viskozita, $\mathbf{I}$ jednotkový tenzor.^{12,13}

Kdybychom chtěli konstituční rovnici rozepsat maticově, viděli bychom, že:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} = 2\mu_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \\ + (\mu_2 - \frac{2}{3}\mu_1) \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že se zde tenzor napětí $\mathbf{S}$ velmi liší od tekutin! Napětí je v pevné látce přítomno, i když pohyb ustane. V tekutinách by napětí existovalo pouze při vzájemných pohybech; konstituční rovnice by proto byla bez časové derivace vlevo, tzn. $\mathbf{S} = \mu_1 [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + (\mu_2 - \frac{2}{3}\mu_1) \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I}$.

Kolik je zde neznámých funkcí? Jde o $\rho(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $U(t)$, $\Phi(t)$, $P(t)$, $\mathbf{S}(t)$, tzn. 13, počítáme-li 1 vektor jako 3 skaláry a symetrický tenzor jako 6 skalárů. Uvědomme si, že se jedná výhradně o funkce času, nikoli souřadnic! Někdy se pouze setkáváme s tím, že se body kontinua „indexují“ pomocí *počátečních* souřadnic ($\mathbf{r}_0$), ale to jsou pouhé značky, nikoli nezávislé proměnné.

2.2 Elasticita, plasticita a praskliny

U pevných látek musíme být obezřetní, neboť platnost Hookeova zákona je omezena. Platí pouze v *elastické oblasti* (viz obr. 11), ve které je vztah mezi deformací (tj. relativní změnou délky) a napětím lineární, schematicky $\varepsilon = E\sigma$; kde E označuje Youngův modul pružnosti.

Pak ovšem následuje *plastická oblast*, kde deformace rostou i při takřka konstantním (velkém) napětí. Toto popisují poddajné vztahy (angl. yielding), například von

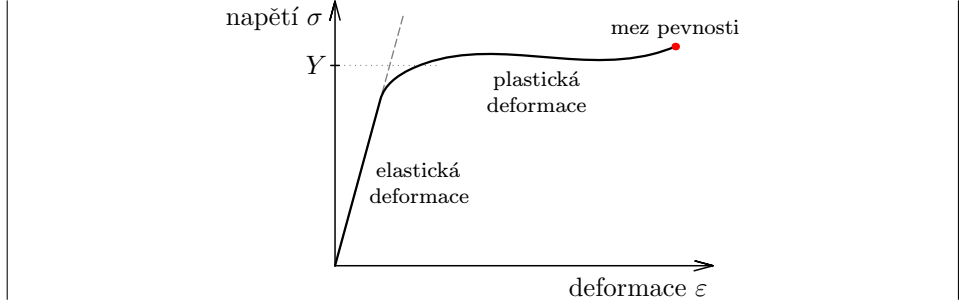
¹² Symboly $\nabla \mathbf{v}$, $(\nabla \mathbf{v})^T$ jsou tenzory druhého řádu se složkami $\nabla_i v_j$, resp. $\nabla_j v_i$.

¹³ Faktor $-\frac{2}{3}\mu_1$ je před $\nabla \cdot \mathbf{v}$ proto, že izotropní působení již bylo vyčleněno jako tlak, resp. ∇P , čili zde ho musíme odečíst! V Navierově–Stokesově rovnici, tzn. po provedení $\nabla \cdot \mathbf{S}$, by odpovídal faktoru $+\frac{1}{3}\mu_1$.

Misesovo kritérium. Jde o horní mez pro tenzor napětí, resp. jeho neizotropickou část:

$$\mathbf{S} = f \mathbf{S}, \quad f = \min \left[\frac{Y^2}{3J_2}, 1 \right], \quad J_2 = \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}, \quad (47)$$

kde Y označuje mez pružnosti.



Obr. 11 — Typická závislost mezi napětím σ a deformací ε pro pevné látky. První oblast, elastičká, je přibližně lineární, $\sigma = E\varepsilon$. Druhá oblast je plastická, ve které ε roste i při stálém (velkém) $\sigma \simeq Y$.

Nakonec je při určitém ε překročena mez pevnosti. Podle Maindl (2013).

Nakonec musíme uvážit *mez pevnosti*, po jejímž překročení se nepatrné poruchy v materiálu rozvíjejí jako praskliny, rostoucí řádově poloviční rychlostí zvuku. Grady a Kipp (1980) pro popis těchto jevů zavedli parametr *poškození* $\mathcal{D}$ (angl. damage), $0 \leq \mathcal{D} \leq 1$, a provádějí logickou úpravu celkového tenzoru napětí pro případ stlačování nebo roztahování:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{cases} -P\delta_{\alpha\beta} + (1 - \mathcal{D})S_{\alpha\beta} & \text{pro } P \geq 0, \\ -(1 - \mathcal{D})P\delta_{\alpha\beta} + (1 - \mathcal{D})S_{\alpha\beta} & \text{pro } P < 0. \end{cases} \quad (48)$$

Zcela zničený materiál (rozuměj rozdrcený na prach) s $\mathcal{D} = 1$ nevykazuje žádná nediagonální napětí ani se nijak nebrání roztahování.

Související a neméně důležitou vlastností materiálu je koncentrace poruch, respektive její rozdělení (Weibull 1939):

$$n(\epsilon) = k\epsilon^m \quad (49)$$

dle aktivační meze ϵ , nad kterou se začnou poruchy rozvíjet v praskliny; k, m jsou materiálové parametry. Rovnice pro vývoj poškození je:

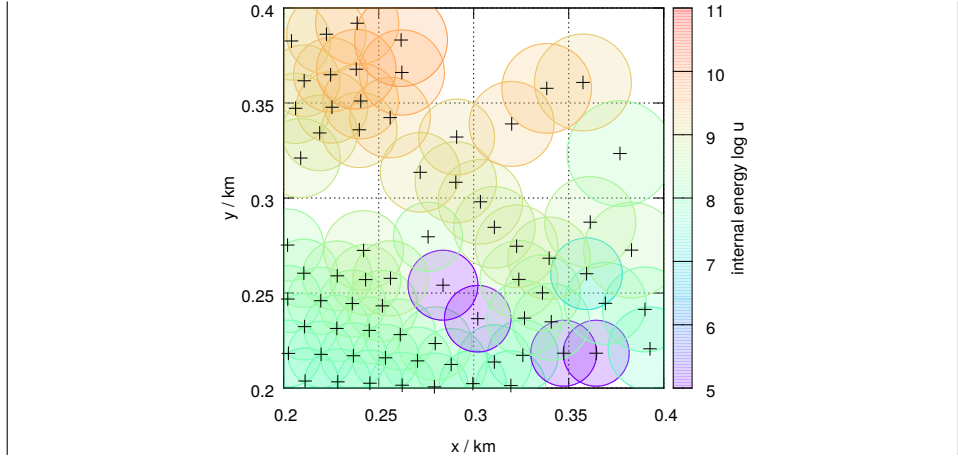
$$\frac{d\mathcal{D}^{\frac{1}{3}}}{dt} = \left[\left(\frac{c_g}{R_s} \right)^3 + \left(\frac{m+3}{3} \alpha^{\frac{1}{3}} \epsilon^{\frac{m}{3}} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (50)$$

kde c_g je rychlost růstu poruch (řádově polovina rychlosti zvuku c_s), R_s poloměr příslušný objemu, v němž poruchy studujeme, a parametr $\alpha \equiv 8\pi c_g^3 k / [(m+1)]$

$(m+2)(m+3)]$. Podrobný popis této problematiky je uveden v Benz a Asphaug (1994).

2.3 Metoda hlazená částicová (SPH)

Pro numerické výpočty se často používá metoda SPH (z angl. smoothed particle hydrodynamics), čili metoda hlazená částicová. Namísto kontinua uvažujeme množinu vzájemně interagujících částic (obr. 12). Hustota je prostě daná jejich počtem v daném objemu. Pohybují se jako by šlo hmotné body (dle lagrangeovských rovnic), ale mají samozřejmě přisouzeno vícero vlastností ($\mathbf{v}$, U , P , $\mathbf{S}$). Možná bychom jim proto neměli říkat částice, ale raději „numerická vozidla“.



Obr. 12 — Grafické znázornění rozlehlých částic v metodě . Poloměr zde odpovídá hladící délce h , interakce (gradienty) se počítají pro částice vzdálené méně než $2h$.

Vezměme nejprve rovnici kontinuity (41). Využijeme následující integrální reprezentaci funkce pomocí konvoluce s Diracovou distribucí δ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\Omega.$$

K čemu nám to vůbec je, vyjádřit hodnotu v bodě $\mathbf{r}$ pomocí hodnot „někde jinde“?! Genialita postupu (Gingold a Monaghan 1977, Lucy 1977) spočívá v tom, že δ nahradíme vhodnou diferencovatelnou funkcí W , zvanou *kernel*, a následně se elegantně zbavíme všech prostorových derivací, konkrétně $\nabla \cdot \mathbf{v}$. Čili:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \doteq \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega, \quad (51)$$

kde Ω označuje oblast prostoru, h hladící délku; jde o aproximaci s přesností $\mathcal{O}(h^2)$. Pak vyjádříme divergenci:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} [\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h)] d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \\
&\quad = 0 \text{ na hranici} \\
&= \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \overbrace{W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h)}^{\vec{\Gamma}} d\vec{\Gamma} - \dots = \\
&= - \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega, \quad (52)
\end{aligned}$$

kde jsme využili derivaci součinu, Gaussovu větu a skutečnost, že na hranici je kernel W roven nule. Poznamenejme, že operátor ∇ nejprve působí na $\mathbf{r}'$, ale na konci jsme uplatnili antisymetrii ∇W . Derivace samozřejmě nezmizely úplně; zůstal nám zde ale jakýsi vážený průměr gradientu W , který lze při zvoleném W předpočítat.

Diskretizace v prostoru spočívá v nahrazení integrálu sumou:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i \doteq \sum_{j=1}^{N_{\text{okolo}}} \mathbf{v}_j \cdot \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (53)$$

přičemž sčítáme pouze přes částice nacházející se v okolí $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < h$.

Nejjednodušší diskretizace v čase by zřejmě byla:

$$\frac{d\rho}{dt} \doteq \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t}; \quad (54)$$

výsledné explicitní integrační schéma je pak:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \Delta t \rho_i^n \sum_j \mathbf{v}_j^n \cdot \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j^n}.$$

Pro Navierovu–Stokesovu rovnici (42) bychom potřebovali ∇P :

$$\nabla P(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} [\nabla_{\mathbf{r}'} P(\mathbf{r}')] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \int_{\Omega} P(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega,$$

což po diskretizaci vede na:

$$\nabla P_i \doteq \sum_j P_j \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (55)$$

Tento výraz však není symetrický vzhledem k i, j , což se ukazuje jako nebezpečné z hlediska numerického. Obdobně musíme vyjádřit $\nabla \cdot \mathbf{S}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} [\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}')] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega,$$

čili:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_i \doteq \sum_j \mathbf{S}_j \cdot \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (56)$$

s touž poznámkou.

Pro energetickou rovnici (43) bychom potřebovali ještě znát diskretizaci tenzoru (psáno raději ve složkách):

$$\nabla_\alpha v_\beta = \int_\Omega [\nabla_\alpha v_\beta] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \sum_j v_{\beta j} \nabla_\alpha W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}.$$

Celá metoda SPH by tedy mohla vypadat takto (píšeme ovšem stručněji $W_{ij}(h)$ namísto $W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$):

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \Delta t \rho_i^n \sum_j \mathbf{v}_j^n \cdot \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n}, \quad (57)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} \sum_j P_j^n \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n} + \frac{\Delta t}{\rho_i^n} \sum_j \mathbf{S}_j^n \cdot \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n}, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t P_i^n \sum_j \mathbf{v}_j^n \cdot \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n} + \\ + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 S_{\alpha\beta}^n \frac{1}{2} \sum_j \left[v_{\beta j}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} W_{ij}(h) + v_{\alpha j}^n \frac{\partial}{\partial x_\beta} W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Pro jednoduchost jsme si dovolili vynechat gravitační zrychlení ($-\nabla\Phi$), abychom nemuseli řešit Poissonovu rovnici, nicméně viz níže.

2.4 Alternativní vyjádření prostorových derivací

Existují ovšem i alternativní lepší formulace (ekvivalentní až na $\mathcal{O}(h^2)$), které jsou numericky stabilnější (Cossins 2010, Price 2008). Vycházejí z lagrangiánu nebo z následující vektorové identity, resp. gradientu součinu:

$$\nabla P \rho^a = \rho^a \nabla P + P a \rho^{a-1} \nabla \rho,$$

odkud:

$$\nabla P = \frac{1}{\rho^a} [\nabla P \rho^a - P a \rho^{a-1} \nabla \rho].$$

Speciálně pro $a = 1$:

$$\nabla P = \frac{1}{\rho} [\nabla P \rho - P \rho^{-1} \nabla \rho],$$

což by mimochodem přesně řešilo konstantní P . Pro $a = -1$ bychom obdrželi:

$$\nabla P = \rho \nabla P \rho^{-1} + P \rho^{-1} \nabla \rho,$$

což by naopak zachovávalo celkovou hybnost. Tlakový člen by měl po provedení příslušných diskretizací podobu buď:

$$\nabla P_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_j (P_i - P_j) \nabla W_{ij}(h) m_j ,$$

nebo:

$$\nabla P_i = \rho_i \sum_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij}(h) m_j ;$$

obzvláště poslední je krásně symetrický.

2.5 Kernel čili hladící funkce

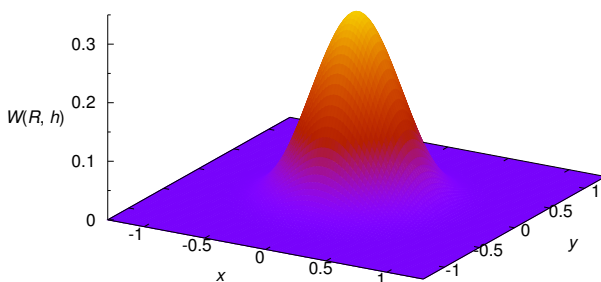
Ideálně by měl kernel W splňovat tyto požadavky: i) normalita, ii) kompaktnost, iii) limita pro $h \rightarrow 0$ je δ funkce, iv) pozitivita, v) být ryze klesající, vi) symetrie, vii) hladkost. Splnit všech sedm najednou je takřka nemožné, například Gaussova funkce postrádá ii). Nicméně nejpoužívanější kubický spline na tom není špatně, lze mu vytýkat jen vii) (obr. 13, $R \equiv r/h$):

$$W(R, h) = \frac{3}{2\pi h^3} \begin{cases} \frac{2}{3} - 4R^2 + 4R^3 & \text{pro } 0 \leq R < \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} - 4R + 4R^2 - \frac{4}{3}R^3 & \text{pro } \frac{1}{2} \leq R < 1, \\ 0 & \text{pro } R \geq 1. \end{cases} \quad (60)$$

Jeho první derivace je:

$$W'(R, h) = \frac{3}{2\pi h^3} \begin{cases} -8R + 12R^2 & \text{pro } 0 \leq R < \frac{1}{2}, \\ -4 + 8R - 4R^2 & \text{pro } \frac{1}{2} \leq R < 1, \\ 0 & \text{pro } R \geq 1, \end{cases} \quad (61)$$

druhá je lomená a třetí nespojitá. Volba hladící funkce může ovlivnit přesnost řešení a je nutné jí věnovat zvýšenou pozornost, obzvláště v případech derivací vyšších řádů.



Obr. 13 — Kubický spline $W(R, h)$ dle rovnice (60).

2.6 Umělá viskozita

V případě nadzvukových srážek se setkáváme s rázovými vlnami, což při omezeném rozlišení znamená skokovou změnu, čili nekonečné gradienty. Rovnice (57) až (59) pak bohužel divergují. Řeší se to „rozmazáním“ průběhu veličin pomocí umělé zvýšené viskozity¹⁴ (Monaghan 1989):

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha_{av} c_{s,ij} \mu_{ij} + \beta_{av} \mu_{ij}^2}{\rho_{ij}} & \text{pro } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde

$$\mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2 + \epsilon h^2}$$

a parametry jsou obvykle $\alpha_{av} = 1,5$, $\beta_{av} = 3$; $\epsilon = 0,01$ je malé číslo. Získáme tak konvergenci, ovšem za cenu ztráty rozlišení. Obvyklým testem je porovnání s analytickým řešením rázové trubice (Sod 1978).

Členy, které musíme doplnit, jsou jednak $-\sum_j m_j \Pi_{ij} \nabla_j W_{ij}$ do rovnice (58) a jednak $+\sum_j m_j \Pi_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_j W_{ij}$ do (59), protože to, co se viskózně zbrzdí, se v zájmu zachování celkové energie trochu zahřeje.

2.7 Metoda k -d stromu

Nyní je třeba přiznat, že v metodě SPH je skryt zádrhel, vlastně dva: i) musíme hledat, které částice jsou v okolí všech částic, ii) gravitace je dalekodosahová síla, tudíž musíme beztak sčítat přes všechny pro všechny. Obojí by vedlo k „brutálnímu“ algoritmu o složitosti $\mathcal{O}(N^2)$, což je zásadní omezení pro $N \gg 10^3$.

Naštěstí existuje algoritmus se složitostí $\mathcal{O}(N \log_2 N)$, nazývaný k -d strom, neboli k -rozměrný strom. V našem případě bude třírozměrný, ale kvůli názornosti je zde dvourozměrný. Namísto zdouhavého slovního popisu jej rovnou implementujeme v objektovém jazyce Python. Nejprve si vytvoříme tři třídy — pro částici, uzel a strom, dle nichž se budou vytvářet jednotlivé objekty:

```
class Particle(object):
    def __init__(self, r):
        self.r = r

class Node(object):
    def __init__(self, particle, left, right):
        self.particle = particle
        self.left = left
        self.right = right

class Kdtree(object):
    def __init__(self, k, particles):
        self.k = k
```

¹⁴ Alternativně bychom museli použít riemannovský algoritmus, přesné nebo přibližně řešící Rankinovy–Hugoniotovy rovnice (Godunov 1959, Roe 1981).

```

def build_tree(particles, depth=0):
    if len(particles) == 0:
        return None

    axis = depth % self.k
    particles.sort(key=lambda particle: particle.r[axis])
    i = len(particles) // 2 # median index

    return Node( \
        particles[i], \
        build_tree(particles[:i], depth+1), \
        build_tree(particles[i+1:], depth+1), \
    )

self.root = build_tree(particles)

def main():
    r = [(2, 3), (5, 4), (9, 6), (4, 7), (8, 1), (7, 2)]
    particles = []
    for i in xrange(0, len(r)):
        particles.append(Particle(r[i]))

    kdtree = Kdtree(2, particles)

if __name__ == "__main__":
    main()

```

Co vidíme: na konci v hlavním programu se prostě zavolá hlavní funkce. V ní si připravíme seznam částic. Voláním `Particle` se vždy vytváří objekt částice. Objekty zde používáme proto, abychom později částicím mohli snadno připsat další vlastnosti, např. hmotnost, že. Voláním `Kdtree` vzniká objekt strom, přičemž se spouští příslušná metoda `__init__`, kde se definuje rekurzivní funkce `build_tree`. Ta třídí částice při prvním volání podle jejich souřadnice x , nalezne index mediánu i a voláním `Node` tvoří jeden uzel, sestávající z částice, levé větve (s částicemi majícími $x < x_i$) a pravé větve ($x > x_i$), kterýžto obratem vrátí. Při druhém volání třídí podle y , pak znovu dle x , y , atd. až nezbude nic. Výsledný strom je nakreslen na obr. 14 a 15.

Pro hledání nejbližšího souseda bychom do třídy `Kdtree` doplnili vhodnou metodu, opět s jistou rekurzivní funkcí:

```

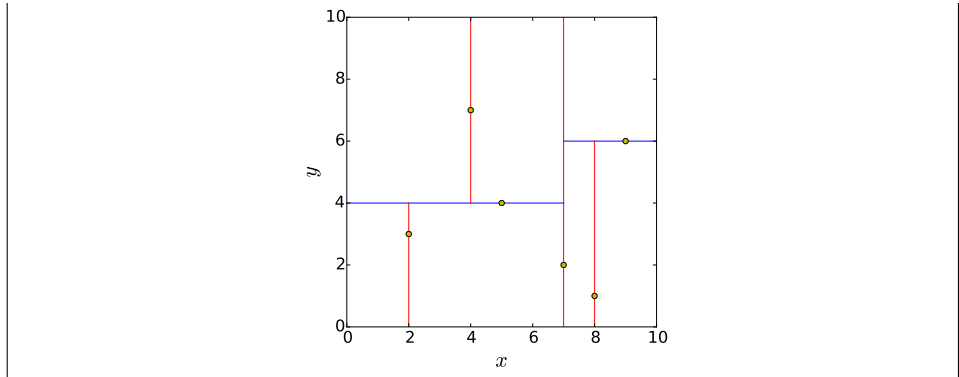
def nearest_neighbor(self, destination):
    best = [None, float('inf')] # particle & squared distance

    def recursive_search(node, depth=0):
        if node is None:
            return

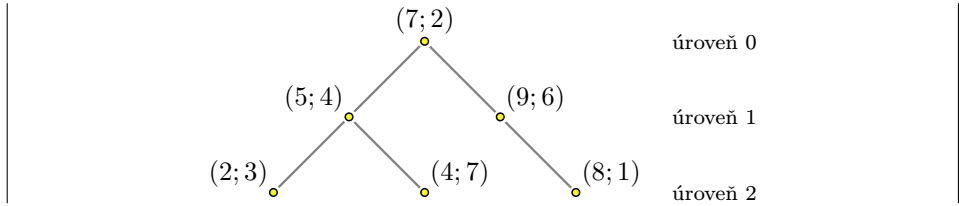
        particle, left, right = node.particle, node.left, node.right
        node_sqdist = square_distance(particle.r, destination)
        if node_sqdist < best[1]:
            best[:] = particle, node_sqdist # in-place!

        axis = depth % self.k
        diff = destination[axis] - particle.r[axis]

```



Obr. 14 — Dvourozměrný strom vytvořený ze šesti (žlutých) částic. Svislé a vodorovné linie vyznačují, kde se strom rozvětvil podle souřadnice x (červeně) nebo y (modře). Jako první proběhlo větvení v bodě se souřadnicí $x_i = 7$.



Obr. 15 — Jiné znázornění téhož stromu, na kterém je patrné větvení. Uzel v úrovni 0 se nazývá kořen, kdežto uzly bez větví v nejnižších úrovních (zde 2) se nazývají listy.

```

close, away = (left, right) if diff <= 0.0 else (right, left)

recursive_search(close, depth+1)
if diff**2 < best[1]:
    recursive_search(away, depth+1)

recursive_search(self.root)
return best[0], math.sqrt(best[1])

```

a volali ji jako `particle`, `dist = kdtree.nearest_neighbor((8, 5))`. Vrátila by pochopitelně (9, 6) a 1.4242...¹⁵. Vidíme, že doslova na pár řádcích lze dosáhnout kýžené složitosti, respektive jednoduchosti. Úprava pro hledání N_{okolo} nejbližších částic jest triviální.

S výhodou můžeme strom použít i pro rychlý, ale jen *přibližný* výpočet gravitačního zrychlení. Prerekvizitou je, že si pro všechny uzly (rekurzivně) spočteme jejich celkovou hmotnost `node.tm`, polohu těžiště `node.cm` a kvadrát celkového rozměru `node.sqsize`. Pak si zvolíme *otevírací úhel* φ_{open} v radiánech a zrychlení spočteme (rekurzivně):

¹⁵ Alternativně se místo stromu používá lineární seznam (angl. linked list).


```

def compute_gravity(self, destination, phi=0.5):
    phi2 = phi*phi
    eps = 1.e-16

    def recursive_gravity(node):
        dist2 = square_distance(node.cm, destination)
        ag = [0.0] * self.k

        if node.sqsize/(dist2+eps) < phi2: # do NOT open this node
            if dist2 > eps:
                tmp = node.tm/(dist2*math.sqrt(dist2))
                for i in xrange(0, self.k):
                    ag[i] = tmp*(node.cm[i]-destination[i])
            else:
                dist2 = square_distance(node.particle.r, destination)
                if dist2 > eps:
                    tmp = node.particle.m/(dist2*math.sqrt(dist2))
                    for i in xrange(0, self.k):
                        ag[i] = tmp*(node.particle.r[i]-destination[i])

                for branch in node.left, node.right:
                    if branch is not None:
                        accel = recursive_gravity(branch)
                        for i in xrange(0, self.k):
                            ag[i] += accel[i]

        return ag

    return recursive_gravity(self.root)
    
```

Když je uzel (se svými větvemi) malý nebo daleko, takže vytnutý úhel $\varphi < \varphi_{\text{open}}$, počítáme pouze gravitaci těžiště. V opačném případě uzel otevřeme a sčítáme gravitaci částice a obou větví. Čím menší φ_{open} , tím přesnější výsledek, ale při $\varphi_{\text{open}} \rightarrow 0$ skončíme samozřejmě s $\mathcal{O}(N^2)$.

2.8 Multipólový rozvoj

Existuje ovšem možnost, jak výpočet gravitace zpřesnit i při zachování složitosti $\mathcal{O}(N \log_2 N)$. Namísto pouhého těžiště spočteme pro soubor N hmotných bodů vícero gravitačních momentů neboli *multipólů* (Stadel 2001, str. 8). Využijeme přitom *řádovou* notaci, kdy se podtržením označuje nikoli index nýbrž *počet* indexů:

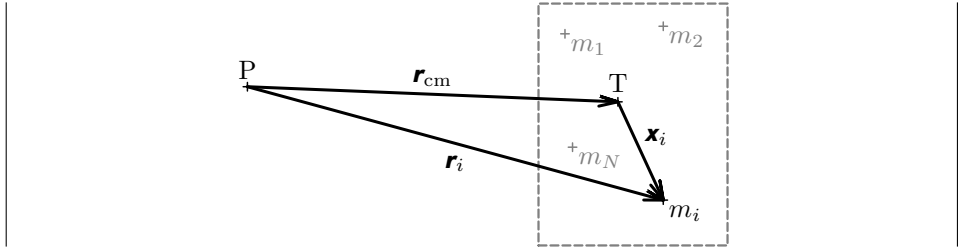
$$M^n \equiv \sum_i^N m_i x_i^n. \quad (62)$$

Pak $M^0 \equiv M = \sum_i m_i$ je monopól, tj. skalár známý jako celková hmotnost, $M^1 \equiv M^j = \sum_i m_i x_i^j$ dipól, vektor odpovídající těžišti (který bude nulový, budeme-li $\mathbf{x}_i$ k těžišti $\mathbf{r}_{\text{cm}}$ vztahovat, ale spočteme si jej pro kontrolu), $M^2 \equiv M^{jk} = \sum_i m_i x_i^j x_i^k$ kvadrupól, $M^3 \equiv M^{jkl}$ oktapól, $M^4 \equiv M^{jklm}$ hexadekupól, příp. tenzory řádů ještě vyšších.

Gravitační potenciál souboru hmotných bodů posléze můžeme vyjádřit pomocí Taylorova rozvoje okolo těžiště (viz obr. 16):

$$\Phi = \sum_i \overbrace{-\frac{G}{|\mathbf{r}_i|}}^{\gamma(r_i)} m_i = \sum_i m_i \gamma(|\mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{x}_i|) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\partial_n \gamma(r_{\text{cm}})] M^n, \quad (63)$$

kde jsme promptně využili definice (62) a zkráceného zápisu $\partial_n \equiv \partial/\partial r^n$. Aproximace pochopitelně spočívá ve sčítání jen do $n < \infty$, např. 4.



Obr. 16 — K výpočtu gravitačního potenciálu Φ v bodě P, způsobovaného soustavou N hmotných bodů. Bod T označuje polohu těžiště této soustavy. Podle Stadel (2001).

Abychom nepočítali spočtené, měli bychom multipóly spočtené pro větve využít pro výpočet multipólu uzlu. Nejedná se ovšem o triviální součet, protože se posunuje poloha těžiště! Musíme proto použít Steinerovu větu, respektive její zobecnění v „šílené“ závorkové notaci, kdy závorky uzavřené přes podtržené indexy značí sčítání přes všechny unikátní permutace (Stadel 2001, str. 17):

$$M_{\text{posunuto}}^n = \sum_{m=0}^n M^{(n-m} d^m), \quad (64)$$

kde vektor d^j je onen posun. Při implementaci je však vše nutné rozepisovat...

2.9 Počáteční a okrajové podmínky

Vytvoření počátečních podmínek pro simulace srážek je jednoduché — spočívá generování požadovaného počtu částic SPH, jejich rozmístění uvnitř koule, resp. simulovaného tělesa, přiřazení počátečních ρ_0 , $\mathbf{v}_0$, U_0 . Často se používá rovnoměrné rozmístění částic; nelze použít zcela náhodné, protože by vznikaly nereálně velké gradienty. Možná je optimální něco mezi tím (viz Diehl aj. 2012).

Okrajové podmínky jsou ještě jednodušší, neboť okolo je vakuum, čili nemusíme dělat nic. Ostatně metoda SPH je pro tento případ zvláště vhodná.

V opačném (horším) případě bychom museli vytvářet *virtuální částice* s vhodnými vlastnostmi, které by vymezovaly hranici. Připisuje se jim odpudivá síla, která brání unikání normálních částic z daného prostoru. Druhou možností je použití

duchařských částic, které aktuální stav částic uvnitř prostoru zrcadlí vně, pouze rychlosti jsou opačné.

2.10 Fragmentační fáze

Po kontaktu projektilu a terče začíná první fáze srážky, a to hydrodynamická fragmentace terče. Pro terče o velikosti planetek ($D \lesssim 100$ km) lze simulaci provádět metodou SPH (Benz a Asphaug 1994) bez vlivu gravitace, tzn. bez řešení Poissonovy rovnice.¹⁶ Požadujeme ale, aby její trvání odpovídalo přinejmenším době průchodu rázové vlny terčem tam a zpět:

$$\Delta t_{\min} = \frac{2D}{v_{\text{imp}}} \simeq 40 \text{ s}.$$

Naopak nejdelší přípustná doba je dána poměrem typické rychlosti výhozu v_{ej} , což přirozeně bývá $v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM/R}$, a gravitačního zrychlení $a_g = GM/R^2$, čili:

$$\Delta t_{\max} = \frac{v_{\text{esc}}}{a_g} = \sqrt{\frac{3}{2\pi G\rho}} \simeq 10^3 \text{ s}.$$

Průběh jedné takové simulace zachycuje obr. 17.

2.11 Reakumulační fáze

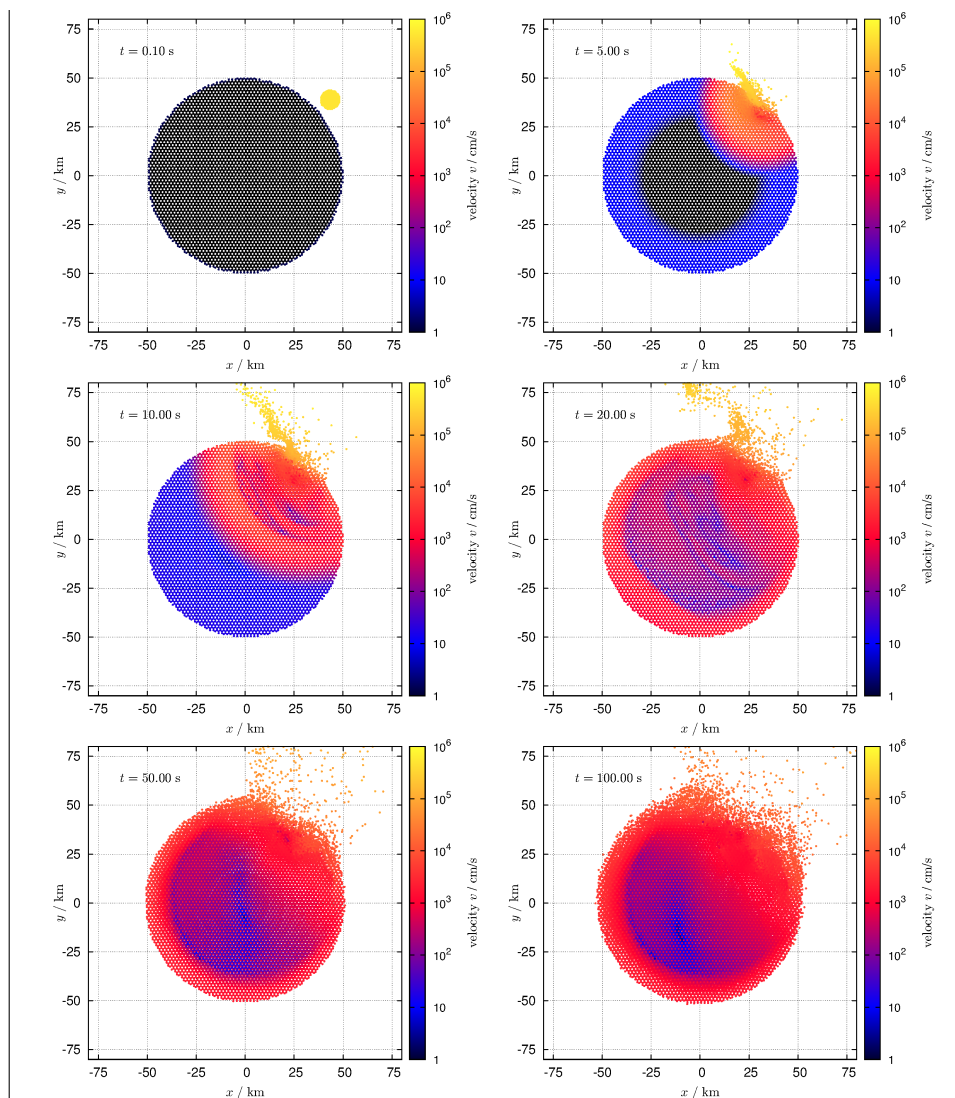
Druhou navazující fází je gravitační reakumulace. Tu je možno v prvním přiblížení počítat naopak *bez* jakékoliv hydrodynamiky, jako čistě gravitační interakci fragmentů počítanou N -částicově (Richardson et al. 2000). Výsledek hydrodynamického výpočtu se ovšem musí nějak transformovat do podoby počátečních podmínek pro pevné částice. Dalšími obvyklými zjednodušujícími předpoklady jsou: i) všechno jsou koule; ii) při prvním dotyku se koule spojují do větší koule. Ztrácíme tím samozřejmě jakékoliv informace o rotaci nebo tvaru fragmentů. Počáteční poloměry koulí mohou být vypočteny z vlastností částic SPH jako:

$$R_i = \frac{3m_i}{4\pi\rho_i},$$

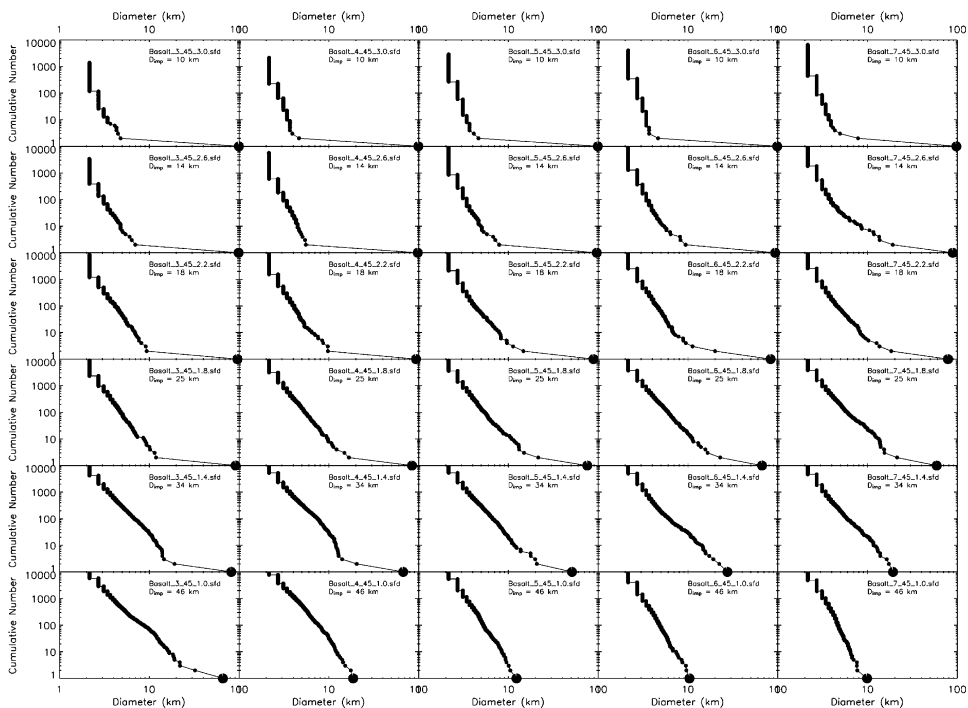
příčemž částice zplynněné ($U_i \gtrsim U_{\text{cv}}$) se zahazují. Navíc, aby byla úloha výpočetně zvládnutelná, používá se výše uvedená přibližná metoda k -d stromu, čili působení vzdálených částic se nepočítá jednotlivě, ale hromadně.

Výsledek celé simulace (obr. 19) lze porovnávat například s pozorovaným rozdělením velikostí členů dané rodiny asteroidů (Durda aj. 2007, Benavidez aj. 2012), případně s pozorovaným rychlostním polem (Nesvorný aj. 2006). Musíme samozřejmě uvážit, že obojí mohlo být změněno při dlouhodobém orbitálním vývoji rodiny a sekundárních srážkách.

¹⁶ Pro impakty planetárních rozměrů si to ovšem dovolit nemůžeme (Canup 2004).

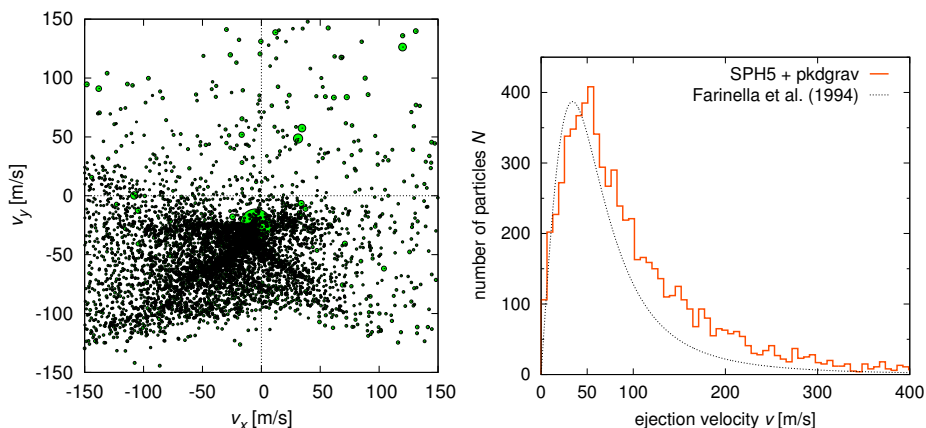


Obr. 17 — Simulace srážky mezi terčem o průměru $D = 100$ km a projektilem s $D = 10$ km, s impaktní rychlostí $v_{\text{imp}} = 5$ km/s a úhlem $\varphi_{\text{imp}} = 45^\circ$. Graf ukazuje polohy (x, y) přibližně $1,42 \cdot 10^5$ SPH částic; jejich barvy odpovídají logaritmu rychlosti v (v jednotkách cm s^{-1}). Integrace byla řízena Courantovým číslem $C = 1,0$, typický časový krok byl tedy $\Delta t \simeq 10^{-4}$ s, trvání $t_{\text{stop}} = 100$ s. Materiálové parametry pro bazalt (Benz and Asphaug 1999): hustota při nulovém tlaku $\rho_0 = 2,7 \text{ g cm}^{-3}$, objemový modul $A = 2,67 \cdot 10^{11} \text{ erg cm}^{-3}$, nelineární tlakový člen $B = 2,67 \cdot 10^{11} \text{ erg cm}^{-3}$, Tillotsonovy parametry $U_0 = 4,87 \cdot 10^{12} \text{ erg g}^{-1}$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\alpha = 5,0$, a $\beta = 5,0$, počínající vypařování $U_{\text{iv}} = 4,72 \cdot 10^{10} \text{ erg g}^{-1}$, úplné vypaření $U_{\text{cv}} = 1,82 \cdot 10^{11} \text{ erg g}^{-1}$, modul pružnosti ve smyku $\mu = 2,27 \cdot 10^{11} \text{ erg cm}^{-3}$, mez pružnosti $Y = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ erg g}^{-1}$, měrná energie tavení $U_{\text{melt}} = 3,4 \cdot 10^{10} \text{ erg g}^{-1}$, parametry Weibullova rozdělení poruch $k = 4,0 \cdot 10^{29} \text{ cm}^{-3}$, a $m = 9,0$. Počítáno programem SPH5 (Benz and Asphaug 1994).



Obr. 18 — Kumulativní rozdělení velikostí $N(>D)$ pro podmnožinu 30 různých simulací srážek monolitických asteroidů s průměrem terče $D = 100$ km a impaktním úhlem $\phi_{\text{imp}} = 45^\circ$. Jednotlivé simulace se liší rozměrem projektilu $d = 10, 14, 18, 25, 34$ a 46 km (směrem shora dolů) a impaktní rychlostí $v_{\text{imp}} = 3, 4, 5, 6$ a 7 km/s (zleva doprava). To odpovídá rozsahu od pouhého kráterování po katastrofický rozpad, což se projevuje i zřetelně odlišnými histogramy $N(>D)$.

Převzato z Durda aj. (2007).



Obr. 19 — Vlevo konečné rychlosti těles po simulaci srážky terče $D = 100$ km a projektilu $d = 25$ km, s rychlostí $v_{\text{imp}} = 5$ km s $^{-1}$ a úhlem $\phi_{\text{imp}} = 45^\circ$. Velikosti symbolů odpovídají hmotnostem.

Vpravo odpovídající diferenciální histogram rychlostí výhozu $dN(v_{ej})$, v porovnání s jednoduchým modelem Farinelly aj. (1994). Vidíme, že vrchol histogramu je na hodnotě srovnatelné s únikovou rychlostí v_{esc} původního mateřského tělesa. Počítáno programem Pkdgrav (Richardson aj. 2000).

2.12 Škálovací zákon pro terče

Z celé sady simulací lze odvodit škálovací zákon $Q_D^*(r)$ (Benz a Asphaug 1999), čili závislost pevnosti (v jednotkách J kg^{-1}) na poloměru r , která je nejdůležitějším vstupem pro statistické modely srážek (viz kap. ??). Stačí pomocí interpolace zjistit, při jaké kinetické energii E_k projektilu dochází k rozptýlení poloviny hmotnosti terče. Průběh funkce lze vystihnout polynomem:

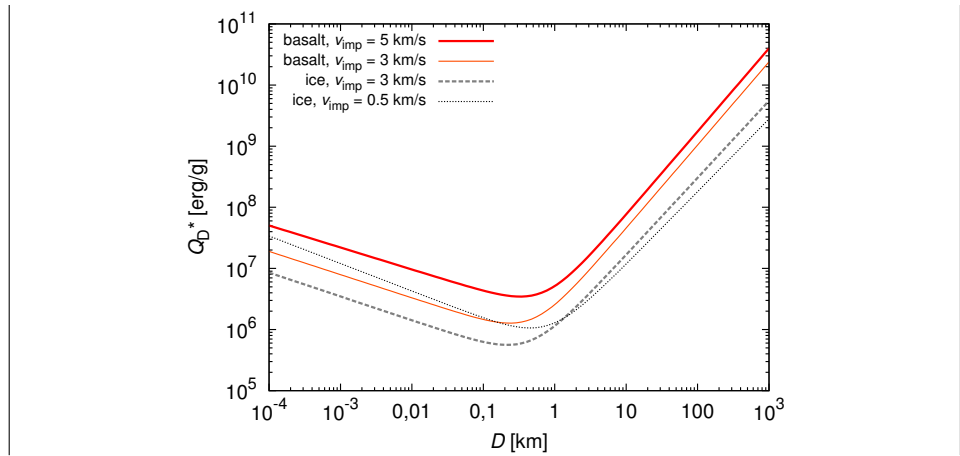
$$Q_D^* = \frac{1}{q_{\text{fact}}} (Q_0 r^a + B \rho r^b), \quad (65)$$

kde hodnoty parametrů pro různé materiály shrnuje tab. 1 a funkci obr. 20. Faktor q_{fact} se užívá pouze tehdy, chceme-li vyjádřit, že pevnost je q krát menší než nějaký standardní materiál; jinak nemá smyslu. Všimněme si, že a je záporné a b kladné. Důvodem prvního je skutečnost, že v malých balvanech je málo poruch (prasklin), a tudíž jsou pevnější. Tato část škálovacího zákona je ostatně ověřena laboratorními experimenty. Důvodem druhého je rostoucí gravitační vazebná energie E_v , ale závislost nebývá tak strmá jako $b = -2$, neboť nerozptylujeme celý terč, nýbrž pouze nějakou polovinu.

	v_{imp} km s	Q_0 erg g ⁻¹	B erg cm ³ g ⁻²	a	b
basalt	5	$9,0 \cdot 10^7$	0,5	-0,36	1,36
led	3	$1,6 \cdot 10^7$	1,2	-0,39	1,26

Tab. 1 — Parametry škálovacího zákona (65) pro basaltický a ledový materiál s monolitickou strukturou. Převzato z Benz a Asphaug (1999).

- [21] BENAVIDEZ, P. G., DURDA, D. D., ENKE, B. L., BOTTKKE, W. F., NESVORNÝ, D., RICHARDSON, D. C., ASPHAUG, E., MERLINE, W. J. *A comparison between rubble-pile and monolithic targets in impact simulations: Application to asteroid satellites and family size distributions. Icarus*, **219**, 57, 2012.
- [22] BENZ, W., ASPHAUG, E. *Impact simulations with fracture. I. Method and tests. Icarus*, **107**, s. 98–116, 1994.
- [23] BENZ, W., ASPHAUG, E. *Catastrophic disruptions revisited. Icarus*, **142**, s. 5–20, 1999.
- [24] CANUP, R. M. *Simulations of a late lunar-forming impact. Icarus*, **168**, 433, 2004.
- [25] COSSINS, P. *Smoothed particle hydrodynamics. ArXiv*, 1007.1245v2, 2010.
- [26] DIEHL, S., ROCKEFELLER, G., FRYER, C. L., RIETHMILLER, R., STATLER, T.S. *Generating optimal initial conditions for Smooth Particle Hydrodynamics simulations. ArXiv*, 1211.0525, 2012.
- [27] DURDA, D. D., BOTTKKE, W. F., NESVORNÝ, D., ENKE, B. L., MERLINE, W. J., ASPHAUG, E., RICHARDSON, D. C. *Size-frequency distributions of fragments from SPH/N-body simulations of asteroid impacts: Comparison with observed asteroid families. Icarus*, **186**, 498, 2007.



Obr. 20 — Škálovací zákon Q_D^* , neboli závislost pevnosti na průměru D , pro monolitický basalt a led a různé hodnoty impaktní rychlosti v_{imp} . Podle Benz a Asphaug (1999).

- [28] FARINELLA, P., FROESCHLÉ, C., GONCZI, R. *Meteorite delivery and transport*. *IAUS Conf.*, **160**, 205, 1994.
- [29] GINGOLD, R. A., MONAGHAN, J. J. *Smoothed particle hydrodynamics — Theory and application to non-spherical stars*. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **181**, s. 375–389, 1977.
- [30] GODUNOV, S. K. *A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hyperbolic equation*. *Math. Sbornik*, **47**, s. 271–306, 1959.
- [31] LUCY, L. B. *A numerical approach to the testing of the fission hypothesis*. *Astron. J.*, **82**, s. 1013–1024, 1977.
- [32] MAINDL, T. I., SCHÄRFER, CH., SPEITH, R. *SPH for simulating impacts and collisions* [online]. [cit. 2014-08-12], (<http://www.univie.ac.at/adg/Teaching/Planetformation2012/NF-NSPH2013-01-22.pdf>), 2013.
- [33] MELOSH, H. J. *A new and improved equation of state for impact computations*. *LPI Conf.*, **31**, 1903, 2000.
- [34] MONAGHAN, J. *On the problem of penetration in particle methods*. *J. Comput. Phys.*, **82**, 1, s. 1–15, 1989.
- [35] NESVORNÝ, D., ENKE, B. L., BOTTKE, W. F., DURDA, D. D., ASPHAUG, E., RICHARDSON, D. C. *Karin cluster formation by asteroid impact*. *Icarus*, **183**, s. 296–311, 2006.
- [36] NIEDOBA, P. *Bezsítové metody ve výpočetní dynamice tekutin*. Diplomová práce, VUT Brno, 2012.
- [37] PRICE, D. J. *Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics*. *J. Comp. Phys.*, **231**, 759, 2012.
- [38] RICHARDSON, D. C., QUINN, T., STADEL, J., LAKE, G. *Direct large-scale N-Body simulations of planetesimal dynamics*. *Icarus*, **143**, 45, 2000.
- [39] ROE, P. L. *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*. *J. Comput. Phys.*, **43**, s. 357–372, 1981.
- [40] SOD, G. A. *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*. *J. Comput. Phys.*, **27**, s 1–31, 1978.
- [41] STADEL, J. G. *Cosmological N-body simulations and their analysis*. Ph.D. Thesis, Univ. of Washington, 2001.
- [42] TILLOTSON, J. H. *Metallic equations of state for hypervelocity impact*. *General Atomic Report*, GA-3216, 1962.

3 Rovnice vedení tepla

Ač by se vedení tepla v asteroidech mohlo zdát pouhou kuriozitou, jde o základní problém ve fyzice malých těles. Anizotropie tepelného vyzařování s povrchu asteroidu je příčinou *disipace* (nebo i růstu) mechanické energie; zatímco samotné gravitační působení by bylo konzervativní. Trajektorie proto nejsou přibližně eliptické, nýbrž přibližně spirálové, což se zřetelně projevuje na struktuře celého hlavního pásu asteroidů i počtu blízkozemních objektů.

3.1 Fourierovský rozvoj zářivého toku

Předtím, než budeme analyticky řešit rovnici vedení tepla uvnitř, se musíme zabývat jednou okrajovou záležitostí — ozářením. Pro určité místo na rovníku rotujícího asteroidu je tok dán periodickou funkcí ($P = 2\pi/\omega$):

$$\mathcal{F}(t) = (1 - A)\Phi \Xi(\cos \omega t), \quad (66)$$

kde $\Xi(x) \equiv xH(x)$, $H(x) = 0$ pro $x < 0$ a $H(x) = 1$ pro $x \geq 0$ je Heavisidova skoková funkce; $\Phi = L/(4\pi r^2)$ zářivý tok od Slunce v dané vzdálenosti r a A Bondovo albedo. Neboť je po částech spojitě diferencovatelná, lze počítat ji příslušnou Fourierovu řadu:

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n e^{in\omega t}, \quad (67)$$

jejíž koeficienty:

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{P} \int_0^P \mathcal{F}(t) e^{in\omega t} dt. \quad (68)$$

Konkrétně člen $\mathcal{F}_0$:

$$\frac{1}{P} \int_0^P \Xi(\cos \omega t) dt = \frac{2}{P} \int_0^{\frac{P}{4}} \cos \omega t dt = \frac{2}{P} \left[\frac{\sin \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{P}{4}} = \frac{1}{\pi}$$

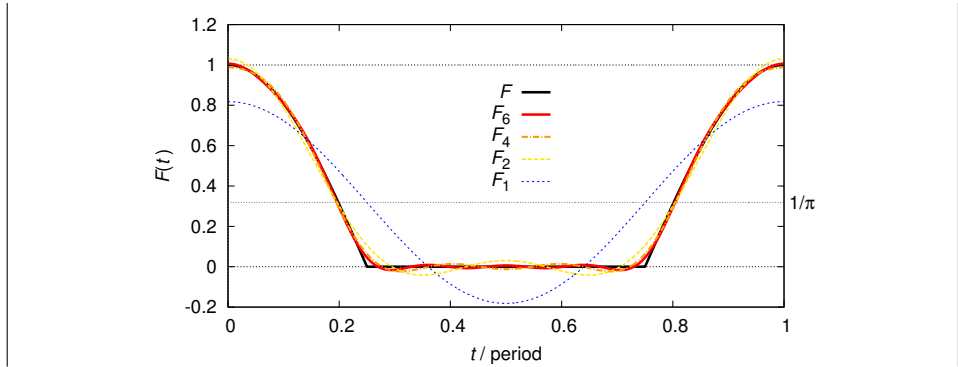
a člen $\mathcal{F}_{\pm 1}$:

$$\frac{2}{P} \int_0^{\frac{P}{4}} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{P} \int_0^{\frac{P}{4}} (\cos 2\omega t + 1) dt = \frac{2}{P} \left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} + t \right]_0^{\frac{P}{4}} = \frac{1}{4},$$

atd.

Do 6. řádu ($\mathcal{F}_{\pm 6}$) pak vypadá řada následovně (viz obr. 21):

$$\mathcal{F}(t) \doteq (1 - A)\Phi \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega t - \frac{2}{15\pi} \cos 4\omega t + \frac{2}{35\pi} \cos 6\omega t \right). \quad (69)$$



Obr. 21 — Zářivý tok $\mathcal{F}(t)$ od Slunce na rovníku rotujícího asteroidu a jeho postupná aproximace několika členy fourierovské řady, $\mathcal{F}_0$ až $\mathcal{F}_6$. Hodnoty vynesené v grafu jsou v jednotkách $(1 - A)\Phi$, kde A označuje Bondovo albedo a Φ tok záření (ve W m^{-2}) v dané vzdálenosti od Slunce.

3.2 Analytické jednorozměrné řešení

Existují-li (alespoň přibližná) analytická řešení, lze pomocí nich ověřovat správnost (obdobně zjednodušených) numerických řešení. Proto se budeme zprvu zabývat rovnicí vedení tepla v nejjednodušším jednorozměrném případě. Neznamena to pochopitelně, že celý asteroid je jednorozměrný, nýbrž se představujeme sloupec materiálu s Neumannovou okrajovou podmínkou na povrchu a Dirichletovou v hloubce:

$$\rho C \partial_t u - \partial_x K \partial_x u = 0, \quad (70)$$

$$K \partial_x u + \epsilon \sigma u^4 = \mathcal{F}(t) \quad \text{pro } x = 0, \quad (71)$$

$$u = \text{konst.} \quad \text{pro } x \rightarrow -\infty, \quad (72)$$

kde $u(x, t)$ označuje teplotu, jakožto neznámou funkci souřadnice a času, ρ hustotu, C měrnou tepelnou kapacitu, K tepelnou vodivost, ϵ infračervenou emisivitu, σ Stefanovu–Boltzmannovu konstantu a $\mathcal{F}(t)$ zářivý tok dle (66). Jakékoliv laterální vedení tepla zanedbáváme.

Vzhledem k charakteru (69) zkusíme nalézt *ustálené*¹⁷ řešení ve tvaru Fourierovy řady:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x) e^{in\omega t}. \quad (73)$$

Je-li $K = \text{konst.}$, zavedeme tepelnou difuzivitu $\chi \equiv \frac{K}{\rho C}$. Dosadíme-li řadu do (70), obdržíme:

$$\sum_n u_n in\omega e^{in\omega t} - \chi \sum_n \partial_{xx} u_n e^{in\omega t} = 0,$$

¹⁷ Samozřejmě se tím připravujeme o možnost popisovat přechodové stavy, jež nejsou periodické, např. postupný ohřev z nějaké konstantní teploty.

čili pro každé n musí platit:

$$\partial_{xx}u_n = \frac{in\omega}{\chi}u_n. \quad (74)$$

Obecná řešení se evidentně liší pro $n = 0$, $n > 0$ a $n < 0$. Neboť víme, že $\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $\sqrt{-i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$, vycházejí:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 + b_0x, \\ u_n(x) &= a_n e^{-(1+i)\beta_n x} + b_n e^{(1+i)\beta_n x}, \\ u_{-n}(x) &= a_{-n} e^{-(1-i)\beta_n x} + b_{-n} e^{(1-i)\beta_n x}, \end{aligned}$$

kde jsme kromě integračních konstant a_n , b_n byli nuceni pro zkrácení zápisu zavést $\beta_n \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \frac{|n|\omega}{\chi}}$; shodou okolností je $1/\beta_n$ hloubka proniku tepelné vlny. Neboť nás vesměs zajímají řešení nedivergující, je $b_n = 0$, a tedy $u_0 = \text{konst.}$

Zatím neznámá a_n určíme jako obvykle z konkrétní okrajové podmínky (71). Povrchová teplota je zřejmé:

$$u(0, t) = \sum_n a_n e^{in\omega t}$$

a její derivace:

$$\partial_x u(0, t) = - \sum_{n>0} a_n (1+i)\beta_n e^{in\omega t} - \sum_{n>0} a_{-n} (1-i)\beta_n e^{-in\omega t}.$$

Abychom nemuseli umocňovat do nekonečna, budeme předpokládat (a později ověřovat) malé změny teploty $u_n \ll u_0$, což by umožnilo provést linearizaci:

$$u^4 = \left(u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n e^{in\omega t} \right)^4 \doteq u_0^4 + 4u_0^3 \sum_{n \neq 0} u_n e^{in\omega t}.$$

Po dosazení do (71):

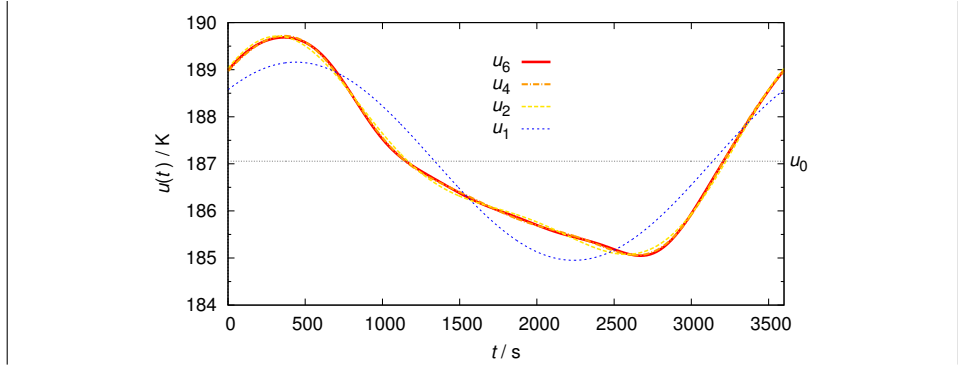
$$\begin{aligned} & -K \sum_{n>0} a_n (1+i)\beta_n e^{in\omega t} - K \sum_{n>0} a_{-n} (1-i)\beta_n e^{-in\omega t} + \\ & + \epsilon \sigma u_0^4 + 4\epsilon \sigma u_0^3 \sum_{n \neq 0} a_n e^{in\omega t} = \sum_n \mathcal{F}_n e^{in\omega t} \end{aligned}$$

vidíme, že se musejí rovnat koeficienty u všech $e^{in\omega t}$, odkud:

$$u_0 = \sqrt[4]{\frac{\mathcal{F}_0}{\epsilon \sigma}}, \quad (75)$$

$$a_n = \frac{\mathcal{F}_n}{4\epsilon \sigma u_0^3 + K(1+i)\beta_n}, \quad (76)$$

$$a_{-n} = \frac{\mathcal{F}_{-n}}{4\epsilon \sigma u_0^3 + K(1-i)\beta_n}. \quad (77)$$



Obr. 22 — Povrchová teplota $u(0, t)$ daného místa na asteroidu, získaná řešením jednorozměrné rovnice vedení tepla, respektive její postupné aproximace několika fourierovskými členy u_0 až u_6 . Volené parametry jsou: rotační perioda $P = 1$ h, vzdálenost od Slunce $r = 2,5$ au, Bondovo albedo $A = 0,1$, infračervená emisivita $\epsilon = 0,9$, hustota $\rho = 2\,500$ kg m⁻³, měrná tepelná kapacita $C = 480$ J kg⁻¹ a tepelná vodivost $K = 1$ W m⁻¹ K⁻¹.

Výsledná funkce $u(0, t)$ je zobrazena na obr. 22. Zřetelný je fázový posun oproti $\mathcal{F}(t)$. Pohledem na něj zároveň ověříme náš předpoklad $u_n \ll u_0$; o.k.

3.3 Metoda konečných diferencí (FDM)

Když podmínky pro linearizaci nejsou splněny, uchýlíme se k řešení numerickému. Navíc lze studovat i stavy přechodové. Všechny derivace (operátory) proto převedeme na konečné difference, což je obzvláště snadné, když je geometrie jednoduchá (jednorozměrná).

Explicitní schéma. Převedme nejprve 1. derivaci podle času:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t},$$

kde jsme zavedli horní indexy n a $n-1$, odpovídající času novému ($t + \Delta t$) a starému (t). Vyjádření 2. derivace podle souřadnice je prostým rozdílem prvních:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} - \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2},$$

kde jsme zavedli dolní indexy $j+1$, j a $j-1$ pro tři sousedící body. Při dosazování do (70) se musíme především rozhodnout, v jakém čase vyčíslíme prostorové derivace! Pokud ve starém:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \chi \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0,$$

tak nám to umožňuje explicitně vyjádřit nové teploty:

$$u_j^n = u_j^{n-1} + \frac{\chi \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) \quad \text{pro } j = 1..M-1.$$

Toto numerické schéma se nazývá explicitní dopředný Euler, často angl. forward time centered space nebo zkr. FTCS.

Je sice nejjednodušší, ale před jeho použitím musíme zkontrolovat splnění *von Neumannova kritéria*:

$$\frac{2\chi\Delta t}{\Delta x^2} < 1,$$

bez kterého není zaručena stabilita, resp. je zaručena nestabilita. Je však třeba důsledně rozlišovat — stabilita v žádném případě není konvergence k neznámému řešení! Tu musíme jako vždy ověřovat např. sledováním změn $u(x, t)$ při dalším zmenšování kroku časového Δt i prostorového Δx .

Na povrchu $j = 0$ ani v hloubce $j = M$ nelze vyčíslovat druhou derivaci, neboť nemáme třetí bod. Právě proto potřebujeme (diskretizované) okrajové podmínky (71) a (72). Konkrétně je:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} \simeq \frac{u_0 - u_1}{\Delta t},$$

čili:

$$K \frac{u_0^n - u_1^n}{\Delta t} + \epsilon \sigma (u_0^n)^4 = \mathcal{F}(t),$$

což představuje polynom 4. stupně pro u_0^n (u_1^n již známe):

$$\epsilon \sigma (u_0^n)^4 + \frac{K}{\Delta t} u_0^n - \frac{K}{\Delta t} u_1^n - \mathcal{F}(t) = 0;$$

řeší se numericky (např. Laguerrovou metodou).

Okrajová podmínka v (konečné) hloubce $x_M \gg \beta$ je o dost jednodušší:

$$u_M = u_{\text{eq}},$$

ale rovnovážnou teplotu musíme volit obezřetně, abychom si nevynutili řešení nesmyslné.

Implicitní schéma. Použijeme-li namísto starých teplot nové:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \chi \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0,$$

jedná se o poněkud jiný problém:

$$-\overbrace{\frac{\chi\Delta t}{\Delta x^2}}^a u_{j+1}^n + \left(1 + \frac{2\chi\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_j^n - \frac{\chi\Delta t}{\Delta x^2} u_{j-1}^n = u_j^{n-1} \quad \text{pro } j = 1 \dots M-1,$$

neboli:

$$u_j^n A_{ij} = B_i,$$

kde matice je tridiagonální řídká:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -a & 1+2a & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a & 1+2a & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (78)$$

a pravá strana:

$$B = \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n-1} \\ u_M^n \end{pmatrix}. \quad (79)$$

V každém kroku tedy musíme invertovat matici (společně s neustále se měnící pravou stranou)! Takové schéma se nazývá implicitní zpětný Euler, angl. backward time centered space, zkr. BTCS.

Aby matice nezůstala singulární, je naprosto nezbytné v B_i dosadit za u_0^n , u_M^n z okrajových podmínek:

$$\epsilon\sigma(u_0^n)^4 + \frac{K}{\Delta t}u_0^n - \frac{K}{\Delta t}u_1^{n-1} - \mathcal{F}(t) = 0, \quad (80)$$

$$u_M = u_{\text{eq}}, \quad (81)$$

kde jsme si pomohli „faulem“, neboť jsme použili starou hodnotu podpovrchové teploty u_1^{n-1} namísto nové u_1^n , kterou zatím nikdo nezná; „za trest“ provedeme několik iterací.¹⁸

Hybridní schéma. Jako výhodná se ukazuje být kombinace schémat explicitního a implicitního, parametrizovaná parametrem θ :

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \theta\chi \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - (1-\theta)\chi \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0,$$

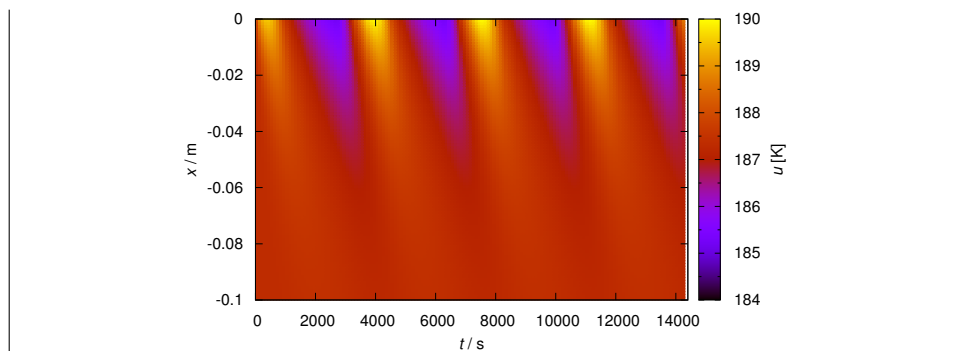
což opět vede na soustavu:

$$u_j^n A'_{ij} = B'_i.$$

¹⁸ Druhou možností by byla linearizace 4. mocniny v (80), použití u_1^n a této rovnice namísto 1. řádku matice A_{ij} , ale linearizace se musí taktéž odčinit iteracemi.

θ	schéma	přesnost	stabilita
0	explicitní dopředný Euler	$\Delta x^2, \Delta t$	von Neumannovo kritérium
1/2	implicitní Crank–Nicolson	$\Delta x^2, \Delta t^2$	stabilní
1	implicitní zpětný Euler	$\Delta x^2, \Delta t$	stabilní

Tab. 2 — Hodnoty parametru θ , určující konkrétní schéma numerické metody FDM, přesnost schématu a případná podmínka stability.



Obr. 23 — Numerické řešení rovnice vedení tepla metodou FDM, schématem BTCS, zobrazené na grafu čas t , hloubka x ; teplota u je znázorněna barevně. Počáteční podmínka byla $u(x, t = 0) = u_{\text{eq}}$, okrajová podmínka na povrchu je zářivá (odpovídá obr. 21) a v hloubce $u(x = -0,2 \text{ m}, t) = u_{\text{eq}}$. Výpočet byl proveden včetně přechodového stavu. Tepelné parametry jsou tytéž jako na obr. 22, stejně jako průběh $u(x = 0, t)$.

Výhodou hybridního schématu s $\theta = 1/2$, nazývaného Crankovo–Nicholsonovo, je kromě bezpodmínečné stability také vyšší přesnost integrace, neboť pro výpočet 2. derivací využíváme 6 bodů (viz tab. 2; Langtangen 2003).

3.4 Slabá formulace problému

Přejdeme nyní k obecnému trojrozměrnému numerickému řešení, které je možné použít v libovolné nepravidelné geometrii, tzn. i pro celý šišatý asteroid. Rovnici vedení tepla si nejprve zapíšeme pomocí operátoru:

$$\mathcal{L} \equiv \rho C \partial_t - \nabla \cdot K \nabla, \quad (82)$$

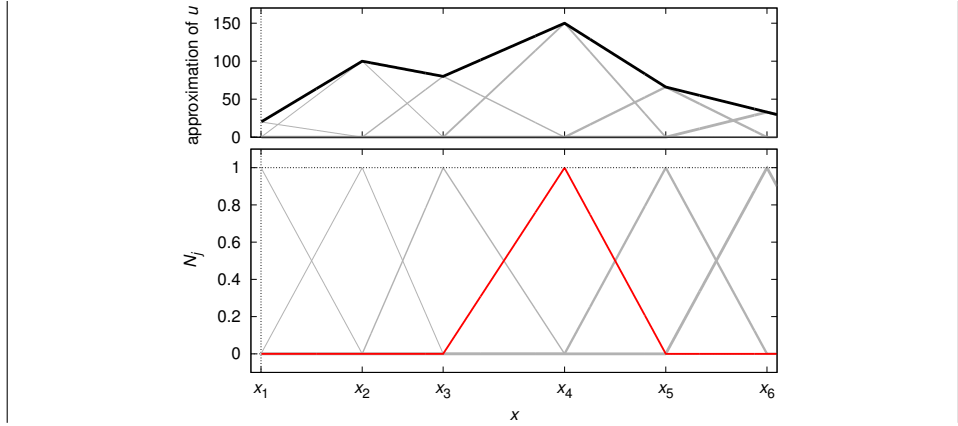
abychom její zápis maximálně zjednodušili:

$$\mathcal{L}(u) = 0; \quad (83)$$

okrajovou podmínku už máme jen jednu:

$$K \partial_n u + \epsilon \sigma u^4 = (1 - A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) \text{ na } \Gamma, \quad (84)$$

přičemž tentokrát je hranice domény v podstatě libovolná uzavřená, prozatím konvexní, takže v argumentu zářivého toku vystupuje směr ke Slunci $\mathbf{s}(t)$ a normály $\mathbf{n}(\mathbf{r})$.



Obr. 24 — Dole nejjednodušší jednorozměrné lineární báze funkce $N_j(x)$; zvýrazněná je pro $j = 4$. Nahoře je odpovídající funkce $\hat{u}$ pro případ, kdyby koeficienty byly číselně rovny: $u_1 = 20$, $u_2 = 100$, $u_3 = 80$, $u_4 = 150$, $u_5 = 66$, $u_6 = 33$. Ve dvou rozměrech by $N_j(x, y)$ měly podobu čtyřbokých jehlanů. Ve třech rozměrech bychom $N_j(\mathbf{r})$ kreslit nechtěli.

Slabá formulace problému spočívá v nahrazení (neznámé) funkce $u(\mathbf{r})$ za její přibližný rozvoj:

$$u \doteq \hat{u} = \sum_{j=1}^M u_j N_j, \quad (85)$$

kde u_j jsou neznámé číselné koeficienty a $N_j(\mathbf{r})$ známé *báze funkce* (též „konečné prvky“). Nejjednodušší funkce jsou obyčejné střechovité, které jsou nenulové jen mezi několika nejbližšími body sítě; schematicky jednorozměrně (obr. 24):

$$N_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{pro } x \in (x_{j-1}, x_j), \\ \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}} & \text{pro } x \in (x_j, x_{j+1}), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (86)$$

Samozřejmě lze volit též funkce kvadratické, kubické, harmonické, pokrývající celou oblast Ω , vlastní funkce operátoru $\mathcal{L}$, jsou-li známy, různé speciální atd. Volba vhodné báze se podobá umění.

Právě provedená diskretizace v prostoru převádí problém spojitý (hledání $u(\mathbf{r}, t)$) na diskrétní konečný (hledání u_j). Pak ale nemůže všude přesně platit (83)! Obecně je tedy:

$$\mathcal{L}(\hat{u}) \neq 0,$$

s čímž nelze být spokojen.

3.5 Metoda konečných prvků (FEM)

V metodě konečných prvků se s tím smíříme. Avšak požadujeme, aby součet *reziduí* byl nula. Nelze ovšem napsat bez rozmyslu:

$$\oint_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) d\Omega = 0,$$

protože to bychom mohli mít v levé části domény Ω kladné odchylky a v pravé záporné. Ba co hůř, s jednou rovnicí pro M neznámých u_j nenaděláme nic. Proto musíme splnění podmínky požadovat mnohokrát, vždy v omezené části Ω , kterou si vymezíme pomocí *testovací funkce* (váhy) $W_i(\mathbf{r})$:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) W_i d\Omega = 0 \quad \text{pro } i = 1 \dots M. \quad (87)$$

Zvolíme-li jednoduše $W_i \equiv N_i$, hovoříme o tradiční *Galerkinově metodě*:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) N_i d\Omega = 0 \quad \text{opět pro } i = 1 \dots M. \quad (88)$$

Rozepsáním $\mathcal{L}$ pro náš problém pak obdržíme:

$$\int_{\Omega} \rho C \partial_t \hat{u} N_i d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u}) N_i d\Omega = 0.$$

Protože divergence všeho (součinu):

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \partial_n \hat{u} N_i) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u}) N_i d\Omega + \int_{\Omega} K \nabla \hat{u} \cdot \nabla N_i d\Omega$$

a protože zároveň platí Gaussova věta:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \partial_n \hat{u} N_i) d\Omega = \int_{\Gamma} K \partial_n \hat{u} N_i d\Gamma, \quad (89)$$

plyne odtud *Greenovo lemma*:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u}) N_i d\Omega = - \int_{\Omega} K \nabla \hat{u} \cdot \nabla N_i d\Omega + \int_{\Gamma} K \partial_n \hat{u} N_i d\Gamma, \quad (90)$$

kteří se využívá pro elegantní dosazení za $K \partial_n \hat{u} = -\epsilon \sigma \hat{u}^4 + (1 - A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})$ z okrajové podmínky (84), čímž ji automaticky splňujeme a nemusíme se jí dále zabývat.

Musíme ještě provést diskretizaci v čase:

$$\partial_t \hat{u} \simeq \frac{\hat{u}^n - \hat{u}^{n-1}}{\Delta t}, \quad (91)$$

kde jsme opět horními indexy n a $n - 1$ označili hodnoty nové a staré.

Aby výsledná soustava rovnic byla a zůstala lineární, aproximujeme novou teplotu jako:

$$\hat{u}^4 \simeq (\hat{u}^{n-1})^3 \hat{u}^n; \quad (92)$$

případnou nelinearitu budeme řešit *ex post* iteracemi.

Shrneme-li naše dosavadní snažení:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \hat{u}^n N_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \hat{u}^{n-1} N_i d\Omega + \int_{\Omega} K \nabla \hat{u}^n \cdot \nabla N_i d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \epsilon \sigma (\hat{u}^{n-1})^3 \hat{u}^n N_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (1 - A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) N_i d\Gamma = 0 \quad \text{pro } i = 1 \dots M; \end{aligned} \quad (93)$$

kde to jen šlo, použili jsme nové hodnoty $\hat{u}^n$, jak je obvyklé v implicitních metodách. Evidentně jde o soustavu M lineárních rovnic pro M neznámých u_j , kterou zbývá vyřešit.

Kdybychom to vyjádřili otrocky:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \sum_j u_j^n N_j N_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \sum_j u_j^{n-1} N_j N_i d\Omega + \int_{\Omega} K \nabla \sum_j u_j^n N_j \cdot \nabla N_i d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \epsilon \sigma \left(\sum_j u_j^{n-1} N_j \right)^3 \sum_j u_j^n N_j N_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (1 - A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) N_i d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

a přeuspořádali:

$$\begin{aligned} & \sum_j u_j^n \left[\frac{\rho C}{\Delta t} \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + K \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega + \epsilon \sigma \int_{\Gamma} \left(\sum_j u_j^{n-1} N_j \right)^3 N_j N_i d\Gamma \right] = \\ & = \sum_j u_j^{n-1} \frac{\rho C}{\Delta t} \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + (1 - A) \Phi \int_{\Gamma} \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) N_i d\Gamma, \end{aligned}$$

už by bylo nad slunce jasné, že jde o soustavu typu:

$$u_j^n A_{ij} = B_i,$$

kde prvky matice jsou buď integrály, které lze pro danou síť bodů předpočítat předem (1. a 2. člen), nebo jednoduché integrály známých funkcí (3. člen). Totéž platí pro pravou stranu. Při jemné diskretizaci (velkém M) je matice A_{ij} nebezpečně velká a její inverze obtížná, nicméně bývá řídká.

3.6 Implementace v programu FreeFem++

Prakticky lze pro řešení použít program FreeFem++ (Hecht 2012), který dovoluje symbolický zápis integrálů ve stejné podobě jako rovnice (104):

```

real C = 680; // specific heat capacity [J/kg/K]
real K = 2.5; // thermal conductivity [W/m/K]
real rho = 2500; // bulk density [kg/m^3]
real epsil = 1.0; // infrared emissivity []
real sigma = 5.66962e-8; // Stefan-Boltzmann constant [W/m^2/K-4]
real A = 0.0; // Bond albedo []
real S0 = 1371.; // solar constant [W/m^2]
real r = 2.5; // distance [AU]
real Phi = S0/r^2; // solar flux [W/m^2]

real sx, sy, sz; // Sun direction []
real phi; // corresponding longitude [rad]
real theta = pi/2.; // co-latitude [rad], 0 deg ... north pole
real P = 7200.; // rotation period [s]
real t; // time [s]
real dt = 72.0; // time step [s]
real tstop = 100.*P; // time to stop [s]
int iterations = 3; // number of iterations

real chi = K/(rho*C); // thermal diffusivity [m^2 s^-1]
cout << "chi = " << chi << " m^2 s^-1" << endl;
func u0 = ((1.-A)*Phi/(4*epsil*sigma))^(1./4.); // equilibrium temperature [K]
cout << "u0 = " << u0 << " K" << endl;

load "msh3";
mesh3 Th = readmesh3("file.1.msh"); // read the mesh produced by tetgen
mesh3 Thirr; // a copy of the mesh (for shadowing)

fespace Vh(Th, P1); // the space of (linear) finite elements
Vh u, uold, v, b; // definitions of functions on this space

problem HDE(u,v) // the PDE definition, weak formulation
= int3d(Th) (rho*C/dt * u*v) // linear term
- int3d(Th) (rho*C/dt * uold*v) // from time discretization, implicit Euler
+ int3d(Th) (K * (dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) + dz(u)*dz(v))) // bilinear part
+ int2d(Th) (b * u*v) // Neumann BC
- int2d(Thirr,1) ( ((sx*N.x + sy*N.y + sz*N.z) > 0) * // zero on night side
(1-A)*Phi * (sx*N.x + sy*N.y + sz*N.z) * v); // simple irradiation

include "savedat.edp";
include "shadowxm.edp";

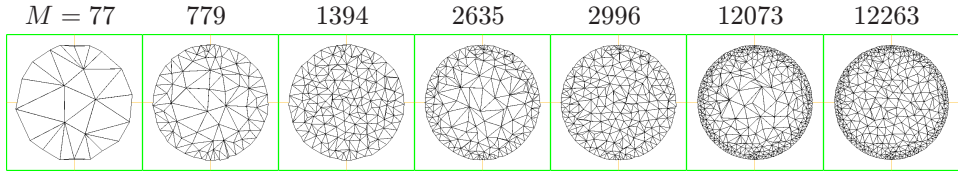
u = uold = u0; // initial condition
for (t=dt; t <= tstop; t+=dt) { // cycle in time
  phi = t/P*2*pi; // change solar unitvector
  sx = cos(phi)*sin(theta);
  sy = sin(phi)*sin(theta);
  sz = cos(theta);
  shadowxm(sx, sy, sz); // determine non-shadowed facets (Thirr)

  for (int k=0; k < iterations; k++) { // iterations due to non-linearity of BC
    b = epsilon*sigma * u^3; // semi-linearization of the u^4 term
    HDE; // solution of the PDE
  }
  uold = u; // time step
  savedat("output.dat", t, sx, sy, sz); // data output
}

```

Jediným rozdílem je drobná změna notace $\hat{u}$ na u , N_i na v . Navíc je zde naznačeno volání výpočtu stínění pro nekonvexní tvary, kde nestačí použít jen skalární součin $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$.

Triangulace. Důležitá otázka: „Jak zkonstruovat síť?“ Tzn. nejen seznam bodů, ale i jejich spojnic, podle nichž se vyčíslují báze funkce N_j . Závísí na ní nejen přesnost numerického řešení, ale i samotná možnost inverze matice A_{ij} , protože nevhodná síť může vést k singularitě. Často užívanou metodou je *Delaunayho triangulace*. V k -rozměrném prostoru zajišťuje, že pro každý útvar s $k + 1$ body (trojúhelník, čtyřstěn) jemu opsaná kružnice neobsahuje žádný další vrchol. Prakticky je možné triangulaci provést programem TetGen (Si 2006; viz obr. 25).



Obr. 25 — Různé diskretizace v prostoru, tzn. sítě čtyřstěnů vytvořené programem TetGen (Si 2006), které byly použity pro numerické řešení rovnice vedení tepla ve sférickém tělese. Číslo M označuje počet vrcholů sítě.

Radiační síla. Známe-li již povrchovou teplotu $u(\mathbf{r}, t)$, můžeme vypočítat i příslušné dynamické působení. Element radiační síly za předpokladu Lambertova rozpylu je:

$$d\mathbf{F} = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c} u^4 \mathbf{n} d\Gamma. \quad (94)$$

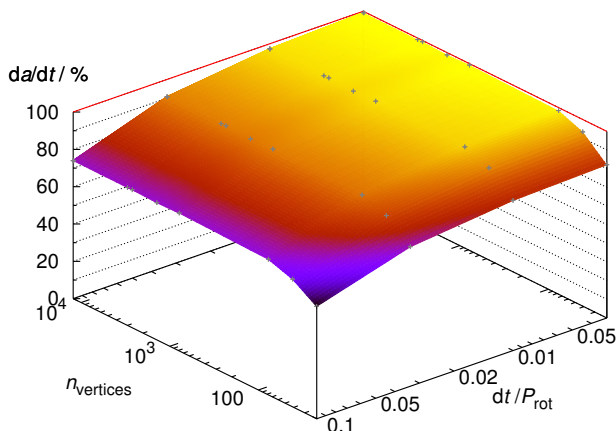
Celkové zrychlení je zřejmě $\mathbf{a} = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} d\mathbf{F}$ a moment síly $\mathbf{T} = \int_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}$. Kromě toho musíme počkat na ustálení a provést středování přes periodu rotační, v horším případě i orbitální. Z historických důvodů se působení nazývají Jarkovského jev a YORP. Pro ověření přesnosti numerického výpočtu jej můžeme porovnat s analytickou teorií pro koule (Vokrouhlický 1998; obr. 26). Příklad pro nepravidelný meteoroid je na obr. 27.

3.7 Nekonvexní stínění, tepelný a rozptýlený tok

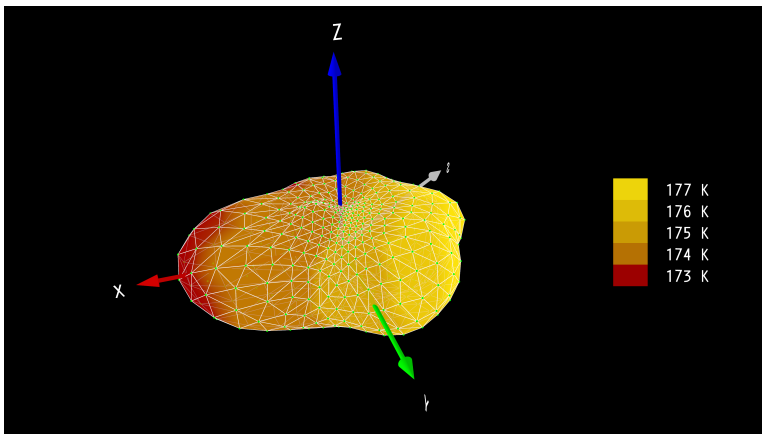
Dokonalejší modely mívají úplnější popis zářivého toku. Jednak je v zářivém toku od Slunce zohledněno stínění od jiných míst povrchu (Ševeček aj. 2015):

$$\mathcal{F} = (1 - A)\Phi\mu(\mathbf{s}, \mathbf{r})\Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}), \quad (95)$$

kde μ je funkce stínění, nabývající hodnoty 0 nebo 1. Protože je třeba pro každou plošku kontrolovat všechny plošky s $\Xi > 0$, šlo by o problém složitosti $\mathcal{O}(N^2)$. Pro daný nekonvexní tvar je ale možné jí předpočítat s určitým krokem v úhlech; pro konvexní by bylo všude $\mu = 1$.



Obr. 26 — Podíl Jarkovského driftu velké poloosy $da/dt = 2T/n$ spočteného numericky a analyticky, pro různé diskretizace v prostoru (počet M vrcholů sítě) a diskretizace v čase (časový krok Δt). Předpokládali jsme zde sférické těleso, poloměr $R = 0,1$ m, rotační periodu $P_{\text{rot}} = 2$ h. Pro $M > 10^3$ a $\Delta t/P_{\text{rot}} < 0.02$ je rozdíl mezi numerickým a analytickým řešením menší než 3%. Drift je úměrný $2T/n'$ (dle ??), kde T označuje transversální složku zrychlení $\mathbf{a}$ a n' střední pohyb.



Obr. 27 — Rozložení teploty $u(\mathbf{r}, t)$ na povrchu meteoroidu o efektivním poloměru $R \simeq 10$ cm, spočtené metodou FEM. Osy $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ jsou fixní v tělese, zatímco vektor $\mathbf{s}$ směřuje ke Slunci. Zohledněno je i nekonvexní stínění. Maximum teploty i vyzařování jsou posunuté oproti $\mathbf{s}$, což vede k nenulovému transversálnímu zrychlení měnícímu orbitální pohyb (Jarkovského jevu). Anizotropie vyzařování také vytváří nenulový moment síly měnící rotaci tělesa (jev YORP).

Další je tepelné záření přicházející od jiných míst povrchu:

$$\mathcal{F}_{\text{th}} = (1 - A_{\text{th}}) \int_{\Gamma} \epsilon' \sigma u'^4 \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma', \quad (96)$$

kde $\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ je funkce viditelnosti, opět nabývající hodnoty 0 nebo 1, v závislosti na tom, zda se plošky $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'$ mohou ozařovat; pro konvexní tvar by bylo všude $\nu = 0$. Pro vyzařování předpokládáme také Lambertův kosinový zákon. Zde musíme pro každou plošku počítat integrál přes povrch, jde tedy o problém složitosti $\mathcal{O}(N^2)$. Navíc zde v integrálu vystupuje hledaná funkce u , tzn. že se problém formálně stává integrodiferenciální; buď bychom se museli smířit s použitím starých teplot u^{n-1} , anebo provést iterování, abychom v okrajové podmínce měli skutečně u^n .

Konečně jde o rozptýlené záření od jiných míst povrchu:

$$\mathcal{F}_{\text{sc}} = (1 - A) \int_{\Gamma} A' \Phi \mu' \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}' \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma'. \quad (97)$$

Platí obdobná tvrzení jako v předchozím případě.

Při výpočtu radiační síly bychom pak měli zohlednit, že záření z dané plošky nemůže vždy nerušeně uniknout, ale může zapůsobit na tytéž plošky, které ji ozařují:

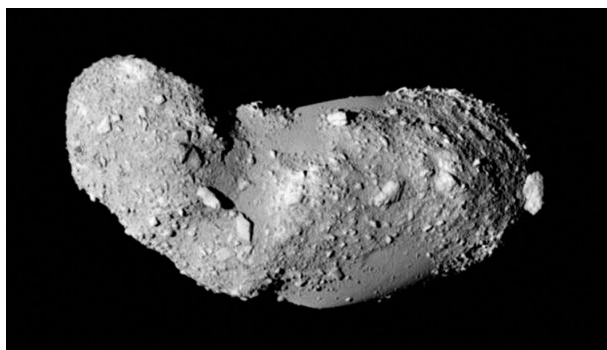
$$d\mathbf{F}' = + \frac{\epsilon \sigma}{c} u^4 \int_{\Gamma} \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma', \quad (98)$$

i účinek rozptylování sama o sobě:

$$d\mathbf{F}_{\text{sc}} = - \frac{2}{3} \frac{A\Phi}{c} \mu(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \mathbf{n} d\Gamma.$$

Balvany na Itokawě. Kromě celkového tvaru je u malých planetek nutné zohledňovat i vedení tepla v malých útvarech v transversálním směru. Například planetka (25143) Itokawa má rozměr zhruba 0,5 km, ale na detailních fotografiích je poseta balvany o rozměrech řádově $1/\beta_1 \simeq 10$ cm, což je mnohem méně než rozlišení modelu tvaru.

Slunce přitom každé ráno svítí na východní stranu balvanů, teplo je vedeno skrz od východu k západu, odpoledne je západní strana navíc osvětlená Sluncem, její teplota je tedy v průměru vyšší, což vytváří značnou asymetrii tepelného vyzařování a radiační sílu $d\mathbf{F}$ ve směru východním. Moment síly $\mathbf{T}$ od všech balvanů působí ve směru osy rotace $\vec{\omega}$ a tudíž způsobuje zrychlování dle momentové věty $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{T}$, které klidně může převažovat nad zpomalováním od celkového tvaru. Pro pozorované rozdělení velikostí balvanů ze sondy Hayabusa (Saito aj. 2010) vychází řádově $d\Omega/dt \simeq 10^{-7} \text{ rad d}^{-2}$ (Ševeček aj. 2015).



Obr. 28 — Celkový snímek planety (25143) Itokawa ze sondy Hayabusa. Rozměr planety dosahuje $0,54 \times 0,31 \times 0,25$ km. Pozorovaná rotační perioda $P = 12,1$ h není konstantní, úhlové zrychlení dosahuje $d\Omega/dt = (0,35 \pm 0,04) \cdot 10^{-7} \text{ rad d}^{-2}$. Z dálky jsou viditelné jednotlivé velké balvany. © JAXA.

- [43] ČAPEK, D. *Thermal effects in the physics and dynamics of the small Solar System bodies*. PhD. Thesis, Charles Univ., 2007.
- [44] HECHT, F. *New development in FreeFem++*. *J. Numer. Math.*, **20**, 251, 2012.
- [45] LANGTANGEN, H. P. *Computational partial differential equations. Numerical methods and Diffpack programming*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [46] SAITO, J. A. J. *Hayabusa AMICA V1.0*. NASA Planetary Data System 90, 2010.
- [47] SI, H. *TetGen — A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional Delaunay triangulator*. 2006. (<http://tetgen.berlios.de>).
- [48] ŠEVEČEK, P. *Vliv tepelné emise topografických útvarů na rotační dynamiku planetek*. Bc. Thesis, Charles Univ., 2014.
- [49] ŠEVEČEK, P., BROŽ, M., ČAPEK, D., ĎURECH, J. *The thermal emission from boulders on (25143) Itokawa and general implications for the YORP effect*. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **450**, 2104–2115, 2015.
- [50] VOKROUHLICKÝ, D. *Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. I. Linear theory*. *Astron. Astrophys.*, **335**, 1093–1100, 1998.

4 Elasticita

Jednou z praktických úloh, se kterou se často setkáváme, je výpočet deformace při určitém zatížení. V porovnání se srážkami asteroidů se zdá problém poněkud „nudnější“, protože se nikde nic nehýbe, hledáme jen finální rovnovážný stav, ale uvědomme si, že většina věcí v našem okolí je dosti *blízko* rovnováhy.

4.1 Hookeův zákon a Lamého rovnice

Pohybová rovnice pro pevnou látku, zapsaná v indexové notaci, je:¹⁹

$$\rho u_{r,tt} = \sigma_{rs,s} + \rho f_r$$

kde u_r označuje *posunutí*, index $r = 1..3$, resp. do počtu dimenzí, označuje složky souřadnic, ρ hustotu, σ_{rs} tenzor napětí (čili vnitřní síly působící na jednotku plochy, $[\sigma_{rs}] = \text{Pa}$), f_r zrychlení působící uvnitř tělesa (čili síly na jednotku objemu, $[\rho f_r] = \text{N/m}^3$), například by se mohlo jednat o gravitaci.

Vynecháním časových derivací získáme *rovnici rovnováhy*:

$$\sigma_{rs,s} + \rho f_r = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad (99)$$

kteřá musí platit v celém objemu Ω tělesa.

Tuto parciální diferenciální rovnici musíme doplnit o konkrétní *okrajovou podmínku*, aby řešení bylo jednoznačné:

$$\sigma_{rs} n_s = g_r \quad \text{na } \Gamma, \quad (100)$$

platící na hranici Γ objemu Ω , kde působí povrchové síly g_r (vyjádřené na jednotku plochy, $[g_r] = \text{Pa}$); n_s zde označuje normálu k ploše. Pro volný povrch by bylo samozřejmě $g_r = 0$.

Hookeův zákon v nejjednodušší podobě je $\sigma = E\varepsilon$, kde σ označuje napětí (sílu na jednotku plochy, resp. průřezu), E Youngův modul pružnosti (též elastický modul, $[E] = \text{Pa}$) a ε je deformace (bezrozměrná, změna délky lomená délkou). Pro popis deformací ve třech rozměrech však potřebujeme jeho složitější podobu:

$$\sigma_{rs} = \lambda \varepsilon_{qq} \delta_{rs} + 2\mu \varepsilon_{rs}, \quad (101)$$

kde δ_{rs} je Kroneckerovo delta (pro $r = s$ je $\delta_{rr} = 1$ jinak $\delta_{rs} = 0$) a λ a μ jsou Laméovy konstanty, mající určitý vztah k modulu pružnosti E a Poissonově poměru ν , jež jsou obvykle udáványmi charakteristikami materiálů:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

¹⁹ Indexy za čárkou označují v této notaci derivace $,t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $,s \equiv \frac{\partial}{\partial x_s}$, při totožných indexech platí sumační pravidlo $_{qq} \equiv \sum_q$.

Tenzor malých deformací je zaveden jako:

$$\varepsilon_{rs} \equiv \frac{1}{2}(u_{r,s} + u_{s,r}).$$

Dosažením Hookova zákona do rovnice pro rovnováhu obdržíme *Laméovu rovnici*, čili parciální diferenciální rovnici pro posunutí u_r („skrytá“ v tenzoru deformace):

$$(\lambda \varepsilon_{qq} \delta_{rs})_{,s} + (2\mu \varepsilon_{rs})_{,s} + \rho f_r = 0, \quad (102)$$

neboli:

$$(\lambda u_{q,q} \delta_{rs})_{,s} + [\mu(u_{r,s} + u_{s,r})]_{,s} + \rho f_r = 0.$$

Tuto rovnici zapíšeme abstraktněji pomocí diferenciálního operátoru:

$$\mathcal{L}(u_r) = 0. \quad (103)$$

4.2 Metoda konečných prvků (FEM)

Namísto (zatím neznámého) řešení u_r rovnice (103) hledáme jeho aproximaci (Langtangen 2003):

$$u \doteq \hat{u}_r = \sum_{j=1}^M u_{jr} N_{jr},$$

kde N_{jr} jsou báze funkce a u_{jr} hledané koeficienty; M je počet bodů sítě, kterou triangulujeme objem Ω . Pro aproximaci však nebude rovnice (103) platit přesně, nýbrž:

$$\mathcal{L}(\hat{u}_r) \neq 0.$$

Požadujeme alespoň, aby součet všech reziduí byl nulový:

$$\int_{\Omega} \sum_{r=1}^3 \mathcal{L}(\hat{u}_r) W_{ir} d\Omega = 0,$$

kde W_{ir} jsou vhodné váhy, neboli *testovací funkce*. Tato rovnice je tedy *slabou formulací*, neboť nepožadujeme přesnou platnost rovnice všude. Integrace přes objem Ω zde odpovídá sumaci $\sum_{i=1}^M$. Sumy přes body sítě i a přes dimenze r lze sdružit do jedné, abychom tu druhou nemuseli stále vypisovat.

V Galerkinově metodě bereme za váhy přímo báze funkce, $W_{ir} \equiv N_{ir}$, takže:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}_r) N_{ir} d\Omega = 0.$$

Pro naši rovnici rovnováhy (99) pak máme:

$$\int_{\Omega} \sigma_{rs,s} N_{ir} d\Omega + \int_{\Omega} \rho f_r N_{ir} d\Omega = 0.$$

Pro její úpravu využijeme Greenovo lemma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{rs,s} N_{ir} d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma_{rs} N_{ir,s} d\Omega + \int_{\Gamma} \overbrace{\sigma_{rs} n_s}^{g_r} d\Gamma$$

a zároveň dosadíme z Hookova zákona (101) a šikovně z okrajové podmínky (100):

$$- \int_{\Omega} (\lambda \varepsilon_{qq} \delta_{rs} + 2\mu \varepsilon_{rs}) N_{ir,s} d\Omega + \int_{\Gamma} g_r N_{ir} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f_r N_{ir} d\Omega = 0, \quad (104)$$

čímž získáme základní rovnici pro metodu konečných prvků.

4.3 Implementace v programu FreeFem++

V programu FreeFem++ (Hecht 2012) je implementace velmi snadná, protože umožňuje symbolický zápis integrálů přes Ω a Γ . Aby bylo zápisu dobře rozumět, některé členy rovnice (104) rozepíšeme:

$$\begin{aligned} \sum_q \varepsilon_{qq} &= \sum_q \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_q}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\ \sum_r \sum_s \delta_{rs} N_{ir,s} &= \sum_r \frac{\partial N_{ir}}{\partial x_r} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \\ \sum_r \sum_s \varepsilon_{rs} N_{ir,s} &= \sum_r \sum_s \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right) \frac{\partial N_{ir}}{\partial x_s} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \\ &= \left[\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, \frac{\partial u_3}{\partial z}, \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right] \cdot \\ &\cdot \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial v_3}{\partial z}, \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Vlastní implementace pak je:

```
load "msh3";
mesh3 Th = readmesh3("cube.1.msh");           // read mesh from file

real ag = 9.81;                                // gravitational acceleration [m/s^2]
real a = 0.1;                                  // cross section dimensions [m]
real b = 0.15;
real m = 1.0;                                  // mass attached at the end [kg]
real E = 21.5e10;                              // Young modulus [Pa], steel
real nu = 0.29;                                // Poisson ratio [], steel
real rho = 7800.;                             // density [kg/m^3], steel
```

```

real f = rho * ag; // volumetric force [Pa/m = N/m^3]
real g = m*ag / (a*b); // surface force [Pa = N/m^2]
real mu = E/(2*(1+nu)); // Lamé's constants
real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu));

fespace Vh(Th, [P1,P1,P1]); // finite elements space (vectorial)
Vh [u1,u2,u3], [v1,v2,v3];

real sqrt2 = sqrt(2.);
macro epsilon(u1,u2,u3) [ dx(u1), dy(u2), dz(u3), (dz(u2)+dy(u3))/sqrt2,
  (dz(u1)+dx(u3))/sqrt2, (dy(u1)+dx(u2))/sqrt2 ] // end-of-macro
macro div(u1,u2,u3) ( dx(u1)+dy(u2)+dz(u3) ) // end-of-macro

solve Lamé([u1,u2,u3], [v1,v2,v3]) = // weak formulation
  int3d(Th)(
    lambda * div(u1,u2,u3) * div(v1,v2,v3) // divergence term
    + 2.*mu*( epsilon(u1,u2,u3) '* epsilon(v1,v2,v3) ) //' ) // dot product
  )
  - int3d(Th) (-f*v3) // volumetric forces
  - int2d(Th,3) (-g*v3) // surface forces
  + on(1, u1=0, u2=0, u3=0); // Dirichlet boundary condition

savemesh(Th, "output.sol.mesh"); // save output
savesol("output.sol", Th, [u1,u2,u3], order=1);

real umax = max(abs(u1[].min), u1[].max); // plot amplified mesh
cout << "\numax = " << umax << " m" << endl;
real coef = 0.2*b/umax;
mesh3 Thamp = movemesh3(Th, transfo = [x+u1*coef, y+u2*coef, z+u3*coef]);
int[int] ref0 = [1,0, 2,0, 3,0, 4,0, 5,0, 6,0];
int[int] ref2 = [1,2, 2,2, 3,2, 4,2, 5,2, 6,2];
Th = change(Th, label=ref2);
Thamp = change(Thamp, label=ref0);
plot(Th, Thamp, wait=1, cmm = "coef = " + coef);

```

Složky vektorové funkce $\hat{u}_r$ jsou v programu značeny u_1, u_2, u_3 , testovací funkce N_{ir} , pak v_1, v_2, v_3 . Program lze spustit z příkazové řádky FreeFem++ `lame.edp`. Příklad výsledku výpočtu je na obr. 29.

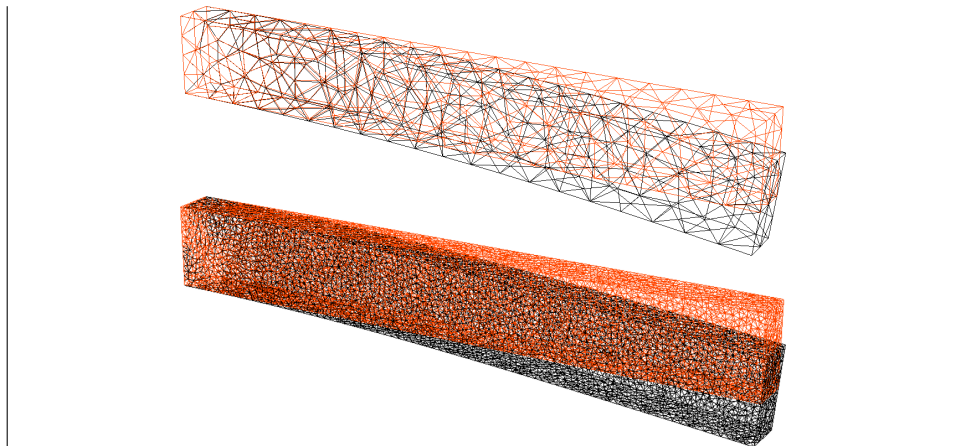
4.4 Testovací příklad s jednoduchým nosníkem

Analytické řešení lze použít pro kontrolu implementace. Pro nosník na jednom konci upevněný a na druhém konci zatížený, je výchylka konce [53]:

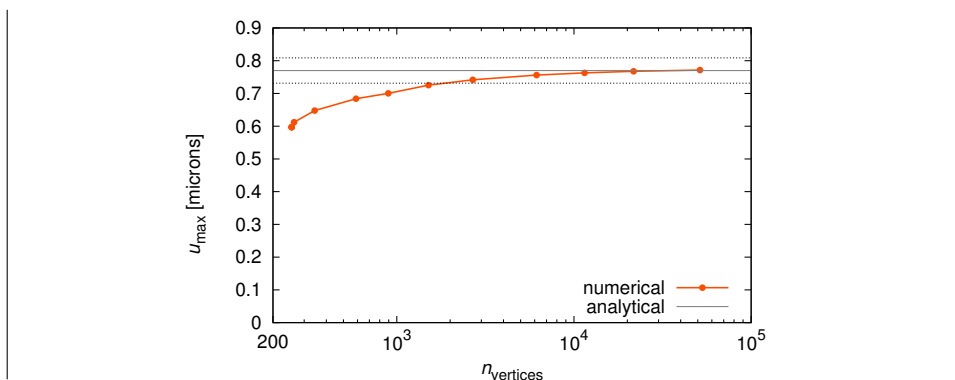
$$x_l = \frac{Fl^3}{3EI_a},$$

kde $F = ma_g$ je síla působící svisle na konec nosníku, m hmotnost závaží, a_g tíhové zrychlení, l délka nosníku, E modul pružnosti a I_a kvadratický moment průřezu. Pro obdélníkový průřez o rozměrech a, b (měřených vodorovně a svisle) a pro osu procházející středem je:

$$I_a = \frac{ab^3}{12}.$$



Obr. 29 — Porovnání nedeformované a deformované sítě, kde posunutí spočtená programem FreeFem++ byla zvětšena faktorem asi 10^5 . Maximální posunutí jinak dosahuje $u_{\max} = -0,77 \mu\text{m}$. Vlevo síť hrubá a vpravo jemná, s počtem vrcholů $n_{\text{vertices}} = 255$, resp. 11 484. Objem, vymezený povrchovou sítí ve formátu MESH byl triangulován čtyřstěny pomocí programu Tetgen (Si 2006), konkrétně příkazem `tetgen -Vgpnq1.2a1.e-6 cube.mesh`, kde parametr $q = 1,2$ omezuje poměr stran čtyřstěnu a $a = 10^{-6}$ jejich maximální objem. Pro import se osvědčilo použít formát MSH, jenž získáme použitím skriptu `./nodeelementface2msh.awk cube.1.node cube.1.ele cube.1.face > cube.1.msh`.



Obr. 30 — Porovnání numerického a analytického modelu deformace jednoduchého nosníku pro různé počty vrcholů sítě n_{vertices} . Hodnoty parametrů byly v obou případech zvoleny následovně: $l = 1,5 \text{ m}$, $a = 0,1 \text{ m}$, $b = 0,15 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $a_g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $E = 21,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0,29$.

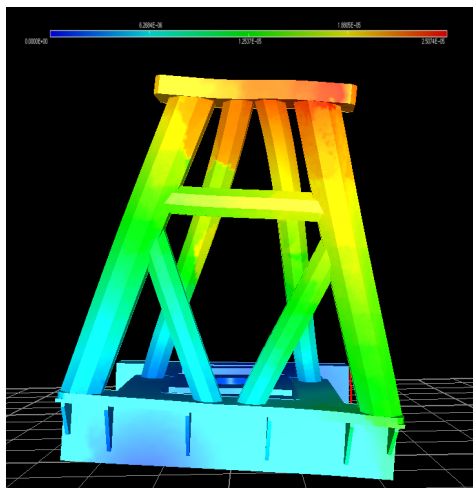
Rozdíly mezi analytickým a numerickým modelem dosahují méně než 5 % pro počet vrcholů $n_{\text{vertices}} \gtrsim 10^3$ (viz obr. 30). Mohou být dány jednak diskretizací numerického modelu a jednak omezeními analytického modelu.

4.5 Výpočet deformace montáže

Jako praktickou aplikaci si ukážeme výpočet deformace montáže astronomického dalekohledu. Před exportem z programu CAD je ovšem vhodné její konstrukci zjednodušit, abychom nepočítali deformace jednotlivých šroubů a matic. Pak stačí konvertovat příslušnou síť do formátu MESH, triangulovat a přitom zadat působení silou určitého směru na určitou plochu (označenou pomocí sloupce label v síti). Výsledek výpočtu je ukázán na obr. 31; celou observatoř pak vidíme na obr. 32.

Nakonec je třeba zdůraznit, že výše uvedená lineární teorie je platná pouze pro *malé* (elastické) deformace. Velké (neřkuli plastické) deformace by bylo třeba popsat rigorózněji.

- [51] HECHT, F. *New development in FreeFem++*. *J. Numer. Math.*, **20**, 251, 2012.
- [52] LANGTANGEN, H. P. *Computational partial differential equations. Numerical methods and Diffpack programming*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [53] *Ohyb vetknutého nosníku*. [online] [cit. 2017-05-04]. (http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/-skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/3_5).
- [54] SI, H. *TetGen — A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional Delaunay triangulator*. 2006. (<http://tetgen.berlios.de>).



Obr. 31 — Spočtené deformace vidlice, respektive části alt–azimutální montáže, při působení síly 1 300 N na horní část, kde budou umístěny domečky pro momentové motory. Maximální posunutí činí $20\text{ }\mu\text{m}$. Vpravo výsledná podoba montáže.



Obr. 32 — Autonomní observatoř BlueEye 600, vyrobená firmou Projectsoft v rámci grantu Technologické agentury ČR, byla umístěna v Ondřejově.

5 Atmosféry a oceány

Atmosféra má jednu zásadní výhodu: jsme v ní neustále ponořeni a máme s ní bezprostřední zkušenost. Jednou ze základních vlastností atmosféry je *vítr*, neboli rychlost proudění $\mathbf{v}$, kterou v této kapitole budeme studovat výhradně pomocí Navierovy–Stokesovy rovnice. Tato zapsána v inerciální soustavě zní:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}^{\text{advekce}} = -\overbrace{\frac{1}{\rho} \nabla P}^{\text{gradient tlaku}} + \overbrace{\mathbf{g}}^{\text{tíhové}} + \overbrace{\nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}}^{\text{viskozita}}, \quad (105)$$

kde t označuje čas, ρ hustotu, P tlak, $\mathbf{g}$ tíhové zrychlení a ν kinematickou viskozitu; dovolili jsme si ji napsat před operátor, tzn. je uniformní.

Pokud bychom vítr studovali v neinerciální soustavě, rotující úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$, a provedli potřebnou transformaci souřadnic, pak by ovšem bylo:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)' = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g}' + \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}' + \overbrace{\Omega'^2 \mathbf{r}'_{\perp}}^{\text{odstředivé}} - \overbrace{2\vec{\Omega}' \times \mathbf{v}'}^{\text{Coriolis}}, \quad (106)$$

kde $\mathbf{r}'_{\perp}$ označuje vzdálenost od osy. Zcela přirozeně se používají lokální kartézské souřadnice, $\mathbf{r}' = (x, y, z)$, kde x směřuje na východ, y na sever, z svisle nahoru a odpovídající rychlosti $\mathbf{v}' = (u, v, w)$. Zřejmě nemá cenu psát neustále čárky, protože prakticky celá kapitola je čárkovaná. Ve zmiňované lokální soustavě ovšem potřebujeme vyjádřit vektor $\vec{\Omega}' = (0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)$, kde φ je zeměpisná šířka inkriminovaného místa.

V literatuře se setkáváme s nejrůznějšími přibližnými rovnicemi, čili musíme být neustále ve střehu, kdy co platí. Nejčastější aproximace jsou: aproximace tenké vrstvy ($w \ll u, v$), izotermální ($T = \text{konst.}$, čili $P(\rho)$), neviskózní ($\nu = 0$), nedivergentní ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), zanedbatelné odstředivé zrychlení ($r_{\perp} \doteq 0$), příp. Coriolisovo ($\Omega \doteq 0$) nebo Boussinesqův vztah pro vztlak ($-g\delta\rho/\rho$).

Abychom mohli posoudit významnost jednotlivých členů v rovnici (105), případně (106), spočteme si několikero bezrozměrných čísel. Získáme je tak, že jednotlivé členy (značené svorkami) podělíme, přičemž operátory nahradíme za škály, $\nabla \rightarrow 1/L$, a neznámé rychlosti očekávanými rychlostmi U . Konkrétně jde o Reynoldsovo číslo:

$$\text{Re} = \frac{\text{advekce}}{\text{viskozita}} = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu}; \quad (107)$$

pro $\text{Re} \ll 1$ bývá proudění laminární, kdežto pro $\text{Re} > 10^3$ turbulentní. Mezi tím je přechodová oblast s pozoruhodným chováním. Dále Rossbyho číslo:

$$\text{Ro} = \frac{\text{advekce}}{\text{Coriolis}} = \frac{U^2/L}{2U\Omega \sin \varphi} = \frac{U}{2L\Omega \sin \varphi}, \quad (108)$$

Ekmanovo číslo:

$$\text{Ek} = \frac{\text{viskozita}}{\text{Coriolis}} = \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} = \frac{\nu U/L^2}{2U\Omega \sin \varphi} = \frac{\nu}{2L^2\Omega \sin \varphi}, \quad (109)$$

Richardsonovo číslo:

$$\text{Ri} = \frac{\text{vztlak}}{\text{střih}} = \frac{g \frac{\delta \rho}{\rho}}{(\delta U)^2/L} = \frac{g}{\rho} \frac{\nabla \rho}{(\nabla U)^2}. \quad (110)$$

V případě, kdy bychom byli nuceni použít i rovnici přenosu energie, zajímalo by nás Prandtlovo číslo:

$$\text{Pr} = \frac{\text{viskozita}}{\text{vedení}} = \frac{\nu}{\chi}, \quad (111)$$

kde χ označuje tepelnou difuzivitu; Grashofovo číslo:

$$\text{Gr} = \frac{\text{vztlak}}{\text{viskozita}} = \frac{g \frac{\delta \rho}{\rho}}{\nu U/L^2} = \frac{g \alpha_V \delta T L^3}{\nu^2 T}, \quad (112)$$

kde jsme vzali typickou rychlost $U = \nu/L$ při $\text{Re} = 1$ a α_V je koeficient tepelné roztažnosti; potažmo Rayleighovo číslo:

$$\text{Ra} = \frac{\text{vztlak}}{\text{vedení}} = \text{Gr Pr} = \frac{g \delta T L^3}{\chi \nu T}. \quad (113)$$

Některá čísla má smysl určovat zvlášť pro škálu velkou (L) a malou (l). Mějme také v patrnosti, že viskozita ν může být buď molekulární, kdy difuzi rychlosti způsobují molekuly letící v rámci své střední volné dráhy ℓ , nebo turbulentní (angl. eddy, bulk), tzn. včetně příspěvku vírů.

5.1 Hydrostatická rovnováha

Nejprve zanedbáme vše, dokonce i vítr, $\mathbf{v} = 0$, $d\mathbf{v}/dt = 0$, $T = \text{konst.}$, $r_\perp = 0$, $\Omega = 0$. Pak nezbyvá, než aby bylo $P = P(z)$ a nulové horizontální gradienty. Rovnice (106) přejde na rovnici hydrostatické rovnováhy:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} - g, \quad (114)$$

kam dosadíme ze stavové rovnice ideálního plynu:

$$P = \frac{\rho}{\mu m_u} kT, \quad (115)$$

čili:

$$\frac{1}{P} dP = -\frac{g \mu m_u}{kT} dz.$$

Provedeme-li integraci obou stran:

$$\int \frac{1}{P} dP = \ln P = -\frac{g\mu m_u}{kT} \int dz + C = -\frac{g\mu m_u}{kT} z + C,$$

odkud:

$$P = P_0 \exp\left(-\overbrace{\frac{g\mu m_u}{kT}}^{=1/H_P} z\right), \quad (116)$$

kde jsme si označili H_P jako tlakovou škálu, na které se podstatně mění tlak (na Zemi je řádově $H_P \simeq 7,5$ km). Na kulaté a ke všem rotující planetě ozářené zboku to však nemůže dlouho vydržet, neboť $T \neq \text{konst.}$

5.2 Cyklostrofické proudění

Zanedbáme-li skoro vše, $w = 0$, $\nu = 0$, $r_\perp = 0$, $\Omega = 0$, zůstanou nám rovnice pro horizontální rychlosti:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (117)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (118)$$

Použijeme-li souřadnice tangenciální a normálové (s, n) , tzn. ve směru $\mathbf{v}$ a kolmé na $\mathbf{v}$, pak:

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}, \quad (119)$$

$$\frac{dv_n}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n}. \quad (120)$$

Lze samozřejmě ztotožnit složku v_s s velikostí rychlosti $|\mathbf{v}|$, neboť $v_n = 0$ z definice. Normálové zrychlení dv_n/dt způsobuje zakřivování trajektorie větru. Pokud si ji přiblížíme jako kružnici (část kružnice) o poloměru r , pak pro normálové alias dostředivé zrychlení musí platit známý geometrický vztah $dv_n/dt = v_s^2/r$, čili:

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}, \quad (121)$$

$$\frac{v_s^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n}. \quad (122)$$

V ustáleném stavu $dv_s/dt = 0$, kdy se již nic nemění, musí tedy být velikost rychlosti v souladu s normálovým gradientem tlaku:

$$v_s = \sqrt{-\frac{r}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n}}. \quad (123)$$

Takové situaci říkáme *cyklostrofické proudění*. Vyskytovat se může pouze okolo tlakové níže, aby nám nevyšlo v_s imaginární. Točit se může libovolným směrem. Jde o dobré přiblížení proudění v tornádu (obr. 33), trombě, blízko rovníku nebo na pomalu rotující planetě, jako je Venuše. V řeci charakteristických čísel toto proudění může vzniknout za podmínek: $Re \rightarrow \infty$, $Ro \rightarrow \infty$, $Ek \rightarrow 0$.



Obr. 33 — Tornádo, v němž lze vířivé proudění popsat přibližně jako cyklostrofické. © OAR, ERL, NSSL.

5.3 Geostrofické proudění

Mějme $w = 0$, $\nu = 0$, $r_\perp = 0$. Po provedení vektorového součinu $\Omega(0, \cos \varphi, \sin \varphi) \times (u, v, 0)$ pak obdržíme:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \overbrace{2\Omega \sin \varphi}^{f_C} v, \quad (124)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi u, \quad (125)$$

kde jsme si označili $f_C = 2\Omega \sin \varphi$ jako Coriolisův parametr.

Pro zcela ustálené proudění ($du/dt = dv/dt = 0$) bychom měli rovnost:

$$(u, v) = \frac{1}{\rho f_C} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (126)$$

což ovšem znamená, že *vítr stále vane podél izobar, nikoli ve směru gradientu tlaku!* Složky (u, v) a $(-y, x)$ jsou zde „přehozené“; při izobarách ve směru y je totiž $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$, čili vítr ve směru y . Této rovnovážné situaci říkáme *geostrofické proudění*.

Při uvážení křivosti trajektorie v souřadnicích (s, n) :

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}, \quad (127)$$

$$\frac{v_s^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} - f_C v_s, \quad (128)$$

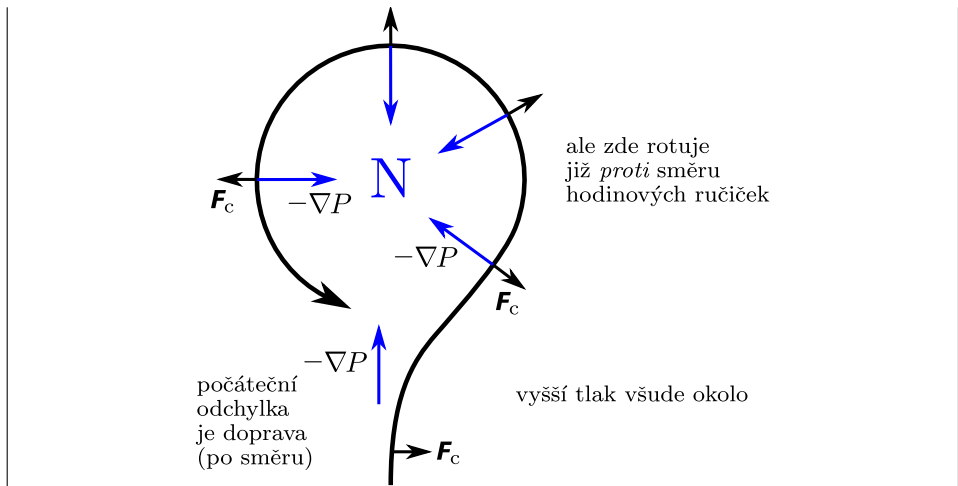
odkud plyne kvadratická rovnice pro v_s , mající řešení:

$$v_s = -\frac{f_C r}{2} \pm \sqrt{\frac{f_C^2 r^2}{4} - \frac{r}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}}. \quad (129)$$

Toto drobné zobecnění se nazývá *gradientové proudění*. Charakteristická čísla přitom bývají: $Re \rightarrow \infty$, $Ro \rightarrow 0$, $Ek \rightarrow 0$.

Zopakujme nakonec naše poznatky jinými slovy: na rotující planetě zásadně *nevanou* větry z oblastí vysokého tlaku do nízkého! Když se totiž vzduch pohne rychlostí $\mathbf{v}$ proti směru gradientu tlaku ($\mathbf{a}_{\nabla P} = -\frac{1}{\rho} \nabla P$), je záhy odchýlen Coriolisovým zrychlením ($\mathbf{a}_C$, kolmým na $\mathbf{v}$) tak, že nakonec jsou obě zrychlení antiparalelní a proudění sleduje izobary ($\mathbf{v}$ je kolmé i na $\mathbf{a}_{\nabla P}$) — viz obr. 34. Je to mimochodem důvod, proč se na Zemi gradienty tlaku vyrovnávají dosti obtížně.

Rychlost $|\mathbf{v}|$ proudění se ustaví přibližně tak velká, aby Coriolisova síla úměrná $|\mathbf{v}|$ byla dostatečná na vyrovnání gradientu tlaku. Velký gradient tlaku (husté izobary) tedy automaticky znamenají rychlý geostrofický vítr! Pointa je ale v tom, že $\mathbf{a}_{\nabla P}$ není *přesně* rovno $-\mathbf{a}_C$, takže se vzduch se může pohybovat po křivkách. Vzduch okolo oblastí nízkého tlaku (cyklóny) rotuje na severní polokouli *proti* směru hodinových ručiček; vysoký tlak (anticyklóna) znamená rotaci *po* směru.



Obr. 34 — Proudění vzduchu rychlostí $\mathbf{v}$ okolo tlakové níže (cyklóny), zpočátku ve směru zrychlení od gradientu tlaku ($-\frac{1}{\rho} \nabla P$), ale záhy odchýlené Coriolisovým zrychlením ($-2\vec{\Omega} \times \mathbf{v}$, kolmým na $\mathbf{v}$) tak, že nakonec sleduje izobary.

5.4 Rossbyho vlny

Velmi pozoruhodná situace (oscilace) nastává, když $w = 0$, $\nu = 0$, $r_{\perp} = 0$, $\vec{\Omega}' = \Omega(0, \cos \varphi, \sin \varphi)$, ale $\varphi \neq \text{konst.}$ Úhlovou rychlost proto rozvineme v Taylorovu řadu:

$$\vec{\Omega}' \doteq \vec{\Omega}'_0 + \left. \frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} d\varphi, \quad (130)$$

kde $\frac{d\vec{\Omega}'}{d\varphi} = \Omega(0, -\sin \varphi, \cos \varphi)$, $d\varphi = \frac{y}{R_{\oplus}}$. Jde vlastně o aproximaci zakulaceného povrchu Země tečnou rovinou, označovanou též jako rovina β . Pak máme rovnice:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \overbrace{2\Omega \sin \varphi_0 v}^{f_C = \text{konst.}} + \overbrace{2\Omega \cos \varphi_0 \frac{1}{R_{\oplus}} y v}^{\beta \equiv \frac{\partial f_C}{\partial y}}, \quad (131)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi_0 u - 2\Omega \cos \varphi_0 \frac{1}{R_{\oplus}} y u. \quad (132)$$

V následujícím budeme dále předpokládat: $u = u_G + u^*$, $v = v_G + v^*$, tzn. že na pozadí geostrofického proudění probíhají nějaké další pohyby, $u_G = \text{konst.}$, $v_G = 0$ (proudění $V \leftrightarrow Z$), $u^*, v^* \ll u_G$ a konec konců nedivergentní proudění $\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0$. Není divu, že aproximací musí být celá řada (asi 10), jinak by nám nikdy nemohly vyjít jednoduché harmonické vlny! Po prvotním dosazení:

$$\begin{aligned} \frac{d(u_G + u^*)}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f_C(v_G + v^*) + \beta y(v_G + v^*), \\ \frac{d(v_G + v^*)}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - f_C(u_G + u^*) - \beta y(u_G + u^*). \end{aligned}$$

Všechny členy odpovídající geostrofickému proudění (124), (125) (tj. včetně ∇P) odečteme a zůstanou nám rovnice pro poruchy, kde jsme dočasně pedagogicky ponechali $v_G \neq 0$:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial u^*}{\partial x} + v_G \frac{\partial u^*}{\partial y} = +f_C v^* + \beta y(v_G + v^*), \quad (133)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial v^*}{\partial x} + v_G \frac{\partial v^*}{\partial y} = -f_C u^* - \beta y(u_G + u^*), \quad (134)$$

ale jinak samozřejmě:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial u^*}{\partial x} &= +f_C v^* + \beta y v^*, \\ \frac{\partial v^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial v^*}{\partial x} &= -f_C u^* - \beta y(u_G + u^*). \end{aligned}$$

Derivujeme-li první rovnici parciálně dle y a druhou dle x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial x} &= +f_C \frac{\partial v^*}{\partial y} + \beta v^* + \beta y \frac{\partial v^*}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v^*}{\partial x} &= -f_C \frac{\partial u^*}{\partial x} - \beta y \frac{\partial u^*}{\partial x}, \end{aligned}$$

zmizí nám po odečtení 4 otravné členy (kvůli nedivergenci) a zůstane krásná rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) + u_G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) = \beta v^*, \quad (135)$$

mající vlnový charakter. S jednou rovnicí pro dvě funkce pochopitelně nic nezmůžeme, nicméně bez velké újmy na obecnosti můžeme předpokládat řešení ve tvaru:

$$u^* = 0, \quad (136)$$

$$v^* = C e^{i(kx - \omega t)}, \quad (137)$$

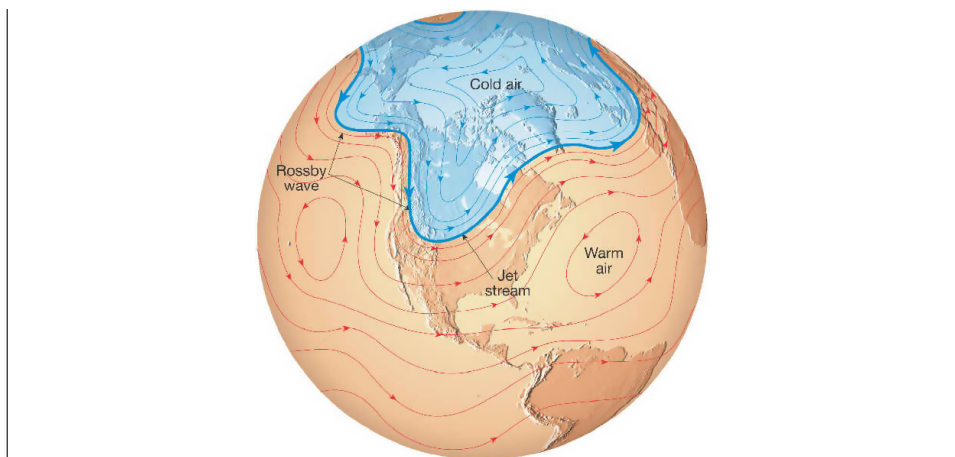
odkud po dosazení:

$$-k\omega C e^{i(kx - \omega t)} + u_G k^2 C e^{i(kx - \omega t)} = \beta C e^{i(kx - \omega t)}$$

a krácení vychází Rossbyho disperzní relace:

$$\omega = u_G k - \frac{\beta}{k}. \quad (138)$$

Fázová rychlost, s níž vlny postupují tam, příp. zpět, by byla $c = \lambda f = \frac{\omega}{k}$. Při $c = 0$ by vznikla stacionární vlna, s $\omega = 0$ a $k^2 = \frac{\beta}{u_G}$. Jedná se o nejvýznamnější vlny planetárního měřítka (obr. 35).



Obr. 35 — Rossbyho vlny velkého měřítka ($\lambda \gtrsim 10^3$ km) se nacházejí na rozhraní mezi mírným a polárním pásmem. V ose ve výšce se také vyskytuje tryskové proudění (angl. jet stream), vyvolané termálním větrem. Převzato z http://www.geography.hunter.cuny.edu/tbw/wc.notes/7.circ.atm/rossby_waves.htm.

5.5 Termální vítr ve výšce

Je-li stále $w = 0$, $\nu = 0$, $r_\perp = 0$, $du/dt = dv/dt = 0$, můžeme zkombinovat naše znalosti horizontální (126) a vertikální (116) a pro *rozdíl* rychlostí ustáleného geostrofického větru ve dvou výškových hladinách psát:

$$u_2 - u_1 = -\frac{1}{f_C} \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial y} \right), \quad (139)$$

$$v_2 - v_1 = \frac{1}{f_C} \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} \right), \quad (140)$$

kde si při hydrostatické rovnováze, $z_2 - z_1 = \frac{k\bar{T}}{g\mu m_u} \ln \frac{P_1}{P_2}$, snadno spočteme horizontální derivace:

$$0 - 0 = \frac{k}{g\mu m_u} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \ln \frac{P_1}{P_2} + \bar{T} \frac{P_2}{P_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{1}{P_2} - \bar{T} \frac{P_2}{P_1} \frac{P_1}{P_2^2} \frac{\partial P_2}{\partial x} \right),$$

odkud vyjádříme:

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{P_2}{\bar{T}} \ln \frac{P_1}{P_2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{P_2}{P_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\frac{k}{g\mu m_u} \rho_2 T_2}{\bar{T}} \frac{g\mu m_u}{k\bar{T}} (z_2 - z_1) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{T_2}{T_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x},$$

což dosadíme do (140):

$$v_2 - v_1 = \frac{1}{f_C} \left[\frac{T_2}{\bar{T}^2} g (z_2 - z_1) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{T_2}{T_1} \overbrace{\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x}}^{f_C v_1} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} \right].$$

Zcela stejně bychom postupovali pro $\frac{\partial}{\partial y}$ a obdrželi bychom zásadní vztah:

$$(u_2 - u_1, v_2 - v_1) = \frac{T_2}{\bar{T}^2} \frac{g}{f_C} (z_2 - z_1) \left(-\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) (u_1, v_1). \quad (141)$$

Popisuje totiž změny horizontálního větru s výškou, když jsou přítomné *horizontální* teplotní gradienty $\nabla_{xy} T$. Zejména $\frac{\partial T}{\partial y}$ (ve směru J→S) bývá hodně záporný, tudíž rychlost u ve směru Z→V roste se z , až se proudění nahoře (na rozhraní troposféry a stratosféry) stává tryskové.

Jinými slovy: nad místem, kde je vedro (větší T), je atmosféra více „nadýchaná“ (má větší H_P), $P(z)$ zde klesá relativně pomaleji, což v porovnání s místem, kde byla zima, naklání plochy konstantního tlaku víc a víc, a jakékoliv ∇P nutně vede k $\mathbf{v}$. Původně barotropní atmosféra ($P = P(\rho)$) je nyní baroklinická ($P = P(\rho, T)$).

5.6 Ekmanova spirála v hloubce

Zkonstruujeme nyní rovnice i pro vodu, *nad* kterou fouká vítr. Předpokládejme pro ni $w = 0$, $r_\perp = 0$ a píšme:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f_C v + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (142)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - f_C u + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \quad (143)$$

Dále si dovolíme předpokládat ustálený stav, $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{dv}{dt} = 0$, totéž proudění v blízkém okolí, tzn. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$; 2. derivace jsou také nulové, a nestlačitelnost (nedivergentnost), $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, která je pro vodu více než přijatelná. Pak se nám rovnice redukuje na:

$$0 = f_C v + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (144)$$

$$0 = -f_C u + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (145)$$

Dále musíme specifikovat dvě okrajové podmínky (na dně a na hladině). Vítr charakterizujeme napětím na hladině, což v pohybové rovnici odpovídá zrychlení $\mathbf{a} = \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma$, odkud plyne vztah $\nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\mu} \sigma$, kde $\mu = \nu \rho$ je dynamická viskozita. Při působení na plochu $\hat{x}\hat{y}$, kolmou na $\hat{z}$, a to ve směru osy $\hat{y}$, máme pouze jedinou složku tenzoru napětí σ_{zy} nenulovou, čili:²⁰

$$u, v \rightarrow 0 \quad \text{pro } z \rightarrow -\infty, \quad (146)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \sigma_{zy} \quad \text{pro } z = 0. \quad (147)$$

Provedeme substituci za komplexní rychlost $\mathcal{V} \equiv u + iv$, čímž získáme:

$$0 = -if_C \mathcal{V} + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2}. \quad (148)$$

Obecným řešením je exponenciála (s vědomím, že $\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ a $a \equiv \sqrt{\frac{f_C}{2\nu}}$):

$$\mathcal{V} = C_1 e^{(1+i)az} + C_2 e^{-(1+i)az}. \quad (149)$$

Z (146) ihned plyne $C_2 = 0$. Abychom vyčíslili 1. integrační konstantu, potřebujeme 1. derivaci:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right|_{z=0} = C_1 (1+i)a = i \frac{1}{\mu} \sigma_{zy},$$

odkud:

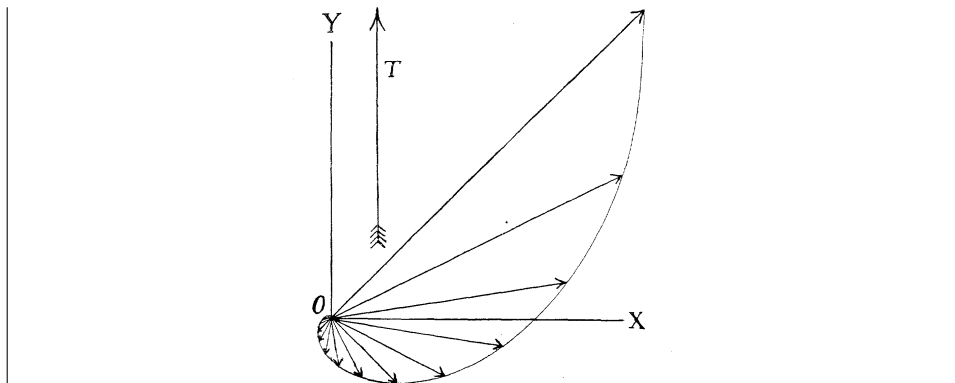
$$C_1 = \frac{i}{1+i} \frac{1}{a\mu} \sigma_{zy} = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{2}{f_C \rho \mu}} \sigma_{zy} = e^{i\frac{\pi}{4}} \overbrace{\frac{\sigma_{zy}}{\sqrt{f_C \rho \mu}}}^{v_0}$$

²⁰ Obdobný model existuje pro přízemní vrstvu atmosféry, kde si proudění opět rozdělíme na geostrofické a ageostrofické (viskózní): $u = u_G + u^*$, $v = v_G + v^*$. Požadové geostrofické a gradienty tlaku se odečtou, zbudou nám rovnice: $0 = f_C(v - v_G) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $0 = -f_C(u - u_G) + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, spolu s vhodně upravenými okrajovými podmínkami: $u = 0$, $v = 0$ pro $z = 0$ a $u = u_G$, $v = v_G$ pro $z \rightarrow \infty$.

a tedy:

$$\mathcal{V} = u + iv = v_0 e^{az} e^{i(az + \frac{\pi}{4})}. \quad (150)$$

Závěr je zřejmý: slabý vánek mívá hluboký vliv! Navíc jako námořníci nebudeme překvapeni, že nás mořský proud unáší o 45° jinak než vítr (viz obr. 36).



Obr. 36 — Ekmanova spirála, vytvářená vektory rychlosti (u, v) ve směrech standardních souřadnicových os (x, y) pro rostoucí hloubky z . Vyznačen je i směr větru (napětí) $\mathbf{T}$, odpovídající složce tenzoru napětí σ_{zy} . Povrchové proudění ($z = 0$) je odchýlené o úhel 45° , který se s hloubkou stáčí po směru hodinových ručiček. Převzato z Ekman (1902).

5.7 Semiempirická konvekce

Konvekci, neboli přenos energie prouděním, je možné posoudit tak, že budeme studovat pohyb jediné bubliny, která je trochu řidší (příp. hustší) než okolí. Využijeme přitom *Boussinesqovy aproximace* pro vztlak:

$$a_{vz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \doteq -\frac{(\rho_b - \rho_o)V_b g}{m_b} = -g \frac{\delta \rho}{\rho} = g \alpha_V \frac{\delta T}{T}, \quad (151)$$

kde ρ_b , V_b , m_b označují hustotu, objem a hmotnost bubliny, ρ_o hustotu okolí, g tíhové zrychlení a α_V koeficient teplotní roztažnosti, jenž je pro ideální plyn roven 1. Tento vztah implicitně předpokládá tlak bubliny neustále vyrovnaný s okolím, neboli $P = \frac{k}{\mu m_u} \rho T$, $dP = \frac{k}{\mu m_u} (d\rho T + \rho dT) = 0$ při $\mu = \text{konst.}$

Druhou závažnou aproximací je, že všechny řídké bubliny se pohybují vzhůru po stejné dráze, směšovací délce:

$$\ell = \alpha H_P, \quad (152)$$

která je vztažena k tlakové škále:

$$H_P = \frac{kT}{g\mu m_u}, \quad (153)$$

přičemž parametr α se volí empiricky.

Bublina, která vystoupila vzhůru má obecně teplotu odlišnou o δT od okolí, a tedy měrnou tepelnou energii (v J m^{-3}) odlišnou o dQ :

$$dQ = c_P \overbrace{\left(\frac{dT}{dz} \Big|_{\text{b}} - \frac{dT}{dz} \Big|_{\text{o}} \right)}^{\delta T} \ell \rho, \quad (154)$$

jež se může přenést do okolí; c_P označuje měrnou tepelnou kapacitu při konstantním tlaku. Přitom vzniká tok tepla (ve W m^{-2}):

$$\Phi_{\text{semi}} = dQ \bar{v},$$

kde průměrnou rychlost $\bar{v}$ odvodíme z průměrného zrychlení (na začátku je $a \doteq 0$):

$$\bar{a} = \frac{1}{2} g \frac{\delta T}{T},$$

neboť práce konaná vztlakem se s určitou účinností β přemění v kinetickou energii bubliny:

$$\beta m_{\text{b}} \bar{a} \ell = \frac{1}{2} m_{\text{b}} \bar{v}^2,$$

tudíž:

$$\bar{v} = \sqrt{2\beta \bar{a} \ell}. \quad (155)$$

Poslední problém: kde vzít ∇T pro bublinu a okolí? Vždyť si ji pouze mlhavě představujeme! Nemáme zde sice žádnou informaci o rychlostním poli $\mathbf{v}$, ale snad je $\bar{v}$ dost velké, abychom pro *všechny* bubliny mohli použít ∇T adiabatický (viz níže). S okolím nelze dělat nic, jen ho přeznačit na „semi“. Výsledný tok tepla:

$$\Phi_{\text{semi}} = c_P \delta T \rho \sqrt{\beta g \frac{\delta T}{T} \alpha \frac{kT}{g \mu m_{\text{u}}}} = \alpha^2 \sqrt{\beta} c_P \rho \left(\frac{k}{\mu m_{\text{u}}} \right)^2 \left[\frac{T}{g} \left(\frac{dT}{dz} \Big|_{\text{ad}} - \frac{dT}{dz} \Big|_{\text{semi}} \right) \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (156)$$

což je semiempirický vztah, který se musí pro danou aplikaci kalibrovat volbou α a β .²¹ Vizualním příkladem konvektivního proudění je obr. 37.

Adiabatický gradient teploty. Pro adiabatické děje (bez zdroje nebo výměny tepla s okolím) platí zjednodušená stavová rovnice neboli *polytropa*:

$$P = K \rho^\Gamma, \quad (157)$$

jejíž diferenciál:

$$dP = K \Gamma \rho^{\Gamma-1} d\rho = \frac{\Gamma P}{\rho} d\rho. \quad (158)$$

²¹ Kdybychom potřebovali vyjádřit $\frac{dT}{dR} \Big|_{\text{semi}}$ pro účely stavění hvězd, předpokládáme, že veškerý tok $\Phi = \frac{L_R}{4\pi R^2}$ je přenášen konvektivně a invertujeme (156).

Pro obecnější stavovou rovnici bychom měli $P = P(\mu, \rho, T)$:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial P}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial P}{\partial T} dT.$$

Za předpokladu homogenního chemického složení ($d\mu = 0$) odtud lze vyjádřit dT , vypočítat parciální derivace pro ideální plyn (115) a dosadit za $d\rho$ z (158):

$$dT|_{\text{ad}} = \frac{\partial T}{\partial P} \left(dP - \frac{\partial P}{\partial \rho} d\rho \right) = \frac{T}{P} \left(dP - \frac{P}{\rho} d\rho \right) = \frac{T}{P} \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \right) dP. \quad (159)$$

Vidíme, že ∇T je určen ∇P . Asi není divu, když se vlastně nic neděje ($dQ = 0$).

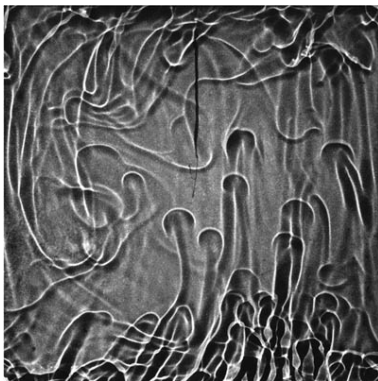
Bruntova–Väisäläova frekvence. Vztlakové zrychlení (151) můžeme ekvivalentně vyjádřit pomocí gradientů a dosadit za $d\rho$ z (158):

$$a_{\text{vz}} = -\frac{g}{\rho} \overbrace{\left(\frac{d\rho}{dz} \Big|_{\text{b}} - \frac{d\rho}{dz} \Big|_{\text{o}} \right)}^{\delta\rho} z = -\frac{g}{\rho} \left(\frac{\rho}{\Gamma P} \frac{dP}{dz} - \frac{d\rho}{dz} \right) z \equiv -N^2 z. \quad (160)$$

Z vertikální pohybové rovnice:

$$\frac{dw}{dz} = -N^2 z,$$

kteřá je obdobou harmonického oscilátoru, je potom zřejmé, že pro $N^2 > 0$ dochází k oscilacím, neboli vztlakovým vlnám. Naopak pro $N^2 < 0$ (N imaginární) nastává vztlaková (konvektivní) nestabilita. N nazýváme Bruntova–Väisäläova frekvence, neboť vystupuje také v disperzní relaci pro vztlakové vlny (g-módy).



Obr. 37 — Stínová fotografie konvektivního proudění. Změny ρ a T způsobují změny indexu lomu $n(\rho, T)$, které se projevují ve vrženém stínu odkláněním paprsků a kaustikami. Převzato z (<http://www.math.nyu.edu/aml/wetlab/projects/3d-convection.html>).

5.8 Kolmogorovovo spektrum turbulence

Ovšemže víry (bubliny) nemají totožné rozměry. Rozměr víru L souvisí s jeho vlnovým číslem $k = 2\pi/L$ i úhlovou frekvencí ω jeho otáčení, skrz disperzní relaci typu $\omega \simeq kc_v$, kde c_v je typická rychlost otáčení. Může přitom docházet ke splývání vírů nebo k jejich rozpadání, přičemž z Navierovy–Stokesovy rovnice lze odvodit výběrové pravidlo $k_3 = k_1 + k_2$; nikoliv $L_3 = L_1 + L_2$! V limitním případě, kdy jsou víry stejně velké stejného směru, platí $k_3 \simeq 2k_1$, nebo naopak, je-li druhý mnohem větší než první, $k_3 \simeq k_1 + \delta$ (Salmon 1998). Maximální škála, tj. minimální k_{inj} , se nazývá *vstřikovací* a je určena vnějšími okolnostmi (např. rozměrem planety). Naopak nejmenší škála, maximální k_ν , je svou podstatou *viskózní*, daná molekulární viskozitou ν , způsobující definitivní disipaci vírů.

Splývání a rozpadání vírů lze relativně snadno popsat pro nedivergentní proudění. Nemusí se nutně jednat o nestlačitelnou kapalinu, jenom to prostě teď nediverguje. Mějme tedy:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (161)$$

Aplikujme proto divergenci na poslední jmenovanou rovnici (s tím, že operátory působí výhradně doprava):

$$\frac{\partial}{\partial t} \overbrace{\nabla \cdot \mathbf{v}}^0 + (\nabla \mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v} + \overbrace{v_j \nabla_i \nabla_i v_j}^0 = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla P + \nu \overbrace{\nabla_j \nabla_i \nabla_i v_j}^0,$$

čili:

$$(\nabla \mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla P. \quad (162)$$

Nyní si představme, že za rychlost i tlak dosadíme z jejich *zpětné* Fourierovy transformace:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (163)$$

$$p(\mathbf{r}, t) = \int q(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (164)$$

Pak člen vlevo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int u_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x_i} \int u_i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} = \int u_j i k_i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \int u_i i k_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} = \\ &= \iint u_j i m_i e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{m} u_i i n_j e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{n}, \end{aligned}$$

kde jsme zaměnili integrační proměnnou za dvě různé, abychom mohli integrovat *en bloc*; a člen vpravo:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla P = \dots \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int q e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} = \dots \int q(-k^2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} = \frac{1}{\rho} k^2 p.$$

Po dosazení provedme ještě násobení $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, integraci přes objem $\int d\mathbf{r}$ a využijme také dopřednou Fourierovu transformaci $q(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int p(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$:

$$- \iiint u_j u_i m_i n_j e^{i(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} d\mathbf{m} d\mathbf{n} d\mathbf{r} = \frac{1}{\rho} k^2 \int p e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{1}{\rho} k^2 (2\pi)^3 q. \quad (165)$$

Jeden z integrálů vlevo lze ovšem spočítat:

$$\int e^{i(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k}) \quad (166)$$

pro jakoukoliv harmonickou funkci to je 0, jen pro $e^{i0} = 1$ to diverguje, což je právě vlastnost Diracovy distribuce δ . Musíme ovšem integrovat od $-\infty$ do $+\infty$, abychom náhodou neintegrovali přes „půlvíry“.

Uvědomme si, co jsme tak získali:

$$- \iint u_j u_i m_i n_j \delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k}) d\mathbf{m} d\mathbf{n} = \frac{1}{\rho} k^2 q$$

tj. vztah pro fourierovský tlak q , vyjádřený pomocí fourierovských rychlostí u , v němž však vystupuje δ . Kdybychom ho dosadili do Fourierovy transformace (161), získali bychom rovnici, v níž existuje vazba mezi víry různých vlnových vektorů, pouze když:

$$\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k} = 0, \quad (167)$$

což je ono výběrové pravidlo.

Veličina vhodná pro posouzení vírů je energie $\mathcal{E}_k$ na jednotku hmoty a vlnové číslo, respektive její závislost na k . Bylo-li toto spektrum vírů vytvořeno pouze a jen splýváním, rozpadáním a disipací, pak by nemělo záviset na ničem jiném než na k a právě rychlosti ψ disipace energie na jednotku hmoty, která by zase měla být pouze a jen funkcí viskozity ν . Když tam žádné jiné procesy neprobíhají, tak to na nich logicky ani nezávisí. Předpokládejme proto nejjednodušší možnou mocninnou závislost (stejně jako Kolmogorov 1941):

$$\mathcal{E}_k(k, \psi) = C k^\alpha \psi^\beta. \quad (168)$$

Jednotky výše zmiňovaných veličin jsou přitom $[k] = \text{m}^{-1}$, $[\mathcal{E}_k] = [mv^2 m^{-1} k^{-1}] = \text{m}^3 \text{s}^{-2}$, $[\psi] = [mv^2 m^{-1} t^{-1}] = \text{m}^2 \text{s}^{-3}$ a $[\nu] = [a \nabla^{-2} v^{-1}] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Proto nezbyvá, než aby exponenty splňovaly podmínku:

$$\text{m}^3 \text{s}^{-2} = \text{m}^{-\alpha} \text{m}^{2\beta} \text{s}^{-3\beta},$$

tzn. $3 = -\alpha + 2\beta$, $-2 = -3\beta$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\alpha = -\frac{5}{3}$. Výsledné spektrum je nevyhnutelně:

$$\mathcal{E}_k(k, \psi) = C k^{-\frac{5}{3}} \psi^{\frac{2}{3}}. \quad (169)$$

Vidíme, že pro velká k , malá L , je turbulence vskutku tlumena viskozitou. Není divu, že $\mathcal{E}_k$ je klesající.

Obdobně lze argumentovat a odvodit úměrnost viskózní škály:

$$k_\nu = D\nu^\gamma \psi^\delta, \quad (170)$$

$$\text{m}^{-1} = \text{m}^{2\gamma} \text{s}^{-\gamma} \text{m}^{2\delta} \text{s}^{-3\delta},$$

a proto:

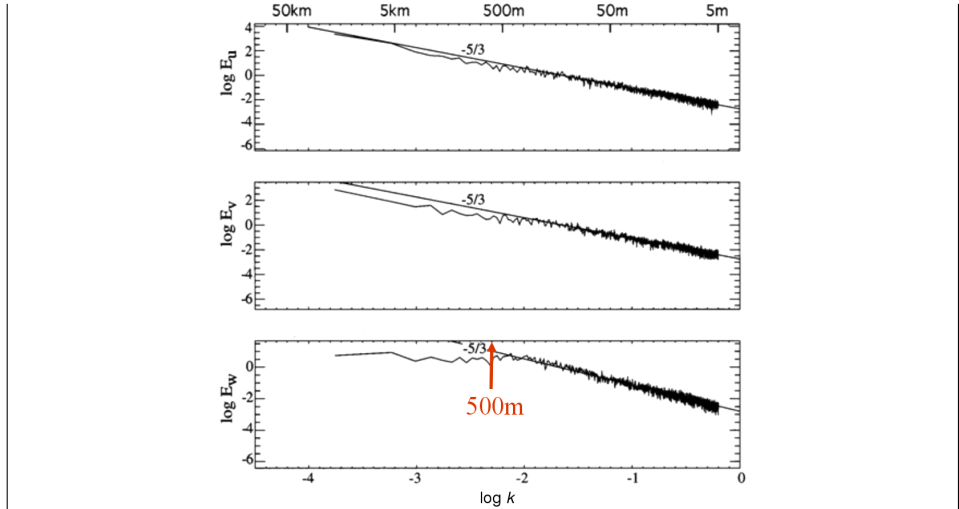
$$k_\nu = D\nu^{-\frac{3}{4}} \psi^{\frac{1}{4}}. \quad (171)$$

Energie na jednotku hmoty a jednotku délky L by byla zřejmě:

$$\mathcal{E}_L(L, \psi) = \mathcal{E}_k \frac{dk}{dL} = C' L^{\frac{5}{3}} \psi^{\frac{2}{3}} \left(-\frac{2\pi}{L^2} \right) = C'' L^{-\frac{1}{3}} \psi^{\frac{2}{3}}. \quad (172)$$

Richardson (1922) podle této rovnice dokonce složil báseň: „Velké víry mají malé víry, dbající jejich rychlosti, malé víry mají menší víry, a tak dál až do vazkosti.“ :)

Reálné spektrum vírů může být pochopitelně ovlivněno i jinými procesy a odchýlovat se od kolmogorovského. Konkrétně je možné, že turbulence ještě není plně rozvinutá. Začneme-li s jedním vírem, chvíli trvá, než vznikne celé spektrum. V tektutině mohou vznikat vlny postupné, odnášející určitou energii pryč, anebo vlny stojaté, buzené v dutinách. Často bývá spektrum omezeno nikoli viskozitou, nýbrž omezeným rozlišením. V každém případě je (172) v přímém rozporu s (152)...



Obr. 38 — Energetické spektrum $\mathcal{E}_k$ odvozené z pozorování vývoje oblačnosti. Trojice grafů odpovídá třem složkám rychlosti u , v a w . V případě vertikály je velikost vírů omezena na asi 500 m, nad kterou již turbulence nemůže být kolmogorovská. Naopak malé velikosti jsou zde omezeny rozlišením pozorování, nikoli viskozitou. Převzato z Dwynerke (1998).

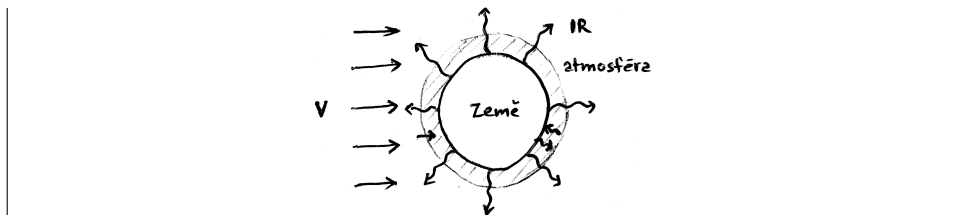
- [55] CARROL, B. W., OSTLIE, D. A. *An Introduction to Modern Astrophysics*. San Francisco: Pearson, Addison Wesley, 2007. ISBN 0321442849.
- [56] EKMAN, V. W. *On the influence of the Earth's rotation on ocean-currents*. *Arkiv för matematik, astronomi o. fysik*, **2**, 11, 1905.
- [57] KOLMOGOROV A. N. *Dissipation of energy in locally isotropic turbulence*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **32**, 1, 1941.
- [58] PECHALA, F., BEDNÁŘ, J. *Příručka dynamické meteorologie* Praha: Academia, 1991. ISBN 8020001980.
- [59] RICHARDSON, L. F. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1922.
- [60] ROSSBY, C. G. *Planetary flow patterns in the atmosphere*. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **66**, 68, 1939.
- [61] SALMON, R. *Lectures on geophysical fluid dynamics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1998. ISBN 0195108086.
- [62] SHORE, S. N. *Astrophysical hydrodynamics*. Weinheim: Wiley-Vch, 2007. ISBN 978352740-6692.
- [63] WATKINS, T. *Kolmogorov's theory of turbulence and the energy spectrum*. [online] [cit. 2017-05-10]. <http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/kolmo.htm>.

6 Radiační bilance

Jak je možné, že existují popírači globálního oteplování? Rozumějí radiační bilanci (obráz. 40)? Ověřují všechna čísla? Znají fyzikální zákony? Zkusili si to spočítat? Nevím. Zkusím si to sám.

6.1 Skleníkový jev

Nejjednodušší popis skleníkového jevu je následující. Uvažujme zvlášť: (i) Zemi, resp. její povrch, a (ii) atmosféru. Na náčrtu vidíme, že od Slunce přichází energie jako záření viditelné (V^{22}), kdežto ze Země a atmosféry odchází jako infračervené (IR). Nesmíme ovšem přehlédnout malé šipečky, znázorňující též výměnu energie mezi Zemí ↔ atmosférou!



Napišme pro Zemi a pro atmosféru příslušné zákony zachování energie:

$$(1 - k_V)(1 - A)\Phi + \sigma T_{\text{atm}}^4 = \sigma T^4, \quad (173)$$

$$k_V(1 - A)\Phi + k_{\text{IR}}\sigma T^4 = 2\sigma T_{\text{atm}}^4, \quad (174)$$

kde T označuje termodynamickou teplotu (v K) povrchu Země, T_{atm} totéž pro atmosféru, $\sigma \doteq 5,68 \cdot 10^{-8} \text{ W K}^{-4}$ Stefanovu–Boltzmannovu konstantu, Φ zářivý tok (ve W m^{-2}) od Slunce, A albedo (odrazivost) Země vč. atmosféry, k_V absorpční koeficient atmosféry v oboru viditelném, k_{IR} totéž v infračerveném (tepelném). Celkem jde o 6 členů. Lze je označit jako toky: $\Phi_{\odot \rightarrow \oplus}$, $\Phi_{\text{a.} \rightarrow \oplus}$, $\Phi_{\oplus \rightarrow \text{o.}}$, $\Phi_{\odot \rightarrow \text{a.}}$, $\Phi_{\oplus \rightarrow \text{a.}}$, $\Phi_{\text{a.} \rightarrow \text{o.}}$, kde „a.“ znamená atmosféra a „o.“ okolí.

Popis se vyznačuje značnou jednoduchostí: je psán pro 1 m^2 ; uvažuje planparalelní atmosféru se 2 povrchy, vyzařujícími stejně nahoru/dolů, zanedbali jsme jiné způsoby přenosu energie (fázové přeměny, proudění) atd. Neuvažujeme ani žádný tepelný profil $T_{\text{atm}}(r)$.

Důležitý parametr je solární konstanta $\mathcal{S} = 1361 \text{ W m}^{-2}$ (Kopp a Lean 2011), tj. energie (v J) dopadající za 1 s na plochu 1 m^2 kolmo k paprsku *mimo* atmosféru. Průměrný tok na vrchu atmosféry je ovšem pouze $\Phi = \mathcal{S}/4$, protože: (a) Země je

²² též NIR

koule; (b) Slunce svítí jen z jedné strany. Jinými slovy, Slunce je malá světlá skvrna na jinak tmavé obloze.

Zde budeme předpokládat, že S je konstantní; beztak nehraje žádnou roli v oteplování! Hodnotu albeda uvažujeme standardní, $A = 0,31$, společnou pro Zemi a atmosféru.

Příklad: Co můžeme sami měřit? Nejjednodušší je asi měření teploty. Vzal jsem proto infrateploměr, namířil jsem jej na oblohu, $T_{\text{atm}} = -25^\circ\text{C} \doteq 248\text{ K}$, a na zem, $T = 10^\circ\text{C} \doteq 283\text{ K}$ (viz tab. 5). Samozřejmě je takové měření příliš ledabydlé! Vždyť jsme neuvažovali žádné rozdíly den/noc, léto/zima, rovník/pól, oblačnost, různost povrchů atd. Nicméně berme to jako ledabydlý experiment anebo okamžitý stav.

čas UT	podmínky	T °C	T_{atm} °C
4. 11. 14 h	den, skoro jasno	+10	-25
5. 11. 19 h	noc, jasno	0	-34
8. 11. 8 h	den, mlha	+1	-1

Tab. 3 — Měření okamžité teploty povrchu Země a atmosféry pomocí infrateploměru. Nejistota měření je sice $\sigma_T \simeq 1^\circ\text{C}$, ale podstatně větší je její proměnlivost v čase a prostoru, řádově $\Delta T \simeq 30^\circ\text{C}$.

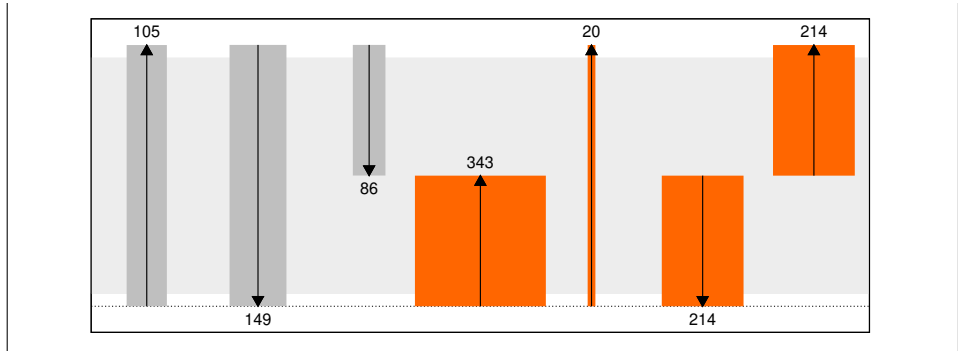
Z rovnic (173), (174) pak lze vyjádřit:

$$k_V = 1 - \frac{\sigma T^4 - \sigma T_{\text{atm}}^4}{(1 - A)\Phi}, \quad (175)$$

$$k_{\text{IR}} = \frac{2\sigma T_{\text{atm}}^4 - k_V(1 - A)\Phi}{\sigma T^4}. \quad (176)$$

Vychází $k_V = 0,36$, $k_{\text{IR}} = 0,94$. Zajímavé. Asi třetina viditelného záření je pohlcena, což by odpovídalo obvyklé extinkci při astronomických pozorováních. V infračerveném oboru atmosféra pohlcuje mnohem víc než ve viditelném. Zajímavější jsou jednotlivé toky (ve W m^{-2}): $\Phi_{\odot \rightarrow \oplus} = 105$, $\Phi_{\odot \rightarrow \oplus} = 149$, $\Phi_{\odot \rightarrow \text{a.}} = 85$, $\Phi_{\oplus \rightarrow \text{a.}} = 343$, $\Phi_{\oplus \rightarrow \text{o.}} = 20$, $\Phi_{\text{a.} \rightarrow \oplus} = \Phi_{\text{a.} \rightarrow \text{o.}} = 214$; znázorňuje je obr. 39. Soustředme se a dejme si pozor na jazyk. Platí *zde* totiž následující tvrzení:

1. **Atmosféra nás hřeje víc než Slunce!**
2. Slunce nám dává světlo.
3. Atmosféra nám dává neviditelné světlo.
4. Země (z 1 m^2) svítí víc než Slunce.
5. Vzduch je zahříváný Zemí.
6. Vzduch je neprůhledný (v IR).
7. Slunce má 6000 K , ale pouze $6 \cdot 10^{-5}\text{ sr}$ (steradiánu).
8. Atmosféra má okolo 248 K , ale celých $2\pi\text{ sr}$.
9. Bez Slunce by samozřejmě $T_{\text{atm}} \rightarrow 0$ i $T \rightarrow 0$.



Obr. 39 — Radiální bilance dle jednoduchého popisu. Dole povrch Země, nahoře vršek atmosféry. Číselné hodnoty udávají toky (ve W m^{-2}). Viditelné světlo šedě, neviditelné červeně. Výpočet byl proveden pro parametry $T = 283 \text{ K}$, $T_{\text{atm}} = 248 \text{ K}$, $k_V = 0,36$, $k_{\text{IR}} = 0,94$.

Naopak neplatí tvrzení:

1. Slunce nám dává světlo a teplo.
2. Vzduch je zahříván Sluncem.
3. Vzduch je průhledný.

Trochu přeháním, tvrzení nejsou zcela nepravdivá, ale polopravdivá. Nikdo nepochybnuje, že Slunce svítí v NIR nebo že vzduch je částečně průhledný (zejm. ve V). Také záměrně užíváme protimluv „neviditelné světlo“, protože IR je svou podstatou stejné jako V.

Zkontrolujme radiální bilanci v literatuře, založenou na globálních měřeních a podstatně složitějším modelování (viz obr. 40). Co vidíme? Že i naše okamžité měření a úplně jednoduchý popis mají smysl! Odchyly sice dosahují mnoha desítek procent (zejm. $\Phi_{\oplus \rightarrow o.}$, $\Phi_{a. \rightarrow \oplus}$), ale všechna výše uvedená tvrzení jsou kvalitativně správná.

6.2 Opacita vzduchu

Co kdyby se měnily absorpční koeficienty k_V , k_{IR} ? Z (173), (174) bychom vyjádřili:

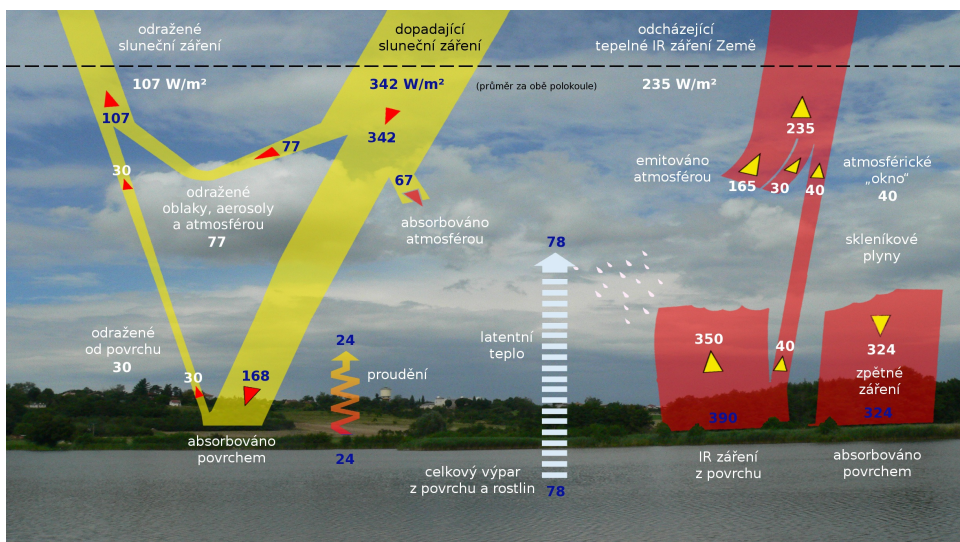
$$T = \left[\frac{(1 - 0,5k_V)(1 - A)\Phi}{(1 - 0,5k_{\text{IR}})\sigma} \right]^{0,25}, \quad (177)$$

$$T_{\text{atm}} = [T^4 - (1 - k_V)(1 - A)\Phi/\sigma]^{0,25} \quad (178)$$

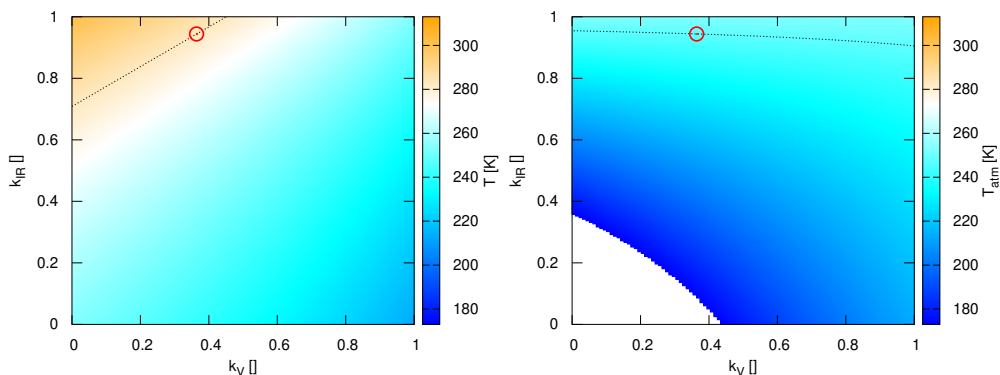
a podle obr. 41 bychom viděli, jak se mění teplota T i T_{atm} , bez ohledu na hodnotu $S = \text{konst.}$ Evidentně, atmosféra má zásadní vliv, a to k_{IR} více než k_V . Bez atmosféry ($k_V = k_{\text{IR}} = 0$) bychom byli na $T = 253 \text{ K}$, brr... A to jsme nezměnili A , které by při sněhové pokrývce mohlo vzrůst až na 0,90!

Zkontrolujme absorpci celé atmosféry tak, že ji přepočítáme na opacitu κ (čes. neprůhlednost). Je definována jako *relativní* úbytek intenzity I na jednotku délky dx a jednotku hustoty ρ :

$$dI = -\kappa \rho I dx. \quad (179)$$



Obr. 40 — Radiční bilance dle [64]. © Lenka Trojanová.



Obr. 41 — Teplota Země T (vlevo) a atmosféry T_{atm} (vpravo) v závislosti na absorpčním koeficientu k_V ve viditelné a k_{IR} v infračervené oblasti spektra. Červený bod odpovídá našemu měření.

Její jednotka $[\kappa] = \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$; čili jaká plocha (z 1 m^2) by byla geometricky zastíněna, kdybychom rozptýlili 1 kg dané látky. Je-li dI/I velké, nelze rovnici použít přímo v diferenciálním tvaru, nýbrž v integrálním tvaru:

$$I(x) = I(0) e^{-\kappa \rho x}, \quad (180)$$

neboli:

$$\kappa = -\frac{1}{\rho x} \ln \frac{I(x)}{I(0)}. \quad (181)$$

V našem případě $x \simeq 10 \text{ km}$, $\rho \simeq 1 \text{ kg m}^{-3}$, když uvažujeme atmosféru jako homogenní. Celková hmotnost atmosféry pak vychází správně asi $5 \cdot 10^{18} \text{ kg}$. Dále $I(x)/I(0) = 1 - k_V = 0,64$, tedy $\kappa_V = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$. Je to hodně, nebo málo? Málo. Látka je totiž v neutrálním stavu, fotony z oboru V nezpůsobují excitace/ionizace elektronových stavů molekul N_2 , O_2 , čili se šíří snadno.²³ Otázka je, co způsobuje zvýšenou absorpci (opacitu) v IR?

Příklad: Počítání beránků. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Proč je počítám? Abych si uvědomil, že zvýšená opacita oblaků (ve V) není způsobena běžnými plyny (N_2 , O_2), nýbrž vzácnými (H_2O). V tomto případě došlo k fázovému přechodu (kondenzaci), čili vzniku kapiček, které účinně rozptylují světlo. Ostatně vidím, že v mlze nevidím. Infrateploměrem lze ověřit, že oblaky způsobují změny také v oboru IR. Zde může jít o projev zmiňovaných kapiček, teplotního profilu $T_{\text{atm}}(r)$ nebo tepla odevzdaného okolí při kondenzaci.

Dokonce ani kdyby žádné oblaky vidět nebyly, teplota by kolísala, protože sama vodní pára způsobuje absorpci v IR. Astronomové na observatoři ALMA by mohli vyprávět. Celá observatoř byla navržena tak, aby pozorovala v mezerách mezi absorpčními pásy. Důvodem jsou vibrační přechody v molekule H_2O , resp. vazbě O–H. Obsah vodní páry je průměrně 0,4 % (na objem), resp. 0,25 % (na hmotnost). Podle (181) dělíme menším ρ , tzn. že opacita samotné páry v IR je řádově vyšší, $\kappa_{\text{IR}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$.

Příklad: Na pružině se závaží si ověřím, že zrychlení:

$$a = -\frac{kx}{m}, \quad (182)$$

kde k je tuhost pružiny, x výchylka, m hmotnost závaží. Čím tužší, tím je frekvence kmitů vyšší, protože vratné zrychlení je větší. Jednotky jsou $[k] = \text{kg s}^{-2}$, $[m] = \text{kg}$, čili úhlová frekvence těžko může být něco jiného než:

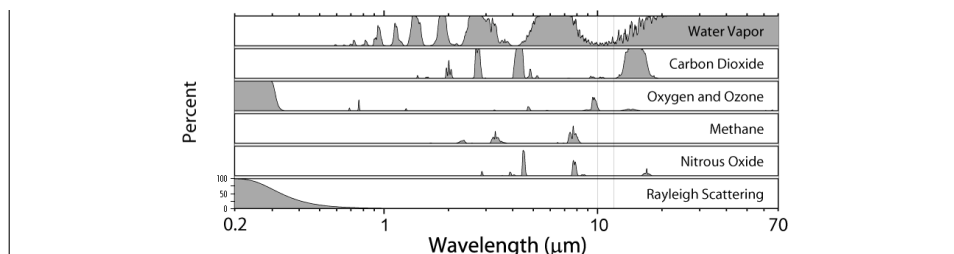
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (183)$$

Co kmitá v molekule H_2O ? Vodík, čili $m = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Co přitahuje H a O? Kdyby byla vazba iontová, tzn. H^+ a O^- , pak podle Coulombova zákona:

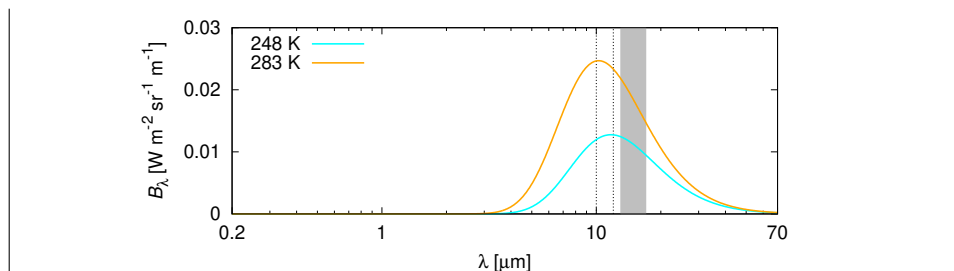
$$k = -\frac{am}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{x^3}, \quad (184)$$

což při $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$, $e = 1,6 \text{ C}$ a $x = 0,27 \text{ nm}$ vychází 12 kg s^{-2} . Kmity umožňují absorpci/emisi fotonu s $E = \hbar\omega = 0,05 \text{ eV}$ a $\lambda = 2\pi c/\omega \doteq 23 \mu\text{m}$,

²³ Naopak fotony z UV způsobují excitace/ionizace ve vysoké atmosféře (termosféře), a proto se nešíří snadno.



Obr. 42 — Závislost procentuální absorpce atmosférou na vlnové délce λ , způsobená molekulami: H_2O , CO_2 , O_2 , O_3 , CH_4 , NO_2 . Uveden je také Rayleighův rozptyl (ve V, UV), účinný pro všechny molekuly. Převzato z (http://en.wikipedia.org/wiki/Absorption_band).



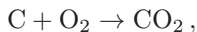
Obr. 43 — Monochromatická intenzita B_λ v závislosti na λ pro vyzařování absolutně černého tělesa o teplotě 248 K (modře) a 283 K (oranžově) dle Planckova zákona. Skutečné vyzařování je zásadně ovlivněno propustností atmosféry; mezi 13 a 17 μm je jeden z absorpčních pásů CO_2 .

tj. IR. Ve skutečnosti je vazba slabší (kovalentní) a pružina poddajnější. Také by se měla užít redukovaná hmotnost, $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$, a uvážit odpudivá síla, neboť kmitání je okolo rovnovážné polohy; nicméně musí být řádově stejně velká jako přitažlivá. Přitom jde o kvantový systém, tedy s kvantovanými hladinami E a různými λ zahrnujícími prakticky celý obor IR. V případě CO_2 lze obdobnou úvahou dojít k obdobnému λ , neboť $x \downarrow$, $m \uparrow$.

V literatuře je možno zkontrolovat, že právě tyto dva plyny, H_2O , CO_2 , mají široké absorpční pásy přes celé IR (viz obr. 42). Naopak N_2 , O_2 nehrají roli, i když jejich hmotnostní podíl je řádově větší, protože jsou prostě příliš průhledné (v IR).

6.3 Emise CO_2

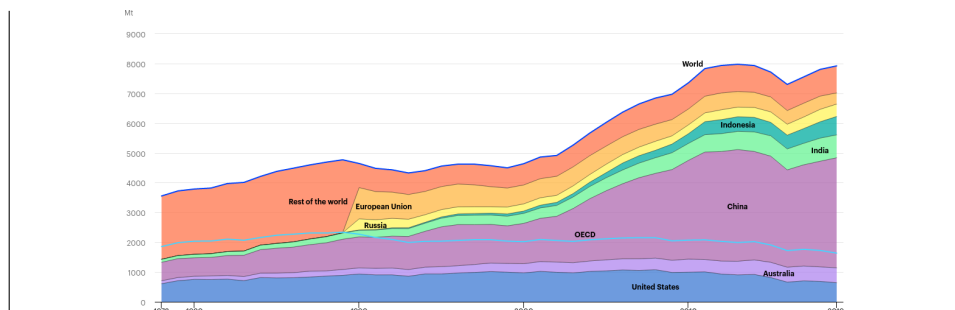
Obsah CO_2 ve vzduchu je asi 0,04 % (na objem), neboli 400 ppm (části na milion). Jak odhadnout emise od doby průmyslové revoluce? Například podle údajů IEA se mezi roky 1971 až 2019 těžilo od 3 500 do 8 000 megatun uhlí za rok, tzn. asi 276 000 Mt celkem (obr. 44). Obsah C bývá 70 %. Hmotnost CO_2 je pochopitelně větší, neboť:



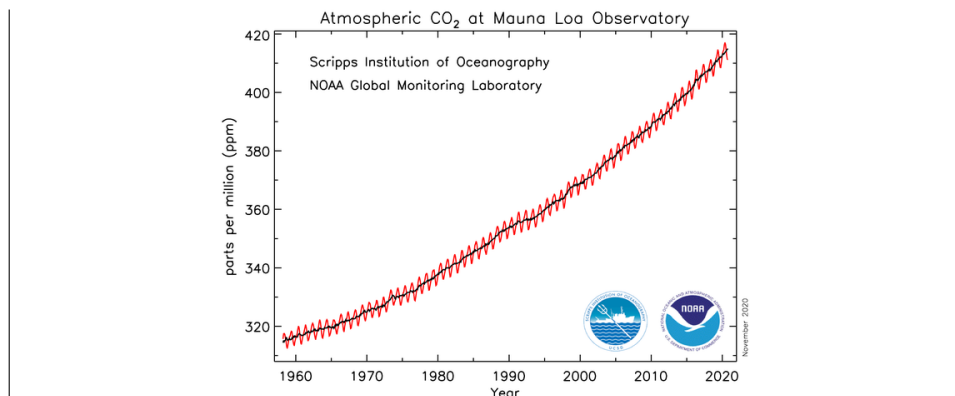
odkud plyne $7 \cdot 10^{14}$ kg, což po přepočtení na objem činí 90 ppm! Je sice poněkud obtížné vidět neviditelný plyn v neviditelném oboru, nicméně jámy v Severočeské

hnědouhelné pánvi vidí všichni. Samozřejmě ne všechny plyny zůstávají v atmosféře, část je opět vázána v přírodě (v jiné podobě). Na druhou stranu máme také jiné zdroje emise — zemní plyn, ropu, cement, odlesňování atd.

V literatuře lze ověřit, že tyto antropogenní emise nejsou vázány zcela, měřené množství CO_2 totiž neustále roste (obr. 45); příp. poklesy jsou sezónní změny. Od průmyslové revoluce je nárůst přinejmenším 130 ppm (z 270 na dnešních 400).



Obr. 44 — Roční těžba uhlí v megatunách (Mt) v období let 1978 až 2019 podle IEA. Převzato z <https://www.iea.org/>.

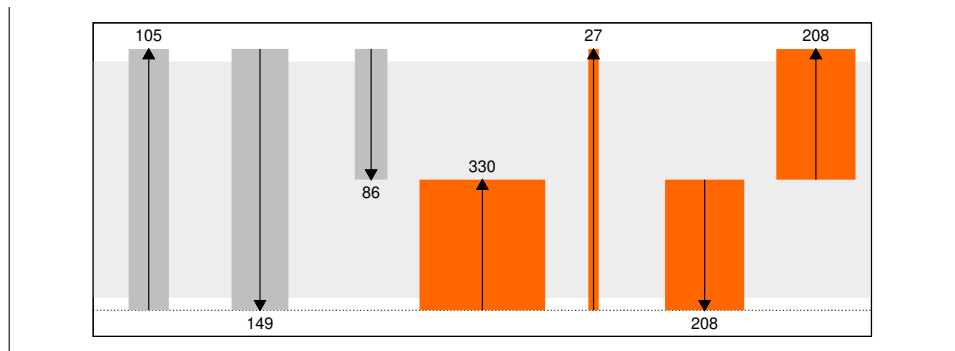


Obr. 45 — Měření obsahu CO_2 ve vzduchu v jednotkách ppm (části na milion) na observatoři Mauna Loa, Hawaii. Převzato z <https://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/mlo.html>.

6.4 Globální oteplování

Zásadní otázka je, jak se mění k_{IR} ? Pokud by absorpce v IR byla způsobována pouze CO_2 , pak by byla úměrná jeho ρ podle (181), $k = 1 - e^{-\kappa \rho x}$. Je-li dnešní $k_{\text{IR}} = 0,94$, pak původní by bylo 0,88. Protože se však CO_2 podílí na absorpci jen částečně (asi 1/6; viz obr. 42 v rozsahu obr. 43), zbytek (5/6) zajišťuje H_2O , vezmeme jen 1/6 změny, tzn. 0,93. Protože se však při změně T zároveň změní obsah H_2O , vezmeme dvojnásobek změny, tzn. 0,92.

Jde o zásadní změnu radiační bilance (ve W m^{-2}): $\Phi_{\oplus \rightarrow \text{a.}} = 330$, $\Phi_{\oplus \rightarrow \text{o.}} = 27$, $\Phi_{\text{a.} \rightarrow \oplus} = \Phi_{\text{a.} \rightarrow \text{o.}} = 208$ (srov. obr. 39 a 46). Teplota v minulosti musela být nižší $T' = 281,7 \text{ K}$, čili $\Delta T = T - T' = +1,3 \text{ K}$. Tj. podstata globálního oteplování.



Obr. 46 — Totéž jako obr. 39, ale pro *nižší* absorpční koeficient $k_{\text{IR}} = 0,92$.

Závěr? Pomocí zákona zachování energie a Stefanova–Boltzmannova zákona jsme popsali, jak funguje skleníkový jev a globální oteplování. Jejich podstatou jsou plyny H_2O a CO_2 , absorbující v oboru IR. Některé parametry (k_{V} , k_{IR}) jsme přitom ověřovali vlastním měřením, abychom si věřili. Jiné (např. těžbu uhlí) jsme získávali z důvěryhodných zdrojů. Došli jsme k závěru, že se teplota zvýšila asi o 1 K, což je zcela v souladu se zprávami panelu IPCC [66]. Jaká je tedy odpověď na první otázku? Nevím.

[64] HAIGH, J. D. *The Sun and the Earth's climate. Living Rev. Solar Phys.*, **4**, 2, 2007.

[65] KOPP, G., LEAN, J. L. *A new, lower value of total solar irradiance: Evidence and climate significance. Geophys. Res. Lett.*, **38**, L01706, 2011.

[66] STOCKER, T. F., QIN, D., PLATTNER, G.-K., TIGNOR, M., ALLEN, S.K., BOSCHUNG, J., NAUELS, A. A. J. (EDS.) *IPCC: Climate Change 2013: The Physical Science Basis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

7 Přenos záření

Přenosu záření zřejmě není vyhnoutí, neboť každý hydrodynamický model konec konců budeme muset porovnat s pozorováním. Vzhledem k tomu, jaké úžasné přístroje jsou dnes k dispozici (ALMA, CHARA, VLBI a spol.), jistě budeme potřebovat co nejpodrobnější, to znamená monochromatický popis.

Než začneme, ujasněme si, jakou veličinu pro popis potřebujeme. Představme si, že ji měříme dalekohledem, s filtríkem a detektorem, který má jen jeden pixelík. Jistě musí jít o energii (s jednotkou J), nesmí záviset na expoziční době (s^{-1}), na ploše čočky dalekohledu (nikoli detektoru!) (m^{-2}), jeho natočení (podělíme faktorem $\cos \vartheta$, kde ϑ označuje úhel od osy detektoru), obecně však veličina může záviset na směru, ale nikoli na prostorovém úhlu vytnutém plochou detektoru (nikoli čočky!) neboli zorným polem (sr^{-1}), ani na šířce propustnosti filtru (nm^{-1}). Právě takovou veličinou je monochromatická intenzita:

$$I_\lambda = \frac{dE}{dt dS \cos \vartheta d\omega d\lambda} \quad (185)$$

s jednotkou $J s^{-1} m^{-2} sr^{-1} nm^{-1}$.

Kdybychom měřili anténkou s heterodynem, asi bychom místo vlnové délky λ užívali raději frekvenci ν a *jinou* monochromatickou intenzitu:

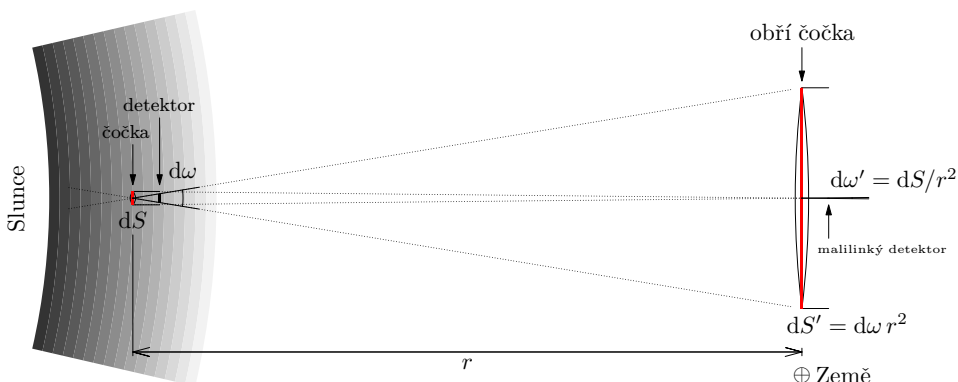
$$I_\nu = \frac{dE}{dt dS \cos \vartheta d\omega d\nu} \quad (186)$$

s *jinou* jednotkou $J s^{-1} m^{-2} sr^{-1} Hz^{-1}$. Intenzitě připisujeme směr opačný, než jakým míří dalekohled, čili kam by mířilo záření, kdybychom mu do cesty nic nestrkali; prostorový úhel je ovšem tentýž.

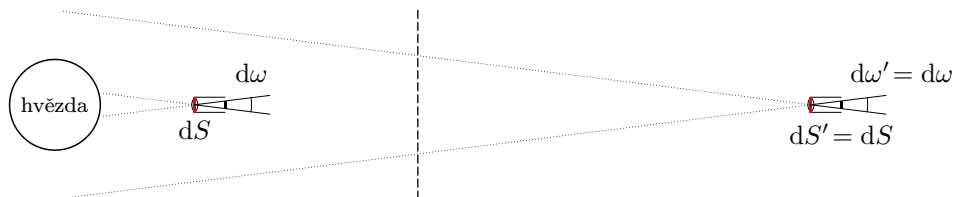
Takto definovaná intenzita má velmi pozoruhodné vlastnosti, například pro ni *neplatí* zákon čtverců! Představme si, že měříme přímo na Slunci (hluboko ve fotosféře; obr. 47), zjistíme asi $I_\lambda \doteq 4 \cdot 10^4 W m^{-2} sr^{-1} nm^{-1}$, a to téměř nezávisle na směru; intenzita je zde skoro izotropní. Když měříme u Země, můžeme bez újmy na obecnosti použít obří dalekohled s plochou $dS' = d\omega r^2$, zabírající malířský prostorový úhel $d\omega' = dS/r^2$. Evidentně pak zachytáváme tutéž energii $dE' = dE$ a i intenzita vychází stejná $I'_\lambda = I_\lambda$! Podstatný rozdíl je ovšem v jiných směrech než ke Slunci (resp. od Slunce), tam je $I'_\lambda = 0$, čili je velmi anizotropní; Slunce je malá světlá skvrna na jinak tmavé obloze.

Proč se tedy o hvězdách říká, že jsou slabé? Celý problém spočívá v rozdílu mezi rozlišeným a nerozlišeným zdrojem (obr. 48)! Nedokážeme-li²⁴ dostatečně zmenšit $d\omega'$, mícháme světlo a tmu, tudíž vychází malé I_λ . Pro nerozlišené zdroje potom platí zákon čtverců.

²⁴ mj. kvůli difrakci, aberacím, seeingu



Obr. 47 — Měření monochromatické intenzity I_λ těsně u Slunce (ve fotosféře) a u Země. V prvním případě máme plochu dS , což je plocha čočky dalekohledu, prostorový úhel $d\omega$, který je vymezen plochou detektoru, a úhel $\vartheta = 0$. Intenzita je zde téměř izotropní, i kdybychom dalekohledkem natočili jiným směrem, naměříme téměř totéž. Ve druhém případě (ve vzdálenosti r) volíme bez újmy na obecnosti plochu $dS' = d\omega r^2$, prostorový úhel $\omega' = dS/r^2$, abychom zachytili všechno záření z plochy dS jdoucí do prostorového úhlu $d\omega$. Pak je evidentní, že $I'_\lambda = I_\lambda$, nedochází-li mezitím k žádné absorpci, emisi nebo rozptylu. I kdybychom ale měli dalekohled jinací, dělili bychom energii dE' jiným dS' , $d\omega'$ a obdrželi totožné I'_λ .



Obr. 48 — Měření intenzity I_λ pro rozlišený a nerozlišený zdroj. V prvním případě jsme natolik blízko hvězdy, že ji jsme schopni s naším dalekohledkem vytínajícím prostorový úhel $d\omega$ rozlišit, tzn. vidět pouze část jejího povrchu a změřit intenzitu I_λ . Při vzdálení za určitou hranici (čárkovanou) se ale do téhož prostorového úhlu $d\omega' = d\omega$ dostává nejen světlo, ale i tma, proto vychází nižší intenzita, $I'_\lambda < I_\lambda$.

Výše uvedené úvahy se týkají pouze záření ve vakuu. Pokud není prázdno, $I_\lambda \neq \text{konst.}$, protože může nastávat absorpce, emise nebo rozptyl, a to mnoha různými způsoby.

7.1 Elementární procesy

Procesů je celá řada (viz tab. 4). Při nejvyšších energiích (resp. teplotách; $E \simeq kT$) bývá látka v plně ionizovaném stavu, uplatňuje se výhradně rozptyl na volných elektronech, Comptonův se změnou energie fotonu, Thomsonův bez. Jde o volně-volné procesy, které jsou nekvantované, a ve spektru tedy vzniká kontinuum.

V silných magnetických polích nastává navíc synchrotronová (relativistická) emise, příp. cyklotronová (nerelativistická). Je sice monochromatická, ale je-li magnetické pole spojitě proměnné, vzniká opět kontinuum.

Comptonův rozptyl na elektronech	$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$	$\sigma_C N_e$
Thomsonův rozptyl na elektronech	$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$	$\sigma_T N_e$
synchrotronová emise	$e^- \rightarrow e^- + \gamma$	
cyklotronová emise	$e^- \rightarrow e^- + \gamma$	$\sigma_T B^2 v^2 / (\mu_0 c)$
volně-volná emise (brzdné záření)	$Z^+ + e^- \rightarrow Z^+ + e^- + \gamma$	$N_e N_i B_{\kappa\kappa'}$
volně-volná absorpce	$Z^+ + e^- + \gamma \rightarrow Z^+ + e^-$	$N_e N_i U_\nu B_{\kappa'\kappa}$
fotoionizace	$Z + \gamma \rightarrow Z^+ + e^-$	$N_m U_\nu B_{m\kappa}$
srážková ionizace	$Z + e^- \rightarrow Z^+ + 2e^-$	$N_m N_e C_{m\kappa}$
autoionizace (Augerův jev)	$Z^{**} \rightarrow Z^+ + e^-$	$N_\nu U_\nu \kappa_{\text{diel}}$
rekombinace (2-částicová zářivá)	$Z^+ + e^- \rightarrow Z + \gamma$	$N_i N_e A_{\kappa m}$
3-částicová rekombinace	$Z^+ + 2e^- \rightarrow Z + e^-$	$N_i N_e^2 C_{\kappa m}$
dielektronická rekombinace	$Z^{*+} + e^- \rightarrow Z^{**} \rightarrow Z + \gamma$	$N_i N_e \alpha_{\text{diel}}$
absorpce, elektronový přechod	$Z + \gamma \rightarrow Z^*$	$N_m U_\nu B_{mn}$
spontánní emise	$Z^* \rightarrow Z + \gamma$	$N_n A_{nm}$
stimulovaná emise	$Z^* + \gamma \rightarrow Z + 2\gamma$	$N_n U_\nu B_{nm}$
srážková excitace	$Z + e^- \rightarrow Z^* + e^-$	$N_m N_e C_{mn}$
srážková deexcitace	$Z^* + e^- \rightarrow Z + e^-$	$N_n N_e C_{nm}$
fotoionizace iontu H^-	$H^- + \gamma \rightarrow H + e^-$	$N_m U_\nu B_{m\kappa}$
absorpce, vibrační přechod	$M + \gamma \rightarrow M^*$	
absorpce, rotační přechod	$M + \gamma \rightarrow M^*$	
Rayleighův rozptyl na molekulách	$M + \gamma \rightarrow M + \gamma$	
Ramanův rozptyl (anelastický)	$M + \gamma \rightarrow M + \gamma$	
Mieho rozptyl na prachu	$pz + \gamma \rightarrow pz + \gamma$	
absorpce prachem	$pz + \gamma \rightarrow pz^*$	
emise prachem (tepelná)	$pz^* \rightarrow pz + \gamma$	

Tab. 4 — Elementární procesy ovlivňující přenos záření buď přímo, při interakci látky a záření, nebo nepřímo (srážkami). Jsou řazené sestupně podle energie (případně teploty T , je-li definována), při které se převážně uplatňují. Z zde označuje atom, M molekulu a pz prachové zrno. Podle Aschwanden (2005).

Při poklesu energií na úroveň $E \simeq 10^0$ eV, je ionizace pouze částečná, neustále dochází k ionizaci atomů a rekombinaci iontů. Procesy jsou vázaně-volné, nekvan- tované, vznikají při nich hrany spektrálních sérií (mj. Balmerův skok v UV).

Zároveň se zmiňovanými ionizacemi nastávají elektronové přechody, přičemž mů- že jít o absorpci, emisi nebo stimulovanou emisi. Jakožto vázaně-vázané procesy jsou kvantované a vznikají při nich spektrální série, zejména v oborech UV, V, IR. Zvláštním případem je iont H^- , jehož ionizací vzniká $H\text{I}$. Díky jeho nízké ionizač- ní energii ($E = 0,75$ eV) jsou jeho ionizace a rekombinace velmi častými procesy v atmosférách hvězd, projevující se spojitým zářením v oborech V, NIR.

Po poklesu energií na úroveň disociační energie molekul, vznikají nevyhnutelně molekuly a s nimi mnoho dalších energetických hladin. Vibrační přechody jsou obvyklé při $E \simeq 10^{-1}$ eV, a relevantní záření je tedy NIR, FIR. Opět lze očekávat absorpce, emise i stimulovaná emise. Rotační přechody mívají energie ještě nižší

$E \simeq 10^{-3}$ eV, čemuž odpovídá obor FIR nebo sub-mm. V obou případech jsou přechody kvantované.

Zároveň nastává rozptyl na molekulách (nebo prachových částicích), který lze při jejich rozměru $a \ll \lambda$ aproximovat jako Rayleighův.

Při nejnižších energiích $E \lesssim 10^{-1}$ eV začíná depozice prachových zrn, čili sněžení²⁵, a to zprvu zrn silikátových a posléze zrn vodního ledu. Ve fyzice atmosféry se hovoří obecně o aerosolech. Pro popis jejich interakce se zářením je nutné použít obecnější Mieho rozptyl, neboť jejich rozměr může být $a \simeq \lambda$.

Ideálně bychom chtěli všechny výše uvedené procesy shrnout do dvou veličin: opacitního koeficientu κ_ν a emisního koeficientu j_ν .

7.2 Elementární přenosy

Nejjednodušší přenos je jednorozměrný (ve směru x), v homogenním prostředí, kde uvažujeme čistou absorpci. Intenzita se pak mění dle rovnice přenosu záření (RTE):

$$\frac{dI_\nu}{dx} = -\kappa_\nu \rho I_\nu, \quad (187)$$

kde opacita κ_ν vyjadřuje *relativní* úbytek intenzity na jednotku délky a jednotku hustoty; ihned vidíme, že má jednotku $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$. Řešením této obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci $I_\nu(x)$ je exponenciála:²⁶

$$I_\nu(x) = I_\nu(0) e^{-\kappa_\nu \rho x},$$

kde jsme integrační konstantu C obratem nahradili okrajovou podmínkou $I_\nu(0)$.

Uvažujeme-li čistou emisi, je příslušná rovnice:

$$\frac{dI_\nu}{dx} = j_\nu \rho, \quad (188)$$

kde emisní koeficient j_ν vyjadřuje intenzitu na jednotku délky a jednotku hustoty, čili má jednotku $\text{J s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{kg}^{-1}$. Řešením je zřejmě:

$$I_\nu = I_\nu(0) + j_\nu \rho x.$$

Zajímavějším případem je absorpce plus emise:²⁷

$$\frac{dI_\nu}{dx} = j_\nu \rho - \kappa_\nu \rho I_\nu. \quad (189)$$

²⁵ při vyšším tlaku kondenzace kapiček, čili déšť

²⁶ Alternativně lze rovnici zapsat pro optickou tloušťku τ , jejíž přírůstek $d\tau \equiv \kappa_\nu \rho dx$, $\frac{dI_\nu}{d\tau} = -I_\nu$, $I_\nu(\tau) = I_\nu(\tau_0) e^{-\tau}$. Prostředí, pro něž vychází $\tau \gg 1$, nazýváme opticky tlusté (čes. neprůhledné); naopak $\tau \ll 1$ opticky tenké.

²⁷ Alternativně $\frac{dI_\nu}{d\tau} = S_\nu - I_\nu$, kde $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}$ je zdrojová funkce.

Zde využijeme znalosti řešení homogenní rovnice $\frac{dI_\nu}{dx} - \kappa_\nu \rho I_\nu = 0$, a nehomogenní rovnici $\frac{dI_\nu}{dx} - \kappa_\nu \rho I_\nu = j_\nu \rho$ vyřešíme metodou variace konstant:

$$I_\nu(x) = C(x) e^{-\kappa_\nu \rho x},$$

což po dosazení do (189) dá:

$$\frac{dC}{dx} e^{-\kappa_\nu \rho x} + C e^{-\kappa_\nu \rho x} (-\kappa_\nu \rho) = j_\nu \rho - \kappa_\nu \rho C e^{-\kappa_\nu \rho x},$$

$$\frac{dC}{dx} = j_\nu \rho e^{\kappa_\nu \rho x},$$

odkud:

$$C(x) = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} e^{\kappa_\nu \rho x} + D.$$

Hodnotu integrační konstanty D zjistíme z okrajové podmínky v $x = 0$:

$$I_\nu(0) = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} + D,$$

tudíž výsledné *formální řešení*:

$$I_\nu = I_\nu(0) e^{-\kappa_\nu \rho x} + \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} (1 - e^{-\kappa_\nu \rho x}). \quad (190)$$

LTE. Někdy se látka nachází ve stavu lokální termodynamické rovnováhy (LTE). Rozhodně to nenastává vždy; snad lze říci, že LTE je častější v hustém prostředí, jež jakoby mimochodem bývá opticky tlusté. Neznamená to samozřejmě, že veškeré záření je rovnováze s veškerou látkou! Například $I_\nu(0)$ takové být nemusí. Nicméně *tepelné* záření, které se z látky uvolňuje, ano. Pokud si představíme uzavřenou dutinu (s malým otvorem pro měření), dostatečně ustálenou, tam by bylo $I_\nu(0) = 0$, $I_\nu = \text{konst.}$, konkrétně by bylo rovno Planckově intenzitě, $I_\nu = B_\nu$. Odtud plyne:

$$0 = j_\nu \rho - \kappa_\nu \rho B_\nu$$

a pro poměr koeficientů zvaný *zdrojová funkce*:

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} \equiv S_\nu = B_\nu, \quad (191)$$

kde:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp \frac{h\nu}{kT} - 1}; \quad (192)$$

T označuje termodynamickou teplotu (látky i plynu), c rychlost světla ve vakuu, h Planckovu konstantu, k Boltzmannovu konstantu. Mimochodem nám to umožňuje výpočet emise z absorpce. Máme tudíž formální řešení při LTE:

$$I_\nu = I_\nu(0) e^{-\kappa_\nu \rho x} + B_\nu (1 - e^{-\kappa_\nu \rho x}) . \quad (193)$$

Non-LTE. Pokud látka není v rovnováze (non-LTE), je problém složitější. Snad lze říci, že non-LTE je častější v řídkém prostředí (též opticky tenkém), kde je mezi atomy velmi málo srážek. Pak totiž převažují zářivé deexcitace, nízké hladiny atomů jsou populované hodně, vysoké málo oproti LTE. Nesmí nás ani napadnout používat rovnici $S_\nu = B_\nu$.

Jinou příčinou může být energetické záření přicházející odjinud, opět málo srážek, kdy převažují zářivé excitace (pumpování), nízké hladiny jsou populované málo, vysoké hodně oproti LTE.

Příklad: Je opacita atmosféry venku velká nebo malá?

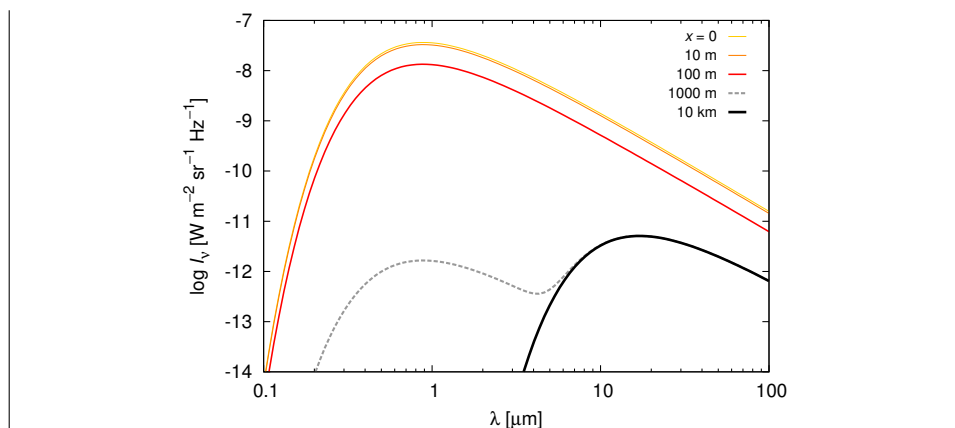
Řešení: Evidentně malá, neb vidíme do vesmíru! Směrem svisle vzhůru je řádově $\kappa_V = -\frac{dI}{I} \frac{1}{\rho dx} \simeq 0,3 \frac{1}{1.10^4} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$. Když je mlha, vidíme naopak mizerně a $\kappa_V \simeq 1,0 \frac{1}{1.10^2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} = 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$, i když zde jde spíše o rozptyl na kapičkách, pročež se v mlze nesetmí. A je záření v této místnosti v rovnováze se vzduchem? Rozhodně ne, neboť většina pochází ze Slunce, takže rovnovážná teplota by byla $T_\odot = 5780 \text{ K}$! Lze tedy předpokládat LTE nebo non-LTE? Kdybychom okna zatemnili, viděli bychom tepelné planckovské spektrum, odpovídající teplotě $T \simeq 300 \text{ K}$, čili látka je ve stavu LTE.

Analytické řešení rovnice přenosu pro případ konstantní opacity ukazuje obr. 49. Počáteční $I_\nu(0)$ postupně přechází v S_ν .

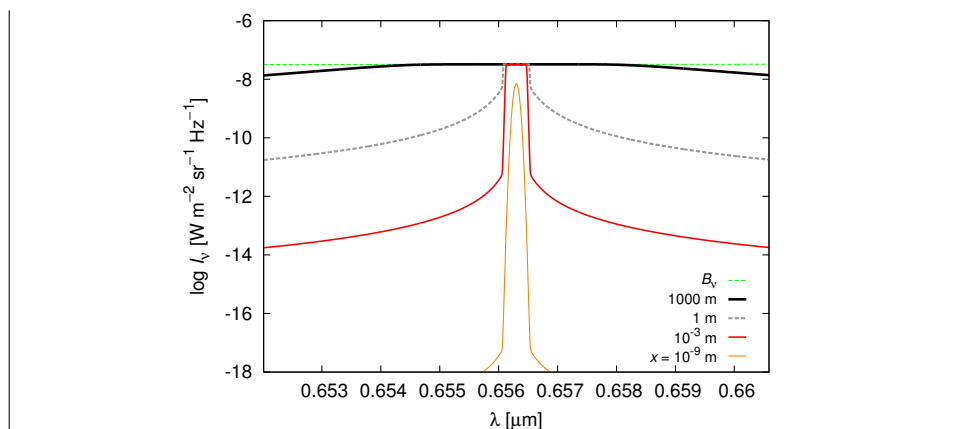
Opačným případem by byl dvouhladinový atom, jehož opacita je vysoká pouze v úzkém rozmezí λ , jak ukazuje obr. 50. Na počátku je $I_\nu(0) = 0$, postupně se objevuje úzká emisní čára, roste I_ν , až dosáhne úrovně S_ν , pak se profil ovšem rozšiřuje, neboť právě v čáře samotné probíhá absorpce (samoabsorpce); křídla postupně vytvoří kontinuum. Poznamenejme, že bez Lorentzovy funkce by nevzniklo, neboť Gaussova klesá příliš rychle k 0.

Z rovnice (190) a výše uvedených úvah zároveň vyplývá, že kdybychom měli prostředí hustší teplejší dole (řidší chladnější nahoře), vzniklo by *absorpční spektrum*. Naopak prostředí řidší teplejší nahoře by způsobilo kontinuum s emisemi.

Ve skutečnosti je ale problém složitý, neboť opacita je obecně funkcí mnoha lokálních veličin, $\kappa_\nu = \kappa_\nu(\nu, \rho, T, X, Y, Z, \rho_d, T_d(a), \mathbf{v}, \mathbf{B}, n_i, \dots)$, a naopak I_ν ovlivňuje ostatní veličiny. A složitý problém je ještě složitější kvůli rozptylu. Záření v jednom směru totiž závisí na záření ve všech ostatních směrech! Rovnici přenosu záření lze proto pokládat zároveň za nejjednodušší (1. řádu) i nejsložitější (nelokální).



Obr. 49 — Přenos záření, čili změny intenzity I_ν se vzdáleností x ; spektrum je ovšem vynešené v závislosti na $\lambda = c/\nu$. Analytický výpočet za předpokladu konstantní opacity $\kappa_\nu = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$, hustoty $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$, a teploty $T = 300 \text{ K}$ (tzn. asi jako vzduch). Při lokální termodynamické rovnováze (LTE) je zdrojová funkce Planckova, $S_\nu = B_\nu(T)$. Okrajová podmínka byla $I_\nu(0) = B_\nu(T_\odot)$, $T_\odot = 5780 \text{ K}$. Spektrum proto postupně přechází z planckovského pro vysoké T na planckovské pro nízké T .



Obr. 50 — Přenos záření $I_\nu(x)$ pro dvouhladinový atom, konkrétně přechod odpovídající čáře H_α , $\lambda_{12} = 656,3 \text{ nm}$, $E_{12} = hc/\lambda_{12} = 1,8941 \text{ eV}$, Einsteinovy koeficienty $A_{21} = 6,4651 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$, $B_{21} = B_{12} = 1,0968 \cdot 10^{21} \text{ J}^{-1} \text{ m}^2 \text{ sr}$. Teplota byla $T = 5780 \text{ K}$, hustota $\rho = 10^{-9} \text{ kg m}^{-3}$ (tzn. asi jako fotosféra). Při LTE jsou populace hladin dány Boltzmannovým vztahem, $n_2/n_1 = \exp[-E_{12}/(kT)] = 0,02238$, celková koncentrace $n = n_1 + n_2 = \rho/(\mu m_H)$. Použita byla aproximace Voigtova profilu $\phi_{12}(\nu)$, kde Gaussův profil pro termální rozšíření měl parametr $\sigma = 0,02 \text{ nm}$ a Lorentzův profil pro srážkové rozšíření $\gamma = 5 \cdot 10^{-10} \text{ nm}$. Okrajová podmínka byla $I_\nu(0) = 0$. Nejprve je čára emisní, postupně roste, ale maximálně do úrovně kontinua dané zdrojovou funkcí S_ν . Jádru čáry je kompaktní, teprve křídla způsobují postupné rozšiřování profilu a přechod ke kontinuu.

7.3 Opacita plynu

Dvouhladinový atom. Opacita plynu je dána vlastnostmi atomů, z nichž je složen a možnými přechody mezi energetickými hladinami. Pro přehlednost uvedeme vztahy pro atom mající jen dvě hladiny (1, 2) ale mohli bychom je zapsat i obecněji (i, j). Emisní koeficient:

$$j_\nu \rho = \frac{h\nu_{12}}{4\pi} n_2 A_{21} \phi_{12}(\nu), \quad (194)$$

kde A_{21} označuje Einsteinův koeficient pro spontánní emisi (v s^{-1})²⁸, n_2 koncentrace atomů ve stavu 2 (v m^{-3}), $\phi_{12}(\nu)$ normalizovaný profil spektrální čáry. Absorpční koeficient:

$$\kappa_\nu \rho = \frac{h\nu_{12}}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi_{12}(\nu), \quad (196)$$

kde B_{12} je Einsteinův koeficient pro absorpci ($\text{v J}^{-1} \text{m}^3 \text{sr}$), B_{21} pro stimulovanou emisi (tj. záporná absorpce), která musí být zahrnuta v κ_ν , neboť je úměrná I_ν , n_1 je totéž jako předtím ve stavu 1,

Einsteinovy koeficienty jsou pro daný atom a přechod konstanty, nezávisejí na makroskopickém stavu plynu, neboť charakterizují jednotlivý atom. Vztahy mezi nimi lze odvodit při jakémkoliv stavu plynu, i při LTE, a ze stejného důvodu pak musejí platit i pro non-LTE. Z těchto úvah lze odvodit vztahy nazývané detailní vyrovnaní:

$$B_{21} = \frac{c^3}{8\pi h\nu_{12}^3} A_{21}, \quad (197)$$

$$B_{12} = \frac{g_2}{g_1} B_{21}. \quad (198)$$

Profil čáry. Normalizovaný profil čáry určuje, jaké frekvence bude moci soubor atomů vyzařovat. Jednak musíme uvážit Gaussovo termální rozšíření:

$$\phi_G(\nu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(\nu - \nu_{12} - \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}}{c} \nu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (199)$$

kde parametr:

$$\sigma = \frac{v}{c} \nu_{12}.$$

²⁸ Někdy se přechod charakterizuje silou oscilátoru f_{12} , což je bezrozměrné číslo od 0 do 1 (příp. jiného celého čísla pro degenerované hladiny), odpovídající podílu pravděpodobnosti absorpce měřené (či počítané kvantověmechanicky) ku pravděpodobnosti absorpce klasického oscilátoru iont–elektron; pak

$$B_{12} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e h \nu_{12}} f_{12}. \quad (195)$$

Rychlost je dána střední hodnotou jedné složky tepelné rychlosti, která se náhodně (v kvadrátu) sčítá s turbulentní rychlostí plynu:

$$v_T = \sqrt{\frac{kT_{\text{gas}}}{\mu m_H}}, \quad v = \sqrt{v_T^2 + v_{\text{turb}}^2}.$$

Zároveň ve vztahu uvažujeme Dopplerův posun, daný makroskopickou rychlostí $\mathbf{v}$ plynu, resp. skalárním součinem se směrem $\hat{k}$, ve kterém právě počítáme přenos záření.

Dále máme Lorentzovo tlakové rozšíření:

$$\phi_L(\nu, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{(\nu - \nu_{12})^2 + \gamma^2}, \quad (200)$$

kde parametr:

$$\gamma = 2N\sigma_{\text{col}}v_T$$

souvisí s četností srážek atomů, jež ovlivňují hladiny.

Protože výše uvedené procesy probíhají zároveň, je společný profil konvolucí a nazývá se Voigtův:²⁹

$$\phi_{12}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_G(\nu') \phi_L(\nu - \nu') d\nu'. \quad (201)$$

To, zda bude čára emisní nebo absorpční, se teprve uvidí. Výsledný profil může být také zcela pozmeněn, když se značně mění $\mathbf{v}$.

7.4 Opacita prachu

Geometrická absorpce. Jak závisí opacita prachu na λ ? Nejprve zkusme najít přibližný vztah pro případ $2\pi a \gg \lambda$, kdy je poloměr a zrn velký vzhledem k dané vlnové délce. V krychli o rozměru L mějme N zrn s geometrickým průřezem S , a albedem A . Pro čistou absorpci máme úbytek intenzity $dI_\lambda = -I_\lambda \kappa_\lambda \rho dx$; v našem konkrétním případě:

$$-\frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = \kappa_\lambda^{\text{abs}} \rho L \simeq \frac{NS(1-A)}{L^2}.$$

²⁹ Kdybychom nechtěli neustále počítat konvoluci, lze použít přibližný vztah ($f_G = 2\sigma\sqrt{2\log 2}$, $f_L = 2\gamma$, [81]):

$$f = \left(f_G^5 + 2,69269 f_G^4 f_L + 2,42843 f_G^3 f_L^2 + 4,47163 f_G^2 f_L^3 + 0,07842 f_G f_L^4 + f_L^5 \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\eta(\nu) = 1,36603 \frac{f_L}{f} - 0,47719 \left(\frac{f_L}{f} \right)^2 + 0,11116 \left(\frac{f_L}{f} \right)^3$$

$$\phi_{12}(\nu) \doteq \eta(\nu) \phi_L(\nu, f) + (1 - \eta(\nu)) \phi_G(\nu, f)$$

Odtud snadno vyjádříme opacitu:

$$\kappa_{\lambda}^{\text{abs}} \simeq \frac{NS}{\rho L^3} = \frac{\rho L^3}{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_d} \pi a^2 \frac{(1-A)}{\rho L^3} = \frac{3(1-A)}{4a\rho_d}, \quad (202)$$

kde ρ_d je hustota zrn samotných. Vidíme, že nezávisí na λ , jen na a . Submikronový prach s $a = 0,1 \mu\text{m}$, $\rho_d = 3\,000 \text{ kg m}^{-3}$, by způsobil $\kappa_{\lambda}^{\text{abs}} = 5\,000 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$.

Geometrický rozptyl. Na první pohled by se zdálo, že co se neabsorbuje, to se rozptýlí:

$$\kappa_{\lambda}^{\text{sca}} \simeq \frac{3A}{4a\rho_d}, \quad (203)$$

ale jevy jako odraz, lom, interní odraz v kapce vody, nebo difrakce na okraji způsobují *dodatečný* rozptyl, jemuž odpovídá dodatečný průřez $S' = \pi a^2$, navíc k S . To je sice divné, vždyť stín je stejně velký jako my, ale ve vzdáleném poli by to bylo patrné (viz gloriolu).

Rayleighova absorpce. Pro $2\pi a \ll \lambda$ elektromagnetická vlna se stejnou fází proniká celým zrnem a interaguje s jeho objemem, proto na konkrétních velikostech zrn již nezáleží. Proto $\kappa_{\lambda}^{\text{abs}} \neq f(a)$ navážeme na (202), předpokládáme $\kappa_{\lambda}^{\text{abs}} \propto \lambda^x$ takové, aby se a zkrátilo, odkud:

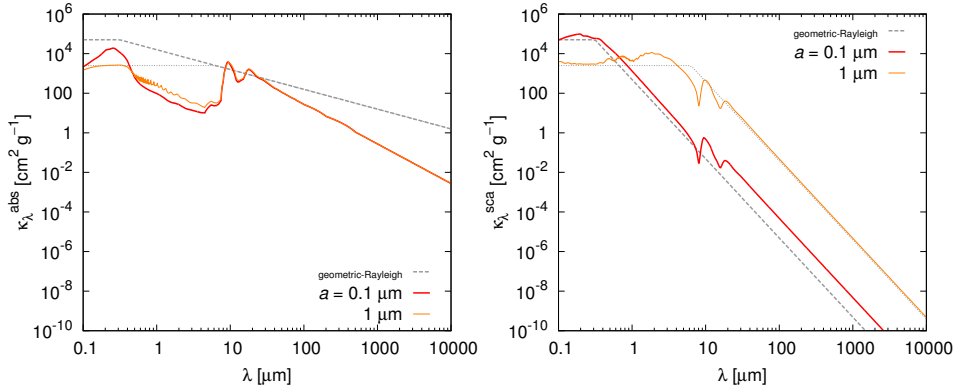
$$\kappa_{\lambda}^{\text{abs}} \simeq \frac{3(1-A)}{4a\rho_d} \left(\frac{\lambda}{2\pi a} \right)^{-1} = \frac{3\pi(1-A)}{2\rho_d \lambda}; \quad (204)$$

pokud by tedy na λ nezáviselo něco jiného, například optické konstanty n' , k .

Rayleighův rozptyl. Rozptyl na malých zrnech vykazuje pokles jako λ^{-4} , a to od přechodové hodnoty, tzn. $S = \pi a^2 \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4$, odkud odvodíme:

$$\kappa_{\lambda}^{\text{sca}} \simeq \frac{12\pi^4 a^3}{\rho_d \lambda^4}. \quad (205)$$

V přechodové oblasti lze očekávat oscilace, neboť vlna dopadá na zrno s nepříliš rozdílnou fází, takže může interferovat konstruktivně nebo destruktivně. Někde nastávají rezonance vln s vlastními frekvencemi krystalové mřížky minerálů; foton může být pohlcen a energie odejde pevnou látkou pryč jako fonon. Má-li minerál více rovin symetrie, očekáváme více vlastních frekvencí. Odezva je obdobná jako u buzeného kyvadla. Při laboratorních měřeních se materiály charakterizují optickými konstantami, tzn. indexy lomu n' (reálným) a k (komplexním). Výpočet $\kappa_{\lambda}^{\text{abs}}$, $\kappa_{\lambda}^{\text{sca}}$ se poté provádí pomocí Mieho teorie (viz obr. 51).



Obr. 51 — Opacita $\kappa_{\lambda}^{\text{abs}}$ pro absorpci (vlevo) a $\kappa_{\lambda}^{\text{sca}}$ pro rozptyl (vpravo), v závislosti na vlnové délce λ . Výpočet byl proveden Mieho teorií pro dvě různé velikosti a prachových zrn, 0,1 a 1 μm . Jako materiál byl předpokládán pyroxen se 70% obsahem Mg, s optickými konstantami z databáze Jena (Jäger aj. 2003). Čárkované a tečkované je pro porovnání vyznačena geometrická a Rayleighovy aproximace.

7.5 Rovnice přenosu a statistické rovnováhy

Po dosavadní přípravě můžeme diskutovat případ dostatečně složitý, zahrnující plyn, prach, emisi, stimulovanou emisi, absorpci, izotropní rozptyl, non-LTE, nestacionární intenzitu (celá rovnice je v jednotce $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{s}^{-1}$):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + c \hat{k} \cdot \nabla I_{\nu} = & c \sum_i \sum_{j>i} \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} n_j A_{ji} \phi_{ij}(\nu) + c \sum_a \kappa_{\nu}^{\text{abs}} \rho_d B_{\nu}(T_d) - \\
 & - c \sum_i \sum_{j>i} \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) \phi_{ij}(\nu) I_{\nu} - c \sum_a \kappa_{\nu}^{\text{abs}} \rho_d I_{\nu} - \\
 & - c(\kappa_{\nu}^{\text{sg}} \rho + \sum_a \kappa_{\nu}^{\text{sca}} \rho_d) I_{\nu} + c(\kappa_{\nu}^{\text{sg}} \rho + \sum_a \kappa_{\nu}^{\text{sca}} \rho_d) \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu} d\omega \\
 & \text{pro } \forall \hat{k}.
 \end{aligned} \tag{206}$$

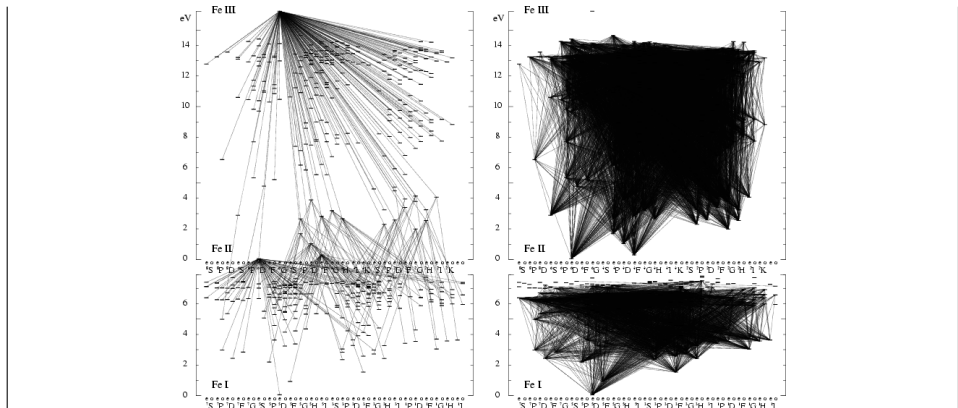
Případně dělíme vše c (takže jednotka je $\dots \text{m}^{-1}$). Rovnice se musí řešit pro všechny možné směry $\hat{k}$, nikoli pouze pro tři $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$. Protože populace hladin neznáme *a priori*, musíme výše uvedenou doplnit o soustavu rovnic statistické rovnováhy:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j>i} \left[n_j A_{ji} - (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu} \phi_{ij}(\nu) d\nu \right] \\
 & - \sum_{j<i} \left[n_j A_{ij} - (n_i B_{ji} - n_j B_{ij}) \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu} \phi_{ji}(\nu) d\nu \right] \\
 & + \sum_{j \neq i} [n_i C_{ij} - n_j C_{ji}] = 0 \quad \text{pro } i = 1..N_{\text{levels}}.
 \end{aligned} \tag{207}$$

Hledáme neznámou intenzitu $I_\nu = I_\nu(\nu, x, y, z, t, \vartheta, \varphi)$, jakožto sedmirozměrnou (!) funkci. Označení veličin je následující: ν_{ij} frekvence³⁰ odpovídající přechodu mezi hladinami $i \rightarrow j$, n_i koncentrace atomů ve stavu i (populace hladin), A_{ij} , B_{ij} , B_{ji} Einsteinovy koeficienty, ϕ_{ij} profil čáry, ρ hustota plynu, ρ_d hustota prachu o rozměru a , T_d teplota prachu, B_ν Planckova funkce, κ_ν^{abs} opacita prachu pro absorpci, κ_ν^{sca} totéž pro rozptyl, κ_ν^{sg} totéž pro plyn, C_{ij} srážkové koeficienty pro plyn (s^{-1}), závislé na jeho teplotě T a lišící se pro dvojice atomů, iontů nebo molekul.

Kde vzít teplotu plynu T ? To bychom museli řešit úplné hydrodynamické rovnice. Kde vzít teplotu prachu T_d ? To bychom museli doplnit rovnici vedení tepla v prachových zrnech.

Pro získání atomárních nebo molekulárních dat lze využít databáze NIST, Chianti, HITRANS, Leiden nebo Kurucz, které udávají koeficienty A_{ji} pro určitou podmnožinu všech možných přechodů a kolizní frekvence C_{ij} pro různé teploty plynu T . Nelze zohlednit všechny přechody, to by byl problém neřešitelný (viz Grotrianův diagram na obr. 52). Pro prach existuje např. databáze Jena.



Obr. 52 — Grotrianův diagram pro železo Fe I, Fe II a Fe III. Na vodorovné ose jsou vyznačeny různé kvantové stavy atomů, na svislé jemu příslušná energie E_{ij} , každá spojnice vyznačuje možný energetický přechod. Převzato z Gehren aj. (2000).

7.6 Metoda Monte Carlo

Podstatou všech simulací Monte Carlo je výpočet nějaké pravděpodobnosti $p \in \langle 0; 1 \rangle$, její porovnání s náhodným (nebo alespoň pseudonáhodným) číslem $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a nějaké rozhodnutí pro $x \leq p$, příp. $x > p$.

V našem případě jde o pravděpodobnost, že určitý *soubor* fotonů³¹ bude v určité části prostoru absorbován, emitován nebo rozptýlen. Ekvivalentně si můžeme

³⁰ laboratorní ve vzduchu, měříme-li skutečně ve vzduchu, jinak vakuová

³¹ nejde o jednotlivé fotony, kterých Slunce vysílá řádově 10^{45} s^{-1}

spočítat optickou tloušťku τ' , na níž bude rozptýlen, jako $\tau' = -\ln(x)$, a τ při integraci RTE nasčítávat, dokud $\tau \leq \tau'$. Posléze budeme obdobně počítat ještě pravděpodobnost, že soubor fotonů bude rozptýlen do určitého směru, což je obzvláště jednoduché při izotropním rozptylu, $p = d\omega/(4\pi)$.

Metoda vykazuje určitý šum, který je nevyhnutelný, protože generujeme náhodná čísla, ale očekávatelný. Při opakování nemusíme dostat totožné výsledky, je-li počet souborů fotonů nedostatečný. Řešením je zvětšení počtu.

Jak je obvyklé i u jiných metod, pro numerické řešení musíme provést diskretizaci prostoru. Síť definovaná třeba v kartézských (x_i, y_i, z_i) nebo sférických $(r_i, \vartheta_i, \phi_i)$ souřadnicích vymezuje konečné objemy. V jejich rámci předpokládáme konstantní hodnoty veličin. Zároveň si musíme definovat určité směry $\hat{k}$, pro něž budeme přenos řešit; nemusejí nutně procházet body sítě.

Λ iterace. Problém je, že před řešením RTE nevíme, co se má rozptylovat. Nemůžeme jen tak vyčíslit integrál (nultý moment intenzity, zvaný též střední intenzita):

$$J_\nu \equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega.$$

Proto na začátku provedeme odhad, např. $J_\nu = 0$, a poté: (i) integraci rovnice přenosu, tzn. výpočet I_ν pro mnoho různých bodů a směrů; (ii) výpočet J_ν ve všech objemech; obojí opakujeme, dokud J_ν nezkonverguje. Postup se poněkud „záhadně“ nazývá Λ iterace.

Abstraktněji lze postup zapsat pomocí operátoru Λ :³²

$$J_\nu = \Lambda[S_\nu]. \quad (208)$$

Při zadání zdrojové funkce S_ν všude (zahrnujíc ovšem rozptyl, čili starou J_ν), prostě vyčíslíme novou J_ν všude.

Ještě abstraktněji můžeme napsat matici Λ_{ij} , kde jsme zavedli globální prostorový index (psaný jiným písmem):

$$i \equiv i_x + (i_y - 1)N_x + (i_z - 1)N_x N_y.$$

Pak maticové násobení:

$$J_i = \sum_j \Lambda_{ij} S_j \quad (209)$$

vyjadřuje vazbu všech bodů sítě se všemi body sítě, zprostředkovanou právě řešením RTE.

Kdybychom měli zdrojovou funkci zapsanou takto (pro přehlednost bez rozlišení plynu a prachu):

$$S_\nu = \frac{j_\nu^{\text{em}} + j_\nu^{\text{sca}}}{\kappa_\nu^{\text{abs}} + \kappa_\nu^{\text{sca}}} = \frac{\kappa_\nu^{\text{abs}}}{\kappa_\nu^{\text{abs}} + \kappa_\nu^{\text{sca}}} \frac{j_\nu^{\text{em}}}{\kappa_\nu^{\text{abs}}} + \frac{\kappa_\nu^{\text{sca}}}{\kappa_\nu^{\text{abs}} + \kappa_\nu^{\text{sca}}} \frac{j_\nu^{\text{sca}}}{\kappa_\nu^{\text{sca}}} \doteq \epsilon_\nu B_\nu(T) + (1 - \epsilon_\nu) J_\nu,$$

³² implementovaný třeba jako funkce ve Fortranu

kde poslední přibližně rovno platí při LTE³³ a izotropním rozptylu, mohli bychom psát:

$$S_i = \epsilon_i B_i + (1 - \epsilon_i) \Lambda_{ij} S_j$$

a iterace formálně zapsat jako S_j^n, S_i^{n+1} . Teoreticky bychom S_i mohli získat inverzí:

$$(\delta_{ij} - (1 - \epsilon_i) \Lambda_{ij}) S_j = \epsilon_i B_i,$$

$$S_j = (\delta_{ij} - (1 - \epsilon_i) \Lambda_{ij})^{-1} \epsilon_i B_i,$$

ale bohužel to není možné prakticky.

Setkáváme se totiž s vícero problémy. Jednak s problémem pomalé konvergence, když optická tloušťka $\tau \simeq 100$, počet rozptylů je řádově τ^2 , každá iterace je vlastně 1 rozptyl a potřebný počet iterací $N_{\text{iter}} \simeq \tau^2$. Převažuje-li absorpce, $N_{\text{iter}} \simeq (\kappa_\nu^{\text{abs}} + \kappa_\nu^{\text{sca}})/\kappa_\nu^{\text{abs}}$. Související je falešná konvergence, kdy řešení v jednom směru konverguje rychle, ale ve druhém velmi pomalu, což nás může mýlit.

Další je problém malého pozorovatele, jenž je schopen zachytit jen malý prostorový úhel, kdežto většina souborů fotonů uniká mimo. Řešením může být umělé zvětšení pozorovatele, sledování malých příspěvků pocházejících od souborů míjejících pozorovatele, nebo řešení RTE ve směru od pozorovatele, ale pak můžeme narazit na problém malého zdroje.

Další a nikoli poslední je problém velké matice. Už při $N_x = N_y = N_z = 100$ by počet prvků byl $(N_x N_y N_z)^2 = 10^{12}$, tudíž ji nelze prakticky uložit, natož invertovat!

Akcelerovaná Λ iterace. Podstatným zlepšením je akcelerovaná Λ iterace (ALI; Cannon 1973), která spočívá v rozdělení matice na dvě:

$$\Lambda_{ij} = (\Lambda_{ij} - \Lambda_{ij}^*) + \Lambda_{ij}^*, \quad (210)$$

takové, že Λ^* lze invertovat snadno a získat Λ^{*-1} . Nejjednodušší volbou bývá:

$$\Lambda_{ij}^* = \text{diag } \Lambda = \delta_{ij} \Lambda_{ij}, \quad (211)$$

neboť inverze diagonální matice je primitivní, $\Lambda_{ii}^{*-1} = 1/\Lambda_{ii}^*$. Nejjednodušším příkladem takové matice pro případ $\tau \gg 1$ je:

$$\Lambda_{ij}^* \doteq \delta_{ij} \left(1 - \frac{2}{\Delta \tau_{ij}^2} \right),$$

kde $\Delta \tau_{ij}$ označuje optickou tloušťku mezi body i a j , resp. mezi i a i , tzn. že přenos záření v rámci jednotlivého konečného objemu se řeší inverzí, přenos mezi různými

³³ při non-LTE bychom měli $\frac{j_\nu^{\text{em}}}{\kappa_\nu^{\text{abs}}} = \frac{n_j A_{ji}}{n_i B_{ij} - n_j B_{ji}}$, kde pochopitelně „ $i \neq j$ “ v textu!

objemy iteracemi. V úvahu by přicházela i matice tridiagonální. Další řádové zrychlení je možné pomocí Ngovy akcelerace (Ng 1974), která spočívá v extrapolaci S_i^{n+1} z několika starých hodnot S_i^{n-3} až S_i^n .

Příklad výpočtu přenosu záření programem Radmc-3d (Dullemond 2012) je na obr. 53 a 54.

Úniková metoda. Zjednodušenou metodu řešení RTE získáme, pokud spočteme pravděpodobnost úniku souboru fotonů:

$$p_{\text{esc}i} = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \phi_{ij}(\nu) d\nu d\omega, \quad (212)$$

kde optická tloušťka (pro různá místa, směry, frekvence) je sama o sobě integrálem:

$$\tau(i, \hat{k}, \nu) = \int_0^\infty \kappa_\nu \rho ds. \quad (213)$$

Pokud matici aproximujeme pouze jako diagonální:

$$\Lambda_{ij} \doteq \delta_{ij}(1 - p_{\text{esc}i}),$$

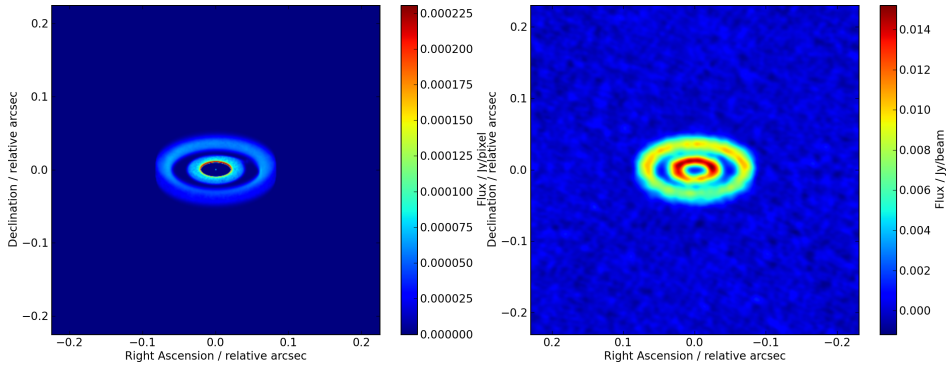
je problém snadno řešitelný, neboť využijeme inverze. Vlastně tak vůbec nepřenášíme energii v rámci objemu, pouze ji necháváme unikat do nekonečna. Únik se realizuje zejména v křídlech čar, kde je $p_{\text{esc}i}$ větší. Je ovšem otázkou, zda aproximaci v konkrétní situaci můžeme použít.

Sobolevova metoda. V případě velkého gradientu rychlosti nastává velký Dopplerův posun $\Delta\nu_{ij} = \nu_{ij} \hat{k} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}')/c$, takže se čára může dostat mimo čáru a opacita dramaticky poklesne. Optickou tloušťku pak lze vyčíslit jako:

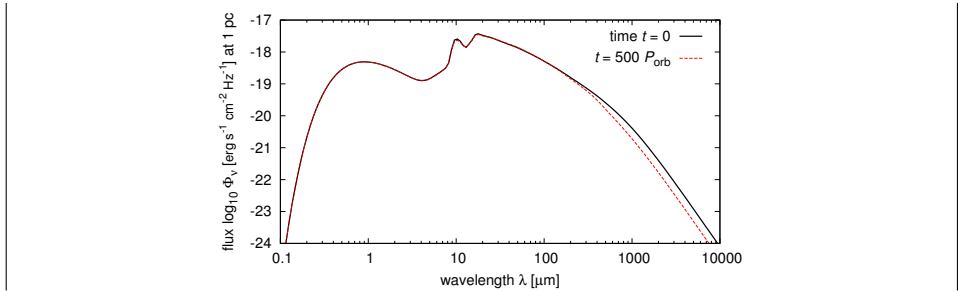
$$\tau(i, \hat{k}, \nu) \doteq \frac{A_{ij} c^3}{8\pi \nu_{ij}^3} \left| \frac{dv}{ds} \right| \left(\frac{g_i}{g_j} n_j - n_i \right), \quad (214)$$

čili není dána globálním rozměrem, nýbrž lokálním ∇v , a proto není třeba vůbec integrovat (213). Jedná vlastně o smysluplné zjednodušení únikové metody. Obvyklou situací, kdy se aproximace používá, je hvězdný vítr.

Mezi důležité problémy, které jsme prozatím zamlčeli, patří zejména překrývající se čáry (blanketing), kdy se namísto jednotlivých čar vytváří malé kontinuum, nebo částečné přerozdělení, kdy se mezi absorpcí, emisí nebo rozptylem nezmění rychlost atomu náhodnou srážkou a události jsou do určité míry koherentní. Pak bychom ovšem byli nuceni řešit RTE i pro různé rychlosti $\mathbf{v}$, což by znamenalo další tři rozměry N_{vx}, N_{vy}, N_{vz} .



Obr. 53 — Syntetický obraz protoplanetárního disku s mezerou otevřenou planetou jupiterova typu. Vlevo je ideální obraz pro vlnovou délku $\lambda = 300 \mu\text{m}$ ($\nu \dot{=} 1\,000 \text{ GHz}$), resp. monochromatický tok Φ_ν v jednotkách Jansky na pixel ($1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$). Obraz byl vytvořen na základě hydrodynamické simulace programem Fargo, a řešení přenosu záření programem Radmc-3d (Dullemond 2012). Počet souborů fotonů byl 10^8 . Vpravo je syntetické pozorování interferometrem ALMA v maximální konfiguraci, se základnami až $B/\lambda = 3,5 \cdot 10^6$ cyklů, šířkou pásma $\Delta\nu = 7,5 \text{ GHz}$, trváním 3 hodiny, se začátkem na výšce 78° , sloupec vodní páry $\text{PWV} = 0,475 \text{ mm}$; výsledné rozlišení dosahuje $0,012''$. Výpočet pomoci služby ALMAOST (<http://almaost.jb.man.ac.uk/>).



Obr. 54 — Syntetické spektrum protoplanetárního disku z obr. 53. Monochromatický tok Φ_ν v závislosti na λ , pro nominální vzdálenost $d = 1 \text{ pc}$. První maximum na $\lambda \simeq 1 \mu\text{m}$ má původ vzniká díky záření od hvězdy, které je aproximované jako planckovské; okolo $10 \mu\text{m}$ jsou zřetelné silikátové pásy, druhé maximum a většina FIR, sub-mm a rádiového záření pochází od disku. Otevření mezery se projevilo zejména jako pokles toku v rádiové oblasti.

7.7 Příklady interpretace spektra

Před jakoukoliv interpretací reálného spektra si musíme být vědomi *všech* signálů a šumů, musíme rozumět způsobu měření, zejména instrumentálním jevům, které mohou způsobovat systematické odchylky (viz Brož a Wolf 2017).

Je-li pozorované spektrum *přibližně planckovské*, lze očekávat, že pochází od hvězdy přesněji z její fotosféry, v níž se teplota $T(R)$ příliš nemění a řádově je rovna efektivní teplotě hvězdy, $T_{\text{eff}} \equiv [L/(4\pi R^2 \sigma)]^{1/4}$. Očekáváme ovšem řadu charakteristických odchylek: absorpční čáry, mj. Balmerovu sérii vodíku; Balmerův

skok, jakožto hranu série, a odpovídající pokles v NUV; nerovnovážné a proměnlivé záření v FUV a rádiu, o mnoho řádů větší než planckovské. Pro hvězdy horké se pozoruje značné přerozdělení energie, $IR \rightarrow FUV$. Pro hvězdy chladné se objevují tak výrazné molekulární pásy, že spektrum ani nelze nazvat planckovské. Pro hvězdy deformované rotací zase nelze počítat s $T_{\text{eff}} = \text{konst.}$ Totéž platí pro hvězdy deformované přítomností sousední (např. Mourard aj. 2018).

Infračervený exces v NIR naznačuje přítomnost horkého disku; exces v FIR zase chladný disk. Jsou-li v disku značné mezery, otevřené planetami, bývá spektrum disku oddělené od hvězdy. Je opět přibližně planckovské, ale odpovídající nižší T ; případně je rozšířené kvůli $T(r)$.

Absorpční pásy (širší než čáry) v oboru FIR způsobují prachová zrna. Jedná se o projev jejich mineralogie a velikosti (viz obr. 54). Při určitém rozdělení velikostí se pásy jeví rozmazané.

Symetrické dvojité emise nebo absorpce naznačují rotující disk, většinou keplerovský, $v_{\text{kepl}}(r) = \sqrt{GM_*/r}$. Při nenulovém sklonu vůči pozorovateli je záření od vnitřní části, rotující rychle, dopplerovsky posunuto více, od vnější méně. Jen málo plynu se nehýbe radiálně vůči pozorovateli. Je-li disk opticky tenký, vzniká emisní čára se dvěma vrcholy symetrickými kolem λ_0 , respektive okolo $\lambda_0 + \gamma/c$, kde γ je systemická rychlost. Pro opticky tlustý disk je čára absorpční.

Profil P Cygni, to znamená nesymetrická, příp. dvojitá emise, která má červené křídlo silnější, je zřetelným projevem hvězdného větru. Samotná emise z opticky tenké rozpínající se obálky je symetrická, ale absorpce viditelná oproti fotosféře hvězdy je dopplerovsky posunutá pouze do modra, čímž vzniká nesymetrie.

Inverzní profil P Cygni, kdy je modré křídlo silnější, by odpovídal kolabující obálce neboli akreci. Vzniká zcela obdobným mechanismem.

7.8 Mezihvězdná extinkce

Pohlcování záření mezihvězdným prostředím (ISM), případně cirkumstelárním prostředím (CSM), zásadně ovlivňuje pozorování. Protože je prostředí většinou velmi chladné, budeme počítat s čistou absorpcí, tzn.:

$$I_\lambda = I_0 e^{-\tau_\lambda},$$

kde optická tloušťka je integrálem podél zorného paprsku:

$$\tau_\lambda = \int_0^{r_1} \kappa_\lambda \rho(r) dr \doteq \kappa_\lambda \int_0^{r_1} \rho(r) dr,$$

kde doufáme, že opacita prostředí (normovaná na $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$) se podél paprsku příliš nemění, pouze hustota ano. Zeslabení (extinkci) vyjádříme v magnitudách jako:

$$A_\lambda = m - m_0 = -2,5 \log_{10} \frac{I_\lambda}{I_0} = -2,5 \log e^{-\tau} = 2,5 \tau \log e \doteq 1,086 \tau.$$

Vidíme, že A_λ závisí na směru, vzdálenosti, $\rho(r)$, složení ISM, čili κ_λ .

Provedeme-li normalizaci nulového bodu i sklonu funkce A_λ , získáme *extinkční funkci*:

$$f(\lambda) \equiv \frac{A_\lambda - A_V}{A_B - A_V} \quad (215)$$

takovou, že pro $\lambda = V$ je vždy $f = 0$ a pro B je 1, pak f závisí již jen na opacitě κ_λ , na ostatních veličinách jen velmi slabě. Jednotlivé hvězdy se však mohou odlišovat, mají-li ve svém okolí CSM s odlišným κ_λ než ISM.

Dle pozorování dále víme, že:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) \equiv R_V \doteq 3,1 \pm 0,1.$$

Protože zároveň $A_\infty = 0$, umožňuje nám to vypočítávat extinkci v oboru V:

$$A_V \doteq R_V(A_B - A_V). \quad (216)$$

Princip určení extinkce pro neznámou * je následující: vezmeme jakoukoliv blízkou * stejného spektrálního typu i luminozitní třídy (ty jsou určeny nezávisle na A_λ z rektifikovaných spekter), pro ni změříme rovnou $(B - V)_0$, pro neznámou * změříme $(B - V)$, prostě spočteme rozdíl $(B - V) - (B - V)_0 = (B - B_0) - (V - V_0) = A_B - A_V$ a z (216) vypočteme A_V . Pro libovolnou λ ji vypočteme z (215):

$$A_\lambda = f(\lambda)(A_B - A_V) + A_V,$$

známe-li obvyklý průběh $f(\lambda)$.

Ověřme ještě souvislost $f(\lambda)$ s κ_λ . Pro dvojici různě vzdálených, ale jinak totožných hvězd by rozdíl jejich jasností bez extinkce byl:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{L_1/d_1^2}{L_2/d_2^2} = -2,5 \log \frac{L_1}{L_2} + \overbrace{5 \log \frac{d_1}{d_2}}^0.$$

S extinkcí by to bylo:

$$m_1 - m_2 = 5 \log \frac{d_1}{d_2} + A_1 - A_2 = 5 \log \frac{d_1}{d_2} + 1,086 \kappa_\lambda \left[\int_0^{r_1} \rho(r) dr - \int_0^{r_2} \rho(r) dr \right].$$

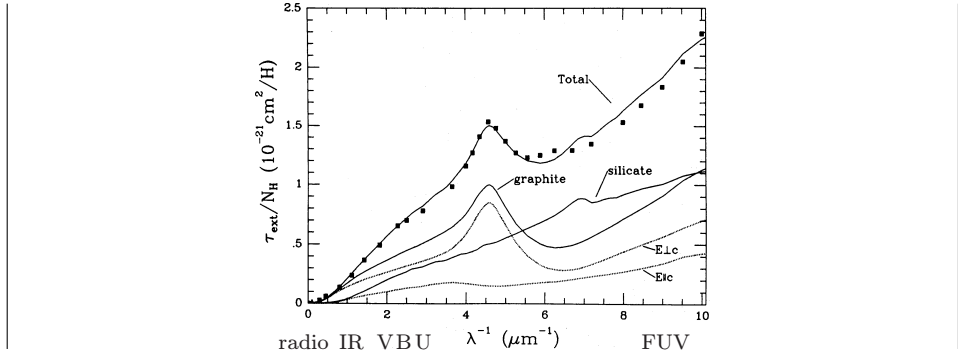
Dosadíme-li do výrazu:

$$\frac{m_1 - m_2 - (V_1 - V_2)}{B_1 - B_2 - (V_1 - V_2)} = \frac{A_{\lambda 1} - A_{\lambda 2} - (A_{V1} - A_{V2})}{A_{B1} - A_{B2} - (A_{V1} - A_{V2})} = \frac{\kappa_\lambda - \kappa_V}{\kappa_B - \kappa_V},$$

uvidíme ihned souvislost. Pro blízkou hvězdu bychom dokonce měli $A_{\lambda 2} = A_{V2} = A_{B2} = 0$, takže po vynechání zbytečných jedniček nám zbývá právě:

$$f(\lambda) = \frac{\kappa_\lambda - \kappa_V}{\kappa_B - \kappa_V}.$$

Průběh $f(\lambda)$ dobře vysvětluje přítomnost grafitových a silikátových zrn, které způsobují zvýšení extinkce v UV na 0,217 a 0,130 μm , růst v FUV (obr. 55, Draine a Lee 1984) a zároveň absorpční pásy v IR. Diferenciální rozdělení velikostí zrn je mocninné, $a = 0,005$ až $1 \mu\text{m}$, a má sklon $q = -3,3$ až $3,6$ (Mathis aj. 1977).



Obr. 55 — Průřez S normovaný na jeden atom vodíku, úměrný monochromatické opacitě κ_λ nebo též extinkční funkci $f(\lambda)$, vyneseny v závislosti na reciproké vlnové délce λ^{-1} . Pozorování jsou vyznačena čtverečky, model mezihvězdného prachu čarami. Předpokládá se složení z grafitových a silikátových zrn, jejichž diferenciální rozdělení velikostí má exponent $-3,5$ (označované jako MRN; Mathis aj. 1977). Převzato z Draine a Lee (1984).

7.9 Monochromatický a integrální popis

V některých případech přece jen není únosné počítat přenos záření pro mnoho různých vlnových délek, ale jsme nuceni použít integrální popis:

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu.$$

Jakou ale použít opacitu? Když nezáleží na směru, hraje roli pouze teplota, hustota zářivé energie, nebo nás zajímá emisní koeficient, je žádoucí použít *Planckovu opacitu*:

$$\frac{1}{\kappa_P} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} B_\nu d\nu}{\int_0^\infty B_\nu d\nu}. \quad (217)$$

Všimněme si, že i kdyby κ_ν v určitém rozsahu T nebylo závislé na T , tak κ_P už na T závislé je, protože se mění zářivé pole!

Když naopak na směru záleží, hraje roli spád teploty, tok záření, je nutné použít *Rosselandovu opacitu*:

$$\frac{1}{\kappa_R} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}, \quad (218)$$

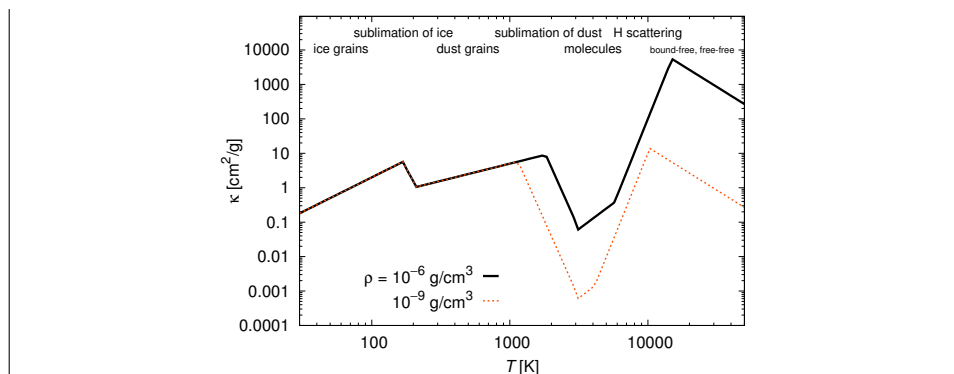
kde:

$$\frac{dB_\nu}{dT} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\exp \frac{h\nu}{kT} - 1 \right)^{-2} \exp \frac{h\nu}{kT} \frac{h\nu}{kT^2}.$$

Průběh této funkce je samozřejmě odlišný od B_ν , čili se musejí lišit i integrální opacity.

U prachu je situace ještě komplikovanější, neboť s poklesem teploty nejprve dochází ke vzniku silikátových zrn, pak ledových zrn (sněžení), případně zrn jiných ledů. Opacity prachu jsou tedy samy o sobě velmi citlivě závislé na T . Potřebovali bychom i nějaký model sublimace a depozice. Pokud se předpokládá LTE, provede se příslušný výpočet a středování opacit (Bell a Lin 1994), získáme výsledek jako na obr. 56.

Ani tak ale nelze popsat jevy nerovnovážné a nelokální, které závisejí na T někde jinde, kupříkladu kroupy na zem spadlé.



Obr. 56 — Integrální opacita κ v závislosti na teplotě T , pro dvě hodnoty celkové hustoty ρ plynu plus prachu. Lze rozlišit intervaly, kde převažuje vliv ledových zrn, sublimace ledu, silikátových zrn, sublimace silikátů, molekul, rozptylu na atomech vodíku a nakonec pro nejvyšší T volně-vázané a volně-volné procesy v plynu, resp. plazmatu. Podle Bell a Lin (1994).

- [67] ASCHWANDEN, M. *Physics of the solar corona*. Heildeberg: Springer-Verlag, 2005. ISBN 9783540307655.
- [68] BELL, K. R., LIN, D. N. C. *Using FU Orionis outbursts to constrain self-regulated protostellar disk models*. *Astrophys. J.*, **427**, 2, 987–1004, 1984.
- [69] BROŽ, M., WOLF, M. *Astronomická měření*. Praha: MatfyzPress, 2017. ISBN 9788073783-549.
- [70] CANNON, C. J. *Frequency-quadrature perturbations in radiative-transfer theory*. *Astrophys. J.*, **185**, 621–630, 1973.
- [71] DRAINE, B. T., LEE, H. M. *Optical properties of interstellar graphite and silicate grains*. *Astrophys. J.*, **285**, 89–108, 1984.
- [72] DULLEMOND, C. P. *Radiative transfer in astrophysics*. [online] [cit. 2017-05-31]. (http://www.ita.uni-heidelberg.de/~dullemond/lectures/radtrans_2012/).
- [73] GEHREN, T., BUTLER, K., MASHONKINA, L., REETZ, J., SHI, J. *Kinetic equilibrium of iron in the atmospheres of cool dwarf stars*. *Astron. Astrophys.*, **366**, 981–1002, 2001.
- [74] JÄGER, C., DORSCHNER, J., MUTSCHKE, H. A. J. *Steps toward interstellar silicate mineralogy. VII. Spectral properties and crystallization behaviour of magnesium silicates produced by the sol-gel method*. *Astron. Astrophys.*, **408**, 193–204, 2003.
- [75] MATHIS, J. S., RUMPL, W., NORDSIECK, K. H. *The size distribution of interstellar grains*. *Astrophys. J.*, **217**, 1, 425–433, 1977.

- [76] MIHALAS, D., MIHALAS, B. W. *Foundations of radiation hydrodynamics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1984.
- [77] MOURARD, D., BROŽ, M., NEMRAVOVÁ, J. A.J. *Physical properties of β Lyr A and its opaque accretion disk*. Astron. Astrophys., submitted, 2018.
- [78] NG, K.-C. *Hypernetted chain solutions for the classical one-component plasma up to $\Gamma = 7000$* . *J. Chem. Phys.*, **61**, 2680, 1974.
- [79] SHU, F. H. *The physics of astrophysics: Radiation*. Mill Valley: Univ. Science Books, 1991.
- [80] SOBOLEV, V. V. *The diffusion of L_α radiation in nebulae and stellar envelopes*. *Soviet Astronomy*, **1**, 678–689, 1957.
- [81] *Wikipedia. Voigt profile* [online]. [cit. 2017-06-24].
(https://en.wikipedia.org/wiki/Voigt_profile).

8 Geochemie a radiometrie

Bohužel se ukazuje, že hydrodynamické modely skýtají příliš mnoho volnosti. Různé počáteční podmínky mohou vést k týmž konečným podmínkám, které vyhovují pozorování (orbitám planet, planetek, komet apod.). Jak pak rozhodnout, co je pravda? Jedním ze způsobů je použít vícero pozorování, nejlépe z jiných oborů fyziky, anebo ještě lépe z *geochemie*. Jedná se zejména o měření chemického složení planet, planetek, komet apod., izotopového složení, a to včetně radiometrického datování. Vzhledem k tomu, že dnešní měření běžně dosahují přesnosti 1 ppm (parts per million; částic na milion částic), jedná se o data, kterým je třeba rozumět.

Vezměme si konkrétní příklad: systém **hafnium/wolfram**. Oba tyto chemické prvky mají společné to, že patří mezi silně refraktorní, to jest takové, které kondenzují z plynu o složení sluneční mlhoviny za extrémně vysokých teplot (mezi prvními). Protože se vypařují jen za těchto teplot, jejich zastoupení v Zemi jako celku se blíží zastoupení v nejprimitivnějších (uhlíkatých) chondritech nebo sluneční fotosféře.

Zásadní rozdíl mezi těmito chemickými prvky ovšem je, že wolfram je značně **siderofilní** (vázájící se se železem, v němž je snadno rozpustný, takže při gravitační diferenciaci Země klesá spolu s ním do zemského jádra), kdežto hafnium je výhradně **litofilní** (tzn. vázájící se na silikáty; zůstává v plášti nebo stoupá do kůry). Zároveň existují nestabilní izotopy (^{182}Hf), s vhodným poločasem rozpadu (10^0 až 10^1 Myr), přeměňující se na stabilní dceřinné izotopy (^{182}W). To ovšem znamená, že lze pomocí nich studovat utváření samotné Země!

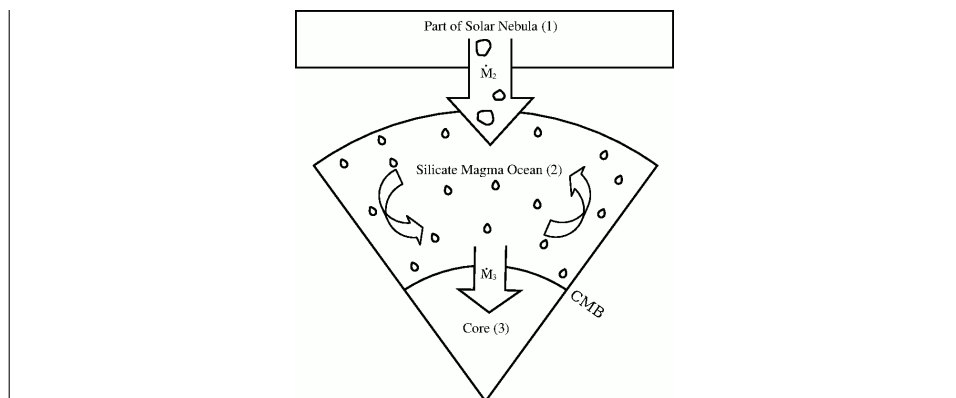
Mějme proto následující rezervoáry, číslo: 1 .. mlhovina, 2 .. prvotní plášť³⁴, 3 .. jádro. Pod slovem „mlhovina“ si ovšem nepředstavujeme plyn, nýbrž pevné částice, které z plynu deponují (nespr. kondenzují). Dnes bychom tento materiál našli v chondritických meteoritech, ale vzhledem ke zmiňované radioaktivitě není jeho chemické složení konstantní. Odtud název **chondritický uniformní rezervoár** (CHUR); někdy se počáteční složení značí „sluneční“, někdy se užívá CAI (vápenato–hlinité inkluze), protože vycházíme z *prvotních* pevných částic, které jsou dodnes zachovány v chondritických meteoritech.

Označme si veličiny: N počet atomů, M hmotnost, $C \equiv N/M$ koncentrace, $\gamma \equiv M_3/M$ hmotnostní poměr jádra (pro Zemi 0,325), $D \equiv C_3/C_2$ rozdělovací koeficient³⁵. Velmi důležitou roli přitom hrají fyzikálně–chemické podmínky právě na rozhraní jádro/plášť (angl. core/mantle boundary; CMB).³⁶

³⁴ tzn. dnešní plášť a kůra

³⁵ je-li $D(t)$ a $\dot{M} > 0$, neplatí to neustále, ale jen pro přírůstek $\dot{M}$

³⁶ též Guttenbergova plocha diskontinuity



Obr. 57 — Tři uvažované rezervoáry: 1 .. mlhovina, 2 .. prvotní plášť, 3 .. jádro. Převzato z [94].

8.1 Geochemické rovnice

Studujme nejprve transport stabilních izotopů mezi zmiňovanými rezervoáry. Jedná se o jednoduchý zákon zachování atomů wolframu (viz Jacobsen 2009; obr. 57):

$$\dot{N}_1 + \dot{N}_2 + \dot{N}_3 = 0. \quad (219)$$

První časovou derivaci vyjádříme jako:

$$\dot{N}_1 = -C_1 \dot{M}, \quad (220)$$

kde $\dot{M}$ označuje přírůstek hmoty, která akretovala z „mlhoviny“ na Zemi. Uvozovky jsou zde proto, že se nejedná nutně o plyn, nýbrž o pevnou složku mlhoviny (v podobě prachových zrn, balvanů, planetesimál apod.). Z (219) plyne:

$$\dot{N}_2 = -\dot{N}_1 - \dot{N}_3 = C_1 \dot{M} - DC_2 \dot{M}_3 = (C_1 - \gamma DC_2) \dot{M}, \quad (221)$$

kde jsme úbytek hmoty z pláště do jádra popsali pomocí rozdělovacího koeficientu. Odpovídalo by tomu také:

$$\dot{N}_3 = \gamma DC_2 \dot{M}. \quad (222)$$

Nás však zajímají měřitelné veličiny, tj. především koncentrace wolframu v zemském plášti, respektive horninách z pláště vyvřelých:

$$C_2 = \frac{N_2}{M_2},$$

jejíž derivace:

$$\dot{C}_2 = \dot{N}_2 \frac{1}{M_2} - N_2 \frac{1}{M_2^2} \dot{M}_2 = \frac{C_1 - (\gamma D + 1 - \gamma) C_2}{(1 - \gamma) M} \dot{M}. \quad (223)$$

Dále *frakcionace* hafnia a wolframu, způsobená přerozdělením prvků mezi plášť a jádro, definovaná jako:

$$f_2 \equiv \frac{N_{\text{Hf},2}/N_{\text{W},2}}{N_{\text{Hf},1}/N_{\text{W},1}} - 1 = \frac{N_{\text{W},1}}{N_{\text{W},2}} - 1 = \frac{N_{\text{W},1} - N_{\text{W},2}}{N_{\text{W},2}} = \frac{N_{\text{W},3}}{N_{\text{W},2}} \left(= \frac{N_3}{N_2} \right),$$

neboť Hf je litofilní ($N_{\text{Hf},3} \doteq 0$). Poměřovat ji lze třeba stabilními izotopy ^{180}Hf , ^{183}W , kterých je v obou rezervoárech dost, ale musíme mít na paměti poměry izotopů v rámci všech Hf, resp. všech W. Příslušná derivace:

$$\dot{f}_2 = \frac{\dot{N}_3}{N_2} - N_3 \frac{1}{N_2^2} \dot{N}_2$$

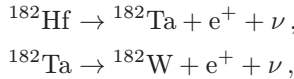
a dle (221), (222):

$$\dot{f}_2 = \gamma D C_2 \dot{M} \frac{1}{C_2 M_2} - \frac{N_3}{N_2} \frac{1}{C_2 M_2} (C_1 - \gamma D C_2) \dot{M} = \frac{\gamma D - f_2 \left(\frac{C_1}{C_2} - \gamma D \right)}{(1 - \gamma) M} \dot{M}. \quad (224)$$

Konečně *anomalie*, též „epsilon“, které je mírou zvýšeného výskytu *radiogenního* izotopu ^{182}W oproti mlhovině, důsledně normované ^{183}W , aby bylo měření relativní:³⁷

$$\varepsilon_2 \equiv 10^4 \left(\frac{N_{182\text{W},2}/N_{183\text{W},2}}{N_{182\text{W},1}/N_{183\text{W},1}} - 1 \right).$$

Hodnota se mění radioaktivními rozpady:



s poločasy $T_{1/2} = 9\text{Myr}$ a 144 d, přičemž záleží na dlouhém. Změny popisujeme rozpadovými zákony:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{182\text{Hf}} &= -\lambda N_{182\text{Hf}}, \\ \dot{N}_{182\text{W}} &= +\lambda N_{182\text{Hf}}, \end{aligned}$$

jejichž řešením je:

$$\begin{aligned} N_{182\text{Hf}} &= N_{182\text{Hf}}(0) e^{-\lambda t}, \\ N_{182\text{W}} &= N_{182\text{W}}(0) + N_{182\text{Hf}}(0)(1 - e^{-\lambda t}) \doteq N_{182\text{W}}(0), \end{aligned}$$

neboť rozdíl činí jen několik ppm. Pak lze odvodit (Jacobsen 2005):

$$\dot{\varepsilon}_2 = Q^* f_2 - \frac{C_1}{C_2(1 - \gamma)M} \dot{M} \varepsilon_2, \quad (225)$$

³⁷ pokud se užije písmeno μ , je číselný faktor 10^6

kde jsme si označili:

$$Q^* = 10^4 \lambda e^{-\lambda t} \frac{C_{182\text{Hf},1}(0)}{C_{180\text{Hf},1}(0)} \frac{C_{180\text{Hf},1}(0)}{C_{182\text{W},1}(t)}$$

a kde $C_{182\text{W},1}(t) \doteq C_{182\text{W},1}(0)$.

Odvození je následující:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{182\text{W},2} &= +\lambda N_{182\text{Hf},2} + (C_1 - \gamma DC_2) \dot{M}, \\ \dot{N}_{182\text{W},1} &= +\lambda N_{182\text{Hf},1} - C_1 \dot{M}, \\ \dot{N}_{183\text{W},1} &= -C_1 \dot{M}, \\ \dot{N}_{183\text{W},2} &= (C_1 - \gamma DC_2) \dot{M}, \\ \varepsilon_2 &= 10^4 \overbrace{\frac{N_{182\text{W},2}}{N_{182\text{W},1}} \frac{N_{183\text{W},1}}{N_{183\text{W},2}}}^{\doteq 1} \left(\frac{\dot{N}_{182\text{W},2}}{N_{182\text{W},2}} - \frac{\dot{N}_{182\text{W},1}}{N_{182\text{W},1}} + \frac{\dot{N}_{183\text{W},1}}{N_{183\text{W},1}} - \frac{\dot{N}_{183\text{W},2}}{N_{183\text{W},2}} \right) = \\ &= \dots \left(\lambda \frac{N_{182\text{Hf},2}}{N_{182\text{W},2}} + \frac{C_{182\text{W},1} \dot{M}}{N_{182\text{W},2}} - \frac{\gamma DC_{182\text{W},2} \dot{M}}{N_{182\text{W},2}} - \lambda \frac{N_{182\text{W},1}}{N_{182\text{W},1}} + \frac{C_{182\text{W},1} \dot{M}}{N_{182\text{W},1}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_{183\text{W},1} \dot{M}}{N_{183\text{W},1}} - \frac{C_{183\text{W},1} \dot{M}}{N_{183\text{W},2}} + \frac{\gamma DC_{183\text{W},2} \dot{M}}{N_{183\text{W},2}} \right) = \\ &= \dots \lambda \left(\frac{N_{182\text{Hf},2}}{N_{182\text{W},2}} - \frac{N_{182\text{W},1}}{N_{182\text{W},1}} \right) + \dots \dot{M} \left(\frac{C_{182\text{W},1}}{N_{182\text{W},2}} - \frac{C_{183\text{W},1}}{N_{183\text{W},2}} \right) = \\ &= 10^4 \lambda \frac{C_{182\text{Hf},1}(0)}{C_{182\text{W},1}(t)} e^{-\lambda t} \frac{C_{180\text{Hf},1}}{C_{180\text{Hf},1}} \left(\frac{N_{182\text{Hf},2}}{N_{182\text{W},2}} \frac{N_{182\text{W},1}}{N_{182\text{Hf},1}} - 1 \right) + \\ &+ 10^4 \frac{C_{183\text{W},1}}{C_{183\text{W},2}} \frac{1}{(1-\gamma)M} \dot{M} \left(\frac{C_{182\text{W},1}}{C_{182\text{W},2}} \frac{C_{183\text{W},2}}{C_{183\text{W},1}} - 1 \right) = \\ &= Q^* f_2 + \frac{C_1}{C_2(1-\gamma)M} \dot{M} \varepsilon_2 \quad \text{c. b. d.} \end{aligned}$$

Počáteční podmínky ($t = 0$) vycházejí z rovnováhy ($\dot{C}_2 = 0$, $\dot{f}_2 = 0$), respektive ze skutečnosti, že na začátku materiál odpovídá mlhovině:

$$C_2 = \frac{C_1}{\gamma D + 1 - \gamma},$$

$$f_2 = \frac{\gamma D}{1 - \gamma},$$

$$\varepsilon_2 = 0.$$

Je třeba si dát pozor, k čemu se ε_2 přesně vztahuje! Obvykle tj. CHUR závisející na t , ale může to být též: CHUR dnes, BSE (angl. bulk silicate Earth; silikátová

část Země = prvotní plášť = dnešní plášť a kůra), BSM (totéž pro Měsíc) atd., což se značí za ε v závorce.

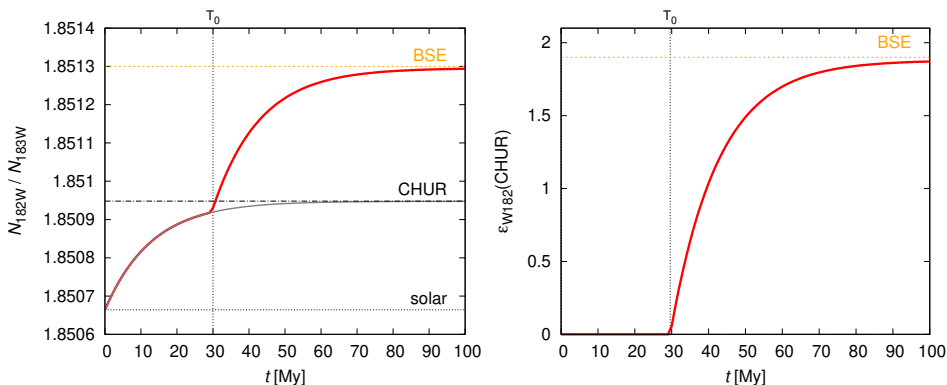
8.2 Diferenciace Země

Nejjednodušším geochemickým modelem je popis diferenciace Země jako 1 náhlé události odehrající se v čase T_0 , kdy dojde k přerozdělení Hf a W mezi plášť a jádro (dle D nebo ekvivalentně f_2):

$$\left(\frac{N_{182\text{Hf},2}}{N_{183\text{W},2}} \right)' = (1 + f_2) \frac{N_{182\text{Hf},2}}{N_{183\text{W},2}}.$$

Jinak probíhají pouze rozpady.

Vyneseme-li do grafu přímo poměr počtů atomů $N_{182\text{Hf},2}/N_{183\text{W},2}$ a zároveň poměr $N_{182\text{Hf},1}/N_{183\text{W},1}$, obdržíme obr. 58a. Vidíme, že zpočátku plášť kopíruje mlhovinu. Po $T_0 \doteq 30$ Myr plášť roste strmě, protože byl značně obohacen o ^{182}Hf . Vyneseme-li poměr poměrů, neboli ε_2 , obdržíme obr. 58b. Nevidíme mlhovinu (to je osa x), pouze plášť. V každém případě model směřuje k měřeným hodnotám (CHUR; BSE). Pokud by T_0 bylo menší, „vystřelilo“ by ε_2 výš, protože by existovalo ještě mnoho ^{182}Hf (a naopak). Obdobně pro frakcionaci f_2 platí, čím větší, tím výš.



Obr. 58 — Poměry $N_{182\text{W}}/N_{183\text{W}}$ pro mlhovinu (rezervoár 1) a plášť (2), v závislosti na čase t (vlevo). Dnes měřené hodnoty jsou vyznačeny jako sluneční (tzn. vápenato–hlinité inkluze), (chondritický uniformní rezervoár) a (silikátová část Země). Obohacení pláště oproti mlhovině

$$\varepsilon_{182\text{W},2}(\text{CHUR}) = 10^4 \left[(N_{182\text{Hf},1}/N_{183\text{W},1}) / (N_{182\text{Hf},2}/N_{183\text{W},2}) - 1 \right] \quad (\text{vpravo}).$$

8.3 Předměsíční impakt

Předtím, než něco dopadne, definujme:

$$a \equiv \frac{1}{1-\gamma} \frac{C_1}{C_2} = \frac{\gamma D + 1 - \gamma}{1 - \gamma} = \frac{\gamma D}{1 - \gamma} + 1 = f_2 + 1.$$

Při dopadu se mění veličiny „okamžitě“, neboť děj probíhá na škále 10^2 yr, pokud zohledníme i viskózní vývoj protolunárního disku (Canup aj. 2019). Rovnice (223), (224), (225) pak lze integrovat a vyjádřit změnéné (čárkované) veličiny.

Za prvé vezměme ε_2 , ovšem bez radioaktivity:

$$\dot{\varepsilon}_2 = -a \frac{\dot{M}}{M} \varepsilon_2 ,$$

čili:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\varepsilon_2} = -a \frac{\dot{M}}{M} .$$

Neurčitý integrál je:

$$\ln \varepsilon_2 = -a \ln M + C ,$$

odkud:

$$\varepsilon_2 = C' M^{-a} .$$

Integrační konstanta před impaktem musí být $C' = \varepsilon_2 M^a$, aby vyšlo ε_2 , čili po impaktu:

$$\varepsilon'_2 = \varepsilon_2 \left(\frac{M}{M'} \right)^a . \quad (226)$$

Obdobně vezměme koncentraci:

$$\dot{C}_2 = \left(\frac{C_1}{1-\gamma} - aC_2 \right) \frac{\dot{M}}{M} \quad (227)$$

a najděme partikulární řešení pro druhý člen:

$$\dot{C}_2 = -aC_2 \frac{\dot{M}}{M} ,$$

což je totéž jako pro ε :

$$C_2 = C' M^{-a} .$$

Užijme variaci konstant:

$$C_2 = C'(M) M^{-a}$$

a derivujme dle parametru (zde hmotnosti M):

$$\frac{dC_2}{dM} = \frac{dC'}{dM} M^{-a} + C'(-a)M^{-a-1} = \left(\frac{C_1}{1-\gamma} - aC' M^{-1} \right) M^{-1} ,$$

kam jsme dosadili (227). Pak lze vyjádřit:

$$\frac{dC'}{dM} = \frac{C_1}{1-\gamma} M^{a-1}$$

a neurčitě integrovat:

$$C'(M) = \frac{C_1}{1-\gamma} \frac{M^a}{a} + C'' ,$$

kde C'' je druhá integrační konstanta. Obecné řešení je:

$$C_2 = \left(\frac{C_1}{1-\gamma} \frac{M^a}{a} + C'' \right) M^{-a}.$$

Zbývá vyčíslit C'' . Má-li pro M vyjít právě C_2 , pak:

$$C'' = C_2 M^a - \frac{C_1}{1-\gamma} \frac{M^a}{a},$$

což po dosazení:

$$C'_2 = \left(\frac{C_1}{1-\gamma} \frac{M'^a}{a} + C_2 M^a - \frac{C_1}{1-\gamma} \frac{M^a}{a} \right) M'^{-a}$$

a úpravě dá:

$$C'_2 = \frac{C_1}{1-\gamma} \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{M}{M'} \right)^a \right] + C_2 \left(\frac{M}{M'} \right)^a. \quad (228)$$

Obdobně obdobně:

$$\dot{f}_2 = \frac{\gamma D - f_2 \left(\frac{C_1}{C_2} - \gamma D \right)}{(1-\gamma)M} \dot{M},$$

partikulárně:

$$\frac{\dot{f}_2}{f_2} = -b \frac{\dot{M}}{M},$$

kde $b \equiv (\frac{C_1}{C_2} - \gamma D)/(1-\gamma)$, čili:

$$f_2 = C' M^{-b};$$

variabilně:

$$f_2 = C'(M) M^{-b}$$

a:

$$\frac{df_2}{dM} = \frac{dC'}{dM} M^{-b} - C' b M^{-b-1} = -f_2 b M^{-1} + \frac{\gamma D}{1-\gamma} M^{-1},$$

odkud:

$$\frac{dC'}{dM} = \frac{\gamma D}{1-\gamma} M^{b-1},$$

čili:

$$C' = \frac{\gamma D}{1-\gamma} \frac{M^b}{b}$$

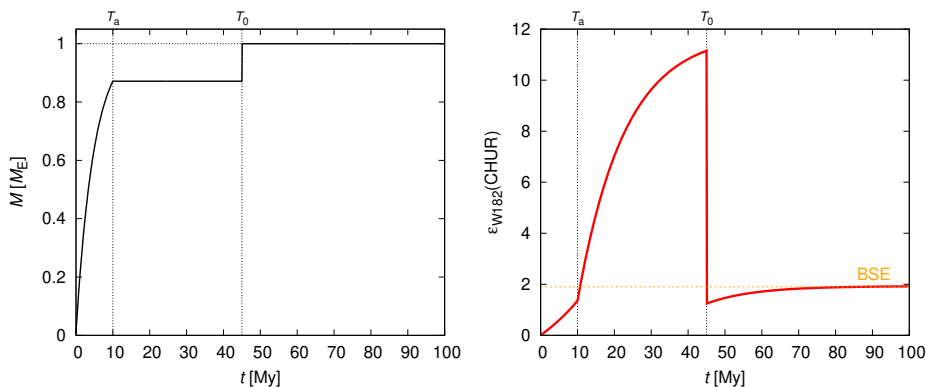
a:

$$f_2 = \frac{\gamma D}{1-\gamma} \frac{M^b}{b} M^{-b} = \frac{\gamma D}{1-\gamma} \frac{1-\gamma}{\frac{C_1}{C_2} - \gamma D} = \frac{\gamma D}{\frac{C_1}{C_2} - \gamma D},$$

což nezávisí na M , čili $f'_2 = f_2$.

Když máme připravené rovnice, můžeme studovat impakt, při němž vznikl Měsíc (Hartmann a Davis 1975). Ve své klasické podobě má Země před impaktem hmotnost $M_1 \doteq 0,9 M_\oplus$, impaktor pak $M_2 \doteq 0,1 M_\oplus$, aby vycházelo $M = M_1 + M_2 = 1 M_\oplus$ a zároveň na orbitě (v protolunárním disku) zůstalo $m = 0,0125 M_\oplus$, což odpovídá hmotnosti Měsíce. Na obr. 59 vidíme příslušný geochemický model (Yu a Jacobsen 2011). Akrece $M(t)$ zde zpočátku probíhá rychle a končí brzy

($T_a = 10$ Myr). Protože diferenciacce probíhá průběžně, s konstantním $D = 31$ tak, aby vyšlo $f_2 = 15$ jako v BSE, hodnota ε_2 se zvýší na 12, tj. vysoko nad pozorovanou. Pozdější impakt v čase $T_0 = 45$ Myr ji však opět sníží, až k pozorované hodnotě $\varepsilon_{182\text{W},2}(\text{CHUR}) = 1,9 \pm 0,1$. Samozřejmě se *nejedná* o unikátní řešení, neboť lze měnit T_a , T_0 ; existují však jisté meze. Například $T_a < 40$ Myr (samo o sobě), jinak by $\varepsilon < 1,8$ a impakt by ho dál snížil; $T_0 > 30$ Myr, jinak $\varepsilon > 2,0$; $T_0 < 60$ Myr, jinak $\varepsilon < 1,8$.



Obr. 59 — Předpokládaný průběh růstu hmotnosti $M(t)$ neboli akrece (vlevo). Do $T_a = 10$ Myr naroste Země na $M = 0,87 M_\oplus$; pak nastává období, kdy se neděje nic (vyjma radioaktivity) neboli *hiát*. Až v $T_0 = 45$ Myr dojde k poslednímu velkému impaktu $m = 0,13 M_\oplus$. Odpovídající průběh obohacení prvotního pláště Země $\varepsilon_{182\text{W},2}(\text{CHUR})$ (vpravo).

Navíc musíme přiznat nějaké neřešené problémy. První problém je **ekvilibrace**, neboli vyrovnaní chemického a izotopového složení mezi materiálem Země a impaktorem. My jsme mlčky předpokládali úplnou, ale může být *částečná*. Úplná totiž vyžaduje rozmělnění materiálu až na škálu cm (!), čili malé kapky. Snad by to bylo možné ve vysoce turbulentním zemském magmatickém oceánu (EMO), anebo při rozpadu železných těles při jejich pádu skrz EMO dolů.

Druhý problém je, že Země i impaktor mohou mít v principu až $M_1 = M_2 = 0,5 M_\oplus$ (Canup 2012). Dříve se myslelo, že to vždy vede k příliš velké hmotnosti disku a momentu hybnosti Měsíce. Avšak v případě, že by Země rotovala rychle, dráha Měsíce by pak precedovala rychle ($s P_p \simeq 1$ yr), došlo by k **evekční rezonanci** s oběžným pohybem soustavy Země–Měsíc kolem Slunce ($P_o = P_p$), tím se ovšem Měsíc v pericentru vyskytuje ve stále stejném směru vzhledem ke Slunci, Slunce tuto „nebodovou“ soustavu systematicky táhne dopředu nebo dozadu, čímž dochází k přenosu momentu hybnosti L_C z orbitálního pohybu Měsíce na heliocentrický orbitální pohyb soustavy Země–Měsíc (Čuk a Stewart 2012).

Třetí problém je...

8.4 Variabilní rozdělování

Rozdělovací koeficient $D \neq \text{konst.}$ (viz Cottrell aj. 2009). Naopak se ukazuje, že je složitou funkcí stavových veličin, tlaku P , teploty T v daném místě, kde přerозděl-

vání probíhá, což je v našem případě rozhraní jádro/plášť (CMB). Též jej ovlivňuje detailní chemické složení (nejenom Hf, W), což se obvykle popisuje **fugacitou** f_{O_2} , neboli parciálním tlakem kyslíku, který je k dispozici pro chemické reakce. Tato může vyjádřena relativně k souboru minerálů s kyslíkem a bez kyslíku, například železo – wüstit (Fe – FeO; angl. iron – wüstite; IW), které se vyskytují dosti často a je v nich vlastně zaznamenáno, kolik O_2 bylo kdysi k dispozici. Zkratkovitě by snad bylo možné říci, že jde o množství vody H_2O , které bylo akretováno jako led a dostalo se do magmatického oceánu.³⁸

Magma v daném místě krystalizuje, vznikají přitom různé minerály, což se studuje laboratorně (viz obr. 60). Sice se používají tlaky nižší, které se extrapolují do vyšších, ale i tak je možno měřit závislost $D(P, T, f_{O_2})$ (viz obr. 61). Poznamenejme, že k přerozdělování obecně dochází i jinými procesy než frakční krystalizací, po níž zůstávají vypuzené kapalné slitiny; například stratifikací při odlišných hustotách.³⁹

Tlak ani teplota také nejsou konstantami; rostou s hmotností $M(t)$ tělesa přibližně jako $P_{CMB} = 136 \text{ GPa } (M/M_{\oplus})^{2/3}$, $T_{CMB} = 1973 \text{ K} + 28,57 \text{ K GPa}^{-1} P_{CMB}$, odpovídající fázovému přechodu peridotitu. Těsně po měsíčním impaktu však není jisté, že $P = P_{CMB}$, $T = T_{CMB}$. Země totiž může být v jakémsi expandovaném stavu. Ostatně podle přerozdělování jiných prvků se zdá, že ekvilibrace proběhla za podmínek, které by odpovídaly takovému D , jaké by experimenty daly při $P \simeq 40 \text{ GPa}$ (Yu a Jacobsen 2011).

8.5 Izotopická dichotomie NC a CC

Různé skupiny meteoritů mají pochopitelně různé anomálie ε . Co je ale pozoruhodné, že skupiny skupin meteoritů mají *podobné* anomálie! Warren (2011) konkrétně zavedl 2 rezervoáry: NC .. neuhlíkaté chondrity, CC .. uhlíkaté chondrity, které vykazují systematicky odlišné ε_{46Ti} , ε_{48Ti} , ε_{50Ti} atd. (viz obr. 62). Totéž platí pro řadu dalších prvků: Sr, Ca, Cr, Ni, Zr, Mo, Ru, Ba, Nd, Sm, Hf, W, Os. Otázka je, co může způsobit takové odlišnosti a podobnosti.

Obecně může jít o míchání 2 rezervoárů, přičemž bychom asi měli vědět, jak směs na grafech ε vs ε vypadá. Závisí to na relativních koncentracích příslušných prvků (Langmuir aj. 1978):

stejně koncentrace $\rightarrow$ přímka ,

různé koncentrace $\rightarrow$ hyperbola .

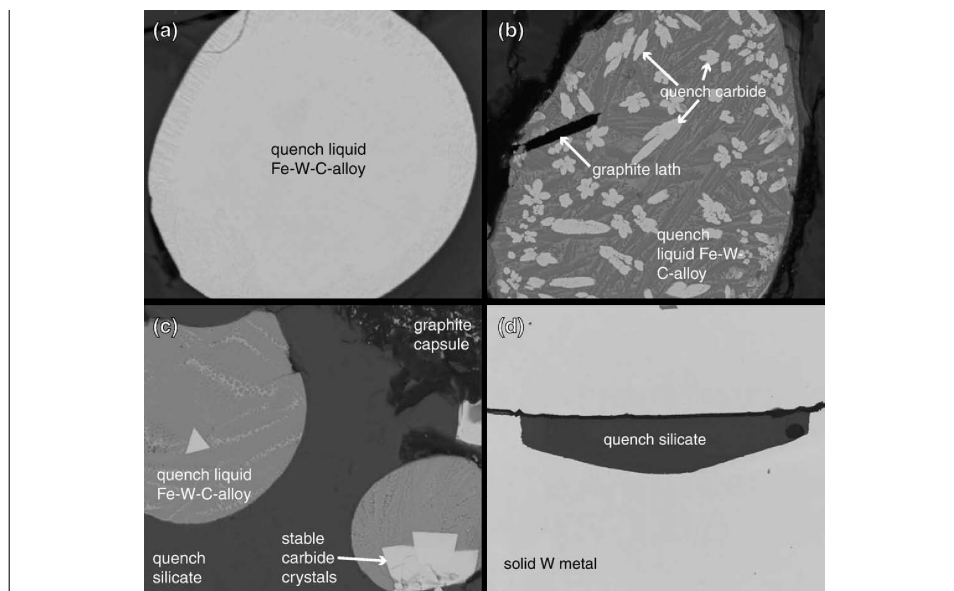
Pokud by to body na grafu nesplňovaly, mohlo by jít o míchání 3 rezervoárů anebo o zcela odlišný proces.

Pro zmiňované rezervoáry byla nalezena „rovnice“ (Burkhardt aj. 2019):

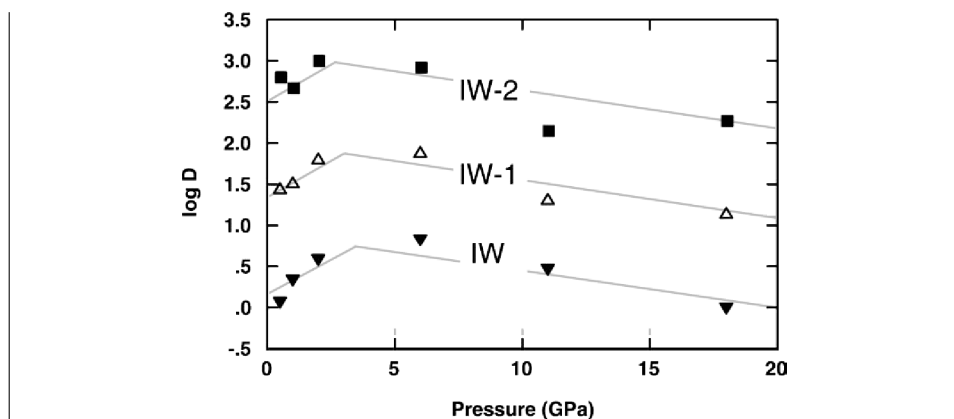
$$„CC = NC + CAI“ ,$$

³⁸ naopak se nejedná o plynný O_2 v mlhovině

³⁹ není tedy nutné, aby byl systém v pevném stavu, aby se „resetovaly“ radiometrické hodiny



Obr. 60 — Snímky elektronovým mikroskopem (rozměr řádově 0,1 mm), na nichž jsou vidět různé slitiny v kapalném stavu nebo minerály v pevném stavu, které krystalizovaly již za vysokých tlaků a teplot a do kterých různou měrou vstoupil wolfram, odkud je možno odvodit jeho D_W . Převzato z [86].

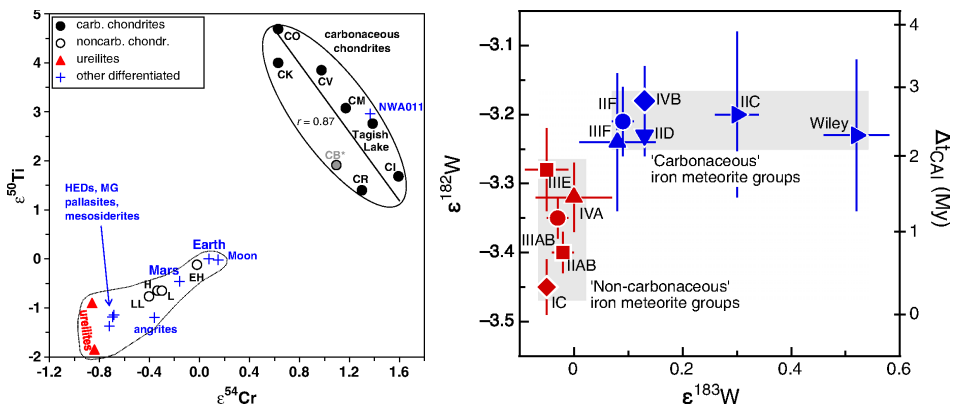


Obr. 61 — Logaritmus rozdělovacího koeficientu wolframu $\log D$ v závislosti na tlaku P pro tři různé hodnoty fugacity f_{O_2} , vztažené k souboru železo–wüstit, kde $\Delta IW = 2 \log(x_{FeO}/x_{Fe}) + 2 \log(\gamma_{FeO}/\gamma_{Fe})$, x označuje molární koncentraci a γ aktivitní koeficient. Převzato z [86].

kde rezervoár CAI znamená „jako inkluze“, tzn. izotopicky CAI, ale chemicky chondritický. Slovně to znamená, že uhlíkaté chondrity získáme mícháním neuhlíkatých chondritů a materiálu vztahujícímu se k vápenato-hlinitým inkluzím (zejm. z chon-

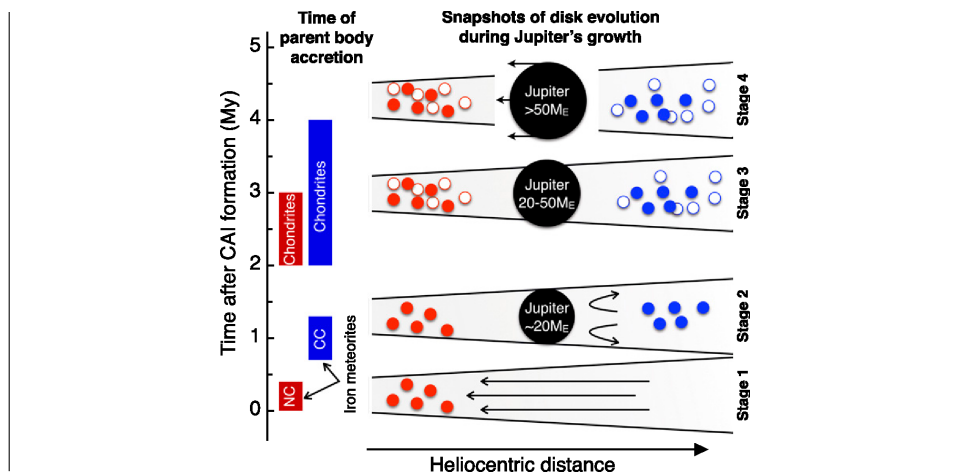
ditu CV3). Systematický posun $NC \rightarrow CC \rightarrow CAI$ je zřejmě způsoben obohacením prvky z r-procesů, tj. rychlého zachycování neutronů (ze supernov). Náhodný rozptyl v rámci CC (NC) je způsoben prvky z s-procesů (pomalého; z * AGB); nikoliv jedinou reakcí.

Výše uvedené svědčí o akreci *heterogenního* materiálu přímo z jádra molekulárního oblaku. Naopak je v rozporu s tepelným přepracováním v protoplanetárním disku (vytvořilo by nechondritické chemické složení a vyžadovalo by specifické P, T) nebo s akrecí presolárních zrn (trend NC $\rightarrow$ CC by byl odlišný). Průběh lze předpokládat následující: (i) akrece blízko Slunce, a to materiálu izotopicky podobného CAI; (ii) viskózní rozpínání disku od Slunce; (iii) akrece materiálu izotopicky podobného NC; (iv) pouze částečné přepracování/přeprava/promíchání v disku; (v) rozšíření akrece do větších vzdáleností, přidání nepřepřacovaného materiálu; (vi) oddělení rezervoárů NC & CC vznikajícím Jupiterem, což by zabránilo jejich promíchávání. Vyplývá odsud, že jádro Jupiteru o hmotnosti asi $20 M_{\oplus}$, které blokuje driftující balvany vytvářením obráceného gradientu tlaku ∇P , muselo vzniknout brzy (asi do 5 Myr).



Obř. 62 — Izotopická dichotomie na grafu ($\varepsilon_{54\text{Cr}}, \varepsilon_{50\text{Ti}}$) pro dvě odlišné skupiny skupin meteoritů: uhlikaté chondrity (CC; zahrnuje CO, CK, CV, CM, CB, CR, CI) a neuhlikaté chondrity (NC; EH, H, L, LL, též ureility, ostatní diferencované, Zemi, Měsíc, Mars) (vlevo). Graf ($\varepsilon_{183\text{W}}, \varepsilon_{182\text{W}}$) společně s časovou osou t (od CAI), pro železné meteority odpovídající CC (IIIF, IIF, IID, IVB, IIC) a NC (IC, IIAB, IIAB, IVA, IIIE) (vpravo). Převzato z [93] a [90].

Co se týká datování, vznikly postupně (viz obr. 63): (i) železné meteority odpovídající neuhlíkatým chondritům mezi 0 až 0,5 Myr po CAI; (ii) železné odpovídající uhlíkatým mezi 0,7 až 1,3 Myr; (iii) NC 2 až 3 Myr; (iv) CC 2 až 4 Myr. Stále přitom platí, že železa musela vzniknout diferenciací v hloubce svých mateřských těles, neboť jejich krystalická struktura (Widmanstättenovy obrazce) svědčí o velmi pomalém chlazení, 1 až 1 000 °C Myr⁻¹, a existenci první generace planetesimál?



Obr. 63 — Schematická časová osa t postupného vzniku skupin skupin meteoritů: železné odpovídající neuhlíkatým, železné odpovídající uhlíkatým, chondrity NC, chondrity CC. Rezervoáry musejí být brzy odděleny vznikajícím Jupiterem, aby nedošlo k promíchání, které by smazalo izotopickou dichotomii. Převzato z [90].

8.6 Systém U/Pb

Nakonec jsme si nechali důležitou otázku. Kolik je 0? Samozřejmě $0 \neq 0$. Všechny předchozí metody totiž měřily čas *relativně* k CAI, protože jsme jako počáteční složení uvažovali právě CAI. Pro absolutní datování CAI se používá systém U/Pb, respektive **Pb/Pb**, kde jsou poločasy rozpadu naopak dostatečně dlouhé. Protože v CAI není prakticky žádný zirkon (ZrSiO_4 , obsahující stopové U), nelze užít U/Pb za předpokladu vypuzení všeho Pb (viz např. Brož a Šolc 2013, str. 354). Nicméně poměry olov $^{207}\text{Pb}/^{206}\text{Pb}$, $^{204}\text{Pb}/^{206}\text{Pb}$ je možné měřit pomocí loužení kyselinou s přesností až 1 ppb!

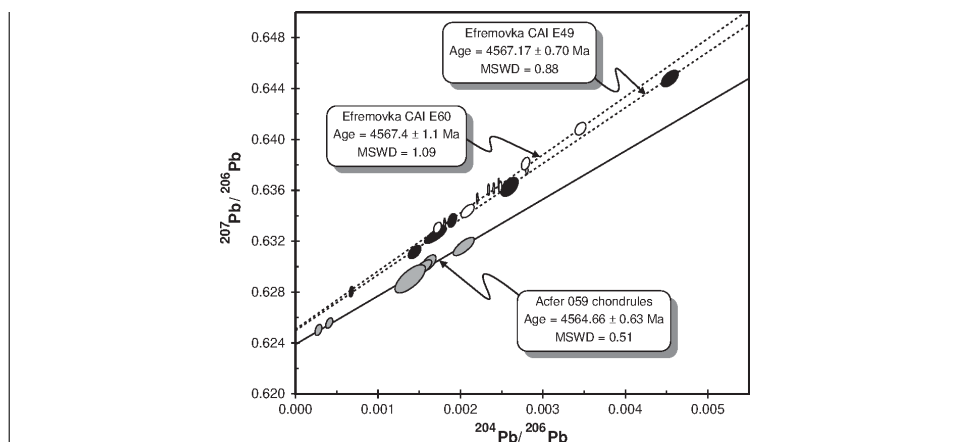
Příslušné rozpadové zákony jsou:

$$\begin{aligned} \frac{[^{207}\text{Pb}]}{[^{204}\text{Pb}]} &= \left(\frac{[^{207}\text{Pb}]}{[^{204}\text{Pb}]} \right)_0 + \frac{[^{235}\text{U}]}{[^{204}\text{Pb}]} (e^{\lambda_{235}U} - 1), \\ \frac{[^{206}\text{Pb}]}{[^{204}\text{Pb}]} &= \left(\frac{[^{206}\text{Pb}]}{[^{204}\text{Pb}]} \right)_0 + \frac{[^{238}\text{U}]}{[^{204}\text{Pb}]} (e^{\lambda_{238}U} - 1). \end{aligned}$$

Převedeme-li členy s počátečními obsahy $()_0$ vlevo a podělíme, získáme měřicí rovnici:

$$\frac{\frac{[^{207}\text{Pb}]}{[^{204}\text{Pb}]} - \left(\frac{[^{207}\text{Pb}]}{[^{204}\text{Pb}]} \right)_0}{\frac{[^{206}\text{Pb}]}{[^{204}\text{Pb}]} - \left(\frac{[^{206}\text{Pb}]}{[^{204}\text{Pb}]} \right)_0} = \frac{[^{235}\text{U}]}{[^{238}\text{U}]} \frac{e^{\lambda_{235}U} - 1}{e^{\lambda_{238}U} - 1},$$

kde poměr $[^{235}\text{U}]/[^{238}\text{U}]$ je znám (1/137,88). Jedná se o rovnici přímky, $(y_i - y_0)/(x_i - x_0) = b$, která je přeurčena měřeními mnoha minerálů, s různými obsahy (x_i, y_i) . Směrnici b (tzn. stáří) vypočteme metodou nejmenších čtverců.



Obr. 64 — Isochróna Pb/Pb pro vápenato–hlinité inkluze (CAI) z meteoritu Efremovka, vykazující stáří $(4,567 \pm 0,001)$ Gyr. Pro porovnání jsou zobrazeny chondrule z meteoritu Acfer 059, se stářím asi o 0,003 Gyr menším. Převzato z [82].

Poměry olov se vynášejí jako izochrona, i když stabilním izotopem je zde ^{204}Pb a radiogenní jsou ^{206}Pb , ^{207}Pb . Amelin aj. (2002) takto změřil CAI z meteoritu Efremovka; výsledek je (viz obr. 64):

$$t_{\text{CAI}} = (4,567 \pm 0,001) \text{ Gyr},$$

což je opravdu snadné si pamatovat („4567“). A opravdu to *není* „asi čtyři a půl miliardy let“.

- [82] AMELIN, Y., KROT, A. N., HUTCHEON, I. D., ULYANOV, A. A. *Lead isotopic ages of chondrules and calcium-aluminium rich inclusions. Science*, **297**, 5587, s. 1678–1683.
- [83] BROŽ, M., ŠOLC, M. *Fyzika sluneční soustavy*. Praha: Matfyzpress, 2013.
- [84] BURKHARDT, CH., DAUPHAS, N., HANS, U., BOURDON, B., KLEINE, T. *Elemental and isotopic variability in solar system materials by mixing and processing of primordial disk reservoirs. Geochim. Cosmochim. Acta*, **261**, s. 145–170, 2019.
- [85] CANUP, R. M., RIGHTER, K., DAUPHAS, N., PAHLEVAN, K., ČUK, M., LOCK, S. J., STEWART, S. T., RUFU, R., NAKAJIMA, M., MAGNA, T. *Origin of the Earth and Moon*. in New views of the Moon II, 2019.
- [86] COTTRELL, E., WALTER, M. J., WALKER, D. *Metal-silicate partitioning of tungsten at high pressure and temperature: Implications for equilibrium core formation in Earth. Earth Planet. Sci. Lett.*, **281**, s. 257–287, 2009.
- [87] FISCHER, R. A., NIMMO, F. *Effects of core formation on the Hf-W isotopic composition of the Earth and dating of the Moon-forming impact. Earth Planet. Sci. Lett.*, **499**, s. 257–265, 2018.
- [88] HARTMANN, W. K., DAVIS, D. R. *Satellite-sized planetesimals and lunar origin. Icarus*, **24**, s. 504–515, 1975.
- [89] JACOBSEN, S. B. *The Hf-W isotopic system and the origin of the Earth and Moon. Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **33**, s. 531–570, 2005.
- [90] KRUIJER, T. S., BURKHARDT, CH., BUDDE, G., KLEINE, T. *Age of Jupiter inferred from the distinct genetics and formation times of meteorites. Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **114**, 26, s. 6712–6716, 2017.

-
- [91] MCSWEEN, H. Y., MOERSCH, J. E., BURR, D. M., DUNNE, W. M., EMERY, J. P., KAH, L. C., McCANTA, M. C. *Planetary geoscience*. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
- [92] RUDGE, J. F., KLEINE, T., BOURDON, B. *Broad bounds on Earth's accretion and core formation constrained by geochemical models*. *Nat. Geosci.*, **3**, s. 439–443, 2010.
- [93] WARREN, P. H. *Stable-isotopic anomalies and the accretionary assemblage of the Earth and Mars: A subordinate role for carbonaceous chondrites*. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **311**, s. 93–100, 2011.
- [94] YU, G., JACOBSEN, S. B. *Fast accretion of the Earth with a late Moon-forming giant impact*. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **108**, 43, s. 17604–17609, 2011.

9 Chemie fázových přeměn

Zajímá-li nás vznik terestrických planet, pak nejzajímavějším okamžikem je vznik prvotní pevné látky. Dochází k němu při postupném chladnutí plynu v protoplanetárním disku, když teplota poklesne natolik, že dojde k fázovému přechodu plyn $\rightarrow$ pevná látka. Otázka je, jaký plyn? Zřejmě musíme popsat předchozí reakce plynů ve směsi. Ještě důležitější otázka je, jaká pevná látka? Jen pevná látka (prach) se totiž může snadno shlukovat a posléze utvářet větší pevná tělesa. Zřejmě musíme přesně popsat rovnováhu mezi plyny a povrchy. Vypadá to jako chemie, „smrdí“ to jako chemie, je to nepochopitelné jako chemie, a je to chemie! Pro pochopení proto připomeneme termodynamické potenciály, vč. chemického.

9.1 Termodynamické potenciály

První věta termodynamická zní:

$$dQ + \mu dN = dU + PdV, \quad (229)$$

kde Q označuje teplo, μ chemický potenciál, N počet částic, U vnitřní energii, P tlak a V objem. Neznamená nic jiného, než že: teplo *dodané* systému plus *uvolněná* chemická energie se spotřebují na zvýšení vnitřní energie anebo vykonání práce systémem. Ještě vhodnější by byl zápis:

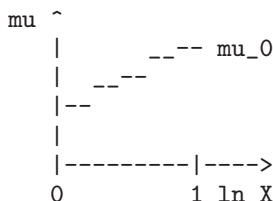
$$TdS + \mu dN = dU + PdV, \quad (230)$$

kde T označuje termodynamickou teplotu a S entropii. Výhodou je, že S je stavová veličina, podobně jako T , N , U , ... Při jakékoliv dodávce dQ zvyšujeme S , čili neuspořádanost systému, protože tím umožňujeme zaujmout stavy s vyšší U anebo větším V .

Chemický potenciál. Namísto zkratkovitého zápisu μdN bychom si vždy měli představovat $\sum_i \mu_i dN_i$, neboť chemická reakce mívá reaktanty ($dN_i < 0$) i produkty ($dN_i > 0$); reakcí bývá navíc vícero. Je třeba si uvědomit, že chemický potenciál μ je funkcí stavových veličin! Pro popis lze používat zejména:

$$\mu(T, P, X) = \mu_0(T, P) + RT \ln X, \quad (231)$$

kde X označuje molární zlomek, R molární plynovou konstantu. Avšak pro přesnější popis, např. neideálních plynů, se zavádějí další veličiny: γ aktivitní koeficient, a aktivita, P_{arc} parciální tlak, f fugacita; příslušné vztahy pak jsou: $\mu_0 + RT \ln(\gamma X)$; $\mu_0 + RT \ln a$; $\mu_0 + RT \ln(P_{\text{arc}}/P)$; $\mu_0 + RT \ln(f/P)$. Oprava může být též zahrnuta v μ_0 , což naznačuje speciální index. Nicméně, ideální, čistá látka ($X = 1$) a normální podmínky znamenají, že $\mu = \mu_0$. Viz:



Další externí veličiny jako elektrické pole $d\mathbf{E}$, magnetické pole $d\mathbf{B}$, tenzor napětí $d\sigma_{ij}$, ... by také mohly být násobené příslušnými koeficienty a zahrnuty v (230); jde o jiné formy energie, na něž by se dQ mohlo přeměňovat.

Pro popis dějů lze používat některý ze 4 termodynamických potenciálů: U vnitřní energie, H entalpie, F Helmholtzova volná energie, G Gibbsova energie, jejichž definice jsou:

$$U = \int (TdS + \mu dN - PdV), \quad (232)$$

$$H = U + PV, \quad (233)$$

$$F = U - TS, \quad (234)$$

$$G = U + PV - TS. \quad (235)$$

Jejich diferenciály jsou (po dosazení z (230)):

$$dU = TdS + \mu dN - PdV, \quad (236)$$

$$dH = dU + VdP + PdV = VdP + TdS + \mu dN, \quad (237)$$

$$dF = dU - SdT - TdS = -SdT - PdV + \mu dN, \quad (238)$$

$$dG = dU + VdP + PdV - SdT - TdS = VdP - SdT + \mu dN. \quad (239)$$

Interpretace je pak následující: U je energie potřebná pro vytvoření systému; H totéž plus práce potřebná pro vytvoření objemu (při $P = \text{konst.}$); F možná celková práce; G možná *nemechanická* práce.

Z diferenciálů je zřejmé, že F je vhodné pro popis dějů při $V = \text{konst.}$, $T = \text{konst.}$ (zejm. pro porovnání se statistickou fyzikou), kdežto G při $P = \text{konst.}$, $T = \text{konst.}$, což je také vhodné pro laboratorní měření; pak je ovšem $dG = \mu dN$. Gibbsova energie je tedy nejvhodnější veličina pro popis chemických reakcí!

Jsou-li vlevo totální diferenciály, pak jsou koeficienty vpravo parciální derivace, což nám umožňuje napsat následující vztahy; připsali jsme k nim i tepelné kapacity c_V a c_P :

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} & \mu &= \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{V,S} & -P &= \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} & c_V &= \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{V,N} & c_P &= \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{P,N} \\ V &= \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{S,N} & T &= \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{P,N} & \mu &= \left(\frac{\partial H}{\partial N}\right)_{P,S} \\ -S &= \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} & -P &= \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} & \mu &= \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} \\ V &= \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,N} & -S &= \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,N} & \mu &= \left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{P,T} \end{aligned}$$

Mimochodem, je větší c_V , nebo c_P ? Držím plyn, dodám dQ , v 1. případě „pevně držím“, aby zůstal konstantní objem ($dV = 0$), dT se zvýší hodně, tzn. $c_V = dQ/dT$ je malé. Ve 2. „trochu povolím“, aby zůstal konstantní tlak ($dV > 0$), plyn vykoná práci, dT se zvýší méně, čili $c_P > c_V$.

Obecně je těžké poznat, jaké termodynamické relace platí obecně (viz výše) a jaké omezeně, pouze pro určité systémy nebo děje. Např. pro děje izochorické ($dV = 0$), izobarické ($dP = 0$), izotermické ($dT = 0$), adiabatické ($dQ = 0$) nebo polytropické ($c = \text{konst.}$) se celá řada relací podstatně zjednoduší.

9.2 Gibbsova–Duhemova rovnice

V homogenním systému jsou intenzivní veličiny (T, P) konstantní. Přes extenzivní veličiny (V, S, N) pak lze snadno integrovat, neboť potenciály se chovají jako $U(PdV) = P \cdot U(dV)$. Z def. (423):

$$U = TS + \mu N - PV. \quad (240)$$

Z def. (235) pak plyne:

$$G = \mu N \quad (241)$$

a:

$$dG = d\mu N + \mu dN = VdP - SdT + \mu dN.$$

Odtud:

$$d\mu N = VdP - SdT, \quad (242)$$

což je Gibbsova–Duhemova rovnice (platná pro h. s.).

9.3 Clausiova–Clapeyronova rovnice

Fázová přeměna nastává při určitém T a P . Rozhraní na grafu $P(T)$ má určitý sklon, čili derivaci $\frac{dP}{dT}$. Na čem může záviset? Na kterém ze 4 potenciálů? Evidentně *entalpii*, resp. ΔH , neboť jde o, cituji: „energii potřebnou na vytvoření systému a práci na vytvoření objemu“. Při přechodu je $P = \text{konst.}$, $T = \text{konst.}$, $N = \text{konst.}$, proto podle (237):

$$dH = TdS. \quad (243)$$

Jsou-li dvě fáze (1, 2) v rovnováze, jejich:

$$\mu_1 = \mu_2. \quad (244)$$

Při posunu na grafu $P(T)$ *podél* rozhraní musí být:

$$d\mu_1 = d\mu_2, \quad (245)$$

pak dle (242):

$$\frac{V_1}{N_1}dP - \frac{S_1}{N_1}dT = \frac{V_2}{N_2}dP - \frac{S_2}{N_2}dT$$

každou změnu stavové rovnice, resp. krystalové struktury. Rozlišují se ledy Ih, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XV. Ledy Ic, I_{sd}, LDA, HDA, VHDA, XII, XIII, XIV, XVI, XVII, XVIII, XIX nejsou na diagramu zakresleny, protože jsou metastabilní nebo ve směsi. Převzato z http://www1.lsbu.ac.uk/water/water_phase_diagram.html.

9.4 Popis chemické reakce

Reakce v plynné fázi, například:



popíšeme pomocí chemických potenciálů jako:

$$\mu_{\text{H}_2} = \mu_{0,\text{H}_2} + \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_{0,\text{H}_2} (T - T_0) + RT \ln \frac{P}{P_0} + RT \ln X_{\text{H}_2}, \quad (248)$$

kde $T_0 = 293,16 \text{ K} \hat{=} 25^\circ\text{C}$, $P_0 = 101,3 \text{ kPa} = 1 \text{ atm}$ je normální stav. Parametry viz v tab. 5.

látko	μ_0 J mol^{-1}	$\left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right _0$ $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
H ₂	0	-130,58
O ₂	0	-205,02
H ₂ O	$-228,59 \cdot 10^3$	-188,72

Tab. 5 — Parametry chemického potenciálu μ pro vodík, kyslík a vodu. Převzato z [97].

V průběhu reakce se mění látková množství (v mol), což popíšeme:

$$N_{\text{H}_2} = N_{0,\text{H}_2} + \nu_{\text{H}_2} \xi, \quad (249)$$

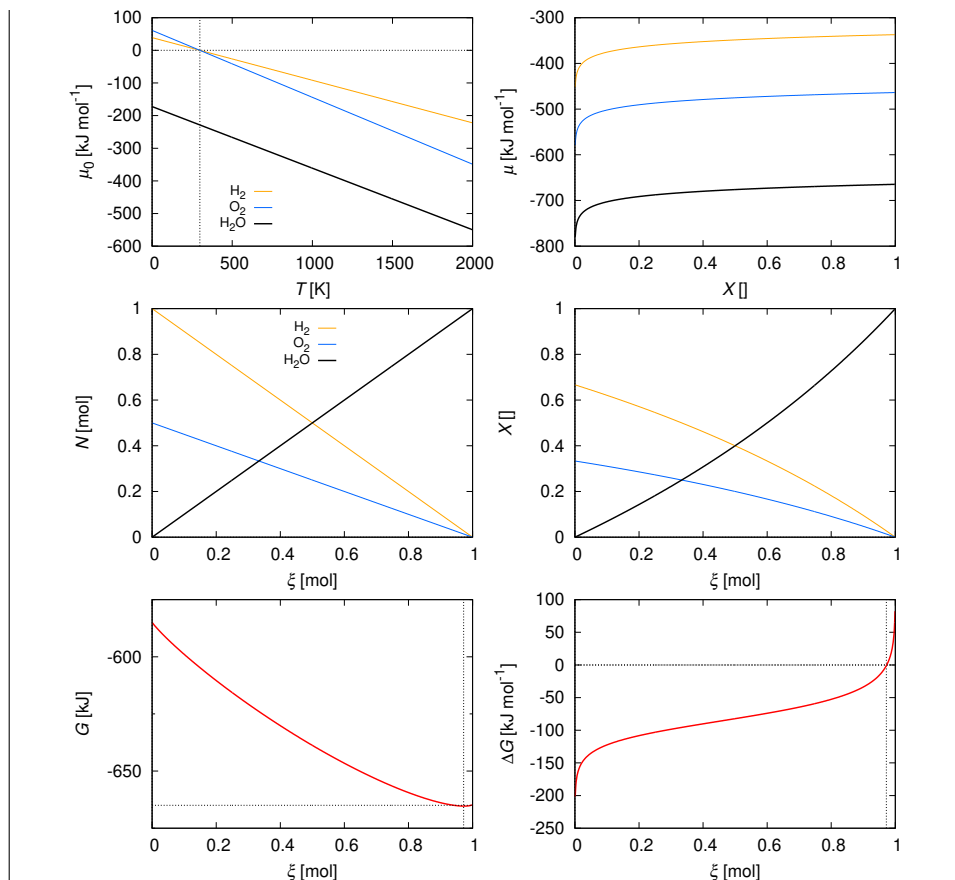
kde N_0 označuje počáteční stav, ξ rozsah reakce (také v mol) a ν stechiometrický koeficient. Viz též tab. 6.

látko	ν	N_0 mol
H ₂	-1	1
O ₂	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
H ₂ O	1	0

Tab. 6 — Stechiometrické koeficienty ν a počáteční látková množství N_0 pro reakci (247).

Molární zlomek je potom:

$$X_{\text{H}_2} = \frac{N_{\text{H}_2}}{N_{\text{H}_2} + N_{\text{O}_2} + N_{\text{H}_2\text{O}}} \quad (250)$$



Obr. 66 — (a) Závislost chemického potenciálu $\mu(T)$ na teplotě; (b) $\mu(X)$ na molárního zlomku; (c) molárního množství $N(\xi)$ na rozsahu reakce (247); (d) molárního zlomku $X(\xi)$; (e) Gibbsovy energie $G(\xi)$; (f) její derivace $\partial G_\xi \equiv \Delta G$. Výpočet pro podmínky $T = 2000$ K, $P = 10^{-3}$ atm.

a Gibbsova energie ($P = \text{konst.}$, $T = \text{konst.}$):

$$G = \mu_{H_2} N_{H_2} + \mu_{O_2} N_{O_2} + \mu_{H_2O} N_{H_2O}, \quad (251)$$

kde $\mu_{H_2} = f(T, P, X_{H_2}, \xi)$, $N_{H_2} = f(\xi)$. Nalezení rovnovážného stavu znamená nalezení *minima* Gibbsovy energie.

Spočteme proto parciální derivace vzhledem ke ξ (se zanedbáním $\frac{\partial \mu}{\partial \xi}$):

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \mu_{H_2} \nu_{H_2} + \mu_{O_2} \nu_{O_2} + \mu_{H_2O} \nu_{H_2O} \equiv \Delta G. \quad (252)$$

Je-li $\Delta G < 0$, reakce je exotermická (probíhá $\rightarrow$); $\Delta G = 0$, nastává rovnováha ($\rightleftharpoons$); $\Delta G > 0$, je endotermická ($\leftarrow$). Rychlost reakce je otázka jiná; potřebovali bychom

teorii kinetickou. Po dosažení za μ a sdružení všeho s 0:

$$\overbrace{\left[\mu_{0,\text{H}_2} + \frac{\partial \mu_{\text{H}_2}}{\partial T} \Big|_0 (T - T_0) + RT \ln \frac{P}{P_0} \right] \nu_{\text{H}_2} + [\mu_{0,\text{O}_2} + \dots] \nu_{\text{O}_2} + [\mu_{0,\text{H}_2\text{O}} + \dots] \nu_{\text{H}_2\text{O}} + RT(\nu_{\text{H}_2} \ln X_{\text{H}_2} + \nu_{\text{O}_2} \ln X_{\text{O}_2} + \nu_{\text{H}_2\text{O}} \ln X_{\text{H}_2\text{O}})}^{\Delta G_0} = 0$$

obdržíme pro rovnováhu podmínku:

$$X_{\text{H}_2}^{\nu_{\text{H}_2}} X_{\text{O}_2}^{\nu_{\text{O}_2}} X_{\text{H}_2\text{O}}^{\nu_{\text{H}_2\text{O}}} = \exp \left(-\frac{\Delta G_0}{RT} \right) \equiv K_X, \quad (253)$$

kde jsme označili K_X rovnovážnou konstantu molární. V naší notaci jsou některá ν záporná (viz tab. 6; příslušná X jsou ve jmenovateli), čili poměr stavů je exponenciála, což není nic jiného než **Boltzmannova rovnice**. Tj. ostatně důvod pro $\ln X$ v (231). Hodnoty ΔG_0 si spočteme z μ_0 , T , P .⁴⁰

9.5 Popis fázové přeměny

Depozice a sublimace:



je reakce jako každá jiná, tudíž (vynecháváme vodní index H_2O):

$$\mu_{\text{s}} = \mu_{0,\text{s}} + \frac{\partial \mu}{\partial T} \Big|_{0,\text{s}} (T - T_0) + RT \ln \frac{P}{P_0}.$$

Ale co to? μ_{s} nezávisí na X_{s} ! Koncentrace pevné látky je totiž *konstantní* (viz krystalová mřížka):

$$N_{\text{s}} = N_{0,\text{s}}, \quad (255)$$

i když se zvyšuje X_{s} , nezvyšuje se pravděpodobnost, že molekula potká molekulu. Plyn (pára) reaguje pouze s povrchem a tlak P je určen parami nad povrchem. Jedná se o případ *heterogenní* reakce. Máme sice:

$$X_{\text{s}} = \frac{N_{\text{s}}}{N + N_{\text{s}}}$$

a:

$$G = \mu N + \mu_{\text{s}} N_{\text{s}},$$

ale:

$$\Delta G = \mu \nu = 0,$$

odkud:

$$\overbrace{[\mu_0 + \dots] \nu}^{\Delta G_0} + RT \nu \ln X = 0$$

⁴⁰ Neznáme-li (rovnovážná) X , je K_X ona exponenciála; známe-li X , lze K_X počítat z X .

a:

$$X^\nu = \exp\left(-\frac{\Delta G_0}{RT}\right).$$

Jinými slovy, rovnovážná konstanta K_X souvisí pouze s určitými X . Také je pozoruhodné, že rovnováha nijak nesouvisí s plochou povrchu. Mohli bychom též pro popis používat aktivitu a namísto X a představovat si $a_s = 1$.⁴¹

9.6 Depoziční sekvence

Chceme-li zjistit chemické složení prvotní pevné látky, musí model zahrnout všechny (relevantní) prvky, všechny chemické reakce a všechny depozice. Předpokládáme-li počáteční prvkové složení plynu (příp. plazmatu) — např. odpovídající sluneční fotosféře — prvky se přerozdělují mezi jednotlivé sloučeniny. Formálně se proto jedná o zákon zachování hmoty (Unterborn a Panero 2017):

$$N_E = \underbrace{\sum_i \nu_{i,E} N_i}_{\text{plynné}} + \underbrace{\sum_j \nu_{j,E} N_j}_{\text{pevné}} \quad \text{pro } E = \text{H, He, C, N, O, } \dots \quad (256)$$

Jde o 23 rovnic. Pro plynnou fázi se uvažuje asi 400 sloučenin, $i = \text{AlS}, \dots$, pro pevnou fázi 110, $j = \text{Ca}_2\text{MgSi}_2\text{O}_7, \dots$. Známé jsou zde koncentrace N_E , neznámé N_i , N_j , kterých je celkem 510. To je moc!

Musíme vzít v úvahu vzájemné vazby, jednak chemické reakce, popsané rovnovážnou konstantou tlakovou:

$$(N_i RT)^{\nu_i} \Pi_E (n_E RT)^{\nu_{i,E}} = \exp\left(-\frac{\Delta G_{0,i}}{RT}\right) \equiv K_P \quad (257)$$

a jednak depozice (a příp. opětovné sublimace):

$$\Pi_E (n_E RT)^{\nu_{j,E}} = \exp\left(-\frac{\Delta G_{0,j}}{RT}\right), \quad (258)$$

kde jsme použili malá n_E , protože jde o postupně klesající koncentrace prvků *mimo sloučeniny*. Obvykle $\nu_i = 1$, $\nu_{i,E} < 0$. Konkrétně pro kyslík a uhlík ($E = \text{O, C}$), kde jsme za základ zvolili (búno) O_2 místo O :

$$\begin{aligned} N_{\text{O}} &= 2n_{\text{O}_2} + N_{\text{H}_2\text{O}} + N_{\text{CO}} + 2N_{\text{CO}_2} + \dots + 3n_{\text{Al}_2\text{O}_{3s}} + \dots, \\ N_{\text{C}} &= n_{\text{C}} + N_{\text{CO}} + N_{\text{CO}_2} + \dots + n_{\text{C}_s} + \dots, \end{aligned}$$

atd. Po dosazení vlevo (za parciální tlak) a dosazení vpravo (z (257)):

$$\begin{aligned} \frac{X_{\text{O}}}{X_{\text{H}_2} + X_{\text{H}} + X_{\text{He}} + \dots} \frac{P}{RT} &= 2n_{\text{O}_2} + n_{\text{H}_2} n_{\text{O}_2}^{\frac{1}{2}} K_{\text{H}_2\text{O}} (RT)^{\frac{1}{2}} + n_{\text{C}} n_{\text{O}_2}^{\frac{1}{2}} K_{\text{CO}} (RT)^{\frac{1}{2}} + \dots, \\ \frac{X_{\text{C}}}{X_{\text{H}_2} + X_{\text{H}} + X_{\text{He}} + \dots} \frac{P}{RT} &= n_{\text{C}} + n_{\text{C}} n_{\text{O}_2}^{\frac{1}{2}} K_{\text{CO}} (RT)^{\frac{1}{2}} + \dots, \end{aligned}$$

⁴¹ Obdobně K_X nezávisí na X rozpouštědla, i když by bylo reaktantem, je-li ho vždy nadbytek.

atd. Jde o 23 nelineárních rovnic pro neznámé n_E , kterých je také 23. Tlak P musíme zvolit.

Depoziční sekvence pro $P = 10^{-3}$ atm, což je obvyklý tlak v protoplanetárním disku, ve středové rovině, ve vzdálenosti 1 au, začíná:

korund	Al_2O_3
→ hibonit	$\text{CaAl}_{12}\text{O}_{19}$
→ Ca-dialuminát	CaAl_4O_7
→ perovskit	CaTiO_3
→ Ca-aluminát	CaAl_2O_4
→ gehlenit	$\text{Ca}_2\text{Al}_2\text{SiO}_7$
→ spinel	MgAl_2O_4
→ železo	Fe
→ anortit	$\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$
→ åkermanit	$\text{Ca}_2\text{MgSi}_2\text{O}_7$
→ diopsid	$\text{CaMgSi}_2\text{O}_6$
→ forsterit	Mg_2SiO_4
→ enstatit	$\text{Mg}_2\text{Si}_2\text{O}_6$
→ atd.	

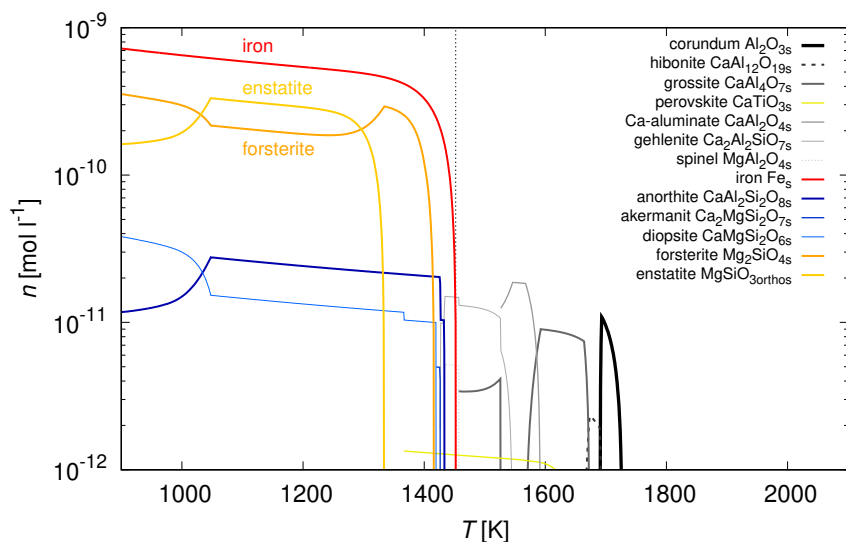
Zobrazena je na obr. 67 a 68. Vzhledem k tomu, že prvním deponovaným minerálem při $T \simeq 1730$ K je korund Al_2O_3 a záhy minerály obsahující skupinu CaO, není divu, že tvoří vápenato–hlinité inkluze (CAI), což jsou radiometricky nejstarší části meteoritů. Sekvence pro jiné tlaky ukazuje schematicky obr. 69.

Z pevné látky vznikají pevná tělesa akrecí (čes. přirůstáním), která je zásadně ovlivňována aerodynamikou (čes. třením). Směr pohybu pevných těles dovnitř nebo ven určuje profil $P(r)$ v disku. Pak ovšem dochází k odebrání pevné látky někde nebo k přidávání pevné látky jinde, což nevyhnutelně mění chemické složení (X_E). Přitom na určitém r může docházet k opětovné sublimaci materiálu transportovaného z jiných r .

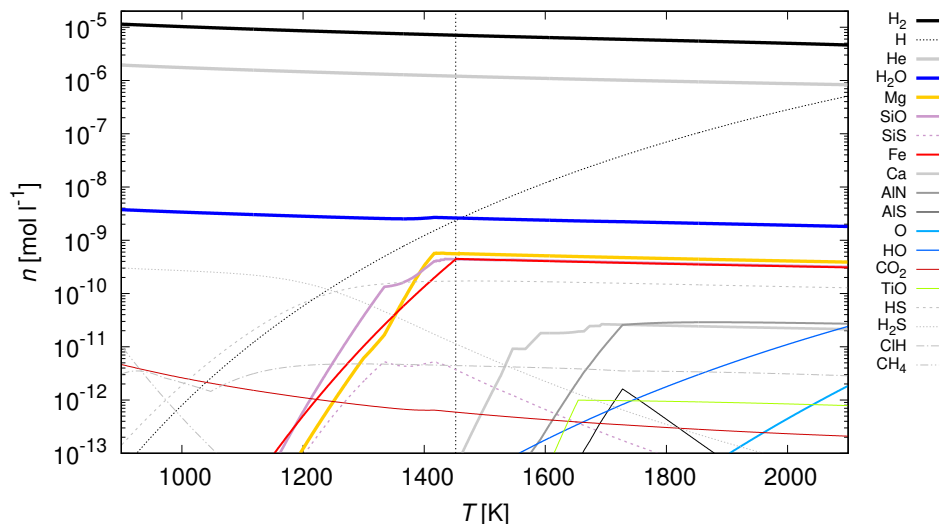
I v tělesech samotných existuje profil $P(r)$ v tělesu, kde také může docházet k chemickým reakcím a fázovým přechodům. Vzhledem k vybudovanému gradientu tlaku se ovšem spíše jedná o skupenství kapalné $\leftrightarrow$ pevné.

9.7 Bowenovo reakční schéma

Pro pochopení vzájemných vztahů mezi minerály, vztahů mezi horninami (zejména vyvřelými) nebo popis průběhu diferenciacce terestrických těles je důležité **Bowenovo schéma**. Popisuje postupnou, rovnovážnou **krystalizaci magmatu** při postupně klesající teplotě. Konkrétně silikátového (bazického (subalkalického (vápenatoalkalického))). Do minerálů vstupují ovšem pouze určité chemické prvky, *kompatibilitní* s danou krystalovou strukturou, což ovlivňuje chemické složení reziduální taveniny. Pokud přitom minerály (jakožto pevná látka) stále zůstávají v tavenině (čili kapalině), při dalším snižování T , když se rovnováha změní, minerály s taveninou

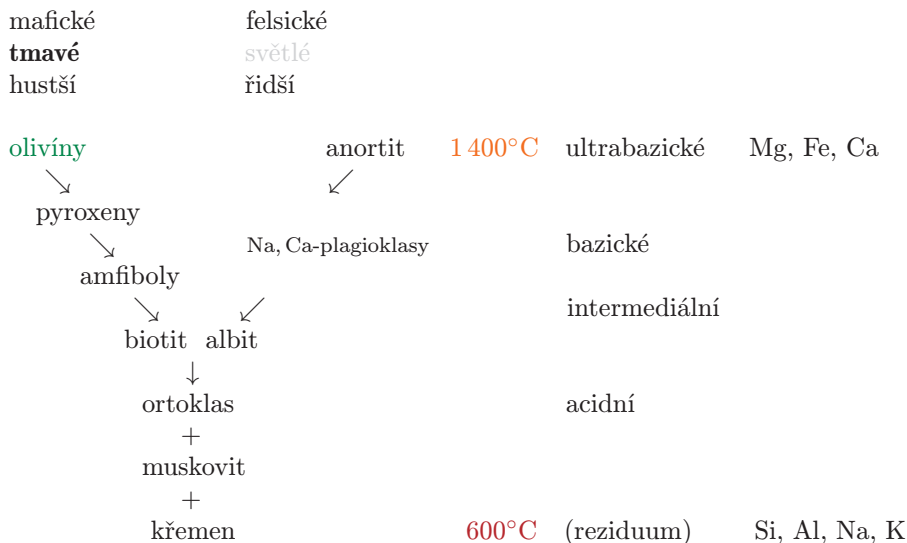


Obr. 67 — Koncentrace n pevných látek (v mol l^{-1}) při postupném snižování teploty T a konstantním tlaku $P = 10^{-3}$ atm. Počáteční prvkové složení odpovídá sluneční fotosféře. Při $T \simeq 1730$ K jako první vzniká minerál korund Al_2O_3 , ale při 1690 K se stane opět nestabilní. Pod 1450 K dosahuje významných koncentrací železo Fe, forsterit Mg_2SiO_4 a enstatit $\text{Mg}_2\text{Si}_2\text{O}_6$. Výpočet programem ArCCoS (Unterborn a Panero 2017).



Obr. 68 — Koncentrace n nejvýznamnějších plyných prvků a sloučenin. Z refraktorních vznikají pevné látky (odpovídající obr. 67). Koncentrace se podstatně mění již od počáteční teploty 2500 K. Zatímco Mg, Fe, Ca jsou přímo ve formě par, Si nebo Al ve formě oxidů, nitridů nebo síranů.

opětovně reagují. Často však dochází k jejich vydělování, např. gravitací, takže nastává *frakční* krystalizace, vedoucí k diferenciaci. To narušuje ideální představy, protože se chemické složení mění (nemohou vzniknout všechny členy ve schématu). Nicméně schéma je následující:

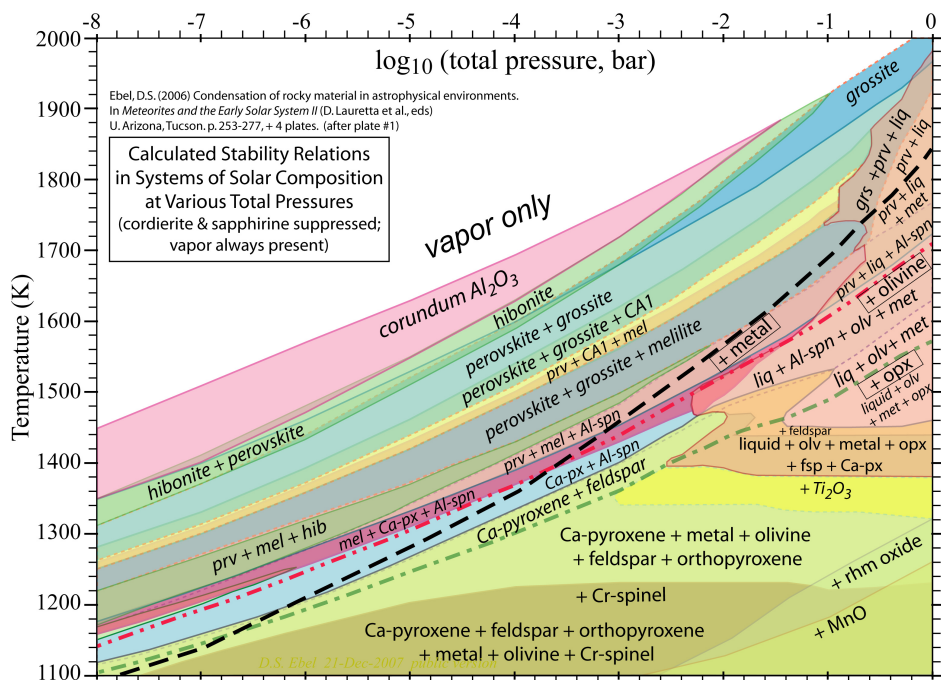


Abychom ve schématu lépe rozpoznávali chemické složení, připojujeme následující výčet *skupin* (resp. koncových minerálů) a samostatných minerálů:

- olivíny: forsterit Mg_2SiO_4 , fayalit Fe_2SiO_4 ;
- pyroxeny: enstatit $\text{Mg}_2\text{Si}_2\text{O}_6$, ferosilit $\text{Fe}_2\text{Si}_2\text{O}_6$; wollastonit⁴² $\text{Ca}_2\text{Si}_2\text{O}_6$;
- amfiboly: tremolit $\text{Ca}_2\text{Mg}_5\text{Si}_8\text{O}_{22}(\text{OH})_2$, feroaktinolit $\text{Ca}_2\text{Fe}_5\text{Si}_8\text{O}_{22}(\text{OH})_2$, antofylit $\text{Mg}_7\text{Si}_8\text{O}_{22}(\text{OH})_2$;
- biotit, tmavá slída $\text{K}(\text{Mg, Fe})_3\text{AlSi}_3\text{O}_{10}(\text{OH, F})_2$;
- anortit, Ca-živce (plagioklas) $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$;
- albit, Na-živce (plagioklas) $\text{NaAlSi}_3\text{O}_8$;
- ortoklas, mikroklin, K-živce KAlSi_3O_8 ;
- muskovit, světlá slída $\text{KAl}_3\text{Si}_3\text{O}_{10}(\text{OH, F})_2$;
- křemen SiO_2 .

Co vidíme? Teplota klesá ↓. První minerály začínají krystalizovat při asi 1 400°C (a vysokém tlaku). Existují dvě řady: diskrétní ↔ spojitá. Diskrétní proto, že se krystalová struktura mění náhle. Spojitě se měnící pevné směsi jsou sodno-vápenaté živce (plagioklasy), mající stejnou krystalovou strukturu. V zásadě lze rozlišit minerály (a též horniny jimi tvořené): **bazické** (zásadité) ↑; **acidní** (kyselé) ↓. Postupně se v nich snižuje obsah Mg, Fe, Ca; naopak roste obsah Si, Al, Na, K. Jiné rozdělení

⁴² pyroxenoid



Obr. 69 — Fázový diagram $T(P)$ (tj. transponovaný $P(T)$) pro pevnou látku deponovanou, kondenzovanou či utuhlou při různých tlacích. Počáteční složení opět odpovídá fotosféře. Kromě minerálů, resp. jejich skupin, zmiňovaných výše, jsou zde uvedeny: skupina melilitu, tj. gehlenit $\text{Ca}_2\text{Al}_2\text{SiO}_7$, ākermanit $\text{Ca}_2\text{MgSi}_2\text{O}_7$; spinely, spinel MgAl_2O_4 , chromit FeCr_2O_4 ; olivíny, forsterit Mg_2SiO_4 , fayalit Fe_2SiO_4 ; pyroxeny, enstatit $\text{Mg}_2\text{Si}_2\text{O}_6$, ferosilit $\text{Fe}_2\text{Si}_2\text{O}_6$; wollastonit $\text{Ca}_2\text{Si}_2\text{O}_6$; živce, anortit $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$, albit $\text{NaAlSi}_3\text{O}_8$, ortoklas KAlSi_3O_8 . Převzato z <http://research.amnh.org/~debel/vapors1/vapors1.html>.

je na: **mafické** (bohaté na Mg, Fe) $\leftrightarrow$ **felsické** (tzn. na živce, křemen). Liší se též tím, že jsou spíše: tmavé $\leftrightarrow$ světlé. A co je nejpodstatnější: hustší $\leftrightarrow$ řidší.⁴³ Při asi 600 °C je většina taveniny pryč. Zůstal zůstatek (reziduum), značně obohacený o nekompatibilní prvky, např. K, prvky vzácných⁴⁴ zemin (REE), P.

Co z toho plyne? Pokud byl na celé Zemi **magmatický oceán** (asi ano), byl v něm samozřejmě profil teploty $T(r)$; klesající. Magmatický oceán bývá vždy turbulentní, vnitřní energie U se v něm přenáší prouděním.⁴⁵ Můžeme si jej představit jako „bubliny“, které jsou-li teplejší, řidší než okolí, stoupají díky vztlaku „jako balóny“ vzhůru (a *vice versa*). Je-li rychlost $\mathbf{v}$ proudění dost velká, neprobíhá výměna

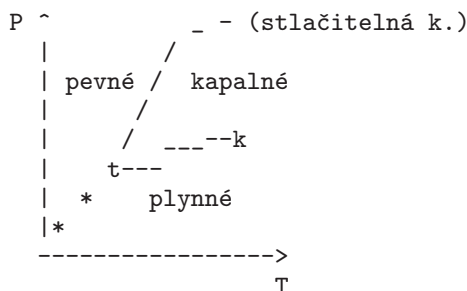
⁴³ olivíny 3,2 až 4,4 g cm⁻³, anortit 2,7, křemen 2,6

⁴⁴ nejsou vzácné chemicky, nýbrž zůstávají rozptýlené a nesoustřeďují se v rudních ložiscích

⁴⁵ je neprůhledný, přenos zářením není možný; není pevný, přenos vedením není jediný možný; mimochodem dochází k chemickému promíchávání

tepla s okolím. Pak ovšem $T(r)$ klesá adiabaticky, tzn. pomalu, neboť se pouze přizpůsobuje okolnímu tlaku $P(r)$.

Pak je ovšem otázka, kdy a kde začne krystalizovat do podoby *pevného* pláště?! To záleží na fázovém rozhraní v diagramu $P(T)$. Schematicky pro chemicky čistou látku:



kde t označuje trojný bod, k kritický bod. Sklon rozhraní je dán zmiňovanou Clausiovou–Clapeyronovou rovnicí:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l}{T\Delta v}, \quad (259)$$

kde jsme jen přeznačili a přejmenovali $l \equiv \Delta h$ měrné teplo tání, $\Delta v = \Delta \frac{1}{\rho}$ je změna měrného objemu při fázovém přechodu (pe./k.).⁴⁶ V případě *směsí* se ovšem musí rozlišit: **solidus**, kde se směs stane celá pevná, **likvidus**, kdy se stane celá kapalná; mezi nimi je *parciálně* roztavená (tj. náš kýžený případ).

Když je $T(r)$ pozvolně klesající, musí být $T(P)$ pozvolně rostoucí a $P(T)$ strmě rostoucí. Na diagramu zpočátku leží celý profil v oblasti kapalné (jde o oceán). Pomalu se sune vlevo, neboť T celkově klesá (viz proudění a zářivé ztráty z atmosféry). Průsečík s (pozvolnějším) likvidem bude evidentně nahoře, tzn. v místě, kde je vysoké P — plášť tudíž začíná krystalizovat *zespodu*! Samo sebou tím dole vzniknou minerály, jejichž hustota je jednak přizpůsobena okolí a jednak se ještě zvýší při fázovém přechodu ($\Delta v > 0$; ale pro k./pe. je to opačně). Ostatně kdyby nebyla, vztlak by je okamžitě tlačil nahoru.

Kde se pak bere **vulkanismus**? Je-li dnes celý plášť pevný, musíme vysvětlit opětovný vznik magmatu. Především, i v pevném plášti dochází k proudění! Avšak $|\mathbf{v}|$ je mizivé. Magma pak vzniká: (i) adiabatickou dekompresí hornin při výstupu; (ii) ohřevem nad výstupnými proudy (horkou skvrnou); (iii) snížením solidu změnou chemického složení v subdukčních zónách (zejm. vodou, a to o mnoho 100 °C); (iv) kompresí v konvergentních zónách mezi kontinentálními litosférickými deskami.⁴⁷ Magmata tak vzniklá se ovšem liší, mohou být nejen bazická stejně jako

⁴⁶ nejedná se o vodu, která je anomální ($\Delta v < 0$) a jejíž sklon je opačný

⁴⁷ i když zde se magmatismus často neprojevuje vulkanismem na povrchu

oceánská kůra, ale mít intermediální či acidní složení jako kontinentální kůra nebo mít zvýšený obsah těkavých látek apod. Potom Bowenovo schéma neplatí.

- [95] *Bowen's reaction series*. [online] [cit. 2020-10-31].
(<https://www.britannica.com/science/igneous-rock/Nature-of-magmas>).
- [96] FLEMING, P. *Physical chemistry*. [online] [cit. 2020-07-06]. (<https://chem.libretexts.org>).
- [97] JOB, G. *Table of chemical potentials*. [online] [cit. 2020-07-06].
(<https://www.job-stiftung.de/index.php?data-collection>).
- [98] KOFALA, J. *Vybrané kapitoly z fyzikální chemie*. [online] Praha: VŠCHT, 2013.
(<https://old.vscht.cz/fch/cz/pomucky/kolafa/vybrkap-tisk.pdf>).
- [99] LOWER, S. *Chem1 virtual textbook*. [online] [cit. 2020-07-06].
(<https://chem.libretexts.org>).
- [100] NOVÁK, J. A. J. *Fyzikální chemie*. Praha: VŠCHT, 2008.
- [101] SVOBODA, E., BAKULE, R. *Molekulová fyzika*. Praha: Academia, 1992.
- [102] UNTERBORN, C. T., PANERO, W. R. *The effects of Mg/Si on the exoplanetary refractory oxygen budget*. *Astrophys. J.*, **845**, 61, 2017.
- [103] *Wikipedia*. *Chemical potential*. [online] [cit. 2020-06-07].
(https://en.wikipedia.org/wiki/Chemical_potential).

10 Kosmologie homogenního izotropního vesmíru

Pokud bychom někdy chtěli aplikovat hydrodynamiku na největší měřítko, konkrétně celý vesmír, museli bychom především porozumět pozadí, na němž děje probíhají. Proto bylo zařazeno následující *intermezzo*, příhodně doplněné *preludiem* B.

10.1 Kosmologický princip

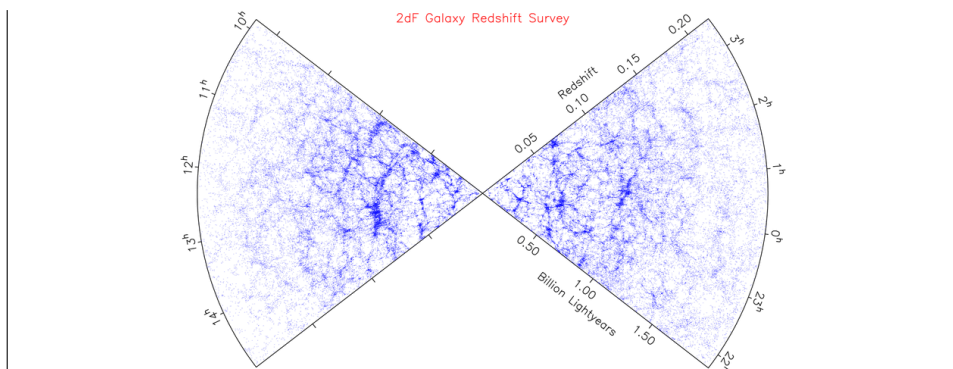
Základním východiskem pro náš nejjednodušší model vesmíru je pozorování, že na velkých měřítkách je vesmír *izotropní*. Ve všech směrech vidíme například téměř stejné množství galaxií (viz obr. 70) nebo kosmické mikrovlnné pozadí má na směrů téměř nezávislou intenzitu.

Tato pozorovaná izotropie a *koperníkovský princip*, to jest víra, že nejsme na nijak význačném místě vesmíru, znamenají, že vesmír je *homogenní* (všude stejný).

Na druhou stranu musíme zmínit *Keplerův–Olbersův paradox*. Pokud by vesmír byl nekonečný a zároveň věčný, hvězdy v něm rozmístěné s koncentrací n a se zářivým výkonu L , by produkovaly celkově

$$\int_0^\infty \frac{L}{4\pi r^2} n 4\pi r^2 dr = Ln \int_0^\infty dr = \infty, \quad (260)$$

ale v noci je tma. Znamená to tedy, že vesmír měl nějaký počátek a *není statický*.



Obr. 70 — Velkoškálová struktura vesmíru pozorovaná přehlídkou 2dF.

10.2 Einsteinovy rovnice pole

Abychom vystihli všechny podstatné vlastnosti vesmíru, musíme pracovat se zakřiveným čtyřrozměrným časoprostorem. Jde vlastně o zobecnění obvyklého třírozměrného Euklidova prostoru, v němž vzdálenosti mezi body měříme jednoduše

pomocí Pythagorovy věty $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$. Infinitesimální vzdálenost mezi událostmi („body“) v časoprostoru je popisována obdobně metrickým tenzorem g_{ik} :

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{00} (dx^0)^2 + g_{01} dx^0 dx^1 + \dots,$$

přičemž přes opakující se indexy i a $k = 0 \dots 3$ podle sumačního pravidla sčítáme. Indexy ponechme arabské, i když jde o čtyři rozměry, a vynechme j , protože nemá obdobu v řecké abecedě ($\iota\kappa$). Časoprostor je varieta, čili je *lokálně* plochý, obdobně jako povrch Zeměkoule viděný zblízka. Pro úplně plochý (Minkowského) časoprostor by matice g_{ik} byla jednoduchá:

$$g_{ik} \equiv \eta_{ik} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ale v obecném případě je $g_{ik}(t, x, y, z)$ zde jiné než $g_{ik}(t', x', y', z')$ jinde. — potřebovali bychom zjistit $4 \times 4 = 16$ funkcí času a souřadnic (respektive jen 10, kvůli symetrii $g_{ik} = g_{ki}$).

Právě k tomu slouží Einsteinovy rovnice (EFE), které popisují vztah mezi křivostí časoprostoru (metrikou g_{ik}) a „obsahem“ vesmíru, neboli tenzorem energie a hybnosti T_{ik} , který je zdrojem gravitace:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \quad (261)$$

Přestože tyto rovnice vypadají „hroživě“, hned v následující kapitole je velmi zjednodušíme, protože náš vesmír je přece homogenní a izotropní (v g_{ik} nejsou funkce prostorových souřadnic ani význačné směry).

Ricciho tenzor R_{ik} a Ricciho skálár R jsou první a druhé parciální derivace metriky podle souřadnic:

$$R = g^{ik} R_{ik}, \\ R_{ik} = R^l{}_{ilk},$$

přičemž Riemannův tenzor:

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i{}_{nl} \Gamma^n{}_{km} - \Gamma^i{}_{nm} \Gamma^n{}_{kl}$$

a Christoffelovy symboly:

$$\Gamma^i{}_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

Λ označuje kosmologickou konstantu (číslo), G gravitační konstantu, c rychlost světla ve vakuu. Složkami T_{ik} mohou být obecně opět funkce času, souřadnic nebo rychlostí, nicméně pro ideální kapalinu s hustotou ρ a tlakem p platí (v lokální inerciální soustavě):

$$T^i{}_k = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p/c^2 \end{pmatrix}.$$

Z matematického hlediska jde o soustavu 10 (nezávislých) nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Není řešitelná analyticky, až na několik speciálních případů.

10.3 Metrika FLRW

Při hledání homogenní metriky si položíme otázku: lze popsat křivost jedním číslem? Vezměme jako příklad povrch koule o poloměru R , na níž vyznačíme kružnici o poloměru r . Na rovné ploše bychom očekávali obvod $o_{\text{očekávaný}} = 2\pi r$, ale zde bychom naměřili:

$$o_{\text{změřený}} = 2\pi R \sin \vartheta = 2\pi R \sin \frac{r}{R} \doteq 2\pi R \left[\frac{r}{R} - \frac{1}{3!} \left(\frac{r}{R} \right)^3 + \dots \right].$$

Křivost je pak definována pomocí těchto obvodů jako:

$$K \equiv \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{o_{\text{očekávaný}} - o_{\text{změřený}}}{r^3}, \quad (262)$$

což pro výše uvedenou kouli dává:

$$K_{\text{koule}} = \frac{1}{R^2}.$$

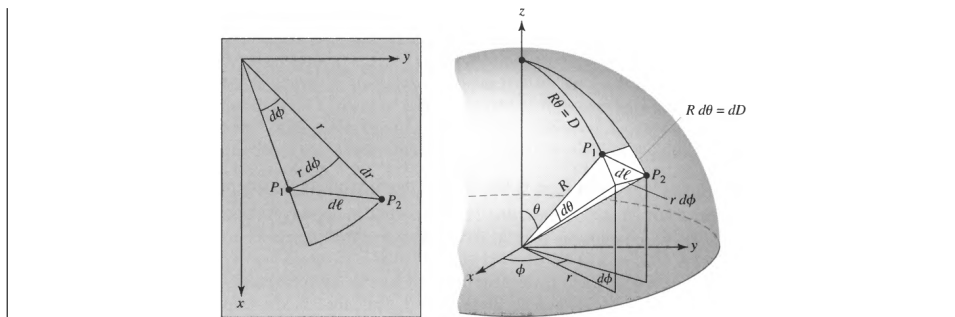
Nyní přejdeme k měření vzdáleností. Ve dvourozměrné euklidovské geometrii a v polárních souřadnicích bychom měli prostě $(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\phi)^2$. Avšak na kulové ploše je (viz obr. 71):

$$(ds)^2 = (Rd\vartheta)^2 + (rd\phi)^2,$$

kde

$$Rd\vartheta = \frac{dr}{\cos \vartheta} = \frac{dr}{\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}.$$

Zobecnění na třírozměrný prostor provedeme záměnou $rd\phi$ za $r d\theta$ a $r \sin \theta d\phi$.



Obr. 71 — Geometrie na ploše a na kouli. Převzato z [105]

Nyní jsme teoreticky připraveni napsat obecnou metriku pro zakřivený časoprostor:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (263)$$

která se nazývá Fridmannova–Lemâitrova–Robertsonova–Walkerova, neboli zkráceně FLRW. Kromě (zatím neznámé) křivosti K jsme do ní doplnili i (zatím neznámou) funkci času $a(t)$, zvanou *expanzní parametr*, jež umožní popisovat rozpínání nebo smršťování vesmíru. Pochopitelně v metrice nejsou žádné funkce prostorových souřadnic, protože náš vesmír je všude stejný. V maticovém zápisu je:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 d\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \end{pmatrix}. \quad (264)$$

Expanzní parametr lze libovolně škálovat, nicméně pro přehlednost se volí obvykle $a(t_0) = 1$ dnes, pak K je křivost, anebo $K = -1, 0$ nebo $+1$, pak $a(t)$ je křivost.

10.4 Fridmannovy rovnice

Dosazením FLRW metriky (264) do Einsteinových rovnic (412) získáme rovnice pro expanzní parametr $a(t)$ a křivost K . Namísto ručního výpočtu použijeme algebraický manipulátor Reduce (`mat()` deklaruje matici a `df()` provádí derivaci funkce podle parametru):

```
% oznaceni souradnic (x^0,x^1,x^2,x^3) <=> (t,r,theta,phi)

matrix coords(1,4);
coords := mat((t,r,theta,phi));
procedure x(i); coords(1,i+1); % matice se indexuji od 1, nikoli od 0!

%% FLRW metrika g_ik

a(t); Y; % obecna fce t

g := mat(
  (-c^2, 0, 0, 0),
  (0, (a(t))^2/(1-K*r^2), 0, 0),
  (0, 0, (a(t))^2*r^2, 0),
  (0, 0, 0, (a(t))^2*r^2*sin(theta)^2)
);

g_ := 1/g; % kontravariantni metrika g^ik <=> inverzni matice

%% Christoffelovy symboly

procedure Christoffel(i,k,l); begin
  scalar Ch;
  Ch:=0;
  for m := 0:3 do begin % opet indexace g_ik, g^ik od 1
    Ch:=Ch + 1/2 * g_(i+1,m+1) *
```

```

        ( df(g(m+1,k+1), x(l)) + df(g(m+1,l+1), x(k)) - df(g(k+1,l+1), x(m)) )
    end;
    return trigsimp(Ch);
end;
% zjednodusi goniometricke fce

for i := 0:3 do begin
    for k := 0:3 do begin
        for l := 0:3 do begin
            Gamma(i,k,l) := Christoffel(i,k,l);    % ulozeni do pole setri CPU time
            if (Gamma(i,k,l) neq 0) then begin
                write "Gamma^",i,"_",k,l," = ",Gamma(i,k,l);
            end;
        end;
    end;
end;

%% Riemannuv tenzor

procedure Riemann(i,k,l,m); begin
    scalar Ri,n;
    Ri := df(Gamma(i,k,m), x(l)) - df(Gamma(i,k,l), x(m));
    for n := 0:3 do begin
        Ri:=Ri + Gamma(i,n,l)*Gamma(n,k,m) - Gamma(i,n,m)*Gamma(n,k,l);
    end;
    return trigsimp(Ri);
end;

for i := 0:3 do begin
    for k := 0:3 do begin
        for l := 0:3 do begin
            for m := 0:3 do begin
                Ri := Riemann(i,k,l,m);
                if (Ri neq 0) then begin
                    write "R^",i,"_",k,l,m," = ",Ri;
                end;
            end;
        end;
    end;
end;

%% Ricciho tenzor

procedure Ricci(i,k); begin
    scalar Rc,l;
    Rc:=0;
    for l := 0:3 do begin
        Rc:=Rc + Riemann(l,i,l,k);
    end;
    return trigsimp(Rc);
end;

matrix R_ik(4,4);

for i := 0:3 do begin
    for k := 0:3 do begin
        R_ik(i+1,k+1) := Ricci(i,k);
        write "R_",i,k," = ", R_ik(i+1,k+1);
    end;
end;

```

```

end;

%% Ricciho skalar

procedure R(); begin
  scalar R,i,k;
  R:=0;
  for i := 0:3 do begin
    for k := 0:3 do begin
      R:=R + g_(i+1,k+1) * R_ik(i+1,k+1);
    end;
  end;
  return trigsimp(R);
end;

write "R = ", R();

%% tenzor energie a hybnosti T^i_k pro tekutinu

T__ik := mat(
  ( rho*c^2, 0, 0, 0),
  (      0, p, 0, 0),
  (      0, 0, p, 0),
  (      0, 0, 0, p)
);

T_ik := g * T__ik;                                % kovariantni T_ik

%% Einsteinovy rce pole

write "EFE: ", R_ik - 1/2 * R() * g - Lambda_ * g, " = ", (8*pi*capG/c^4) * T_ik;
bye;

```

Výsledná složka 00 Einsteinových rovnic se nazývá Fridmannova rovnice:

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \overbrace{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}}^{\equiv \rho_\Lambda} \right) a^2. \quad (265)$$

Ze stopy EFE vychází ještě druhá Fridmannova rovnice:

$$\ddot{a} + \dot{a}^2 + Kc^2 = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} + \frac{\Lambda c^2}{2\pi G} \right) a^2.$$

Za předpokladu platnosti rovnice kontinuity:

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -\frac{p}{c^2} \frac{d(a^3)}{dt}$$

lze odvodit i jiný užívaný tvar Fridmannovy rovnice (265); nejprve ji násobíme a :

$$\dot{a}^2 a + Kc^2 a = \frac{8\pi G}{3} \rho a^3,$$

pak derivujeme podle času:

$$-\dot{a}^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - \frac{p}{c^2} \frac{d(a^3)}{dt} = 2\dot{a}\ddot{a} + \dot{a}^2\dot{a} + \underbrace{Kc^2}_{=0} \dot{a} = \frac{8\pi G}{3} \frac{d(\rho a^3)}{dt},$$

odkud ihned plyne rovnice pro zrychlení:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) a.$$

Abychom mohli vypočítat konkrétní průběh $a(t)$, potažmo $\rho(t)$, musíme znát ještě *stavové rovnice*, respektive závislosti $\rho(a)$ pro různé substance, což shrnuje následující tabulka:

$$\text{látka (prach):} \quad p_m = 0 \quad \rho_m = \rho_{m0} a^{-3} \quad (266)$$

$$\text{záření, neutrína:} \quad p_{\text{rel}} = \frac{1}{3}\rho_{\text{rel}}c^2 \quad \rho_{\text{rel}} = \rho_{\text{rel}0} a^{-4} \quad (267)$$

$$\Lambda \text{ (temná energie):} \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 \quad \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} = \text{konst.} \quad (268)$$

Látka (ať už ve formě hvězd/galaxií nebo jako temná látka) je strhávána rozpínajícím se prostorem a její hustota přirozeně klesá jako $1/a^3$. Pro fotony se však kromě poklesu jejich koncentrace uplatňuje ještě prodlužování vlnové délky, které ovlivňuje energii podle vztahu $E = hc/\lambda$, takže výsledná úměra je $1/a^4$. Hustota odpovídající kosmologické konstantě naopak zůstává konstantní; pokud ji převedeme na pravou stranu EFE hovoříme též o *temné energii*. Mimochodem je evidentní, že v kosmologii neplatí zákon zachování energie. Nejenže by integrál přes celý prostor divergoval, ale ani celková hustota energie není konstantní.

Pro popis rozpínání se kromě expanzního parametru $a(t)$ používá také *Hubbleův parametr*:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (269)$$

Pro dnešek (z blízkých objektů) je změřena hodnota $H_0 \doteq 71 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, což „numerologicky“ zhruba odpovídá rychlosti vzdalování Měsíce od Země. Dále zavedeme *decelerační parametr*:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (270)$$

pro posouzení toho, kdy se rozpínání zpomaluje ($q > 0$) a kdy zrychluje ($q < 0$). Měřitelnou veličinou je *rudý posuv* (angl. redshift), jeho definice a vztah k $a(t)$ je:

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{dnes pozorované}} - \lambda_{\text{emitované}}}{\lambda_{\text{emitované}}}, \quad 1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (271)$$

Z důvodů, které budou zřejmé záhy, zavedeme *kritickou hustotu* jako:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (272)$$

Pro výpočetní účely Fridmannovu rovnici (265) upravíme s využitím stavových rovnic:

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \overbrace{\frac{H_0^2}{\rho_{c0}}}^{\frac{H_0^2}{\rho_{c0}}} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{rel0}}{a^4} + \rho_{\Lambda 0} \right) a^2,$$

definujeme bezrozměrné veličiny Ω jako:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c},$$

pak

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{a} + \frac{\Omega_{rel0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 \right)$$

a člen Kc^2 vyloučíme pomocí téže rovnice, ale napsané pro čas $t = t_0$, kdy je $a_0 = 1$, $\dot{a}_0 = H_0 a_0 = H_0$:

$$H_0^2 + Kc^2 = H_0^2 (\Omega_{m0} + \Omega_{rel0} + \Omega_{\Lambda 0}),$$

čili:

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{a} + \frac{\Omega_{rel0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{rel0} - \Omega_{\Lambda 0} \right), \quad (273)$$

což je obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu pro $a(t)$, kterou můžeme snadno řešit numericky (viz podstatnou část kódu programu fridmann ve Fortranu 77):

```
c  pocatecni podminky
    t = 0.d0
    a = a_0
    tout = t

c  hlavni cyklus
    do while ((t.lt.tstop).and.(a.gt.0d0))

c  stavove rovnice pro latku (prach), zarení a vakuum => skalovani hustot
    Omega_m = Omega_m0 / a
    Omega_rel = Omega_rel0 / a**2
    Omega_lambda = Omega_lambda0 * a**2

c  rudy posuv
    z = a_0/a - 1.d0

c  standardni vystup
    if (t.ge.tout) then
        write(*,*) (t_0+sign*t)/Gyr, a, z, Omega_m, Omega_rel,
:         Omega_lambda
        tout = t + dtout
    endif
```

```

c Fridmannova rovnice
    da_dt = sqrt(H_0**2 * (Omega_m + Omega_rel + Omega_lambda
    :       + 1.d0 - Omega_m0 - Omega_rel0 - Omega_lambda0))

c jednoduchy Euleruv integrator
    a = a + da_dt*dt*sign
    t = t + dt

enddo

```

Některé hypotetické vesmíry pochopíme i bez programu:

1. pro *prázdný* vesmír ($T_{ik} = 0$, bez Λ) vychází $\dot{a}^2 = 0$, $a = \text{konst.}$, $H = 0$, $K = 0$, čili je v něm statický Minkowského plochý časoprostor ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$).
2. *de Sitterův* vesmír ($T_{ik} = 0$, pouze $\Lambda > 0$) se vyznačuje exponenciálním rozpínáním $a(t) \propto \exp \chi t$.
3. pro *prach a plyn* existuje kritická hustota ρ_c (viz (272)); je-li
 $\rho = \rho_c \Rightarrow K = 0$, tzn. vesmír je plochý;
 $\rho > \rho_c \Rightarrow K > 0$, je uzavřený, má kulovou geometrii;
 $\rho < \rho_c \Rightarrow K < 0$, je otevřený, geometrie je hyperbolická.
 Pro podkritický látkou vyplněný vesmír platí úměra $a \propto t^{2/3}$.
4. vesmír vyplněný *zářením* se rozpíná jako $a \propto t^{1/2}$
5. náš *pozorovaný* vesmír má počáteční podmínky (v čase $t = t_0$) přibližně $\Omega_{m0} = 0,27$, $\Omega_{rel0} = 8,24 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_{\Lambda 0} = 0,73$. Na obr. 72 a 73 vidíme jeho vývoj spočtený výše uvedeným programem. Můžeme z něj odečíst okamžik Velkého třesku $t_{BB} = -13,7 \text{ Gyr}$, kdy je $a = 0$, začátek zrychlování v čase $t = -6,7 \text{ Gyr}$, nebo trvání éry záření ($\rho_{rel} > \rho_m$) asi 55 000 roků od Velkého třesku

V další kapitole vysvětlíme, z čeho se odvozují výše uvedené hodnoty Ω .

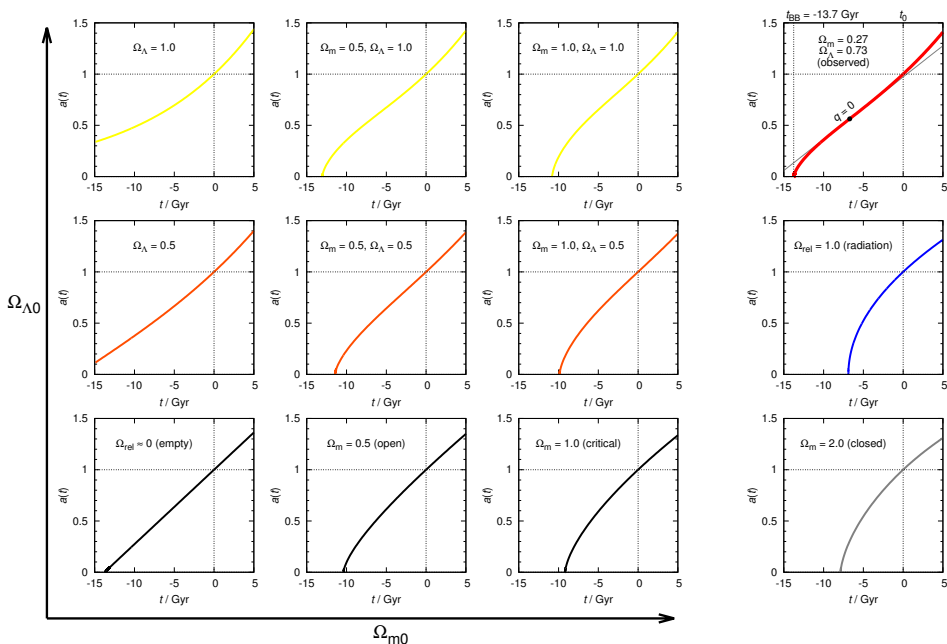
10.5 Kosmologické parametry

Parametry našeho vesmíru jsou omezené především třemi pozorováními: i) měřením fluktuací kosmického mikrovlnného záření (CMB); ii) fotometrií a spektroskopií supernov typu Ia; iii) velkoškálovými strukturami v rozložení galaxií (baryonovými akustickými oscilacemi, BAO); případně iv) měřeními polarizace (viz kap. 11).

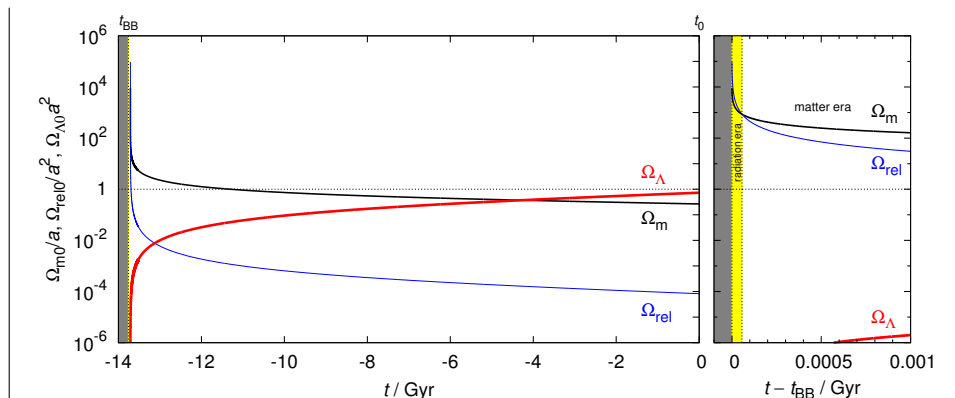
Z měřené intenzity kosmického mikrovlnného záření se vypočítává prostorové spektrum fluktuací (přičemž se odečte dipólní složka a rušení Mléčnou dráhou) a ta se fituje kosmologickými modely (viz obr. 74). Není to jednoduchý homogenní model, to bychom pochopitelně nedostali žádné fluktuace CMB.⁴⁸

Tvar prostorového spektra se vysvětluje *akustickými oscilacemi* v plazmatu tvořeném baryony a fotony. Největší amplituda okolo $\ell \simeq 200$, čemuž odpovídá úhel

⁴⁸ Toto záření vzniklo asi 380 000 roků po Velkém třesku, když došlo k rekombinaci, čili záření se oddělilo od látky a vesmír se stal průhledný. Jedná se vlastně o nejvzdálenější objekt, který můžeme pozorovat. Pozor, není možné tvrdit, že vzdálenost CMB je 13,7 Gly! V okamžiku, kdy došlo k emisi fotonů, byl zdroj od nás (budoucí Země) vzdálen *jen* 40 Mly. Toto záření pak cestovalo 13,7 Gyr skrz rozpínající se prostor, takže souhybná vzdálenost někdejšího zdroje (dnes nějaké galaxie) od současné Země je 48,5 Gly.



Obr. 72 — Vývoj expanzného parametru $a(t)$ pro různé hodnoty Ω_{m0} , $\Omega_{\Lambda0}$, Ω_{rel0} . Hodnota Hubblova parametru je ve všech případech $H_0 = 70,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.



Obr. 73 — Časové závislosti relativních hustot $\Omega' = \frac{\rho}{\rho_{c0}}$ pro náš pozorovaný vesmír. Rozlišujeme přitom příspěvky od kosmologické konstanty, temné látky + baryonů a od záření. Na detailu vpravo je patrné období od Velkého třesku do 1 Myr.

na obloze $\varphi = 180^\circ/\ell \simeq 1^\circ$, se proto nazývá *akustický vrchol*. Dalšími jevy, které fotony CMB ovlivňují, jsou difuzní tlumení (též Silkovo; jde o vyrovnávání fluktuací hustoty fotonů během rekombinace), Sunyaevův–Zeldovičův jev (tj. změna tvaru spektra CMB rozptylem na energetických elektronech), Sachsův–Wolfov jev (gravitační rudý nebo modrý posuv fotonů CMB).

Luminozitní vzdálenosti supernov Ia jsou určované nezávisle pomocí cefeid nebo Tullyho–Fisherovým vztahem a porovnávají se s rudým posuvem mateřských galaxií (viz obr. 75).⁴⁹

Luminozitní vzdálenost d_L je definována jako:

$$d_L^2 \equiv \frac{L}{4\pi\Phi}, \quad (274)$$

kde L označuje luminozitu zdroje a Φ měřený tok. Předpokládejme, že zdroj je v počátku *souhybné* souřadnicové soustavy a emituje fotony do sféry o poloměru r . Plocha sféry je $4\pi[a(t)r]^2$ (i když $a(t)r$ není poloměr při $K \neq 0$).

Tok je však kromě obvyklého zákona čtverců ovlivněn dalšími dvěma jevy: i) fotony mají kvůli expanzi menší energii $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$, $\lambda \propto a(t)$; ii) fotony kvůli dilataci času přicházejí s většími „přestávkami“. Oba se projeví faktorem $1/(1+z)$:

$$\Phi = \frac{L}{4\pi r^2} \frac{1}{1+z} \frac{1}{1+z},$$

což po dosazení do (274) dává vztah:

$$d_L = r(1+z). \quad (275)$$

Souhybné souřadnice r lze (bez důkazu) vypočítat jako:

$$r(z) = \frac{c}{H_0} S(z), \quad (276)$$

kde funkce:

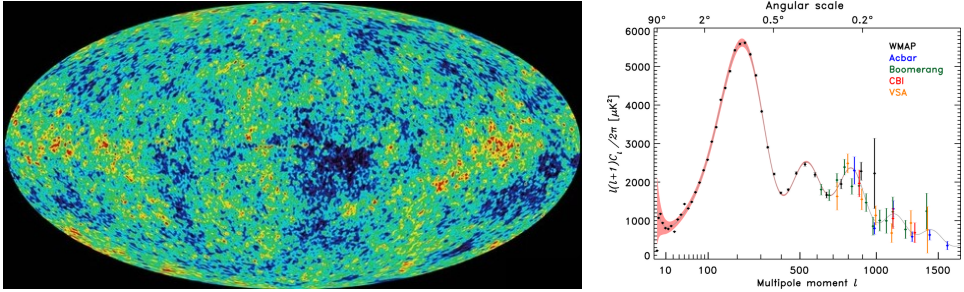
$$\begin{aligned} S(z) &= I(z) \quad \text{pro } \Omega_0 = 1, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 - 1}} \sin \left[I(z) \sqrt{\Omega_0 - 1} \right] \quad \text{pro } \Omega_0 > 1, \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_0}} \sinh \left[I(z) \sqrt{1 - \Omega_0} \right] \quad \text{pro } \Omega_0 < 1, \end{aligned} \quad (277)$$

a integrál:

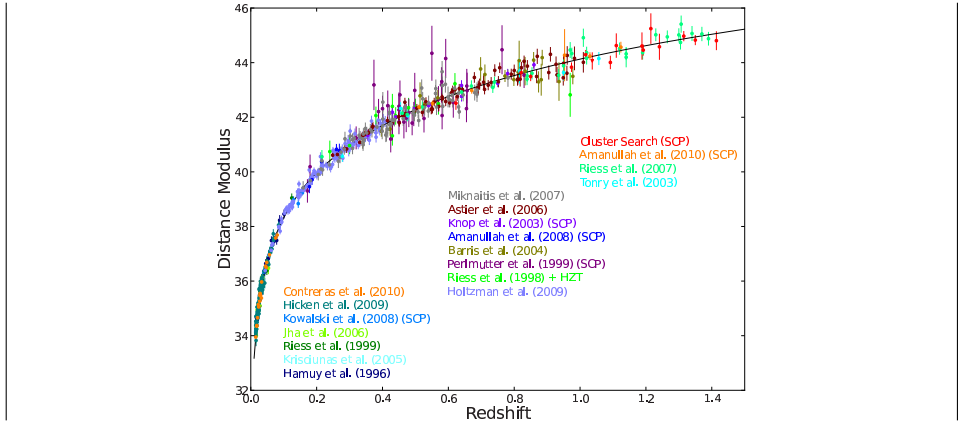
$$I(z) = H_0 \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (278)$$

který lze počítat numericky z výstupu programu **fridman**.

⁴⁹ K extinkci záření dochází zejména v hostitelské galaxii, nikoli v mezigalaktickém prostoru, proto jsou různé vzdálené supernovy zeslabeny stejně. Ostatně se nepozoruje ani výrazné zčervenání spekter vzdálených supernov.



Obr. 74 — Vlevo fluktuace intenzity mikrovlnného záření znázorněné barevnou škálou na mapě oblohy. Vpravo odpovídající prostorové spektrum, čili závislost amplitudy na prostorové frekvenci (multipólovém momentu ℓ). Největší amplitudu vykazují fluktuace s úhlovým rozměrem okolo 1° .



Obr. 75 — Vztah mezi modulem vzdálenosti a rudým posuvem pro velký vzorek supernov typu Ia. Převzato z [108].

Parametry vesmíru a jejich nejistoty odvozené z dat WMAP, SN Ia a SDSS (Spergel aj. 2006) jsou uvedeny v tab. 7.

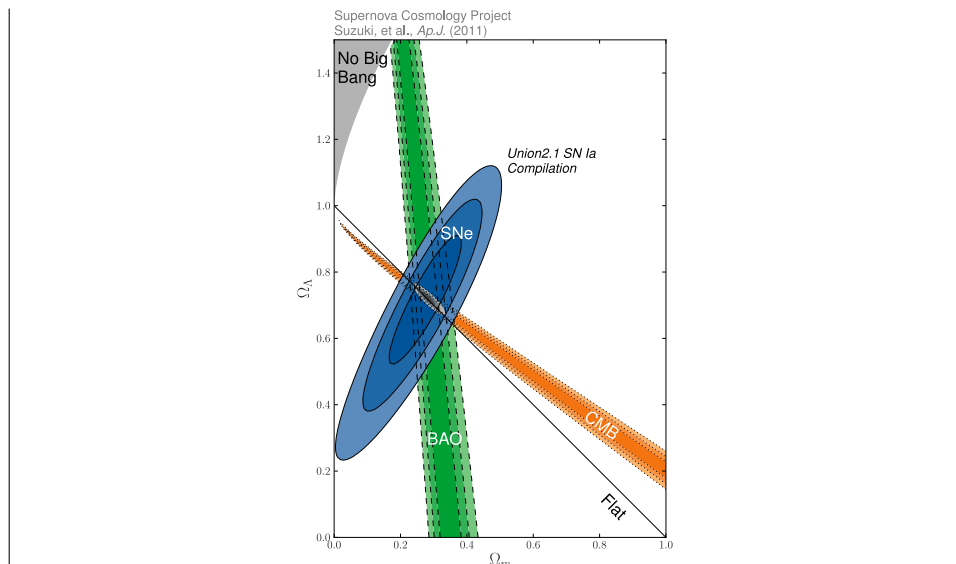
V současnosti je kritická hustota rovna $\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \doteq 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \simeq 6 \text{ protonů} \cdot \text{m}^{-3}$, ale nejsou to protony! Většinu obsahu vesmíru tvoří kosmologická konstanta alias temná energie, zbytek temná látka a „zanedbatelnou“ menšinu (4 %) baryony. O leptonech, fotonech nebo neutrínech ani nemluvě. Na titulním obrázku vidíme, jak důležité je pozorování různými metodami, protože každá má jiné nejistoty, přičemž výše uvedené přesné hodnoty Ω jsou v jejich průsečíku.

Pozorujeme tedy $\Omega = \Omega_\Lambda + \Omega_{\text{CDM}} + \Omega_{\text{baryonů}} + (\text{nepatrné příspěvky } e^-, \gamma, \nu) = (1,00 \pm 0,04)$, čili plochý vesmír je v souladu s pozorováním. Uvědomme si ale, že v principu *nelze* nikdy prokázat přesnou plochost!

Poznamenejme, že Λ přispívá svou hustotou ke zpomalování rozpínání (a vyrovnává jeho křivost na nulu), ale zároveň svým záporným tlakem rozpínání zrychluje. Existují samozřejmě i jiné hypotézy, hovoří se například o *kvintesenci*, která má

H_0	$= 70,9^{+2,4}_{-3,2} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	Hubbleův parametr
ρ_0	$= 0,94^{+0,06}_{-0,09} \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	kritická hustota
Ω_b	$= 0,0444^{+0,0042}_{-0,0035}$	hustota baryonů
$\Omega_{\text{CDM}+\text{b}}$	$= 0,266^{+0,025}_{-0,040}$	hustota temné látky + baryonů
Ω_Λ	$= 0,732^{+0,040}_{-0,025}$	hustota temné energie
z_{ion}	$= 10,5^{+2,6}_{-2,9}$	rudý posuv reionizace
τ	$= 0,079^{+0,029}_{-0,032}$	optická hloubka reionizace
t_0	$= 13,73^{+0,13}_{-0,17} \text{ Gyr}$	stáří vesmíru

Tab. 7 — Parametry vesmíru a jejich nejistoty odvozené z dat WMAP, SN Ia a SDSS (Spergel aj. 2006).



Obr. 76 — Chybové „elipsy“ pro parametry Ω_{m0} a $\Omega_{\Lambda0}$ vypočtené z měření kosmického mikrovlnného pozadí (CMB), ze supernov Ia (SNe) a ze struktur baryonické látky (BAO). Důležitý je průsečík vyplývající ze všech měření, který je vyznačen šedě. Převzato z [108].

odlišnou stavovou rovnici, proměnnou v čase. Parametry kosmologického modelu by se pak do jisté míry změnily.

10.6 Teplota záření

Spektrum kosmického pozadového záření je planckovské, což svědčí o tom, že záření je (bylo) v termodynamické rovnováze. Za rovnovážného stavu máme ovšem podle

Stefanova–Boltzmannova zákona hustotu energie záření rovnou:

$$u = \frac{\sigma}{4c} T^4. \quad (279)$$

Pro záření zároveň platí kosmologické škálování $\rho_{\text{rel}} = \rho_{\text{rel}0} a^{-4}$, tudíž:

$$\frac{\sigma}{4c} T^4 = \frac{\sigma}{4c} T_0^4 a^{-4},$$

odkud snadno vyjádříme závislost teploty na expanzním parametru:

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)}. \quad (280)$$

Dosadíme-li pozorovanou hodnotu $T_0 = 2,7 \text{ K}$, můžeme odhadovat teplotu záření v minulosti (viz obr. 77). V éře záření (i před rekombinací) navíc lze předpokládat, že i látka byla v rovnováze se zářením, čili měla stejnou teplotu.

Zásadním poznatkem je, že nukleosyntéza ve hvězdách není schopna vysvětlit pozorovaný velký obsah *helia* ve vesíru ($Y \simeq 0,25$), vzhledem k relativně malému obsahu uhlíku nebo kyslíku ($Z \simeq 0,02$). Syntéza helia přitom vyžaduje teploty řádově $T \simeq 10^9 \text{ K}$, aby mohla být překonána coulombická bariéra (s pomocí tunelového jevu).

Budeme-li tedy předpokládat, že „nadbytečné“ helium byl syntetizováno v horkém raném vesmíru, v tu dobu muselo být $a(t) = \frac{T_0}{T} a_0 \simeq 3 \cdot 10^{-9}$. Z průběhu $a(t)$ pak vyplývá, že nukleosyntéza musela probíhat v prvních *minutách* po Velkém třesku, ale ne dříve, protože by docházelo k fotodisintegraci jader.

Atomy vznikly až mnohem později, když teplota záření a odpovídající energie fotonů byla nižší než ionizační energie atomů. Výpočet můžeme provést pomocí Sahovy rovnice:

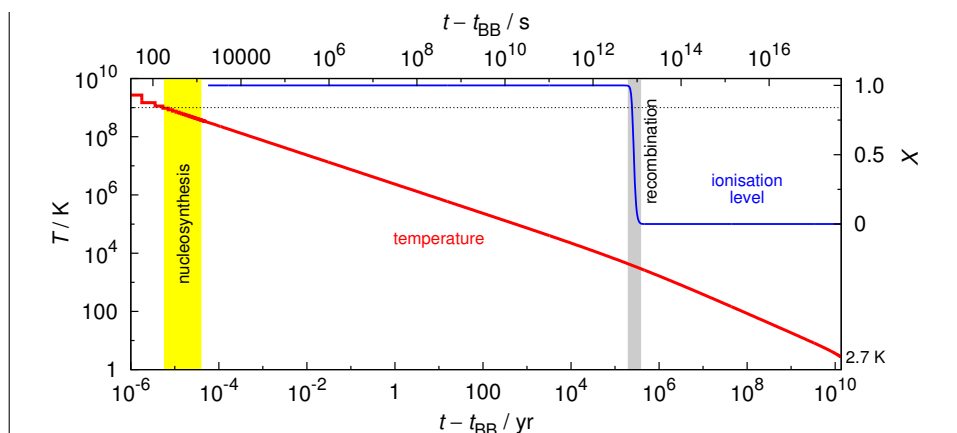
$$\frac{X^2}{1-X} n_e = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right), \quad (281)$$

kde $X \equiv \frac{n_e}{n}$ označuje ionizační stupeň, n_e koncentraci elektronů (odvozenou z $\rho_b = \rho_{b0} a^{-3}$), m_e hmotnost elektronu, k Boltzmannovu konstantu, h Planckovu konstantu a χ ionizační energii atomu. Období, kdy probíhala *rekombinace*, vychází přibližně od 210 000 roků ($X = 0,99$) do 420 000 roků ($X = 10^{-3}$) po Velkém třesku.

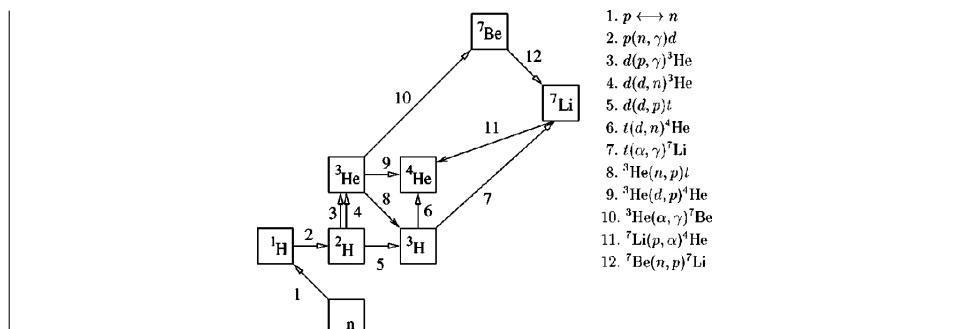
Úvahy o průběhu teploty ve velmi raném období ($T > 10^{10} \text{ K}$) jsou složitější, protože dochází k fázovým přechodům (např. anihilaci párů, oddělení neutrin) nebo je rychlost expanze tak velká, že procesy probíhají nerovnovážně.

10.7 Co je zdrojem temné látky?

Pro existenci temné látky svědčí pozorování nezávislá na jakýchkoli kosmologických modelech. Jde zejména o nekeplerovskou rotaci vnějších částí galaxií (plochá rotační křivka $v(r)$), způsobenou halem nesvítící látky.



Obr. 77 — Teplota záření v závislosti na čase a stupeň ionizace vypočtený dle Sahovy rovnice.



Obr. 78 — Schematické znázornění jaderných reakcí, které se uplatňovaly během nukleosyntézy po Velkém třesku. Převzato z [106].

Oblaka horkého mezigalaktického plynu zářícího v rentgenovém oboru, která se pozorují v kupách galaxií, se vyznačují velkou rychlostí emitujících částic, jež přesahuje rychlost únikovou (počítanou ze svítící látky). Protože plyn navzdory tomu pozorujeme, musí být kupy celkově asi 10krát hmotnější než svítící látka.

Temnou látkou nemohou být stelární černé díry, ty byly vyvráceny negativním pozorováním gravitačních čoček ve Velkém Magellanově mračnu.

Temná látka musí být *nebarionická*, protože jinak by nukleosyntéza po Velkém třesku proběhla odlišně, byla by překonána beryliová bariéra a vzniklo by mnoho primordiálního železa (viz obr. 78). Nesmí ani interagovat elektromagneticky, protože by se prozradila nějakým zářením.

Proto se uvažuje o hmotných neutrálních elementárních částicích interagujících pouze slabě a gravitačně. Mimo jiné byly navrhovány axiony nebo neutralina (superpartneři neutrin v supersymetrických teoriích), nicméně zatím neexistuje experimentální potvrzení těchto hypotéz.

10.8 Co je zdrojem temné energie?

Nejjednodušším vysvětlením by mohlo být, že v Einsteinových rovnicích prostě musí být uvedena kosmologická konstanta Λ , nicméně není uspokojivé, když nemáme teorii vysvětlující její velikost.

Přirozeným vysvětlením by byla *energie vakua*, na než v kvantové mechanice nahlížíme jako na prostor plný virtuálních částic. Problém je, že z kvantové teorie vychází o 120 řádů větší hodnota než pozorovaná ρ_Λ ! Těžko pak takové interpretaci věřit.

Mějme jednu virtuální částici o hmotnosti $m \simeq \frac{\Delta E}{c^2}$ v boxu o rozměru $L \simeq \Delta x$. Její životní doba plyne z Heisenbergova principu neurčitosti:

$$\Delta t \simeq \frac{\hbar}{\Delta E} \simeq \frac{\hbar}{mc^2}.$$

Protože nejistota hybnosti $\Delta p \geq 0$ i hybnost $p \geq 0$, musí minimální hodnota hybnosti být řádu $p_{\min} \simeq \Delta p$. Z principu neurčitosti víme zároveň, že:

$$\Delta p \simeq \frac{\hbar}{\Delta x},$$

takže rychlost částice vyjádříme jako:

$$v \simeq \frac{p_{\min}}{m} \simeq \frac{\hbar}{mL}.$$

Největší vzdálenost, kterou částice může proletět, aby nevyletěla z boxu, je $L = v\Delta t$. Po dosazení:

$$L = \frac{\hbar}{mL} \frac{\hbar}{mc^2}, \quad L^2 = \frac{\hbar^2}{m^2 c^2}, \quad L \simeq \frac{\hbar}{mc}.$$

Abychom vytvořili *pár* virtuálních částic, musí hustota energie vakua být:

$$u_{\text{vac}} \simeq \frac{2mc^2}{L^3} \simeq \frac{2m^4 c^5}{\hbar^3}.$$

Největší hmotnost, která přichází v úvahu, je Planckova hmotnost:

$$m_{\text{P}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 10^{19} \text{ GeV},$$

odkud plyne:

$$u_{\text{vac}} \simeq \frac{2m_{\text{P}}^4 c^5}{\hbar^3} \simeq \frac{2c^7}{G^2 \hbar} \simeq 10^{114} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Přesnější teorie dává $u_{\text{vac}} \simeq 10^{111} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$. To je v příkrém rozporu s měřenou hodnotou:

$$u_\Lambda = \rho_\Lambda c^2 = \rho_c \Omega_\Lambda c^2 = 6,22 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Nelze vyloučit možnost, že ve vesmíru existuje nějaké další skalární pole, jako je zmiňovaná kvintesence.

-
- [104] CARROL S. M. *A No-Nonsense Introduction to General Relativity* [online]. [cit. 2010-03-08]. <http://preposterousuniverse.com/grnotes/grtinypdf.pdf>.
 - [105] CARROL B. W., OSTLIE D. A. *An Introduction to Modern Astrophysics*. San Francisco: Pearson, Addison Wesley, 2007. ISBN 0321442849.
 - [106] NOLLET K. M., BURLET S. *Estimating reaction rates and uncertainties for primordial nucleosynthesis* Phys. Rev. D, 61, 123505, 2000.
 - [107] *Reduce*. [online] [cit. 2010-03-08]. <http://www.reduce-algebra.com/>.
 - [108] *Supernova Cosmology Project* [online]. [cit. 2012-01-27]. <http://supernova.lbl.gov/>.
 - [109] WEINBERG S. *Cosmology*. Oxford: Oxford University Press, 2008. ISBN 0198526822.
 - [110] WRIGHT, E. *Cosmology Calculator*. [online] [cit. 2012-01-31]. <http://www.astro.ucla.edu/~wright/CosmoCalc.html>.

11 První hvězdy

V první větě musíme přiznat, že v následujícím textu jde o hvězdy hypotetické. Prý byly první ve vesmíru (označují se jako populace III). Prý měly nulový obsah prvků těžších než lithium (metalicita $Z \rightarrow 0$). Prý proto měly horší ochlazování.⁵⁰ Prý vznikly jako velmi hmotné, $M = 60$ až $300 M_{\odot}$. A prý všechny dávno zanikly jako supernovy, konkrétně jako párově nestabilní. Zatím však nebyly (přímo) pozorovány.

Než přistoupíme k teoretickému studiu těchto hvězd, musíme si udělat pořádek ve **hvězdných populacích**, pročež jsme připravili kartičku–tahák:

Pop I	Pop II	Pop III	
----->			stáří
<-----			metalicita
<-----			moment hybnosti
----->			disperze rychlostí
disk	výduť	samy	místo
	halo		
otevřené	kulové	žádné	hvězdokupy
obíhání	kmitání		pohyb

Vidíme, že Pop I je nejmladší, kdežto Pop III nejstarší. Metalicita roste od Pop III k Pop I.⁵¹ Hvězdy Pop I se nacházejí převážně v galaktickém disku nebo ve hvězdokupách otevřených, kdežto Pop II ve výduť, halo nebo hvězdokupách kulových. Moment hybnosti celé skupiny hvězd je podstatně větší pro Pop I než Pop II. U disperze rychlostí je tomu naopak. Tomu přesně odpovídá převažující pohyb, což je pro Pop I obíhání kolem středu, kdežto pro Pop II kmitání přes střed. Pro Pop III o tom nemá smysl mluvit, neboť jsou tyto hvězdy vesměs osamocené.

11.1 Způsob pozorování

Nejslibnějším způsobem jak nalézt hvězdy populace III je pozorování v **čáře Lyman- α** , která má nominální vlnovou délku $\lambda = 121 \text{ nm}$ (v FUV). Zároveň však takový zdroj musí vykazovat velký rudý posuv, přinejmenším $z = 6$ až 7 , což odpovídá

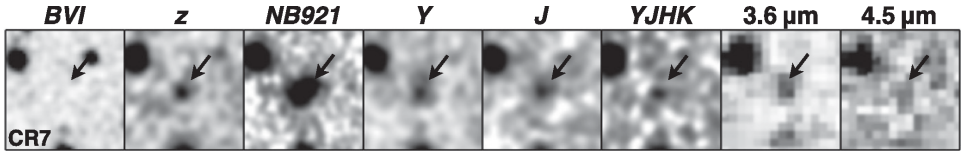
⁵⁰ Za pozornost stojí, že na ohřívání hvězd prakticky nezáleží. I když se hovoří o tom, jak je důležité znát zdroje energie hvězd, tak jejich nejzákladnější vlastnosti, počáteční hmotnost, pozdější poloměr, zářivý výkon, atd., jsou určované *ochlazováním*, nikoli ohříváním.

⁵¹ Podrobněji se rozlišuje Pop III.1 se $Z = 0$ a izolovanými hvězdami; Pop III.2 také se $Z = 0$, pouze vykazující určité ovlivnění plynu hvězdami Pop III.1 a zpoždění; Pop II „hyper“ chudé na kovy (HMP) se $Z = 10^{-6}$ až 10^{-5} a dalším zpožděním; Pop II „ultra“ chudé (UMP) se $Z = 10^{-5}$ až 10^{-4} a Pop II extrémně chudé (EMP) se $Z = 10^{-4}$ až 10^{-3} .

období reionizace vesmíru.⁵² Pak je ale očekávaná pozorovaná délka:

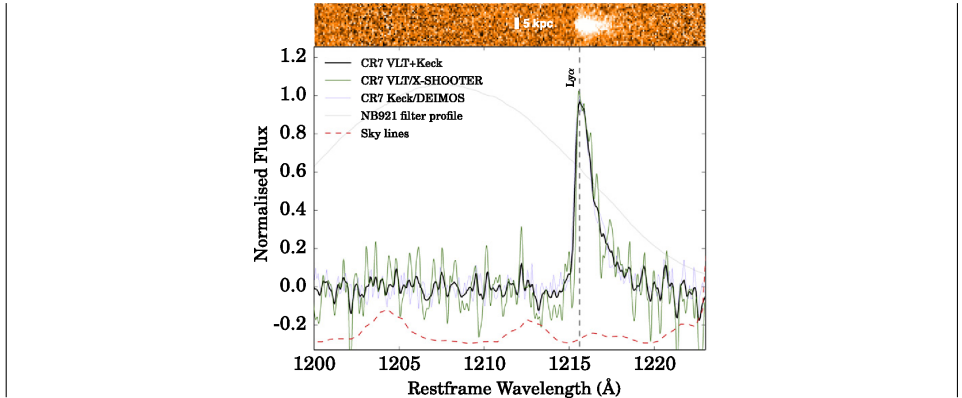
$$\lambda' = (1 + z)\lambda = 847 \text{ až } 968 \text{ nm (v NIR)}.$$

Sobral aj. (2015) takto pomocí Subaru/Suprimecam našli například galaxii označenou „CR7“ (Cosmos Redshift 7; obr. 79) silně emitující v Ly_α , se $z = 6,604$, zářivým výkonem $P = 2,6 \cdot 10^{10} L_\odot$ a lineárním rozměrem $D = 16 \text{ kpc}$.



Obr. 79 — Vzhled zdroje CR7 v různých filtrech, od B až k FIR ($4,5 \mu\text{m}$). Emise je patrná v úzkopásmovém filtru NB921. Převzato ze Sobral aj. (2015).

Čára Ly_α musí mít ovšem určité charakteristiky! Především musí být **emisní a úzká**, má-li vznikat ve stabilních horkých atmosférách hvězd populace III. Rozšíření je zde způsobované pouze tlakem a rotací. Spektroskopie pomocí VLT/X-shooter a Keck/Deimos (obr. 80) ukázala u zdroje CR7 rozšíření $\Delta v = \Delta\lambda/\lambda c = (266 \pm 15) \text{ km s}^{-1}$, což odpovídá obvodové rychlosti normálních hvězd. Potvrzuje to i pozorování čáry He II na $\lambda = 164 \text{ nm}$, mající $\Delta v = (130 \pm 30) \text{ km s}^{-1}$.



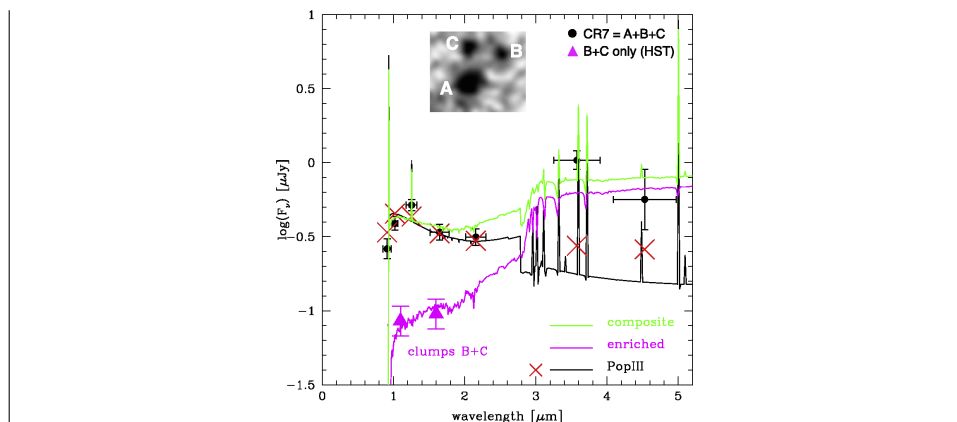
Obr. 80 — Spektrum zdroje CR7 pořízené spektrografi VLT/X-shooter a Keck/Deimos. Převzato ze Sobral aj. (2015).

Jinak existují další tři obvyklé zdroje emise: aktivní galaktická jádra (AGN); Wolfovy–Rayetovy hvězdy (WR); černá díra (BH), resp. akreční disk okolo ní. První byl vyloučen, protože by měl $\Delta v \simeq 1000 \text{ km s}^{-1}$ kvůli rotaci disku; nepozoruje se ani žádný rentgen, radio nebo metalické čáry. Druhý by dosahoval až $\Delta v \simeq$

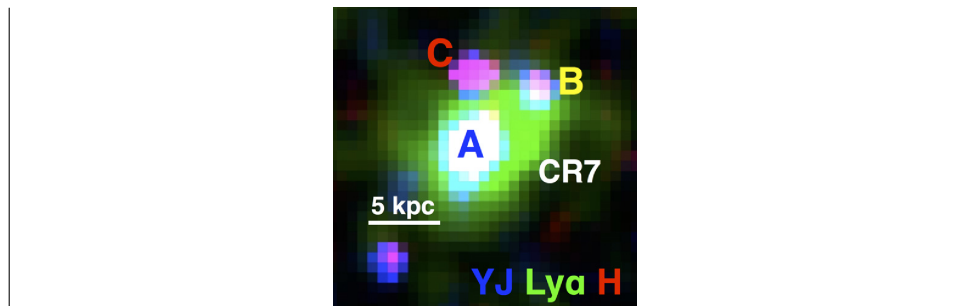
⁵² Vztah mezi z , expanzním parametrem a a časem t lze nahlédnout v kap. 10.

$\simeq 3000 \text{ km s}^{-1}$, což je terminální rychlost hvězdného větru; nepozorují se ani žádné profily P Cygni. Třetí by měl také široké čáry a zároveň nižší emise (asi 10^2 krát). Naneštěstí se takto podařilo vyloučit i *samotné* hvězdy populace III, protože tok v FIR na $\lambda > 3 \mu\text{m}$ se zdá příliš malý (10 krát).

Celé spektrum (SED) je ovšem možné vysvětlit kombinací (obr. 81): Pop III (většina záření UV $\rightarrow$ NIR) + nebulární kontinuum + metalické hvězdy (se $Z = 0,2 Z_{\odot}$) + mezigalaktické prostředí (IGM) + extinkce (tj. prach). Pomocí pozorování HST/WFC3 se dokonce podařilo rozlišit zdroj na 3 (A, B, C; obr. na titulní straně), přičemž Ly_{α} emituje jen A. V žádném případě se ale nejedná o přímé pozorování jednotlivých hvězd.



Obr. 81 — Absolutní spektrum CR7 a jeho modelování pomocí několika populací. Převzato ze Sobral aj. (2015).



Obr. 82 — Snímek CR7 pomocí HST, s rozlišenými komponentami A, B, C. Převzato ze Sobral aj. (2015).

11.2 Simulace popisující vznik

Vznik jednotlivých prvních hvězd můžeme ovšem studovat pomocí hydrodynamických rovnic a jejich numerického řešení (Abel aj. 2002). Nejedná se však o snadnou úlohu! 1. problém je gravitační kolaps reaktivní látky, při němž vznikají nestability.

2. problém je převaha chladné temné látky (CDM), která vytváří potenciálové jámy, a proto potřebujeme kosmologický kontext. 3. problém je tudíž rozlišení, neboť potřebný dynamický rozsah je více než 10^{10} , abychom popsali zároveň kosmologii a 1 objekt; toto se musí řešit pomocí adaptivního zjemňování sítě (AMR). 4. problém jsou rázové vlny, které jsou i tak příliš úzké; abychom je správně spočetli mezi buňkami sítě, musíme použít Riemannův řešitel (Godunov 1959).

Počáteční podmínky se volí obvykle na $z = 100$, tzn. v natolik raném vesmíru, kdy můžeme předpokládat, že fluktuace všech veličin *nezávisí na škále*. To je tak jednoduché (ploché) prostorové spektrum, že jednodušší už být nemůže.

Okrajové podmínky jsou neméně důležité; nemůžeme simulovat celý vesmír. Uvažujeme-li krychli o rozměru alespoň 128 kpc, můžeme předpokládat, že sousední krychle vlevo–vpravo, nahoře–dole, vpředu–vzadu jsou v našem vesmíru dosti podobné, čili okrajové podmínky volíme *periodické*. Držíme-li souhybný rozměr konstantní, tzn. sledujeme rozpínání prostoru ve zvolené kosmologii, žádná hmota nevytéká nebo nevteká pouze kvůli rozpínání. Odpovídající vlastní vzdálenost je pak:

$$d_{\text{proper}} = \frac{d_{\text{comoving}}}{1 + z}, \quad (282)$$

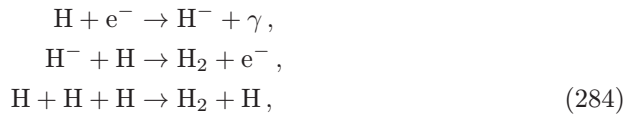
kde z se zmenšuje, čili d_{proper} roste. Na $z = 0$ by bylo $d_{\text{proper}} = 12,9 \text{ Mpc}$.

Pro numerické řešení se musí provést **diskretizace** rovnic. V původně hrubé homogenní síti s řádově $512^3 \simeq 10^8$ buňkami musí postupně docházet ke zjemňování, při hustotě $\rho > 5\rho_0$ nebo je-li méně než 64 buněk na Jeansovu délku, která vymezuje *lokální* gravitační kolaps:

$$R_J = \sqrt{\frac{3\pi}{32} \frac{\Gamma k T}{G \mu m_H \rho}}, \quad (283)$$

kde Γ označuje adiabatický index, k Boltzmannovu konstantu, T teplotu, G gravitační konstantu, μ střední molekulovou hmotnost, m_H hmotnost atomu vodíku a ρ hustotu.

Nesmíme samozřejmě zapomenout na žádné důležité fyzikální procesy probíhající v baryonické látce. Konkrétně jde o různé **reakce atomů, iontů, elektronů a posléze molekul**, H , H^+ , H^- , e^- , He , He^+ , He^{2+} , H_2 , H_2^+ , a to zejména:

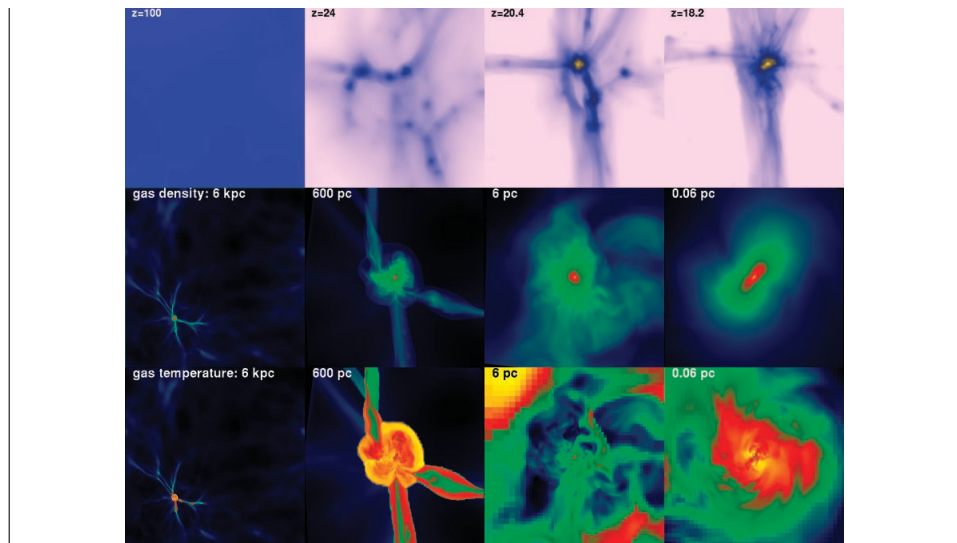


tj. důležitá tříčasticová reakce, která se uplatňuje v pozdější fázi. Přenos záření se uvažuje, ale pouze opticky tenký (protože tlustý je obtížný). Jedná se výhradně o přenos v čarách atomárních a molekulárních (protože žádný prach zatím neexistuje); případně Comptonův rozptyl na volných elektronech. Musíme uvážit i ohřev zářením kosmického pozadí, které tehdy bylo energetičtější (ne jako dnešní CMB). Znovu zdůrazněme, že „**všechno**“ **závisí na chlazení!** Logicky: chlazení čímkoliv $\rightarrow$

snížení P i $\nabla P \rightarrow$ gravitační kolaps. Navíc, platí-li: zvýšení $\rho \rightarrow$ zvýšení chlazení, pak nevyhnutelně nastává $\rightarrow$ rychlý kolaps v témže místě $\rightarrow$ **fragmentace** oblaku.

Vznik prvních hvězd proto probíhal následovně (obr. 86). Malé fluktuace hustoty temné látky vedly k hierarchickému shlukování temné i baryonické látky, přesněji řečeno neutrálního plynu (nikoliv plazmatu, neboť jsme již v temném období po rekombinaci). Plyn se ale na rozdíl od temné látky může ochladit rotačními a vibračními přechody H_2 (nikoliv elektronovými, na to je jeho teplota příliš nízká, $T \simeq 200$ K), proto se může více soustředit v potenciálové jámě CDM. Na $z = 30$ až 20 tak vznikne pre-galaktický objekt neboli minihalo s hmotností asi $10^6 M_\odot$, v něm oblak $4000 M_\odot$ (tj. obdoba velkého molekulárního oblaku z dnešního vesmíru), v něm self-gravitující fragment $100 M_\odot$, v něm protostelární jádro $1 M_\odot$, a to díky výše zmiňované tříčásticové interakci. Akrece pak pokračuje přes disk, čímž se hvězda postupně zahřeje, načež se zahřeje celé minihalo a vznikne **pouze 1 hvězda na 1 objekt**. Proto očekáváme *osamocené* hvězdy populace III.

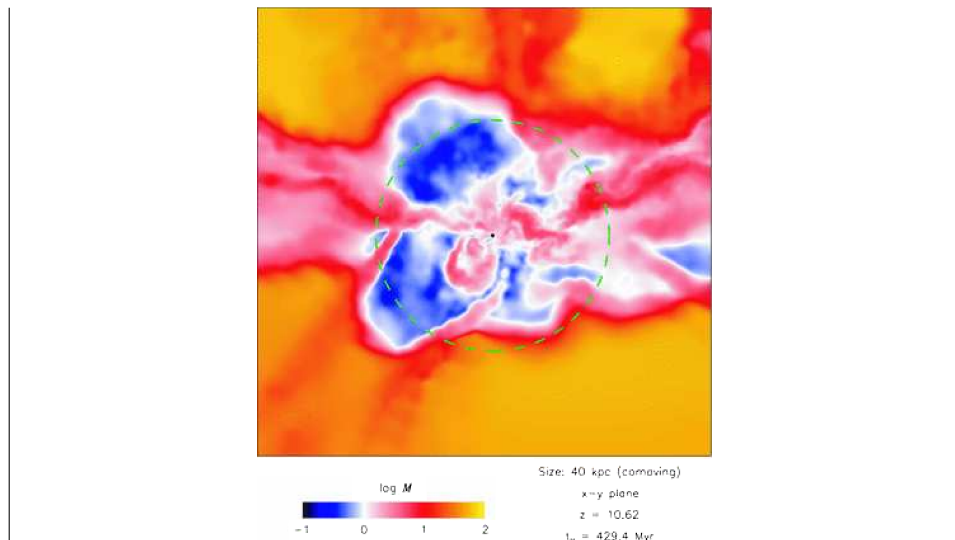
Jinými slovy, za vznikem hvězd stojí **chemotermální nestabilita**: více H_2 z (284) $\rightarrow$ zvýšení chlazení $\rightarrow$ zrychlený kolaps $\rightarrow$ více $H_2 \dots$ Bez dalšího by nastala další fragmentace, ale nestabilitu limitují: (i) zvukové vlny rychle vyrovnávající rozdíly hustoty; (ii) husté, opticky tlusté prostředí zabraňující ochlazování; (iii) celé jádro se nakonec stane molekulární, čili není kde brát.



Obr. 83 — Simulace vzniku „první“ hvězdy ve vesmíru. Nahoře je kosmologický kontext, uprostřed detail rozložení hustoty plynu a dole detail teploty. Převzato z Abel aj. (2002).

Musíme si též položit důležitou otázku. Kam se „ztratil“ moment hybnosti L ? Nikam! Jedná se totiž o veličinu, kterou *nelze* disipovat; můžeme ji nanejvýš přenést odněkud někam. V zásadě existují dva jevy, které kolapsu mohou bránit — ∇P (viz

výše) anebo právě rotace (velké $|\mathbf{L}|$). Rotující látka je sice přitahována gravitací centra, ale má natolik velkou obvodovou rychlost, $v_{\text{kepl}} = \sqrt{GM/r}$, že pád má podobu kružnice. Buď byl $|\mathbf{L}|$ od začátku nulový, nebo nebyl nulový. Úspěšně kolabující oblaky se vyznačují tím, že jejich L je asi jen 10^{-3} průměrného $\bar{L}$. Dále proběhl transport L pomocí supersonické turbulence, čili vírů, prostřednictvím ∇P , respektive rázovými vlnami. Ostatně v každém víru je látka mající menší nebo větší L (vzhledem k centru), přičemž malé L padá dovnitř (obr. 84).



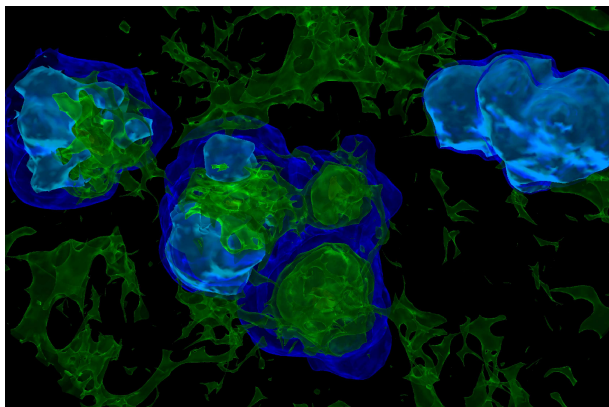
Obr. 84 — Supersonická turbulence v okolí první hvězdy. Barevně je znázorněna rychlost v jednotkách rychlosti zvuku (Machovo číslo). Převzato z Bromm aj. (2009).

Všimněme si, jak dramaticky se liší vznik prvních hvězd od vzniku pozdějších! Především později existují **prachová zrna**, tzn. makroskopické objekty se spojitým tepelným spektrem; ochlazování je proto „příliš“ účinné, takže alespoň zpočátku jde téměř o volný pád ($\tau_{\text{cool}} < \tau_{\text{free}}$). Zároveň již existují jiné hvězdy, ovlivňující stav mezihvězdné látky, energetické kosmické paprsky, vysoká ionizace, kvůli níž obtížněji funguje ambipolární difuze, tj. drift neutrálních atomů vzhledem k iontům drženým externími magnetickými poli.

Hmotnost prvních hvězd vychází v intervalu 60 až $300 M_{\odot}$, ale je zde stále nejistota. Spodní mez je dána nepokračující fragmentací. Horní mez způsobuje: (i) fotodisociace $\text{H}_2 \rightarrow$ omezení chlazení; (ii) záření Ly_{α} při $T = 10^4 \text{ K}$ sice způsobuje chlazení H, ale i tlak záření P_{rad} a namísto akrece nastává dekrece v polárních oblastech; (iii) fotoionizace, vznik H II v celém oblaku; (iv) fotoevaporace akrečního disku; (v) fotodisintegrační nestabilita, tzn. pohlcení $\gamma \rightarrow$ zmenšení $P_{\text{rad}} \rightarrow$ urychlení kolapsu $\rightarrow$ vznik černé díry. Očekávaná supernova také odvrhává okolní plyn. Zřejmě je důležité započtení zpětné vazby na okolní plyn.

Pak ale mohly v rámci populace III vzniknout hvězdy nadvakrát. Úplně první hvězdy Pop III.1 totiž vytvoří difuzní ionizující záření, zvané **Lymanovo–Wernerovo**. Jeho zpětná vazba na okolí je poněkud nejistá, může být pozitivní i negativní. V každém případě ovlivní okolní plyn a lze očekávat určité zpoždění tvorby hvězd Pop III.2, řádově 10^8 yr (obr. 85).

Bromm aj. (2009) také zmiňuje možnou roli primordiálního deuteria D, od něhož pochází molekula HD, tzn. další rotační a vibrační stavy a účinnější chlazení. Nakonec je zde hypotetická možnost, že by tvorbu hvězd mohla ovlivňovat zatím neznámá částicová fyzika. Například je-li CDM neutralino, pak má velký účinný průřez pro anihilaci a může docházet k materializacím párů jiných částic.



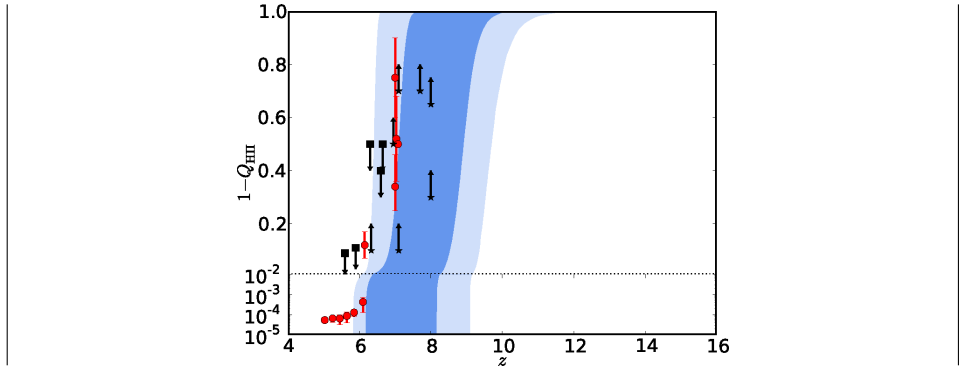
Obr. 85 — Představa prvními hvězdami ovlivněné mezihvězdné látky. Převzato z Bromm aj. (2009).

11.3 Reionizace vesmíru

Hvězdy populace III během své existence naprosto zásadním způsobem ovlivnily celý vesmír — způsobily totiž jeho reionizaci. Předpokládáme-li reionizaci výhradně UV fotony hvězd populace III, muselo 0,01 % až 1 % baryonické látky být v těchto hvězdách. Má-li každá řádově $10^2 M_\odot$ a (dnešní) typická galaxie $10^{11} M_\odot$, připadalo by jen 10^4 až 10^7 hvězd na 1 galaxii, což je sice názorná představa, nicméně galaxie tehdy ještě neexistovaly.

Připomeňme, že rekombinace nastala již na $z \simeq 1100$ (Zeldovič aj. 1969), reionizace nejpozději na $z \simeq 6$ (Gunn & Peterson 1965). Reionizaci můžeme mimo jiné měřit pomocí **polarizace kosmického mikrovlnného pozadí (CMB)**. Mění ji totiž volné elektrony podél zorného paprsku, na nichž probíhá Thomsonův rozptyl (bez změny energie fotonu). Je-li intenzita fotonů CMB jakkoliv anizotropní, projeví se to polarizací γ rozptýlených e^- do strany. Představme si elektromagnetickou vlnu (popsanou $\mathbf{k}$) jdoucí svisle, tzn. naprosto anizotropní. Setkává se s jedním volným e^- . Elektrické pole $\mathbf{E}$ kmitá kolmo na $\mathbf{k}$, rozkmitá tedy e^- vodorovně. Ten samý e^- opět vlnu vyzáří, ale ne nutně v původním směru. Při pohledu zboku uvidíme $\mathbf{E}$ kmitající *vždy* vodorovně (jako e^-), čili úplnou lineární polarizaci.

Rozlišuje se ovšem polarizace dvou druhů: polarizace E, lokálně izotropní, vznikající zmiňovaným rozptylem anizotropního záření, a polarizace B, lokálně pravotočivá nebo levotočivá, způsobovaná gravitačními vlnami⁵³ (na velkých úhlech, resp. malých stupních ℓ) nebo gravitačními čočkami (na velkých ℓ). Namísto intenzity I se obvykle užívá teplota T , resp. namísto fluktuací δI fluktuace δT , protože CMB má beztak planckovské spektrum. Fluktuace sice dosahují $\delta T \simeq 100 \mu\text{K}$, ale polarizační signál nanejvýš $3 \mu\text{K}$ (E; B od CMB zatím nebylo spolehlivě zjištěno). Prakticky je potřeba z měření spočítat výkon prostorového spektra P^{EE} , nebo kross-spektra P^{TE} pro nízké stupně $\ell \lesssim 10$. Adam aj. (2016) takto z měření družice Planck/HFI odvodili odpovídající optickou tloušťku $\tau = 0,058 \pm 0,012$ a průběh reionizace mezi $z_{\text{rei}} = 6$ až 11 (viz obr. 86).



Obr. 86 — Průběh stupně ionizace $1 - Q$ v závislosti na červeném posuvu z . Převzato z Adam aj. (2016).

Fluktuace ovlivňuje též **Sunyaevův–Zeldovičův jev**, neboli inverzní Comptonův rozptyl (se změnou energie fotonu) na energetických e^- v mezilehlých kupách galaxií. Může být buď tepelný (od náhodných pohybů), nebo kinetický (od systematického pohybu), ale příslušné fluktuace jsou pouze $\delta T_{\text{KSZ}} < 1,6 \mu\text{K}$. Systematické nejistoty jsou způsobované prachovým popředím, které se musí důsledně odečítat, nebo průsakem mezi Stokesovými složkami I, Q, U .

11.4 Simulace explozí supernov

Poklidný vývoj hvězd s nízkou nebo i nulovou metalicitou bychom mohli popsat klasickou soustavou: rovnicí kontinuity, hydrostatické rovnováhy, tepelné rovnováhy, přenosu zářivou difúzí, přenosu konvekci, změn chemického složení, konvektivního promíchávání a samozřejmě rovnicí stavovou (viz např. Harmanec a Brož 2011).

⁵³ Představme si gravitační vlnu (popsanou $\mathbf{k}$) jdoucí svisle. Prostor, záření CMB i oblak e^- se ve směru $\hat{x} \perp \mathbf{k}$ stáhne a ve směru $\hat{y} \perp \hat{x} \wedge \hat{y} \perp \mathbf{k}$ roztáhne. Při pohledu z boku vidíme více ($\hat{x}$) nebo méně ($\hat{y}$) lineárně polarizovaného záření. To ale znamená, že polarizace B má jiný směr než E, konkrétně o $\pm 45^\circ$.

Metalicita má přitom na vývoj zásadní vliv, jednak se liší poloha hlavní posloupnosti, jednak jsou velké rozdíly na horizontální větvi.

Chceme-li však popsat hvězdy až do exploze supernovy včetně, potřebujeme poněkud vyšší level: rovnice **GRNRHD**, tzn. obecně relativistickou neutrinově–radiální hydrodynamiku (Müller aj. 2010). Ty kromě klasických jevů musejí zohlednit změny hydrodynamických veličin způsobované zakřivením časoprostoru. Nejstručněji je lze zapsat (prozatím bez zdrojů):

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (285)$$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (286)$$

kde $J^\mu \equiv \rho u^\mu$ označuje proud baryonické látky, $T^{\mu\nu} \equiv \rho h u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$ tenzor energie a hybnosti, ρ hustotu, u^ν čtyřrychlost, P tlak, $h = 1 + U + P/\rho$ měrnou entalpii, U měrnou vnitřní energii; ∇_μ jsou kovariantní derivace, v nichž vystupuje metrika $g_{\mu\nu}$, popisující křivost časoprostoru. Metriku bychom jako obvykle zjistili řešením Einsteinových rovnic pole (412).

Namísto obecné metriky $g_{\mu\nu}$ se pro numerické výpočty často užívá formalismus dle Arnawitta–Dessera–Misnera (ADM), s metrikou zapsanou jako:

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt). \quad (287)$$

Navíc nás zajímá jen jedno místo ve vesmíru (kde to exploduje), dovolíme si proto předpokládat, že ve velkých vzdálenostech je časoprostor plochý, $\gamma_{ij} = \phi^4 \hat{\gamma}_{ij}$, kde ϕ označuje konformní faktor. Pak má metrika 5 volných parametrů, resp. funkcí (α, ϕ, β^i) , které vystupují prakticky ve všech rovnicích. Pro přenos neutrin se využívá variabilního Eddingtonova faktoru a aproximace „ray-by-ray-plus“.

Rovnice zde vypisovat nebudeme (viz Müller aj. 2010), ale zahrnují výše zmínované rovnice hydrodynamiky, zachování e^- , p , n , α , dalších jader, Einsteinovy rovnice, momenty intenzity neutrin ν , přenos ν , uzavírací relaci, srážkové členy, srážkové integrály, opacitu neutrin, stavovou rovnici. Chybí zde oscilace neutrin, ale ty jsou důležité až ve větších vzdálenostech od centra. Momenty intenzity, čili integrály přes směrový kosinus $\mu \equiv \cos \vartheta$:

$$\{J, H, K, L\} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I \mu^{\{0,1,2,3\}} d\mu \quad (288)$$

se používají proto, že bychom jinak v každém bodě museli řešit přenos ve dvou směrech, což by byl sám o sobě pětirozměrný problém. Namísto toho využíváme pro popis hustotu energie (resp. 0. moment), tok (1.), tlak (2.).

Rovnice přenosu se pak „zjednoduší“ a vypadá takto (Müller aj. 2010):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W(\hat{J} + v_r \hat{H})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(W \frac{\alpha}{\phi^2} - \beta^r v_r \right) \hat{H} + \left(W v_r \frac{\alpha}{\phi^2} - \beta^r \right) \hat{J} \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial U} \left\{ W U \hat{J} \left[\frac{1}{r} \left(\beta^r - \frac{\alpha v_r}{\phi^2} \right) + 2 \left(\beta^r - \frac{\alpha v_r}{\phi^2} \right) \frac{\partial \ln \phi}{\partial r} - 2 \frac{\partial \ln \phi}{\partial t} \right] \right. \\
& + W U \hat{H} \left[v_r \left(\frac{\partial \beta^r \phi^2}{\partial r} - 2 \frac{\partial \ln \phi}{\partial t} \right) - \frac{\alpha}{\phi^2} \frac{\partial \ln \alpha W}{\partial r} + \alpha W^2 \left(\beta^r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) \right] \\
& - U \hat{K} \left[\frac{\beta^r W}{r} - \frac{\partial \beta^r W}{\partial r} + W v_r r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{r \phi^2} \right) + W^3 \left(\frac{\alpha}{\phi^2} \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) \right] \left. \right\} \\
& - W \hat{J} \left[\frac{1}{r} \left(\beta^r - \frac{\alpha v_r}{\phi^2} \right) + 2 \left(\beta^r - \frac{\alpha v_r}{\phi^2} \right) \frac{\partial \ln \phi}{\partial r} - 2 \frac{\partial \ln \phi}{\partial t} \right] \\
& - W \hat{H} \left[v_r \left(\frac{\partial \beta^r \phi^2}{\partial r} - 2 \frac{\partial \ln \phi}{\partial t} \right) - \frac{\alpha}{\phi^2} \frac{\partial \ln \alpha W}{\partial r} + \alpha W^2 \left(\beta^r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) \right] \\
& + \hat{K} \left[\frac{\partial \beta^r W}{r} - \frac{\partial \beta^r W}{\partial r} + W v_r r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{r \phi^2} \right) + W^3 \left(\frac{\alpha}{\phi^2} \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) \right] = \alpha \hat{C}^{(0)},
\end{aligned}$$

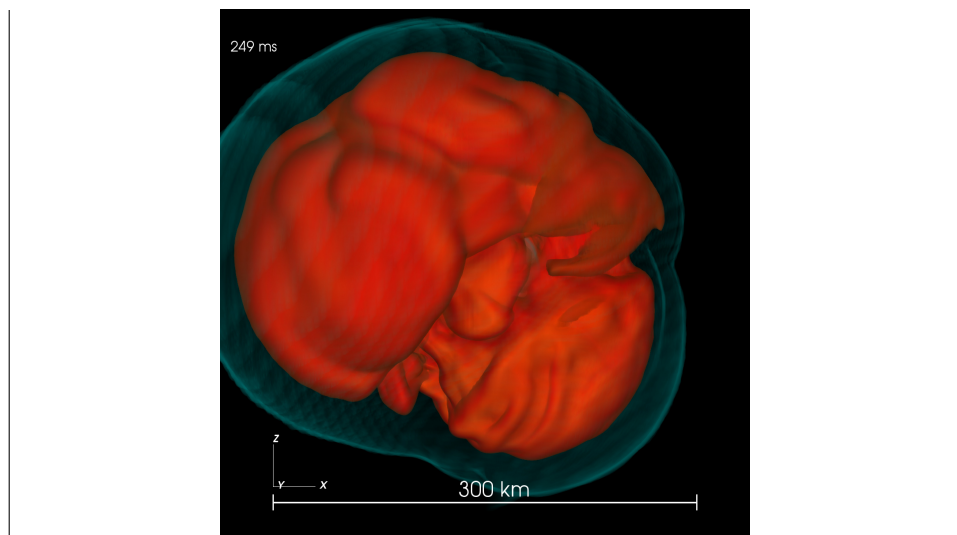
$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W(\hat{H} + v_r \hat{K})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(W \frac{\alpha}{\phi^2} - \beta^r v_r \right) \hat{K} + \left(W v_r \frac{\alpha}{\phi^2} - \beta^r \right) \hat{H} \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial U} \left\{ W U \hat{H} \left[\frac{1}{r} \left(\beta^r - \frac{\alpha v_r}{\phi^2} \right) + 2 \left(\beta^r - \frac{\alpha v_r}{\phi^2} \right) \frac{\partial \ln \phi}{\partial r} - 2 \frac{\partial \ln \phi}{\partial t} \right] \right. \\
& + W U \hat{K} \left[v_r \left(\frac{\partial \beta^r \phi^2}{\partial r} - 2 \frac{\partial \ln \phi}{\partial t} \right) - \frac{\alpha}{\phi^2} \frac{\partial \ln \alpha W}{\partial r} + \alpha W^2 \left(\beta^r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) \right] \\
& - U \hat{L} \left[\frac{\beta^r W}{r} - \frac{\partial \beta^r W}{\partial r} + W v_r r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{r \phi^2} \right) + W^3 \left(\frac{\alpha}{\phi^2} \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) \right] \left. \right\} \\
& + (\hat{J} - \hat{K}) \left[v_r \left(\frac{\beta^r}{r} - \frac{\partial \beta^r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W \alpha}{\phi^2} \right) - \frac{W \alpha}{r \phi^2} + W^3 \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} - \beta^r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right] \\
& + (\hat{H} - \hat{L}) \left[\frac{W^3 \alpha}{\phi^2} \frac{\partial v_r}{r} + \frac{\beta W}{r} - \frac{\partial \beta W}{\partial r} - W v_r r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{r \phi^2} \right) + \frac{\partial W}{\partial t} \right] \\
& - W \hat{H} \left[\frac{1}{r} \left(\beta^r - \frac{\alpha v_r}{\phi^2} \right) + 2 \left(\beta^r - \frac{\alpha v_r}{\phi^2} \right) \frac{\partial \ln \phi}{\partial r} - 2 \frac{\partial \ln \phi}{\partial t} \right] \\
& - W \hat{K} \left[v_r \left(\frac{\partial \beta^r \phi^2}{\partial r} - 2 \frac{\partial \ln \phi}{\partial t} \right) - \frac{\alpha}{\phi^2} \frac{\partial \ln \alpha W}{\partial r} + \alpha W^2 \left(\beta^r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) \right] \\
& + \hat{L} \left[\frac{\beta^r W}{r} - \frac{\partial \beta^r W}{\partial r} + W v_r r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{r \phi^2} \right) + W^3 \left(\frac{\alpha}{\phi^2} \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) \right] = \alpha \hat{C}^{(1)},
\end{aligned}$$

$$\hat{K} = f_K \hat{J},$$

$$\hat{L} = f_L \hat{J},$$

kde $W = 1/\sqrt{1 - v_i v^i}$ označuje Lorentzův faktor, v_i třírychlost, $\hat{J} = \sqrt{\gamma} J$ apod., γ determinant třímětriky γ_{ij} , $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ momenty srážkového integrálu, f_K , f_L variabilní Eddingtonovy faktory.

Mechanismus supernov s kolapsem jádra je založen jednak na neutrinové bombě, zajišťující ohřev látky zespodu, a jednak na hydrodynamických nestabilitách (Müller aj. 2012; obr. 87): (i) konkrétně konvektivní (stoupání horkých bublin);



Obr. 87 — Třírozměrná simulace exploze supernovy s kolapsem jádra, na níž je vidět rozvinutá nestabilita. Převzato z Müller aj. (2012).

(ii) stojaté akreční rázové (SASI; Blondin aj. 2003). **Nestabilita SASI** vzniká takto: každá trochu šikmá rázová vlna generuje turbulenci na rozhraních $\rightarrow$ turbulence je nesena proudem plynu podzvukovou rychlostí v dovnitř $\rightarrow$ amplituda je zesílena konvergencí $\rightarrow$ při turbulenci se generují zvukové vlny, šířící se rychlostí c_s ven $\rightarrow$ rázová vlna je jimi narušena (stává se šikmější, asymetrická se stupněm $\ell = 1$ až 2) $\rightarrow$ vytváří více turbulence. . .

Někdy se uvažují alternativní mechanismy: (i) akustické vlny buzené dipolárními oscilacemi protoneutronové hvězdy (Burrows aj. 2006); (ii) magnetorotační nestabilita (MRI; Burrows aj. 2007); (iii) fázové přechody kvarkové látky (Sagert aj. 2009).

11.5 Párově nestabilní supernovy

Specifickým případem jsou párově nestabilní supernovy, v jejichž progenitorech dochází k produkci párů:

$$2\gamma \rightarrow e^- + e^+,$$

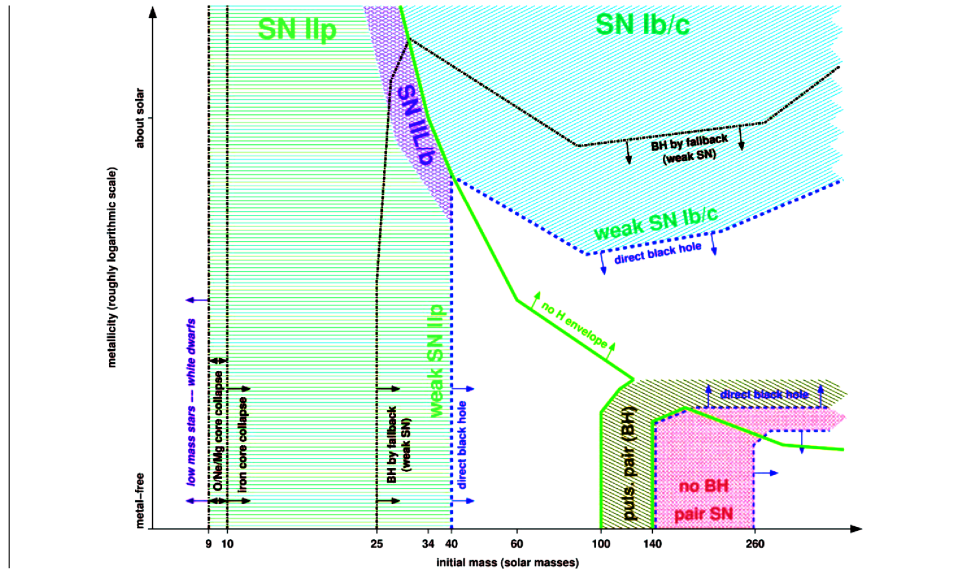
za podmínky, že energie fotonů E_γ v centru dosahují přinejmenším klidové energie elektronu, $E_0 = 0,51$ MeV. Tím se ovšem spotřebovávají fotony $\gamma \rightarrow$ klesá ∇P_{rad} , který je hlavním příspěvkem k celkovému ∇P u horkých hvězd $\rightarrow$ jádro se smrští $\rightarrow$ příslušný ohřev způsobí termonukleární pulz (konkrétně hoření C, O, Si, N) $\rightarrow$ nastává expanze a výhoz $\rightarrow$ příp. opakování, a pak hovoříme o pulsačních supernovách.

Rozhodujícím parametrem, zda hvězda exploduje jako SN PI (nebo PPI), či nikoli, je hmotnost heliového jádra. Podle zjednodušeného 1-rozměrného modelu

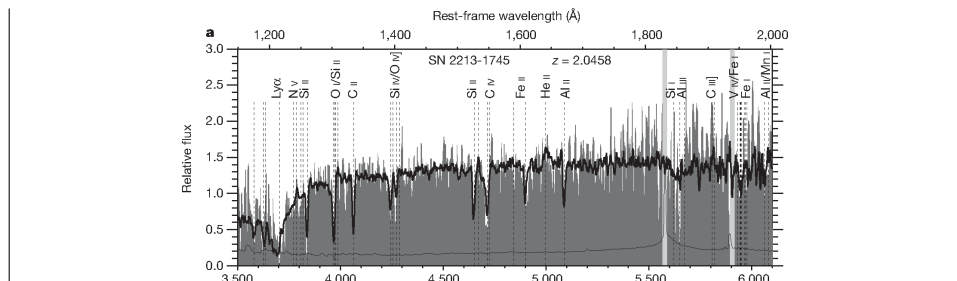
Woosleyho (2017) to nastává pro $M_{\text{He}} > 40 M_{\odot}$, zejména je-li $Z < \frac{1}{3} Z_{\odot}$ a má-li hvězda slabý vítr. Pro $M_{\text{He}} < 62 M_{\odot}$ dochází ke zmiňovaným pulzacím. Odpovídající rozsah na hlavní posloupnosti je asi $M = 70$ až $140 M_{\odot}$, ale s větší nejistotou. Progenitorem přitom může být červený veleobr (RSG), modrý veleobr (BSG), svítivá modrá proměnná (LBV) nebo Wolfova-Rayetova hvězda a zřejmě také hvězda populace III. Podíl párově nestabilních a všech supernov vznikajících kolapsem jádra (s $M > 8 M_{\odot}$) pro standardní počáteční funkci hmoty (IMF) se sklonem $q = -1,35$ je $f = (70^q - 140^q)/(8^q - 150^q) =$ jen 3,3 %.

Co se týká pozorování supernov typu PI, Cooke aj. (2012) našli slibné nadsvítivé supernovy s energií $E_{\gamma} \simeq 10^{44}$ J na $z > 2$ pomocí snímků CFHT skládaných za celou sezónu (čili zpětně). Spektroskopie pomocí Keckova dalekohledu byla provedena až po 5,2 letech, nicméně vzhledem k dilataci času to bylo 626 dní v klidové soustavě. Bohužel se ve spektru objevují četné čáry kovů, čili se v žádném případě nemůže jednat o zánik hvězdy populace III. A proto nezbyvá než doufat, že se takové unikátní pozorování zániku první hvězdy ve vesmíru podaří v budoucnosti. . .

- [111] ABEL, T. A. J. *The formation of the first star in the Universe. Science*, **295**, 93, 2002.
- [112] ARNOWITT, R., DESER, S., MISNER, C. W. *The dynamics of general relativity*. 1962. (<https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0405109.pdf>).
- [113] BROMM, V. A. J. *Formation of the first stars and galaxies. Nature*, **459**, 49, 2009.
- [114] BURROWS, A. A. J. *A new mechanism for core-collapse supernova explosions. Astrophys. J.*, **540**, 878, 2007.
- [115] COOKE, J. A. J. *Superluminous supernovae at redshifts of 2.05 and 3.90. Nature*, **491**, 228, 2012.
- [116] FRYER, C. L. A. J. *Pair-instability supernovae, gravity waves, and gamma-ray transients. Astrophys. J.*, **550**, 372, 2001.
- [117] HARMANEC, P., BROŽ, M. *Stavba a vývoj hvězd*. Praha: Matfyzpress, 2011.
- [118] HEGER, A. A. J. *How massive single stars end their life. Astrophys. J.*, **591**, 288, 2003.
- [119] MÜLLER, B. A. J. *A new multi-dimensional general relativistic neutrino hydrodynamic code for core-collapse supernovae. I. Method and code tests in spherical symmetry. Astrophys. J. Suppl. S.*, **189**, 104, 2010.
- [120] MÜLLER, B. A. J. . . . *II. Relativistic explosion models of core-collapse supernovae. Astrophys. J.*, **756**, 84, 2012.
- [121] SOBRAL, D. A. J. *Evidence for PopIII-like stellar populations in the most luminous Ly_{α} emitters at the epoch of reionization: Spectroscopic confirmation. Astrophys. J.*, **808**, 139, 2015.
- [122] WOOSLEY, S. E., HEGER, A. *The evolution and explosion of massive stars. Rev. Mod. Phys.*, **74**, 1015, 2002.
- [123] WOOSLEY, S. E. *Pulsational pair-instability supernovae. Astrophys. J.*, **836**, 244, 2017.



Obr. 88 — Základní třídění typů supernov dle počáteční hmotnosti hvězdy a metalicity. Převzato z Heger aj. (2003). Pro hmotné hvězdy je však situace patrně složitější (viz kap. 12).



Obr. 89 — Spektrum nadsvítivé supernovy SN 2013–1745, pravděpodobně párově nestabilní. Převzato z Cooke aj. (2012).

12 Druhé hvězdy

Hvězdy, které pozorujeme dnes, se nám pouhým okem jeví jako body. Při pozorování interferometrem však lze nemálo bodů rozlišit jako kotoučky. Stejně tak pozorování spektrografem svědčí o tom, že nemálo hvězd má atmosféru, kterou lze charakterizovat jednou hodnotou efektivní teploty T_{eff} . Proto si dovoluujeme hvězdy popisovat v prvním přiblížení jako sféricky symetrické.

Od prvních hvězd (kap. 11) se však podstatně liší, vzhledem k odlišnému stavu mezihvězdného prostředí (ISM). Především je dnes v ISM přítomen prach, způsobující účinnější ochlazování, fragmentaci oblaků na menší části, potažmo vznik hvězd malých hmotností. Tyto hvězdy pak existují dlouhou dobu, a to ve stavu téměř rovnovážném; budeme je proto nazývat „druhé“.

12.1 Rovnice kontinuity

Sférické rovnice zde odvodíme zjednodušením složitých rovnic MHD ((1) až (4)), které jsme používali pro disk. Předpokládáme přitom, že žádný asymetrický akreční disk již neexistuje, naopak existuje protohvězda, která je zcela symetrická, čili směřujeme k rovnicím jednorozměrným. Zároveň se budeme snažit „za každou cenu“ eliminovat rychlost $\mathbf{v}$, čili směřujeme k rovnicím statickým.

Vezměme jako první kontinuitu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \rho}^{\text{konvekce}} = \overbrace{-\rho \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{expanze}}.$$

Pro statický případ nelze jen tak $\frac{\partial}{\partial t}$, $\mathbf{v}$ položit rovné nule; $0 = 0$ by nám ostatně bylo k ničemu. Převědeme-li vše vlevo ($\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$) a zapíšeme-li složku $\hat{r}$ operátoru divergence ve sférických souřadnicích:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \rho \mathbf{v}) = 0,$$

což po rozšíření $4\pi R^2$ dá:

$$\frac{\partial}{\partial t} (4\pi R^2 \rho) + \frac{\partial}{\partial R} (4\pi R^2 \rho \mathbf{v}) = 0.$$

Zavedeme-li veličinu:

$$M_R \equiv \int_0^R 4\pi R'^2 \rho \, dR', \quad (289)$$

tj. hmotnost koule o poloměru R , první závorku ihned identifikujeme jako $\frac{\partial M_R}{\partial R}$, druhou jako $-\frac{\partial M_R}{\partial t}$, čili celou rovnici jako $dM_R = 0$. Jinými slovy: přírůstek hmotnosti dM_R je totální diferenciál; nezáleží na tom, jakým způsobem „přisypáváme“.

Pro statický případ uvažujeme pouze jedinou parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial R}$, kterou můžeme b.ú.n.o. nahradit za totální:

$$\frac{dM_R}{dR} = 4\pi R^2 \rho,$$

nebo po obvyklé záměně nezávislé proměnné:

$$\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}. \quad (290)$$

12.2 Hydrostatická rovnováha

V obecné Navierově-Stokesově rovnici:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}^{\text{konvekce}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \overbrace{\nabla \Phi}^{\text{gravitace}} + \overbrace{\frac{1}{\rho} \frac{1}{\mu_{\text{vac}}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}^{\text{Lorentz}} + \overbrace{\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mu_1 \nabla \mathbf{v}}^{\text{viskozita}} + \dots$$

položíme rovnou $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, což vede na:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi,$$

což zapsáno ve sférických:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} - \frac{GM_R}{R^2},$$

odkud obratem:

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{GM_R \rho}{R^2},$$

neboli:

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4}. \quad (291)$$

Při rovnováze je tedy gravitace vnitřních vrstev vyrovnána *gradientem* tlaku; nikoli tlakem samotným! Nezáleží ani na tlaku, ani na vnějších vrstvách. I když je pravda, že tlak významně ovlivňuje stav látky (přes rovnici stavovou (310)). Vnější vrstvy se neuplatňují, neboť jejich gravitace je dle Newtonova teorému nulová; dokonce jejich přítomnost snižuje ∇P , čili v tomto smyslu působí poněkud odpudivě.

Poznamenejme ještě, že i když $\nabla \Phi = -\frac{GM_R}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}$, tak potenciál $\Phi \neq -\frac{GM_R}{R}$, jako pro hmotný bod! Záporně vzatý gradient tohoto výrazu by totiž byl:

$$GM_R \nabla \frac{1}{R} + \frac{G}{R} \nabla M_R = -GM_R \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{G}{R} 4\pi R^2 \rho \frac{\mathbf{R}}{R},$$

čili správně by bylo:

$$\Phi = -\frac{GM_R}{R} + \int_0^R 4\pi G \rho R' dR'. \quad (292)$$

Protože jsme paranoidní, ověříme ještě, že takové Φ splňuje Poissonovu rovnici:

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla \cdot \left(GM_R \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = G \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot \overbrace{\nabla M_R}^{4\pi R^2 \rho \frac{\mathbf{R}}{R}} + \frac{GM_R}{R^3} \overbrace{\nabla \cdot \mathbf{R}}^3 + GM_R \mathbf{R} \cdot \nabla \overbrace{\frac{1}{R^3}}^{-\frac{3\mathbf{R}}{R^5}} = 4\pi G\rho,$$

c.b.d.

12.3 Energetická rovnováha

Do známé 1. věty termodynamické:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla U}^{\text{konvekce}} = \overbrace{-U \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{expanze}} - \overbrace{P \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{práce}} - \overbrace{\kappa_R \rho c a T^4}^{\text{emise}} + \overbrace{\kappa_R \rho c E_{\text{rad}}}_{\text{absorpce}} + \dots + \overbrace{\epsilon \rho}^{\text{reakce}}$$

můžeme dosadit z rovnice přenosu záření v difuzní aproximaci:

$$\frac{\partial E_{\text{rad}}}{\partial t} = \nabla \cdot \overbrace{\frac{c \lambda_{\text{lim}}}{\kappa_P \rho} \nabla E_{\text{rad}}}^{-\vec{\Phi}} + \overbrace{\kappa_R \rho c a T^4}^{\text{emise}} - \overbrace{\kappa_R \rho c E_{\text{rad}}}^{\text{absorpce}} \quad (293)$$

za emisi a absorpci, a přitom pokládat $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mathbf{v} = 0$:

$$0 = -\nabla \cdot \vec{\Phi} + \epsilon \rho,$$

kde $\vec{\Phi}$ je vektor toku záření a ϵ měrný výkon všech reakcí (ať už kladný či záporný). Operátor divergence ve sférických je zřejmé:

$$0 = -\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} R^2 \Phi + \epsilon \rho;$$

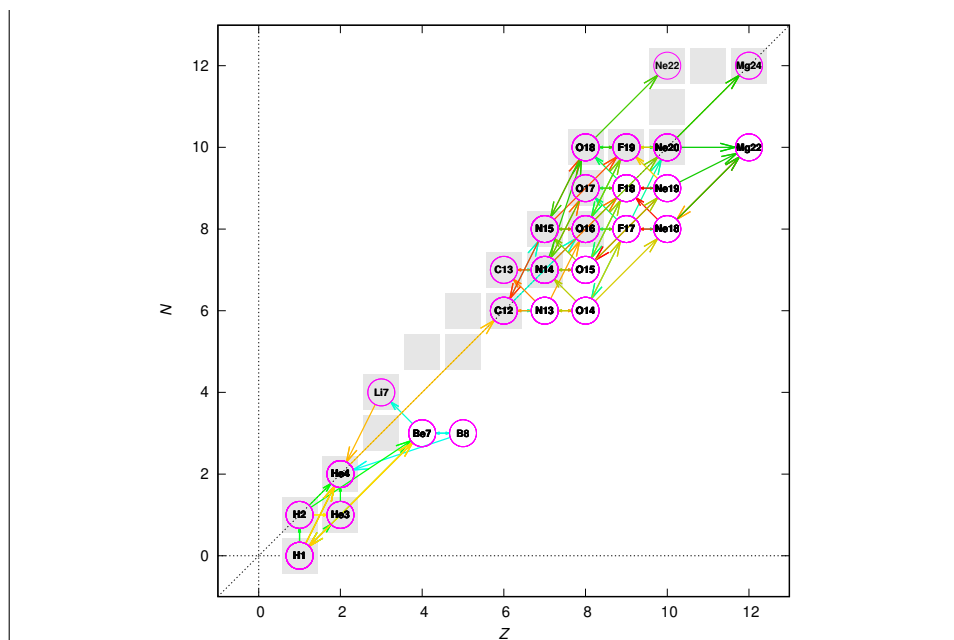
s využitím veličiny $L_R \equiv 4\pi R^2 \Phi$, tj. toku povrchem koule o poloměru R , bychom pak obdrželi:

$$\frac{dL_R}{dR} = 4\pi R^2 \epsilon \rho,$$

neboli:

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu, \quad (294)$$

kde jsme explicitně vyjádřili reakce termonukleární ϵ_{nuc} (viz příklady na obr. 90, 91) a ztráty neutrin ϵ_ν . Neznamená to ovšem, že se veškerá energie uvolňuje jako fotony (a neutrina)! Reakce totiž uvolňují nejen γ , ν , ale též pozitrony e^+ (záhy anihilují), a kinetickou energii produktů reakce. Nicméně jsme předpokládali, že plyn a záření jsou neustále v rovnováze, takže je vlastně jedno, v jaké formě energii uvolníme. Stejně se s určitým způsobem přerozdělí mezi U , E_{rad} , dle hodnoty $T = T_{\text{gas}} =$



Obr. 90 — Termonukleární reakce uvažované pro hvězdy malých a středních hmotností, zobrazené na grafu protonové číslo Z versus neutronové číslo N . Vlevo dole je proton–protonový řetězec, respektive jeho 3 varianty, vpravo nahoře cyklus CNO, dlouhá šipka odpovídá Salpeterově reakci (též 3α). Celkem se jedná o 75 reakcí. Stabilní izotopy jsou zobrazeny šedě.

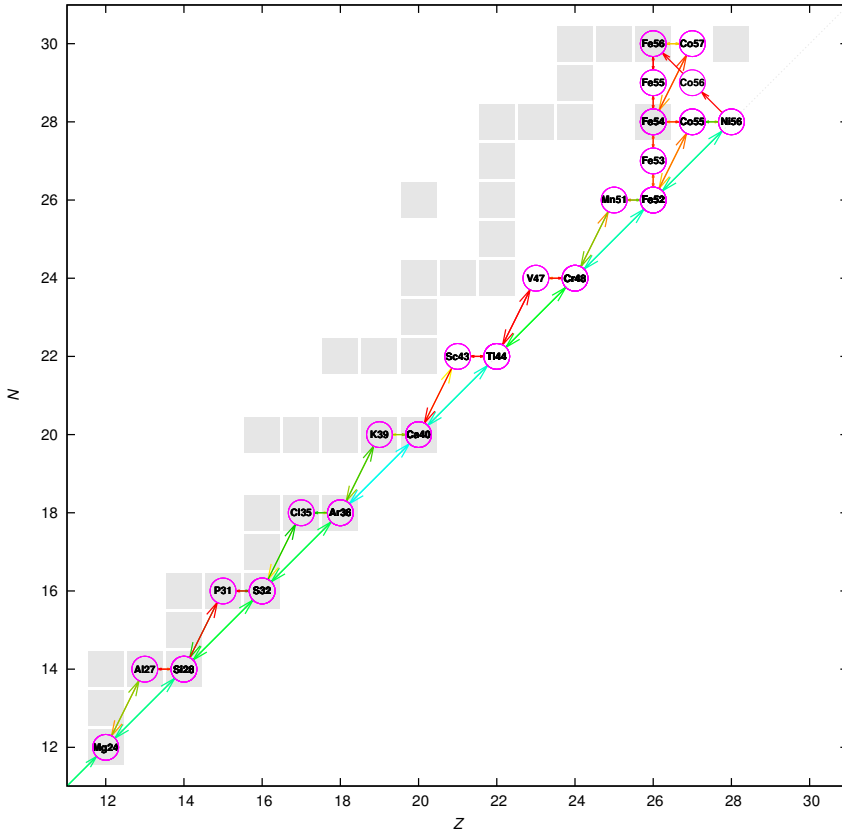
T_{rad} . Skrytým předpokladem je, že v daném místě je dosti vysoká opacita κ_P , κ_R . Doposud jsme řešili pouze místní rovnováhu, ale neuvážili jsme, že se energie může přenášet z místa na místo. (Ostatně jsme nijak nevyužili ani zmiňovanou difuzní aproximaci, tzn. předpis pro $\vec{\Phi}$.)

12.4 Přenos energie

Způsobů přenosu energie je přinejmenším šest:

1. záření, resp. zářivá difuze, je-li prostředí opticky tlusté;
2. proudění, též konvekce, turbulence, vztaková nestabilita (tj. vlastně opak vln);
3. vedení, čili částicová difuze v plazmatu, příp. šíření neuspořádaných vibrací v pevné látce;
4. neutrina, většinou způsobující chlazení, jen výjimečně ohřev;
5. vlny, resp. jejich *disipace* (jinak by totiž vlna prošla skrz), ať už jde o zvukové, vztakové, rázové, seismické, MHD, atd. atd.
6. gravitační vlny, neboli deformace časoprostoru (jež je obzvlášť obtížné uložit do jiné formy).

V normálních hvězdách se uplatňuje především 1. a 2. V bílých trpaslících 3. V pozdních fázích vývoje anebo v supernovách 4. Někde na rozhraní fotosféry,



Obr. 91 — Reakce vedoucí až ke skupině železa (Fe, Co, Ni), které se uvažují pro hmotné hvězdy, přičemž řetězec pp a cyklus CNO (nezobrazeny) bývají značně zjednodušeny; celkem jde o 91 reakcí. Stabilní izotopy jsou zobrazeny šedě. Není zde zachycena ani případná nukleosyntéza s-procesem (zachycování neutronů pomalejší než rozpad β^-).

chromosféra, koróna 5. Při spirálování a splývání černých děr nebo neutronových hvězd 6.

Přenos zářením. Zřejmě bychom mohli vyjít z obecné rovnice (206), ale pro naše záměry zápis zjednodušíme; namísto Einsteinových A_{ji} , B_{ij} , B_{ji} opět píšeme emisní a opacitní koeficienty j_ν , κ_ν , vynecháváme prach, dělíme c:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \hat{k} \cdot \nabla I_\nu = j_\nu \rho - \kappa_\nu^{\text{abs}} \rho I_\nu - \kappa_\nu^{\text{sca}} \rho I_\nu + \kappa_\nu^{\text{sca}} \rho \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega \quad \text{pro } \forall \hat{k}. \quad (295)$$

Dále integrujeme přes všechny vlnové délky, užíváme přitom vhodně středované opacity:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \hat{k} \cdot \nabla I = j \rho - \kappa^{\text{abs}} \rho I - \kappa^{\text{sca}} \rho I + \kappa^{\text{sca}} \rho \frac{1}{4\pi} \int I d\omega \quad \text{pro } \forall \hat{k}.$$

Namísto řešení pro všechny možné směry zavádíme 0., 1. a 2. moment intenzity jako integrály přes prostorový úhel ($d\omega = \sin\vartheta d\vartheta d\phi$):

$$J \equiv \frac{1}{4\pi} \int I d\omega, \quad (296)$$

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{4\pi} \int I \hat{k} d\omega, \quad (297)$$

$$\mathbf{K} \equiv \frac{1}{4\pi} \int I \hat{k} \hat{k} d\omega, \quad (298)$$

kde J , $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$ jsou po řadě skalár, vektor, tenzor. Sice to je $1 + 3 + 9 = 13$ veličin namísto 1, ale neřešíme žádný směr.

Integrujeme-li (295) přes prostorové úhly, získáme *nultý integrál* rovnice přenosu:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H} = 4\pi j\rho - \kappa\rho J, \quad (299)$$

kde jsme počítali $\int \hat{k} \cdot \nabla I d\omega = \nabla \cdot \int \hat{k} I d\omega$. Čtvrtý člen popisující rozptyl by byl zřejmě $\kappa^{\text{sca}}\rho J$; pro skoro izotropní intenzitu je ovšem $I \doteq J$, čili se odečte se třetím.

Následně *první integrál* (tzn. po násobení jednotkovým vektorem $\hat{k}$) je:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{K} = 0 - \kappa\rho \mathbf{H}, \quad (300)$$

kde emise zmizela, neb ji předpokládáme izotropní. Soustava (299), (300) je bohužel neuzavřená; máme jen 2 rovnice pro 3 neznámé. Další integrování nepomůže, neboť druhý integrál by obsahoval 3. moment, atd. Zřejmě se není čemu divit — nelze čekat, že se integraci pro všechny směry lze vyhnout tak snadno!

Namísto toho předpokládáme *uzavírací relaci*:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{3} \delta_{ij} J, \quad (301)$$

kteřá platí pro *skoro izotropní* intenzitu, $I = I_0 + I_1 \cos\theta$, $I_1 \ll I_0$, nebo též plan-paralelní atmosféru (viz níže). Nazývá se jinak Eddingtonův faktor. Kdybychom ji dosadili do (299), obratem získáme difuzní aproximaci (293), ale ta nás momentálně nezajímá.

Využijeme ovšem (300); pro stacionární případ je $\frac{\partial}{\partial t} \doteq 0$, navíc umenšené faktorem $\frac{1}{c}$:

$$\nabla \cdot \frac{1}{3} \delta_{ij} J = \frac{1}{3} \nabla J = -\kappa\rho \mathbf{H}.$$

Pro lokální termodynamickou rovnováhu (LTE) víme, že pro hustotu energie záření platí $u = \frac{4\pi}{c} J = aT^4$. Navíc první moment samozřejmě souvisí s výše užívanou veličinou L_R , $|\mathbf{H}| = L_R/(16\pi^2 R^2)$, neboť dalším faktorem 4π se dělilo v definici. Ve sférické symetrii je (složka $\hat{r}$):

$$\frac{1}{3} \frac{c}{4\pi} a 4T^3 \frac{dT}{dR} = -\frac{\kappa\rho L_R}{16\pi^2 R^2},$$

odkud:

$$\left. \frac{dT}{dR} \right|_{\text{rad}} = -\frac{3\kappa\rho L_R}{16\pi acR^2 T^3},$$

neboli:

$$\left. \frac{dT}{dM_R} \right|_{\text{rad}} = -\frac{3\kappa L_R}{64\pi^2 acR^4 T^3}. \quad (302)$$

Adiabatická konvekce. Chceme-li popsat jakékoliv proudění, máme zásadní problém, neboť $\mathbf{v} \neq 0$! Nicméně představíme si jej „mlhavě“ tak, že probíhá nějaký termodynamický děj, v nejjednodušším případě adiabatický. Už jsme jej ostatně odvozovali pro atmosféru (159).⁵⁴ Odtud:

$$\left. \frac{dT}{dR} \right|_{\text{ad}} = \frac{T}{P} \left(1 - \frac{1}{\Gamma} \right) \frac{dP}{dR}. \quad (303)$$

Při adiabatické konvekci se vlastně nic neděje ($dQ = 0$), pouze máme málo strmý gradient teploty, na nějž se nahoře naváže. Snad bychom tomu ani neměli říkat „přenos“, když expandující a kontrahující bubliny nikam nic neodevzdávají.

Pro posouzení, kdy konvekce nastává a kdy nikoli, můžeme využít odvozenou Bruntovu–Väisäläovu frekvenci (160):

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \left(\left. \frac{d\rho}{dR} \right|_{\text{ad}} - \frac{d\rho}{dR} \right) = \frac{g}{\rho} \left(\frac{\rho}{\Gamma P} \frac{dP}{dR} - \frac{d\rho}{dR} \right), \quad (304)$$

Podmínka pro konvekci je přirozeně $N^2 < 0$, neboť pak je N imaginární a nevznikají vlny, nýbrž nestabilita. Je ekvivalentní Schwarzschildovu kritériu:⁵⁵

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla_{\text{rad}}. \quad (305)$$

Jinými slovy: je-li prostředí „mezi námi a vámi“ neprůhledné ($\kappa\rho$ velké), musí zde být strmý gradient ∇_{rad} ; bublina se sice adiabaticky ochladí (dle ∇_{ad}), ale její $T_{\text{b}} > T_{\text{o}}$ zůstane vyšší, potažmo $\rho_{\text{b}} < \rho_{\text{o}}$ nižší (neb $P_{\text{b}} = P_{\text{o}}$ je neustále vyrovnané), tudíž podlehne vzlaku.

Semiempirická konvekce. Konvekce však často adiabatická *není*. Pak lze využít semiempirický popis, kdy předpokládáme, že víry urazí vzdálenost $\ell = \alpha H_P$, která je určitým násobkem tlakové škály $H_P \equiv P/(dP/dR)$, kde parametr α je volný; pro

⁵⁴ Zde jen zopakujeme, že dle polytropy $P = K\rho^\Gamma$, $dP = K\Gamma\rho^{\Gamma-1}d\rho = \Gamma\frac{P}{\rho}d\rho$ a dle stavové rovnice $P = \frac{k}{\mu m_u}\rho T$, $dP = \frac{k}{\mu m_u}(d\rho T + \rho dT) = \frac{k}{\mu m_u} \left(\frac{1}{\Gamma} \frac{P}{\rho} dP T + \rho dT \right) = \frac{1}{\Gamma} dP + \frac{P}{T} dT$.

⁵⁵ Tyto symboly naneštěstí nejsou operátory, nýbrž $\nabla \equiv \frac{P}{T} \frac{dT}{dP}$; jejich výhodou je bezrozměrnost a kladnost, neboť $P(R)$ je klesající funkce, stejně jako $T(R)$. Nemusíme pak přemýšlet nad nerovnostmi záporných čísel.

standardní sluneční model (SSM) se volí např. $\alpha = 2,1$. Inverzí rovnice (156) lze vyjádřit:

$$\left. \frac{dT}{dR} \right|_{\text{semi}} = \left. \frac{dT}{dR} \right|_{\text{ad}} - \left[\frac{L_R}{4\pi R^2} \frac{1}{\alpha^2 \sqrt{\beta_{CP} \rho}} \left(\frac{\mu m_u}{k} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}} \frac{g}{T}. \quad (306)$$

Vidíme, že ρ i T jsou ve jmenovateli, čili semiempirická konvekce hluboko v nitru se blíží adiabatické.

Semikonvekce. Existuje ještě jedno kritérium pro konvekci, kde se využívá Ledouxův gradient:

$$\nabla_L = \nabla_{\text{ad}} + \nabla_B, \quad (307)$$

který zahrnuje Bruntův gradient všech abundancí:

$$\nabla_B = \left. \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right|_{\rho} \sum_i \left. \frac{\partial \ln P}{\partial \ln X_i} \right|_{\rho, T, X_{j \neq i}} \frac{d \ln X_i}{d \ln P}. \quad (308)$$

Je-li prostředí nestabilní vzhledem k Schwarzschildovi, ale stabilní vzhledem k Ledouxovi:

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla_{\text{rad}} < \nabla_L, \quad (309)$$

pak nastává *semikonvekce*. Pro její popis lze použít difuzní aproximaci (Langer aj. 1983), s volným parametrem $\alpha_{\text{sc}} = 1$ až 667.

Termohalinní cirkulace. Další možné proudění je termohalinní (hez. čes. tepelněsolné). Jedná se o obdobu hlubinné cirkulace v oceánech, při níž hraje roli slanost vody, přičemž slanější znamená hustší. Ve hvězdách jde o inverzi střední molekulové hmotnosti μ v oblasti klesající ionizace, kde se nachází „řidší pod hustým“ (plně ionizovaný vodík má $\mu = 0,5$, plně neutrální $\mu \doteq 1$). Cirkulace pak probíhá následovně: látka klesne $\rightarrow$ ionizuje se $\rightarrow$ zředí se $\rightarrow$ stoupne $\rightarrow$ rekombinuje $\rightarrow$ zhoustne atd. Nastává i v případě, že Ledouxovo kritérium není splněno, tzn. $\nabla_{\text{rad}} < \nabla_L$. Příspěvek k přenosu energie je možné popsat opět pomocí difuzní aproximace (Ulrich 1972), s volným parametrem $\alpha_{\text{th}} = 0,001$ až 1.

Konvektivní přestřelování. Případný pohyb za hranicí konvektivní zóny vymezené Schwarzschildem se nazývá přestřelování. Jedná se vlastně o očekávaný jev, neboť víry mající velkou setrvačnost se zřejmě nebudou zastavovat okamžitě. Parametrizace se provádí pomocí $f_{\text{ov}} = 0,1$ až 0,6, jakožto násobku H_P , přičemž se předpokládá exponenciální pokles promíchávání s postupným vzdalováním od hranice.

Jedním z pozorovaných projevů přestřelování je větší rozměr heliového jádra u červených obrů dle asteroseismologických měření (Montalbán aj. 2013). Pro Slunce se také pozorují odchylky pod tachoklinou, tj. rozhraním mezi zónou zářivé rovnováhy a konvektivní zónou, i když ty mohou souviset též s chybnými opacitami (Bailey aj. 2015).

Cílem dokonalejších modelů konvekce (např. Viallet aj. 2013), je popsat turbulentní proudění *bez* volných parametrů, se skutečným rychlostním polem $\mathbf{v}$, bez omezujících předpokladů ($dQ \neq 0$), nejlépe včetně magnetického pole $\mathbf{B}$, protože jsou potřebné rovnice MHD. Nejlepší by bylo, kdyby pro Slunce zároveň vyšly oscilace $\mathbf{B}$ s periodou okolo 11 let.

12.5 Stavová rovnice a Sahovy rovnice

Celou soustavu uzavírá jako obvykle stavová rovnice pro hvězdnou látku:

$$P = \frac{\rho}{\mu m_u} kT \lambda_{\text{deg}}(\rho, T) + \frac{1}{3} a T^4 \quad (310)$$

kde je zohledněn ideální plyn, elektronová degenerace, tlak záření (fotonový plyn) i částečná ionizace jakožto závislost $\mu(Q)$.

Nesmíme proto zapomenout, že nedílnou součástí soustavy rovnic je soustava Sahova, která popisuje stupně ionizace x_j^r jednotlivých prvků (případně molekul) při LTE:

$$\frac{x_j^{r+1}}{x_j^r} P_e = \frac{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} \frac{Z_j^{r+1}}{Z_j^r} e^{-\frac{\chi_j^r}{kT}} \quad \text{pro } \forall j, \forall r, \quad (311)$$

kde P_e označuje tlak elektronového plynu, m_e hmotnost elektronu, Z_j^r partiční sumu, χ_j^r ionizační energii; spolu s normovací podmínkou $\sum_r x_j^r = 1$ pro $\forall j$. Pak počet volných elektronů na jeden atom je:

$$Q = \sum_j \nu_j \sum_r r x_j^r, \quad (312)$$

což přímo ovlivňuje střední molekulovou hmotnost $\mu = \frac{\mu_i}{1+Q}$, kde $\mu_i = (\sum_E \frac{A_E}{w_E})^{-1}$.

12.6 Okrajové podmínky v centru

Aby řešení soustavy diferenciálních rovnic bylo jednoznačné, musíme předepsat rozumné okrajové podmínky. Pro $M_R = 0$ (tj. centrum) máme z definice $L_R = 0$, $R = 0$. Určitým problémem je R ve jmenovatelích, avšak zároveň se vyskytují M_R nebo L_R v čitatelích, výrazy by tedy neměly divergovat. Při numerickém řešení to ovšem musíme ošetřit (viz Harmanec a Brož 2011).

12.7 Okrajové podmínky na povrchu

Pro $M_R = M_*$, což je parametr problému, nelze předepsat nic, R , L_R , ani T , protože předem nevíme, kolik to vyjde, a nesmíme „znásilnit“ model. Pouze víme, že v atmosféře $\rho \rightarrow 0$, $P_g \rightarrow 0$. Správně bychom měli použít sofistikovaný model atmosféry, který by mimochodem poskytoval kompletní syntetické spektrum, my však použijeme ten nejjednodušší (šedý).

Šedá atmosféra. Uvažovat budeme planparalelní (tenkou) atmosféru a rovnici přenosu bez rozptylu ($\mu \equiv \cos \vartheta$, $d\tau = \kappa \rho dx$, kde x je hloubka, i když referenční směr pro μ je nahoru):

$$-\mu \frac{dI}{d\tau} = \frac{j}{\kappa} - I. \quad (313)$$

Zavedeme-li skalární momenty intenzity (viz obr. 92):

$$J \equiv \frac{1}{4\pi} \int I d\omega, \quad (314)$$

$$H \equiv \frac{1}{4\pi} \int I \mu d\omega, \quad (315)$$

$$K \equiv \frac{1}{4\pi} \int I \mu^2 d\omega, \quad (316)$$

pak nultý integrál rovnice přenosu:

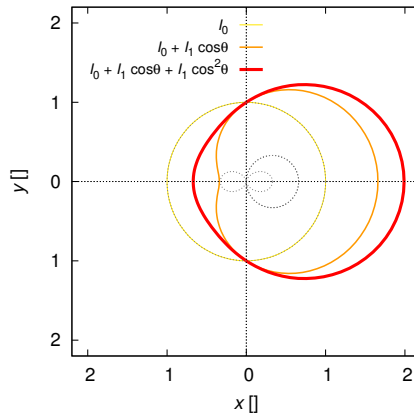
$$-\frac{d}{d\tau} \int I \mu d\omega = \frac{j}{\kappa} \int d\omega - \int I d\omega,$$

vychází:

$$-\frac{dH}{d\tau} = \frac{j}{\kappa} - J,$$

kdežto první integrál (po násobení μ):

$$-\frac{dK}{d\tau} = 0 - H.$$



Obr. 92 — Závislost intenzity na směru od osy, pokud je $I(\vartheta) = I_0 + I_1 \cos \vartheta + I_2 \cos^2 \vartheta$, kde $I_0 = 1$, $I_1 = 0,66$, $I_2 = 0,33$, i když v reálných situacích je často $I_0 \gg I_1 \gg I_2$.

Zároveň požadujeme, aby H odpovídalo hvězdě, tzn. předpokládanému L_* , R_* nebo T_{eff} , dle jejího definičního vztahu $L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$, pak:

$$H = \frac{L_*}{16\pi^2 R_*^2} = \frac{1}{4\pi} \sigma T_{\text{eff}}^4,$$

jinými slovy je $H = \text{konst.}$ Integrace 1. integrálu (podle τ) je tudíž triviální:

$$K = H\tau + C, \quad (317)$$

kde C je integrační konstanta, kterou zatím neznáme.

Eddingtonův trik spočívá v tom, že obecnou $I(\mu)$ jednoduše rozdělíme na horní poloprostor a dolní poloprostor: $I = I_1$ pro $\mu > 0$, $I = I_2$ pro $\mu \leq 0$, kde I_1 , I_2 nezávisí na μ , jen na τ . Přitom $I_2(\tau) = 0$ pro $\tau = 0$, tj. okrajová podmínka na „vršku“ fotosféry. Pak ovšem lze snadno spočítat všechny momenty:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \\ H &= \frac{1}{4}(I_1 - I_2), \\ K &= \frac{1}{6}(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

a uvidět, že i pro poloprostorovou intenzitu platí uzavírací relace:

$$K = \frac{1}{3}J \quad \text{pro } \forall \tau$$

a zároveň:

$$J = 2H \quad \text{pro } \tau = 0.$$

Dosadíme-li obojí do (317), obdržíme obratem $C = \frac{2}{3}H$.

Dosadíme-li prvé do (317) (se $\sigma = \frac{ca}{4}$):

$$\frac{1}{3} \frac{c}{4\pi} a T^4 = \frac{1}{4\pi} \sigma T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right),$$

získáme teplotní profil atmosféry:

$$T^4(\tau) = \frac{1}{2} T_{\text{eff}}^4 \left(\frac{3}{2} \tau + 1 \right), \quad (318)$$

tzn. že nemusíme vůbec řešit její energetiku.

Hydrostatická rovnováha. Nakonec nám tedy pro popis atmosféry stačí pouze 1 rovnice, konkrétně hydrostatická rovnováha, neboť $T(\tau)$ známe a $P_g = P_g(\rho)$; kontinuita je triviální. Máme:

$$\frac{dP}{dx} = g\rho,$$

což zapsáno v optické tloušťce:

$$\frac{dx}{d\tau} = \kappa\rho, \quad (319)$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa}, \quad (320)$$

s okrajovou podmínkou $\tau = 0$, $x = 0$, $P_g = 0$. Integrujeme numericky směrem dolu, počítáme přitom závislé veličiny $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$, $P = P_g + P_{\text{rad}}$, $\rho = P_g \frac{\mu m_u}{kT}$. Opacitu pro jednoduchost bereme dle Bell a Lin (1994). Ve Fortranu 77 bychom psali:

```
tau = 0.d0
x = 0.d0
P_g = 0.d0

do while (tau < tau_max)
  T = (0.5d0*Teff**4*(1.5d0*tau + 1.d0))**(0.25d0)
  P_r = 1.d0/3.d0*a*T**4
  P = P_g + P_r
  rho = P_g*mu*m_u/(k*T)

  kappa = kappa_func(rho, T)

  write(*,*) tau, x/1.d3, P, P_g, P_r, rho, T, kappa

  dx = dtau/(kappa*rho)
  dP = g/kappa*dtau
  dP_r = a/4.d0*Teff**4*dtau
  dP_g = dP-dP_r

  P_g = P_g + dP_g
  tau = tau + dtau
  x = x + dx
enddo
```

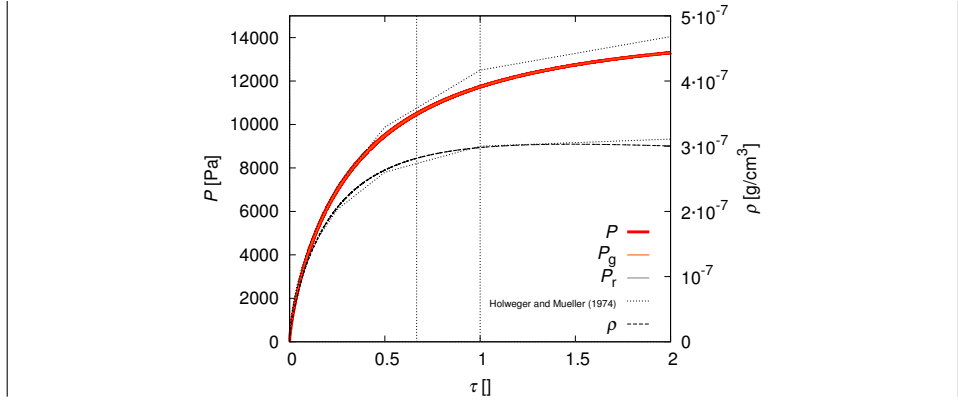
Řešením (jako obr. 93) několika fotosfér (různé L_* , R_*) získáváme vhodné okrajové podmínky pro modely nitra (na $\tau = 2/3$), avšak musíme předepsat pouze *relace* mezi veličinami R, P, L_R, T , nikoli veličiny samotné, protože a priori nevíme, kolik to vyjde!

Shrnutí: jsou soustavou 4 diferenciálních nelineárních rovnic 1. řádu se smíšenými okrajovými podmínkami, pro 4 neznámé funkce $R(M_R)$, $P(M_R)$, $L_R(M_R)$, $T(M_R)$ 1 nezávislé proměnné M_R .

12.8 Vývojové rovnice stavby

Pokud bychom chtěli zároveň studovat vývoj v čase, musíme změnit chemické složení a promíchat (netřepat):

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_j \frac{\epsilon_j}{\alpha_j}, \quad (321)$$



Obr. 93 — Profil sluneční fotosféry, znázorňující tlak P a hustotu ρ v závislosti na optické tloušťce τ . Předpokládáme šedou atmosféru a porovnáváme ji s daty Holweger a Müller (1974).

kde ϵ_j označuje měrný výkon jednotlivých reakcí a α_j měrnou energii hvězdné látky, která by se celkově uvolnila při dané reakci, a:

$$Y_K = \frac{\int_K Y dM_R}{\int_K dM_R} \quad \text{pro } \forall K, \quad (322)$$

neboť v každá konvektivní zóna (vnitřní i vnější) je pokládána za dokonale promísenou a chemicky homogenní. Obdobně bychom postupovali pro X , Z , případně jednotlivé izotopy.

V tepelné rovnováze (294) musíme uvážit i časové změny vnitřní energie a vykonanou práci:

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu - \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho} P \frac{d\rho}{dt}. \quad (323)$$

Pokud by se hvězda vyvíjela opravdu rychle, můžeme situaci zkusit zachránit tím, že do (291) vrátíme inerciální člen (zrychlení):

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4} - \frac{1}{4\pi R^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}. \quad (324)$$

12.9 Počáteční podmínky

Počáteční podmínky se nejčastěji předepisují ve fázi hydrostatické protohvězdy (tzn. před hlavní posloupností), která bývá plně konvektivní, neboť protohvězdy jsou chladné, látka je ve stavu částečné ionizace, má vysokou opacitu, čili je všude splněna Schwarzschildova podmínka $\nabla_{\text{ad}} < \nabla_{\text{rad}}$. Při dokonalém promíchávání můžeme předpokládat $X = \text{konst.}$, $Y = \text{konst.}$, $Z = \text{konst.}$ pro všechna M_R , zvolené tak, aby odpovídaly zvolené populaci hvězd.

Shrnutí: vývojové rovnice stavby jsou soustavou 7 integro–diferenciálních nelineárních rovnic 2. řádu se smíšenými okrajovými podmínkami, pro 7 neznámých funkcí $R(M_R, t)$, $P(M_R, t)$, $L_R(M_R, t)$, $T(M_R, t)$, $X(M_R, t)$, $Y(M_R, t)$, $Z(M_R, t)$ 2 nezávislých proměnných M_R , t .

12.10 Numerické řešení metodou FVM

Jedním ze způsobů numerického řešení je integrace přes (neinfinitesimální) objemy (FVM), v našem případě kulové slupky vymezené zvolenými hodnotami M_j . Namísto neznámých spojitých funkcí máme neznámé diskrétní veličiny R_j , P_j , L_j , T_j , X_j , Y_j , Z_j pro $j = 1..M$, přičemž tyto jsou definované uvnitř objemu (P_j , T_j , X_j , Y_j , Z_j) nebo na jeho hranici (R_j , L_j). Provedeme-li zároveň nejjednodušší Eulerovu diskretizaci v čase:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \doteq \frac{Y^{n+1} - Y^n}{\delta t}, \quad (325)$$

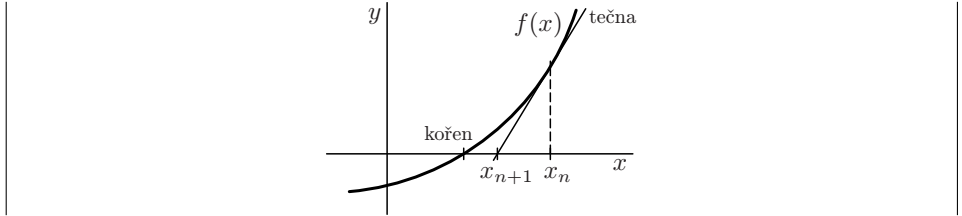
apod. pro ostatní veličiny, a dosadíme-li všude jinde hodnoty veličin v *novém* čase t^{n+1} , získáme implicitní metodu, v rámci které bychom museli vyřešit nelineární soustavu $7M$ rovnic. Symbolicky ji zapíšeme pro všechny veličiny najednou jako:

$$F_j = 0 \quad j = 1..7M. \quad (326)$$

Soustavu nelze jen tak invertovat (je stále nelineární). Dosadíme-li do ní odhad (např. řešení z předchozího časového kroku, jednoduchý polytropický model) jistě *nebude* splněna:

$$F_j \neq 0.$$

Ke skutečnému řešení se můžeme přiblížit metodou Newtonovou–Raphsonovou, která pro jednorozměrnou funkci $f(x)$ funguje jako na obr. 94.



Obr. 94 — Schéma jedné iterace Newtonovy–Raphsonovy metody pro hledání kořenů funkce $f(x) = 0$. V bodě x_n zkonstruujeme pomocí derivace $f'(x_n)$ tečnu, jejíž průsečík s osou x nám dá novou hodnotu x_{n+1} , která je blíže kořenu.

V našem mnohazměrném případě vlastně hledáme mnoho kořenů, jedna iterace NR vlastně představuje nalezení intervalů ΔX_k (neboli oprav veličin):

$$F_j + \sum_{k=1}^{7M} \overbrace{\frac{\partial F_j}{\partial X_k}}^{J_{jk}} \Delta X_k = 0 \quad \text{pro } \forall j, \quad (327)$$

což evidentně spočívá v řešení *lineární* soustavy rovnic; matice J_{jk} se nazývá jakobián. Je nanejvýš vhodné, když jsou rovnice úhledně uspořádané, takže J_{jk} je pásové a inverze snazší. Prakticky můžeme výpočet provést programem Mesastar (Paxton aj. 2011, 2013, 2015).

Kdybychom se chtěli obeznámit s tím, kde jsou rovnice v programu zapsány, začneme v souboru `star/job/run_star.f90` a postupujeme takto:

```
do_run_star (1)
  run1_star (2)
    EVOLVE_LOOP:
      STEP_LOOP:
        star_evolve_step (3)
          do_evolve_step_part2 (4)
            IMPLICIT_MDOT_LOOP:
              do_struct_burn_mix (5)
              do_hydro_converge (6)
              do_hydro_newton (7)
              hydro_newton_step (8)
              newt (9)
              newton (10)
              do_newton (11)
              eval_equations (12)
              eval_equ (13)
              eval_equ_for_solver (14)
              ZONES_LOOP:
                do1_dlnu_dt_eqn (15)
                e00 (16)
```

kde se na 16. úrovni vnoření (!) vyskytuje zápis jednoho z členů jedné z derivací jedné z rovnic (konkrétně kontinuity) do jakobiánu.

12.11 Značení vývojových stadií

Abychom se neupsali, označíme si vývojová stadia následujícími zkratkami:

PS	... nerovnovážná protohvězda (angl. protostar)
pre-MS	... hvězda před hlavní posloupností
MS	... hlavní posloupnost (main sequence)
SGB	... větev podobrů (subgiant branch)
RGB	... větev červených obrů (red giant branch)
HB	... horizontální větev (horizontal branch)
AGB	... asymptotická větev obrů (asymptotic giant branch)
TP-AGB	... termální pulzy
post-AGB	... hvězda po AGB
NB	... obálková mlhovina (nebula)
WD	... bílý trpaslík (white dwarf)
BD	... hnědý trpaslík (brown dwarf)
RD	... červený trpaslík (red dwarf)
BSG	... modrý veleobr (blue supergiant)
RSG	... červený veleobr (red supergiant)

WR	... Wolfova–Rayetova hvězda
SN	... supernova
NS	... neutronová hvězda (neutron star)
BH	... černá díra (black hole)

Dále budeme samozřejmě užívat písmena odpovídající Harvardské spektrální klasifikaci: O, B, A, F, G, K, M, L, T. Případně podrobnější číselné členění O2 ... O8, B0 ... B8, atd.

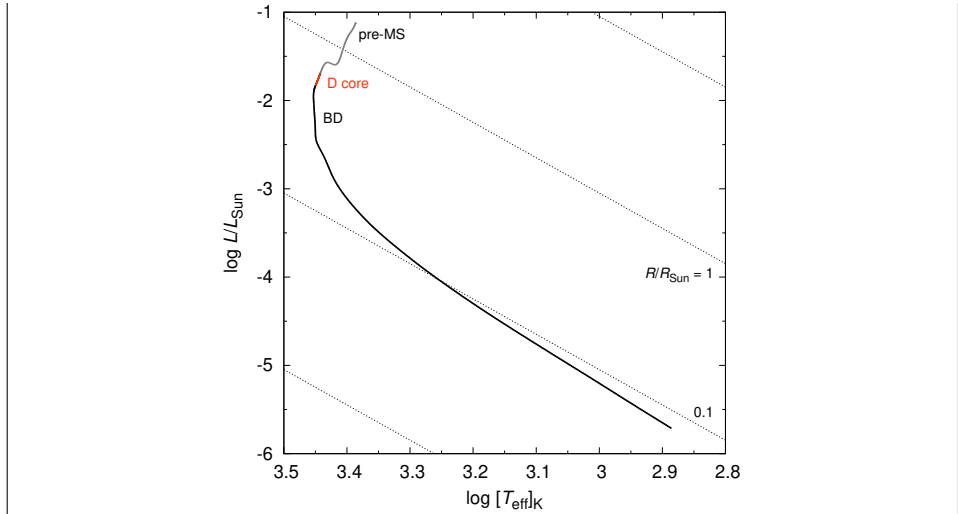
Další méně časté zkratky nechť jsou: WN tj. WR s čarami N; WC WR s C; LBV svítivá modrá proměnná, Of O s emisními čarami.

12.12 Vývojové procesy

Vzhledem k tomu, že se procesy mohou opakovat, nemá cenu je vysvětlovat vícekrát. Proto o nich pojednáme jen jednou a uvedeme fáze, ve kterých se zejména uplatňují.

1. *kontrakce* $\rightarrow$ *ohřev*: Každý normální plyn se při stlačení zahřeje, není-li v kontaktu s nějakým rezervoárem, který by jeho teplotu udržoval. Pro adiabatický děj ($dQ = 0$) a zároveň platnou stavovou rovnici ostatně máme $P = K\rho^\gamma = \rho/(\mu m_u)kT$, neboli $\rho^{\gamma-1}T^{-1} = k/(K\mu m_u)$, což při $\gamma > 1$ znamená ohřev při kontrakci. Ve hvězdě jde zejména o kontrakci jádra. Uplatňuje se ve fázích SGB, RGB.
2. *expanze* $\rightarrow$ *ochlazení*: Samozřejmě je možný i proces opačný. Často se jedná o expanzi obálky; oba procesy probíhají zároveň, neboť po kontrakci jádra se něco stát musí. Proč nekontrahuje také obálka? Kdyby mohla, kontrahovala by už předtím, avšak nyní do ní přichází více tepelné energie! Uplatňuje se opět ve fázích SGB, RGB.
3. *hoření H v centru*: Termonukleární reakce jakožto kladný příspěvek k dQ hvězdě vlastně neohřívají, nýbrž vyrovnávají ztrátu (záporné dQ), a tím zpooomalují kontrakci. Udrží hvězdu velmi blízko hydrostatické rovnováhy, všechny stavové veličiny se mění pomalu. Jedná se samozřejmě o nejdelší fázi MS.
4. *růst střední molekulové hmotnosti μ* : Podstatnou změnou je však změna chemického složení, přičemž ve stavové rovnici $P = \rho/(\mu m_u)kT$, je μ ve jmenovateli. Pro čistý plně ionizovaný vodík by bylo $\mu \doteq 1/2$ (1 proton, 1 elektron s $m \doteq 0$; 2 částice), pro čisté helium $\mu \doteq 4/3$. Tomu odpovídá menší tlak P i ∇P (i když ne nutně). Látka se nám mění „pod rukama“, stává se měkčí. Jedná se o hlavní vývojový proces na MS.
5. *pokles opacity κ chemicky*: Rozptyl na volných elektronech je zdaleka nejvýznamnější zdroj opacity v plně ionizovaném plazmatu, kde nejsou možné vázaně-volné natož vázaně-vázané přechody. Pak κ logicky klesá, neboť elektrony anihilují s pozitrony, uvolněnými řetězcem pp nebo cyklem CNO. Ostatně tomu odpovídá i přibližná Kramersova opacita, $\kappa \doteq 0,19 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} (1-X)$, kde přímo vystupuje abundance vodíku. Uplatňuje se taktéž na MS.
6. *hoření H ve slupce*: Po poklesu $X_c \rightarrow 0$ se maximum ϵ_{nuc} přesouvá ven, čemuž říkáme hoření ve slupce. Pokračuje téměř neustále od SGB $\rightarrow$ AGB.

7. *růst opacity κ rekombinací*: Obzvlášť po zmiňované expanzi/ochlazení obálky lze očekávat, že vázaně–volné a vázaně–vázané přechody zvýší κ . Pak vznikne (nebo se rozšíří) konvektivní zóna, naroste od povrchu směrem dovnitř, až je většina objemu konvektivní. Způsobuje první vynesení prvků do atmosféry; uplatňuje se ve fázi RGB.
8. *vznik degenerovaného jádra*: Elektronový plyn vykazuje při vysoké hustotě (anebo ekvivalentně nízké teplotě) degeneraci, neboli prudký nárůst tlaku kvůli Pauliho vylučovacímu principu. ∇P by u málo hmotných hvězd zastavil další kolaps; není však dost času, aby se takto vyvinuly. Situace jinak nastává ve fázi RGB.
9. *chlazení neutrin*: V určitých krátkých fázích, kdy je vysoká centrální teplota T_c , může být $|\epsilon_\nu| \gg \epsilon_{\text{nuc}}$. Pak ovšem nutně nastává rychlý kolaps jádra. Jedná se o přechod mezi RGB/HB a krátké fáze TP-AGB, WR.
10. *He záblesk v jádře*: Vysoce degenerovaný plyn má velmi zvláštní vlastnost: při dodání dQ se nezvýší T , tedy ani P , nedojde k žádné expanzi, pouze ke snížení stupně degenerace ψ . Hoření He proto začíná překotně, dokud $\psi \rightarrow 0$. Příslušná Salpeterova reakce (3α) kvůli chlazení neutrin začíná mimo centrum. I když $L_{\text{nuc}} \simeq 10^{10}$ W, na povrchu se příliš neprojeví. V té souvislosti ovšem nastávají oscilace celé hvězdy. Jedná se opět o přechod RGB/HB.
11. *hoření He v centru*: Druhý zdroj kupodivu *neznamená* zvýšení zářivého výkonu L . Musí se totiž uvážít interakce dvou slupek — expanze jádra způsobí expanzi H slupky, snížení ϵ_H i značný pokles celkového L . Vzhledem ke strmosti $\epsilon_{\text{nuc}}(T)$ očekáváme navíc konvektivní zónu v centru. Jedná se vlastně o období MS, ale odlišujeme ji jako HB.
12. *hoření He ve slupce*: Analogicky se hvězda vyvíjí při $Y_c \rightarrow 0$, obdobně jako na RGB, avšak tentokrát hovoříme o fázi AGB. Obě větve leží blízko sebe a částečně se překrývají. V atmosféře se později objevuje druhé vynesení.
13. *He záblesky ve slupce*: Postupně dochází ke ztenčování slupek H a He, přibližování slupek, jejich interakci, při níž kvůli degeneraci na spodku He slupky nastává překotné hoření He a silný ohřev. V horní části přitom vznikne malá konvektivní zónička a dojde k dočasnému vyhasnutí H slupky. Tepelné pulzy trvají řádově 10^2 yr, intervaly mezi pulzy 10^4 yr. Případně dochází ke třetímu vynesení, pokud se konvektivní zóna propojí s vnější. Jedná se fázi označovanou TP-AGB.
14. *ztráta hmoty*: Ať už jde o hydrodynamický vítr, vítr řízený zářením, supervítr, pulzace obálky, nebo pouze o nějaký semiempirický předpis, hvězda v pozdních fázích prodělává zásadní změnu hmotnosti. Jedná se především o fáze RGB, AGB, post-AGB, WR.
15. *hoření C*: Pro hmotnější hvězdy dochází i k reakcím uhlíku, při němž v nitru vznikají izotopy Ne, Mg. Jedná se opět o fázi AGB, potažmo WD se složením O/Ne/Mg.
16. *vznik Fe jádra*: Pokračující zachycování částic α vede až ke vzniku jader skupiny železa (obr. 91), která mají maximální vazebnou energii na nukleon. Pak nastává nevyhnutelný kolaps, při němž hraje roli fotodisintegrace jader Fe (zpět na α), neutronizace, vzniká NS nebo BH, v závislosti na detailní struktuře jádra před kolapsem.



Obr. 95 — Hertzsprungův–Russelův diagram, tj. závislost zářivý výkon L versus efektivní teplota T_{eff} , pro hvězdu s hmotností $M = 0,05 M_{\odot}$ neboli hnědého trpaslíka. Krátká fáze hoření deuteria (oranžově) *není* následována hořením H, čili trpaslík pozvolna chladne, kontrakce je zastavována degenerovaným plynem. Vývoj byl ukončen v čase 13,7 Gyr, odpovídajícím stáří vesmíru. Výpočet programem Mesastar (Paxton aj. 2015).

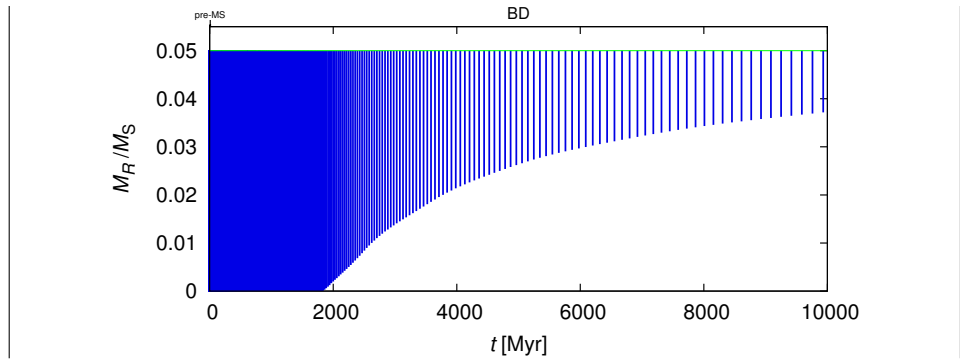
17. *ohřev neutrinu*: Hustota látky v okolí proto-NS je natolik vysoká, že se uplatňuje přenos energie neutrinu, která jsou při slabých interakcích s látkou termalizována. Probíhá nukleosyntéza r-procesem (zachycování neutronů rychlejší než rozpad β^-) nebo p-procesem. Přitom lze očekávat určité nestability (viz kap. 11).

12.13 Vývoj hvězd různých hmotností

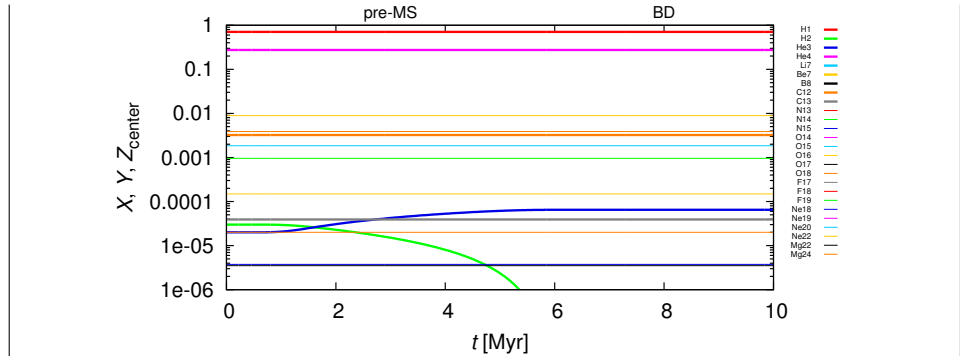
Zkusme nyní stručně popsat, jak se liší vývoj hvězd podle jejich počáteční hmotnosti. Když se z mezihvězdné látky vydělí kolabující protohvězda, zpočátku je možno kolaps považovat za izotermální, později za adiabatický. Na HR diagramu by tomu odpovídal pohyb za Hayashiho linií. Po dosažení hydrostatické rovnováhy konvektivní protohvězda sestupuje podél Hayashiho linie a posléze se posouvá ke hlavní posloupnosti. Méně hmotné hvězdy se přitom jeví jako objekty typu T Tauri, příp. FU Orionis, více hmotné jako Herbigovy hvězdy Ae nebo Be, nehmotnější pak jako RSG, BSG. Schematicky bychom to mohli popsat jednoduše jako:

PS $\rightarrow$ pre-MS $\rightarrow$ MS ...

Co se týká následného vývoje, u hvězdy s hmotností $M \geq 0,013 M_{\odot}$ dochází pouze hoření deuteria, $D + p \rightarrow {}^3\text{He} + e^+ + \bar{\nu}_e$ (obr. 97). Zpočátku je plně konvektivní, posléze zóna ustupuje (obr. 96). Kolapsu brání degenerovaný plyn, pouze postupně



Obr. 96 — Kippenhahnův diagram (pro $M = 0,05 M_{\odot}$), čili vnitřní struktura vynesená ve hmotnosti M_R a v závislosti na čase t . Konvektivní zóna je značena modře; zóny hoření zde nejsou patrné.



Obr. 97 — Abundance jednotlivých izotopů v centru (pro $M = 0,05 M_{\odot}$). Ve fázi před hlavní posloupností je patrné pouze hoření deuteria, jinak abundance zůstávají konstantní. Zobrazen je pouze krátký úsek do 10 Myr.

chladne (obr. 95). Hvězda spektrálního typu T i její konečné stadium se nazývá hnědý trpaslík, což zapíšeme jako:

$$T \rightarrow \text{BD (D)}$$

Podobně se vyvíjejí hvězdy s $M \geq 0,060 M_{\odot}$, ale dochází u nich navíc k hoření lithia:

$$L \rightarrow \text{BD (Li)}$$

Hvězda s $M \geq 0,10 M_{\odot}$ je červený trpaslík. Její konečné stadium by byl heliový podtrpaslík, ale evidentně není čas, aby se vyvinul (v mladých otevřených hvězdokupách naopak vidáme spíše fázi pre-MS):

M8 $\rightarrow$ He sd

Pro $M \geq 0,25 M_{\odot}$ jde opět o červeného trpaslíka, ale tentokrát by vystoupal nad hlavní posloupnost mezi „podobry“. Na konečné stadium, heliového bílého trpaslíka, ale opět není čas:

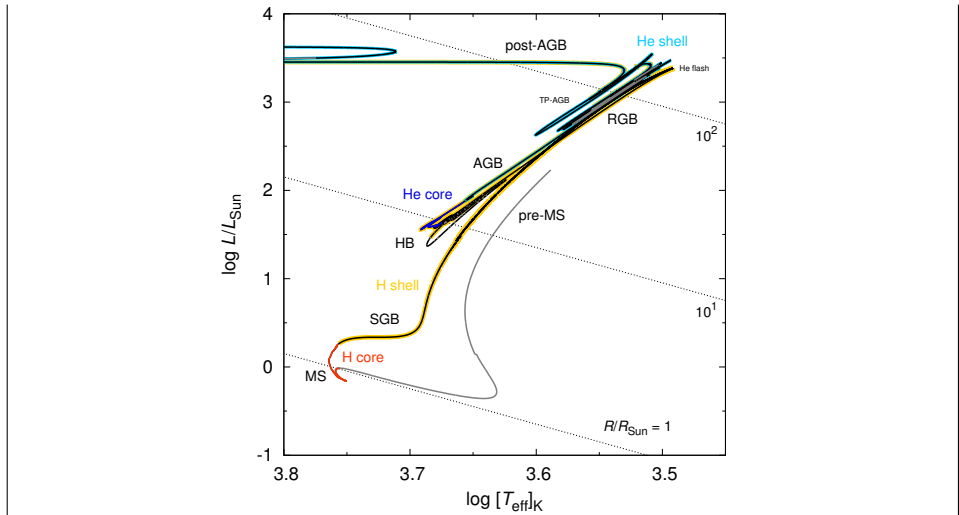
M5 $\rightarrow$ SGB $\rightarrow$ He WD

Pro $M \geq 0,60 M_{\odot}$ nastává určité stoupání podél Hayashiho linie, avšak degenerace zabrání dalšímu kolapsu jádra a hoření helia, čili:

K5 $\rightarrow$ SGB $\rightarrow$ RGB $\rightarrow$ He WD

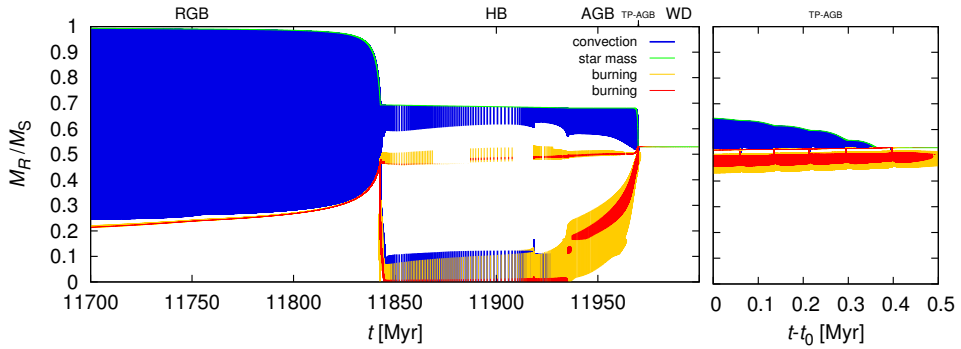
Pro Slunce s $M \geq 1,0 M_{\odot}$ již očekáváme komplexní vývoj (obr. 98), komplexní změny konvektivních zón (obr. 99), fázi hoření He (obr. 100) včetně záblesků, čemuž odpovídá konečné stadium uhlíkov/kyslíkový bílý trpaslík:

MS G5 $\rightarrow$ SGB $\rightarrow$ RGB $\rightarrow$ HB $\rightarrow$ AGB $\rightarrow$ TP-AGB $\rightarrow$ post-AGB $\rightarrow$ NB
 $\rightarrow$ C/O WD

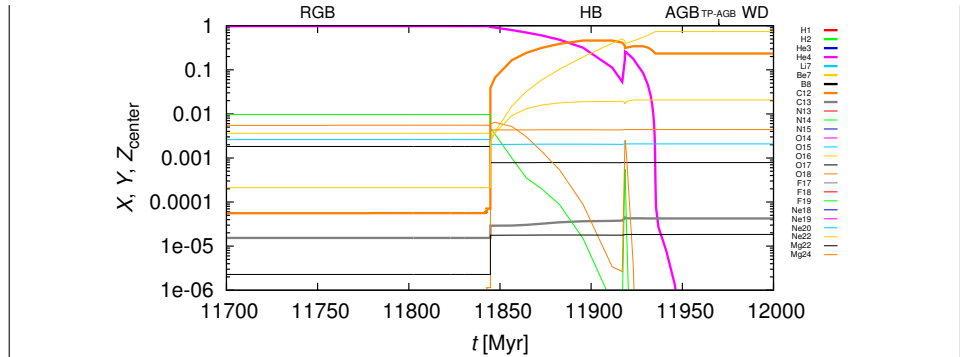


Obr. 98 — HR diagram pro Slunce s počáteční hmotností $M = 1 M_{\odot}$. Černé jsou podél vývojové stopy připsány jednotlivé fáze, od pre-MS do post-AGB. Barevně jsou vyznačeny období hoření H v centru (červeně), hoření H ve slupce (žlutě), hoření He v centru (modře), hoření He ve slupce (bledě). Čárkované jsou vyneseny linie konstantního poloměru, dle vztahu $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$. Během stoupání podél RGB je patrná malá zastávka (angl. dip). Je způsobena průchodem zóny hoření diskontinuitou v chemickém složení tam, kam zasáhla konvektivní zóna, jež způsobila zvýšení X na $X_{\text{surf}} \rightarrow$ pokles $\mu \rightarrow$ pokles $T \rightarrow$ dočasný pokles ϵ_{nuc} . U hvězd s nižší metalicitou bychom

v rámci HB také očekávali výraznou modrou smyčku (k vyšším T_{eff}). Počáteční abundance helia byla zvolena $Y = 0,274$, metalicita $Z = 0,01954$, opacity dle Grevesse a Noels (1993), parametr konvekce $\alpha = 2,1$, parametrický Reimersův vítr (ve fázi RGB) s účinností $\eta = 0,6$, Blockerův vítr (AGB) s $\eta = 0,1$.



Obr. 99 — Kippenhahnův diagram (pro $M = 1 M_{\odot}$) v pozdních fázích vývoje (RGB až WD). Vyznačeny jsou nejvýše 2 největší konvektivní zóny a 2 zóny hoření (H, He). Zejména na konci fáze RGB dochází ke ztrátě na $0,7 M_{\odot}$, později až na $0,5 M_{\odot}$. Vnější konvektivní zóna ustupuje před tenkou slupkou H. He záblesk zde nastává v čase asi 11,85 Gyr. Na konci je patrné dohořívání obou slupek až k povrchu. Detail vpravo zachycuje krátkou fázi TP-AGB, během které je patrných pět He záblesků ve slupce, čili tepelných pulzů. Na hranici rozlišení jsou dočasná vyhasnutí H slupky a malé konvektivní zóny.



Obr. 100 — Abundance v centru (pro $M = 1 M_{\odot}$) pro všechny izotopy uvažované sítě reakcí, zahrnující řetězec pp, cyklus CNO a reakce až po ^{24}Mg . Během fáze HB se spotřebovává He v centru. Náhlé zvýšení Y v čase 11,92 Gyr souvisí s počátkem přeměny O na C a rozšířením centrální konvektivní zóny. V konečném stadiu (WD) je jádro tvořené především kyslíkem ^{16}O a uhlíkem ^{12}C .

Pro $M \geq 1,3 M_{\odot}$ je obdobná situace, pouze poloha na hlavní posloupnosti je více vlevo nahoře. Uvádíme ji zde kvůli odlišné spektrální třídě (na MS):

F5 $\rightarrow$ dtto

Pro $M \geq 1,8 M_{\odot}$ je obdobná obdobná situace:

A5 $\rightarrow$ dtto

Pro hmotnost $M \geq 5 M_{\odot}$ sled reakcí pokračuje až za cyklus CNO (srov. obr. 90), tudíž konečné stadium je kyslíkovo/neonový/hořčíkový bílý trpaslík:

B4 $\rightarrow$ SGB $\rightarrow$ RGB $\rightarrow$ HB $\rightarrow$ AGB $\rightarrow$ TP-AGB $\rightarrow$ post-AGB $\rightarrow$ NB
 $\rightarrow$ O/Ne/Mg WD

Při hmotnosti $M \geq 10 M_{\odot}$ je natolik vysoký zářivý výkon, že přechody mezi fázemi jsou na HR diagramu víceméně vodorovné. O moc výše už hvězdy ani být nemohou, neboť se blíží Eddingtonově limitě. Jeví se jako modří nebo červení veleobři, v nichž vznikne jádro Fe, což končí explozí supernovy typu II a konečné stadium je zpravidla neutronová hvězda (obr. 104):

B1 $\rightarrow$ BSG $\rightarrow$ RSG $\rightarrow$ SN $\rightarrow$ NS

Pro $M \geq 20 M_{\odot}$ lze očekávat natolik zásadní ztrátu hmoty hvězdným větrem, že vznikne WR hvězda s atmosférou obohacenou o ^{14}N . Konečné stadium je jistě neutronová hvězda nebo černá díra, podle toho, je-li exploze supernovy úspěšná či nikoli:

O8 $\rightarrow$ BSG $\rightarrow$ WN $\rightarrow$ SN $\rightarrow$ NS nebo BH

Pro $M \geq 25 M_{\odot}$ také vznikne WR hvězda, ale její atmosféra je navíc obohacená o ^{12}C ; končí spíše kolapsem do černé díry:

O7 $\rightarrow$ BSG $\rightarrow$ WN $\rightarrow$ WC $\rightarrow$ SN $\rightarrow$ BH

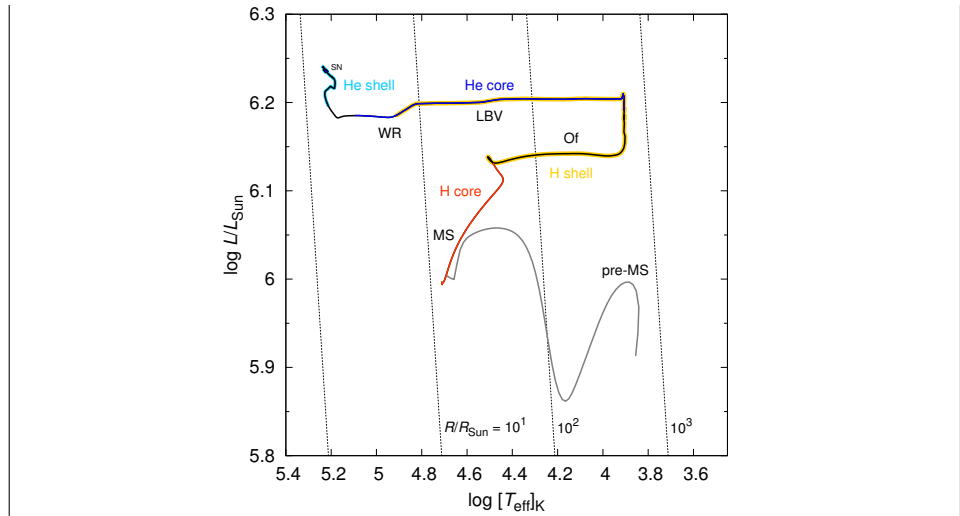
Pro $M \geq 40 M_{\odot}$ lze po opuštění hlavní posloupnosti odlišit stadium Of, ale jinak je situace obdobná:

O5 $\rightarrow$ Of $\rightarrow$ WN $\rightarrow$ WC $\rightarrow$ SN $\rightarrow$ NS nebo BH

Konečně pro $M \geq 85 M_{\odot}$ očekáváme fázi výrazné proměnnosti (LBV), jinak je situace obdobná obdobné (viz obr. 101, 102, 103):

O2 $\rightarrow$ Of $\rightarrow$ LBV $\rightarrow$ WN $\rightarrow$ WC $\rightarrow$ SN $\rightarrow$ BH

Zdůrazněme, že exploze supernovy může mít vícero možných výsledků; i pro prakticky stejnou počáteční hmotnost M_i se liší konečná hmotnost M_f . Funkce $M_f(M_i)$ s více hodnotami ovšem není funkce! Důvodem jsou patrně interakce mezi

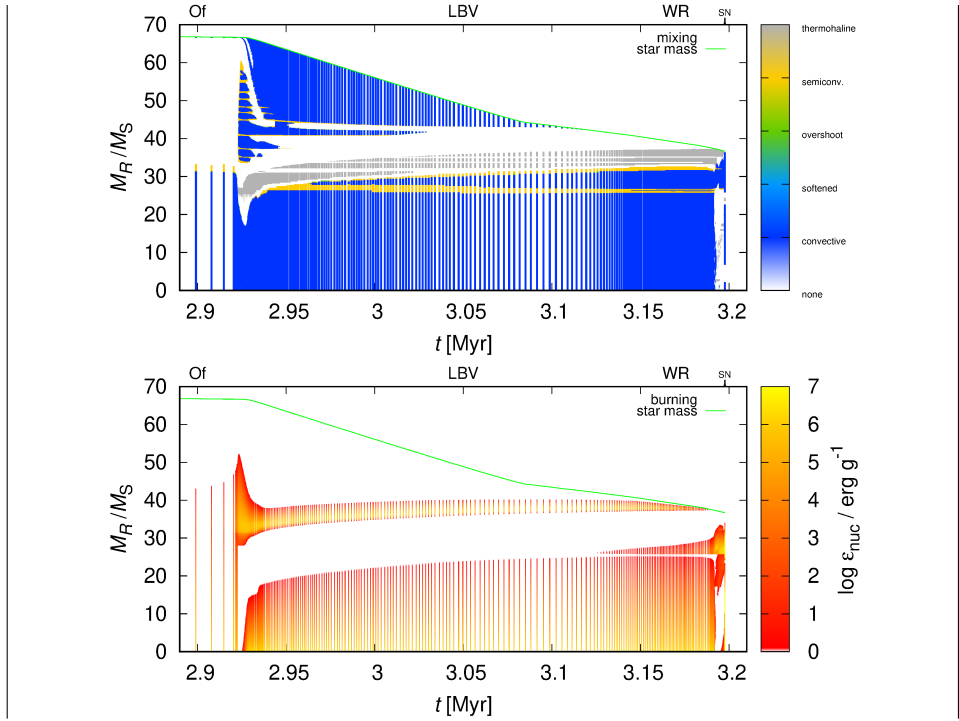


Obř. 101 — HR diagram pro hvězdu s počáteční hmotností $M = 85 M_{\odot}$. Metalicita byla volena $Z = 0,02$, opacity dle Grevesse a Sauval (1998) pro látku obohacenou o C/O (tzv. typ 2), účinnost větru $\eta = 0,8$ (dle Vink aj. 2001, Nugis a Lamers 2000), parametr konvekce $\alpha = 1,5$ (dle Henyey aj. 1965), dále bylo použito Ledouxovo kritérium, parametr semikonvekce $\alpha_{\text{semi}} = 0,01$, termohalinní cirkulace $\alpha_{\text{th}} = 2$ (Kippenhahn aj. 1980), přestřelování $\alpha_{\text{ov}} = \alpha$, s exponenciální poklesem popsáním $f_0 = 0,0005$, $f_{\text{ov}} = 0,001$. Na grafu je zobrazen relativně malý rozsah zářivých výkonů. Hvězda nepostoupila ani do fáze RGB mimo jiné díky ztrátě hmoty způsobené větrem.

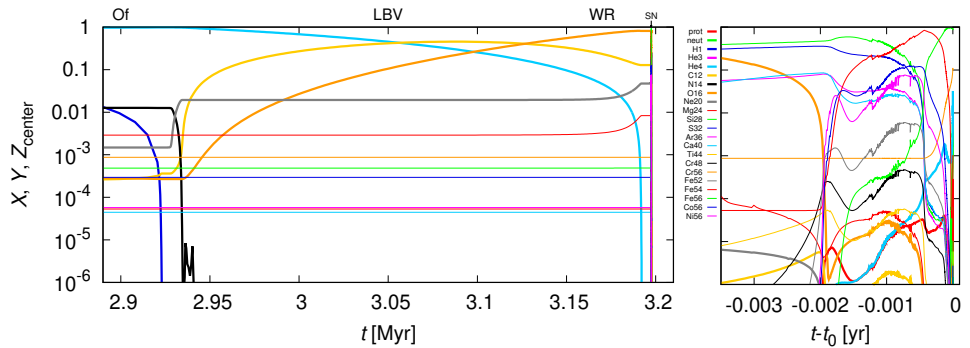
Výpočet byl zastaven na začátku kolapsu, před explozí SN.

několika slupkami C, O, které velmi citlivě závisejí na jejich vzájemných vzdálenostech (Pejcha a Thompson 2015, Sukhbold aj. 2018).

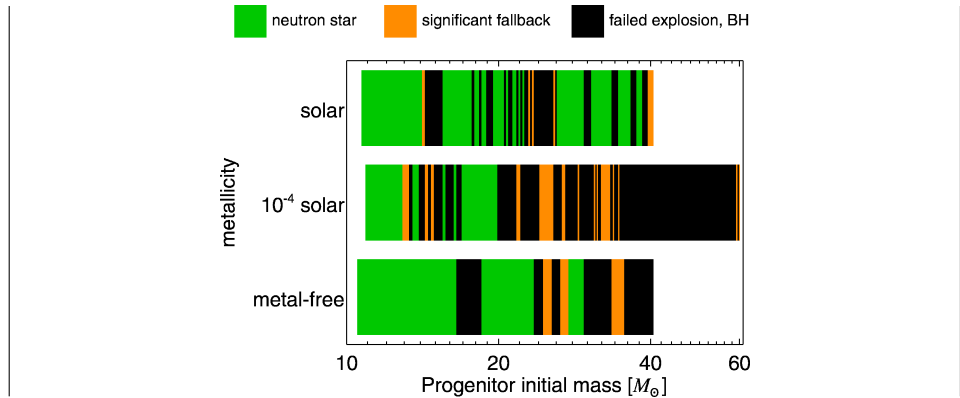
- [124] GREVESSE, N., NOELS, A. *Cosmic abundances of the elements*. in Origin and evolution of the elements, eds. M. Prantzos, E. Vangioni-Flam, M. Casse, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [125] GREVESSE, N., SAUVAL, A. J. *Standard solar composition*. *Space Sci. Rev.*, **85**, 161, 1980.
- [126] HARMANEC, P., BROŽ, M. *Stavba a vývoj hvězd*. Praha: MatfyzPress, 2011. ISBN 97880-73781651.
- [127] HENYEY, L., VARDYA, M. S., BODENHEIMER, P. *Studies in stellar evolution. III. The calculation of model envelopes*. *Astrophys. J.*, **142**, 841, 1965.
- [128] HOLWEGGER, H., MÜLLER, E. A. *The photospheric barium spectrum - Solar abundance and collision broadening of BA II lines by hydrogen*. *Sol. Phys.*, **39**, 19–30, 1974.
- [129] IBEN, I. *Stellar evolution physics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. ISBN 97811070-16569.
- [130] KIPPENHAHN, R., RUSCHENPLATT, G., THOMAS, H.-C. *The time scale of thermohaline mixing in stars*. *Astron. Astrophys.*, **91**, 175, 1980.
- [131] LANGER, N., FRICKE, K. J., SUGIMOTO, D. *Semiconvective diffusion and energy transport*. *Astron. Astrophys.*, **126**, 207, 1983.
- [132] MAEDER, A. *Physics, formation and evolution of rotating stars*. Berlin: Springer-Verlag, 2009. ISBN 9783540769484.
- [133] MIHALAS, D., MIHALAS, B. W. *Foundations of radiation hydrodynamics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1984. ISBN 0195034376.



Obr. 102 — Oddělený Kippenhahnův diagram (pro $M = 85 M_{\odot}$), zachycující vývoj po MS. Nahoře jsou zobrazeny zóny promíchávání, s rozlišením konvekce (modře), přestřelování (zeleně) semikonvekce (žlutě) a termohalinní cirkulace (šedě). Dole je znázorněn měrný výkon ϵ termojaderných reakcí s barevnou logaritmickou škálou. Na konci fáze Of, kdy hoří H ve slupce a He v centru, se v nitru nachází 25 zón promíchávání. Ve fázi LBV je zřetelná ztráta hmoty $M(t)$ až na méně než $40 M_{\odot}$. Ve fázi WR se vodíková slupka odhalí na povrchu a záhy zanikne, neboť se spotřebuje prakticky všechen vodík. Slupek hoření těžších prvků je nakonec ve hvězdě vícero.



Obr. 103 — Abundance v centru (pro $M = 85 M_{\odot}$) a detail těsně před explozí SN, se škálou v rocích. Po přeměně He na C/O velmi rychle proběhne série reakcí, kdy zachycováním částic α vzniknou jádra se sudým Z a $N = Z$, tj. zejména ^{52}Fe , ^{56}Ni , který se ovšem záhy rozpadá dvakrát β^+ . Při vzniku jádra ^{56}Fe se vývoj odehrává na škále hodin; samotný kolaps poté na škále sekund.



Obr. 104 — Konečná stadia hvězd různých počátečních hmotností M a metalicit Z . Pro jednorozměrné modely předchůdců byla použita jednoduchá parametrizace následné exploze, $L_{\nu e}/L_{\text{crit}} = p[\dot{M}/(0.4 M_{\odot} \text{s}^{-1})]^q$, se zvolenými parametry $p = 0.18$, $q = 1.5$, tak aby odpovídaly 2D nebo 3D modelům explozí. Zeleně jsou značeny neutronové hvězdy, černě černé díry, oranžově díry vznikající zpětným pádem. Převzato z Pejcha a Thompson (2015).

- [134] MONTALBÁN, J. AJ. *Testing convective-core overshooting using period spacings of dipole models in red giants*. *Astrophys. J.*, **766**, 118, 2013.
- [135] NUGIS, T., LAMERS, H. *Mass-loss rates of Wolf-Rayet stars as a function of stellar parameters*. *Astron. Astrophys.*, **360**, 227, 2000.
- [136] PAXTON, B. AJ. *Modules for experiments in stellar astrophysics (MESA)*. *Astrophys. J. Suppl. S.*, **192**, 3, 2011.
- [137] PAXTON, B. AJ. *Modules for experiments in stellar astrophysics (MESA): Planets, oscillations, rotation, and massive stars*. *Astrophys. J. Suppl. S.*, **208**, 4, 2013.
- [138] PAXTON, B. AJ. *Modules for experiments in stellar astrophysics (MESA): Binaries, pulsations, and explosions*. *Astrophys. J. Suppl. S.*, **220**, 15, 2015.
- [139] PEJCHA, O., THOMPSON, T. A. *The landscape of neutrino mechanism of core-collapse supernovae: Neutron star and black hole mass functions, explosion energies, and nickel yields*. *Astrophys. J.*, **801**, 90, 2015.
- [140] SUKHBOLD, T., WOOSLEY, S. E., HEGER, A. *High resolution study of presupernova core structure*. *Astrophys. J.*, accepted, 2018.
- [141] ULRICH, R. K. *Thermohaline convection in stellar interiors*. *Astrophys. J.*, **172**, 165, 1972.
- [142] VIALLET, M. AJ. *Turbulent convection in stellar interiors. III. Mean-field analysis and stratification effects*. *Astrophys. J.*, **769**, 1, 2013.
- [143] VINK, J. S., DE KOTER, A., LAMERS, H. *Mass-loss predictions for O and B stars as a function of metallicity*. *Astron. Astrophys.*, **396**, 574, 2001.

A Skaláry, vektory a operátory

Mějme reálné číslo (skalár), označované jednoduše a . Dále mějme vektor, který lze zapsat ve vektorové, složkové nebo indexové notaci:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_i. \quad (328)$$

Skalární součin. Skalární součin dvou vektorů je číslo definované jako:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \equiv a_i b_i, \quad (329)$$

přičemž jeho hodnota je zároveň rovna $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha$, kde vystupuje kosinus sevřeného úhlu. Výraz $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = a^2$ je proto velikost vektoru na druhou.

Vektorový součin. Vektorový součin dvou vektorů je vektor definovaný jako:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}a_2a_3 - \hat{i}a_3b_2 + \hat{j}a_3b_1 - \hat{j}a_1b_3 + \hat{k}a_1b_2 - \hat{k}a_2b_1 = \epsilon_{ijk}a_jb_k. \quad (330)$$

Jeho směr je kolmý k $\mathbf{a}$ i k $\mathbf{b}$, přičemž jeho velikost $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha$, kde vystupuje sinus sevřeného úhlu. Výraz $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ je tudíž nulový vektor.

Mezi zmiňovanými součiny platí identita nazývaná mnemotechnicky „bác mínus cáb“:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (331)$$

která se často užívá při úpravách vektorových rovnic.

Jako skalární pole označujeme funkci přiřazující číslo každému bodu prostoru, např. jde o hustotu $\rho(\mathbf{r})$. Vektorové pole je funkce přiřazující vektor každému bodu prostoru, např. rychlost $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Různé derivace těchto funkcí je možné zapisovat elegantně pomocí diferenciálních operátorů.

Operátor gradientu. Operátor gradientu (čes. stoupání) je vektor definovaný jednoduše v kartézských souřadnicích:

$$\text{grad} \equiv \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Gradient skalárního pole $\rho(\mathbf{r})$ je tedy vektor $\nabla \rho$ v tom směru, ve kterém ρ nejvíce stoupá (viz obr. 105).

Operátor divergence. Operátor divergence (čes. rozbíhavost) úzce souvisí se skalárním součinem:

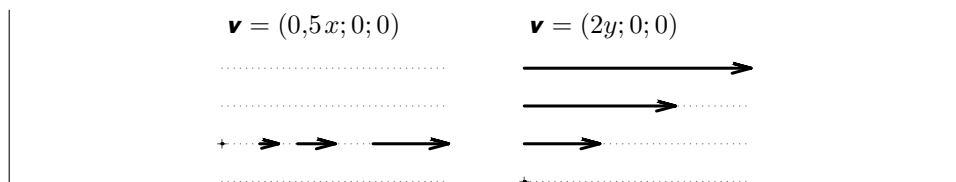
$$\operatorname{div} \equiv \nabla \cdot \equiv \frac{\partial ?_x}{\partial x} + \frac{\partial ?_y}{\partial y} + \frac{\partial ?_z}{\partial z}.$$

Divergence vektorového pole $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ je skalár $\nabla \cdot \mathbf{v}$, který je kladný, pokud se vektory v okolí daného místa (spíše) rozbíhají (obr. 106).

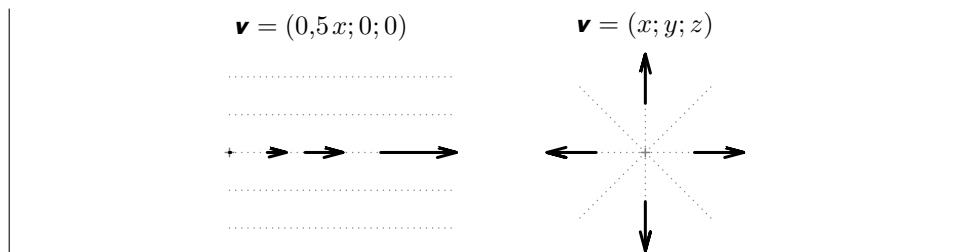
Operátor rotace. Operátor rotace (čes. stáčení) naopak souvisí s vektorovým součinem:

$$\operatorname{rot} \equiv \nabla \times \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ?_x & ?_y & ?_z \end{vmatrix}$$

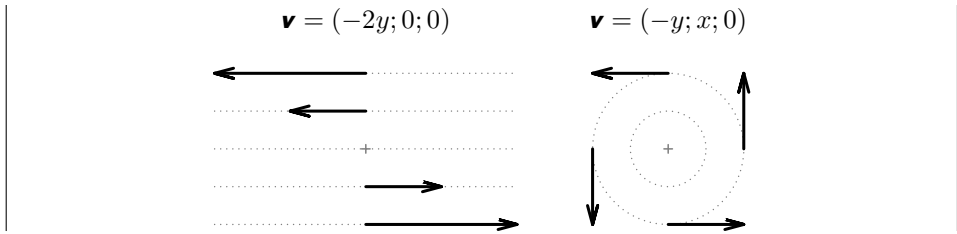
Rotace vektorového pole $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ je vektor $\nabla \times \mathbf{v}$, jehož složka z je kladná, pokud se vektory v okolí (rovině x, y) stáčíjí proti směru hodinových ručiček; $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ je pak kladné a $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ záporné (obr. 107).



Obr. 105 — Příklady skalárních polí $v_x(\mathbf{r})$ stoupajících. Vlevo je pole $v_x = 0,5x$, jehož $\nabla v_x = (0,5; 0; 0)$. Vpravo je $v_x = 2y$, čili $\nabla v_x = (0; 2; 0)$. Zde jsme pro názornost vynechali fyzikální jednotky. Odpovídající proudnice jsou znázorněny šedě tečkovaně. Namísto skalárního pole $\rho(\mathbf{r})$ jsme zvolili jednu ze složek rychlosti, aby se nám veličina dobře kreslila. Kdybychom operátor gradientu aplikovali na vektorové pole $\nabla \mathbf{v}$, získali bychom tenzor 2. řádu, tzn. matici 3×3 s řádky $\nabla v_x, \nabla v_y, \nabla v_z$.



Obr. 106 — Příklady vektorových polí $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ s kladnou rozbíhavostí. Vlevo je pole $\mathbf{v} = (0,5x; 0; 0)$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,5$. Vpravo $\mathbf{v} = (x; y; z)$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 3$.



Obr. 107 — Příklady vektorových polí $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ s kladným stáčením v rovině xy . Vlevo je pole $\mathbf{v} = (-2y; 0; 0)$, $\nabla \times \mathbf{v} = (0; 0; 2)$. Vpravo $\mathbf{v} = (-y; x; 0)$, $\nabla \times \mathbf{v} = (0; 0; 2)$.

Křivočaré souřadnice. V křivočarých souřadnicích mají operátory podstatně složitější vyjádření. Namísto kartézských x, y, z mějme jiné ortogonální, ale obecně křivočaré souřadnice u, v, w . Diferenciál polohového vektoru:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw$$

upravíme pomocí velikostí parciálních derivací:

$$h_u \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|, \quad h_v \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|, \quad h_w \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| \quad (332)$$

a bázových vektorů křivočarých souřadnic na:

$$d\mathbf{r} = h_u \mathbf{e}_u du + h_v \mathbf{e}_v dv + h_w \mathbf{e}_w dw.$$

Element vzdálenosti je pak dán:

$$ds^2 = (h_u du)^2 + (h_v dv)^2 + (h_w dw)^2, \quad (333)$$

element různě orientovaných ploch:

$$dS_u = h_v h_w dv dw, \quad dS_v = h_u h_w du dw, \quad dS_w = h_u h_v du dv \quad (334)$$

a element objemu:

$$dV = h_u h_v h_w du dv dw. \quad (335)$$

Nakonec bez odvození uvádíme vyjádření základních operátorů [144]:

$$\nabla f = \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right), \quad (336)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial f_u h_v h_w}{\partial u} + \frac{\partial h_u f_v h_w}{\partial v} + \frac{\partial h_u h_v f_w}{\partial w} \right), \quad (337)$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u f_u & h_v f_v & h_w f_w \end{vmatrix}, \quad (338)$$

$$\Delta f \equiv \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right]. \quad (339)$$

Sférické souřadnice. Pro konkrétní případ sférických souřadnic bychom měli:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \vartheta,$$

odkud:

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta} = 1, \quad (340)$$

$$h_\vartheta = r, \quad (341)$$

$$h_\varphi = r \sin \vartheta, \quad (342)$$

které se použijí pro dosazení do (333) až (339).

[144] *Gradient, divergence and curl in curvilinear coordinates.* [online] [cit. 2017-05-05].
https://www.jfoadi.me.uk/documents/lecture_mathphys2_05.pdf.

B Tenzorový počet

Diáda. Patrně nejjednodušším tenzorem (2. řádu) jsou součiny složek dvou vektorů.⁵⁶

$$\mathbf{ab} = a^i b^j = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix}, \quad (343)$$

neboli *diáda*. Vypadá jako matice a od toho se odvíjejí vlastnosti diády. Skalární součin zprava se sloupcovým vektorem $\mathbf{c}$ (dle pravidel násobení matic) je vektor:

$$\begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} = (a^1(b^1 c^1 + b^2 c^2 + b^3 c^3); a^2(\dots); a^3(\dots)) . \quad (344)$$

Skutečně obdržíme $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, čili vektor ve směru $\mathbf{a}$, s velikostí úměrnou projekci $\mathbf{c}$ do směru $\mathbf{b}$. Při násobení řádkovým vektorem zleva lze obdobně očekávat $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$. Operace evidentně není komutativní. Chová se trochu jako „směrovník“: přiložíme vektor a obdržíme jiný vektor.

Další častou operací je skalární součin diády s diádou, což je tenzor (opět diáda):

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{ad} . \quad (345)$$

Naopak *dvoutečkový* součin diády s diádou je skalár:

$$\mathbf{ab} : \mathbf{cd} = \sum_i \sum_j a^i b^j c^i d^j . \quad (346)$$

Elipsoid. Na tenzor je také možné nahlížet jako na elipsoid. Implicitní rovnice elipsoidu (v základní orientaci) je totiž:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 . \quad (347)$$

Z diády obdržíme rovnici příslušného elipsoidu jako:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{ab} \cdot \mathbf{r} = 1 . \quad (348)$$

Roznásobíme-li:

$$\begin{aligned} (xa^1 + ya^2 + za^3)(xb^1 + yb^2 + zb^3) &= \\ = x^2 a^1 b^1 + y^2 a^2 b^2 + z^2 a^3 b^3 + xy(a^1 b^2 + a^2 b^1) &+ xz(a^1 b^3 + a^3 b^1) + yz(a^2 b^3 + a^3 b^2), \end{aligned}$$

⁵⁶ abychom dodrželi konvenci z relativity, píšeme indexy nahoře (viz dále)

což je elipsoid vzhledem k osám natočený, s poloosami $A = 1/\sqrt{a_1 b_1}$, atd. Kdyby byl diagonální, sladěný s osami, měli bychom zřejmě:

$$\begin{pmatrix} 1/A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/C^2 \end{pmatrix}.$$

Operátor divergence. Divergence tenzoru je vektor:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T^{11}}{\partial x} + \frac{\partial T^{21}}{\partial y} + \frac{\partial T^{31}}{\partial z}; \\ \frac{\partial T^{12}}{\partial x} + \frac{\partial T^{22}}{\partial y} + \frac{\partial T^{32}}{\partial z}; \\ \frac{\partial T^{13}}{\partial x} + \frac{\partial T^{23}}{\partial y} + \frac{\partial T^{33}}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (349)$$

obsahující v řádku divergence sloupců. Pokud by šlo o diádu, nezapomeňme, že operátor působí doprava na *obě* komponenty, tzn. $\nabla \cdot \mathbf{ab} = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}$.

Další příklady. Praktickým příkladem je tenzor napětí σ^{ij} , $[\sigma^{ij}] = \text{Pa}$, vystupující např. v elementárním vztahu $\mathbf{F}/dS = \mathbf{n} \cdot \sigma^{ij}$, tzn. na plochu dS s normálou $\mathbf{n}$ působí síla $\mathbf{F}$ (obecně v odlišném směru). Kdyby $\mathbf{n} = (1; 0; 0)$, jednalo by se o plochu v rovině yz , přičemž příslušné napětí je v prvním řádku σ^{1j} . Toto byla ostatně veličina, která vedla k zavedení tenzorů, neboť ital. *tensio* = napětí; pak je ovšem pleonasmem.

Nebo vezměme tenzor momentu setrvačnosti I^{ij} , $[I^{ij}] = \text{kg m}^2$, $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$, tzn. při otáčení okolo osy $\vec{\omega}$ by mělo těleso moment hybnosti $\mathbf{L}$ (v téže směru), anebo opačně ($\mathbf{L}$ se zachovává, takže se odpovídajícím způsobem mění $\vec{\omega}$).

Obdobně tenzor malých deformací ϵ^{ij} , $[\epsilon^{ij}] = \text{m m}^{-1} = 1$, $d\mathbf{u} = \epsilon^{ij} \cdot d\mathbf{r}$, tzn. jak se změní posunutí $\mathbf{u}$ v deformovaném materiálu, když se posuneme o $d\mathbf{r}$.

Zcela jiným příkladem je ovšem metrický tenzor $g_{\mu\nu}$, mající obecně různé jednotky složek, $[g_{00}] = \text{m}^2 \text{s}^{-2}$, $[g_{11}] = 1$, atd. v závislosti na tom, jaké (křivočaré) souřadnice používáme. Známe jej ze vztahu $ds^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$, přičemž $g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu}$ obsahuje skalární součiny bází; tzn. mezi dvěma událostmi, které se liší o dx^{μ} , je vzdálenost ds . Nejenže zde má řecké indexy 0..3, protože popisujeme čtyřrozměrný časoprostor, ale především má jiné jednotky, „něco na metr“. Může to být trochu obtížné poznat, protože to může být také m^2 na $\text{m}^2 = 1$ Naznačuje nám to, že se bude chovat *jinak* při transformaci souřadnic.⁵⁷ V rovnicích nelze bez rozmyslu kombinovat tenzory s indexy dole a nahoře. Musíme přece dodržovat jednotky! V Einsteinových rovnicích pro $g_{\mu\nu}$ je ostatně na pravé straně tenzor energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$, nikoli $T^{\mu\nu}$, i když samotná hustota energie a hybnosti není „na metr“.

⁵⁷ proto píšeme indexy dole

Kontravariantní a kovariantní složky. Dokonce můžeme čekat, že se mohou lišit jednotlivé složky tenzoru. Složka *kontravariantní* má index nahoře; při zvětšení báze dochází ke zmenšení složek. Chová se jako souřadnice, diferenciál souřadnic nebo obyčejný vektor. Ostatně si představme též vektor $\mathbf{v}$, pouze v nové bázi:

$$\begin{array}{ll} \text{---> } \mathbf{e}_x & \text{-----> } \mathbf{e}'_x \\ \text{---> } \mathbf{v} = (1; 0; 0) & \text{---> } \mathbf{v}' = (0,5; 0; 0) \end{array}$$

Naopak *kovariantní* má index dole; zvětšení báze vede kupodivu ke zvětšení složek. Chová se totiž jako gradient (derivace podle souřadnic, „něco na metr“), báze, kovektor, též lineární forma. Mějme též průběh funkce ρ , novou bázi a podívejme se, jak se změní gradient $\nabla\rho$:

$$\begin{array}{ll} \text{---> } \mathbf{e}_x & \text{-----> } \mathbf{e}'_x \\ \text{---> } \nabla\rho = (1; 0; 0) & \text{-----> } \nabla\rho' = (2; 0; 0) \end{array}$$

což nejlépe osvětluje druhý ascii-art:

$$\begin{array}{ll} \rho \wedge & \rho \wedge \\ |. & |. \\ |. & |. \\ |. & |. \\ |---|--> x & |-----|--> x' \end{array}$$

Mezi kontravariantními a kovariantními složkami existuje vztah duality. Zdůrazníme pro jistotu, že skalár na volbě báze nikdy nezávisí, avšak vektor nebo tenzor vždy. Prvnímu typu odpovídá transformace ($x^i \rightarrow x^{j'}$):

$$v^{j'} = \sum_i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} v^i, \quad (350)$$

takže vskutku zvětšení báze (zmenšení čárkovaných souřadnic) odpovídá zmenšení složek vektoru. Druhý typ transformace spočívá v prostém prohození:

$$u_{j'} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} u_i. \quad (351)$$

Obecně je tenzor cokoliv, co splňuje následující definici pomocí transformace:

$$T^{mn..}_{op..}{}' = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \cdots \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^j} \cdots \frac{\partial x^k}{\partial x^{o'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{p'}} \cdots T^{ij..}_{kl..}. \quad (352)$$

Z toho je patrné, že ne každá matice je tenzor!

Inverzní tenzor. Inverzní tenzor k T_{ij} je definován pomocí vztahu:

$$\sum_j T^{ij} T_{jk} = \delta^i_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (353)$$

kde δ^i_k označuje Kroneckerovo delta (též jednotkovou matici). Hledání inverzního tenzoru je hledáním inverzní matice, čili soustavou rovnic pro j krát j neznámých. Jeho složky mají pochopitelně reciproké jednotky, jinak bychom nikdy nedostali 1.

Pro nejjednodušší metrický tenzor (plochý časoprostor, kartézské souřadnice):

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

by inverzní byl zřejmě:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metrický tenzor a jeho inverzi lze použít pro snižování indexu:

$$T_\mu{}^\nu = \sum_\eta g_{\mu\eta} T^{\eta\nu} \quad (354)$$

nebo zvyšování indexu:

$$T^\mu{}_\nu = \sum_\eta g^{\mu\eta} T_{\eta\nu}. \quad (355)$$

Mimochodem pak nutně $g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$. Můžeme tak měnit tenzory kontravariantní na kovariantní a naopak.

Kovariantní derivace. Když se báze mění, nezbyvá než derivovat jako součin. Vezměme nejprve vektor:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sum_i v^i \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i + \sum_i v^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}, \quad (356)$$

kde derivace báze podle souřadnice je určitě vektor, který lze opětovně vyjádřit jako lineární kombinaci bází:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k, \quad (357)$$

přičemž Γ^k_{ij} se nazývají Christoffelovy symboly. Nejedná se o žádné operátory ani tenzory, nýbrž koeficienty. Pak:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i + \sum_i \sum_k v^i \Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k = \sum_i \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \sum_k v^k \Gamma^i_{kj} \right) \mathbf{e}_i, \quad (358)$$

pokud bez újmy zaměníme ve druhém členu $i \leftrightarrow k$. Zkrácený složkový zápis by byl:⁵⁸

$$\overbrace{v^i_{;j}}^{\text{kovariantní derivace}} = \underbrace{v^i_{,j}}_{\text{parciální}} + \overbrace{\sum_k v^k \Gamma^i_{kj}}^{\text{afinní konexe}} \quad (360)$$

Pro tenzor obdobně (představme si jej jako diádu):

$$T^{ij}_{;k} = T^{ij}_{,k} + \sum_l T^{lj} \Gamma^i_{lk} + \sum_l T^{il} \Gamma^j_{lk}, \quad (361)$$

kde jsme pouze museli poposunout indexy $j, k \rightarrow k, l$, protože tenzor sám má dva.

Jediný tenzor, který se při *kovariantní* derivaci nemění, je právě metrický $g_{\mu\nu}$. Je to logické, všechny změny bází jsme pracně kompenzovali. To ale znamená, že vlevo máme nulu, a můžeme vyjádřit Γ z g ! Konkrétně:

$$0 = g_{\mu\nu,\kappa} - \sum_\lambda g_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} - \sum_\lambda g_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\kappa}$$

a po (mnoha) úpravách:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \sum_\lambda \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}). \quad (362)$$

[145] DVOŘÁK, L. *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*. Praha: SPN, 1984.

[146] KULHÁNEK, P. *Obecná relativita*. [online] [cit. 2018-01-26].

<http://www.aldebaran.cz/studium/otr.pdf>.

[147] MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. ISBN 0716703440.

⁵⁸ Kdyby se jednalo o kovektor (kovariantní složku), využili bychom $(u^i u_i)_{;j} = 0$ a odvodili:

$$u_{i;j} = u_{i,j} - \sum_k u_k \Gamma^k_{ij}, \quad (359)$$

který se odlišuje mínusy a indexy.

C Co když zapomenou...

Občas se mi stane, že zapomenou nějakou důležitou rovnici: Maxwell, Planck, Einstein, Hamilton, Schrödinger, ... Co teď? Zkusím si vzpomenout!

C.1 Co když zapomenou Schrödingera?

Začneme mechanikou klasickou. Druhý Newtonův zákon znám:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (363)$$

kde $\mathbf{a}$ označuje zrychlení (tělesa), $\mathbf{F}$ sílu (na těleso) a m hmotnost (tělesa).

Namísto zrychlení a sil lze totéž popisovat pomocí energií. Když se jednotlivé energie mění, něco se děje. Celková energie H je součtem kinetické T a potenciální V ; označení H odpovídá slovu „hamiltonián“. Napišme jej konkrétně pro atom vodíku, neboli elektron; proton zde uvažujeme zcela nehybný, vytvářející pouze potenciálovou jámu:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{q}, \quad (364)$$

kde q označuje zobecněné souřadnice (zde r), p zobecněné hybnosti (zde mv), ϵ_0 permisivitu vakua, e elementární náboj. Obdobou (363) jsou *Hamiltonovy rovnice*:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = v, \quad (365)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{q^2}, \quad (366)$$

kde $dq/dt \equiv \dot{q}$ jsou zobecněné rychlosti, $\dot{p}$ zobecněné síly (resp. zrychlení po $1/m$). Pochopitelně, jednotka $[H] = \text{J}$ (joule).

V mechanice kvantové je ovšem popis jiný. Neznámou bude vlnová funkce $\Psi(\mathbf{r}, t)$, což je komplexní funkce souřadnic a času, jejíž kvadrát je hustota pravděpodobnosti; pravděpodobnost výskytu elektronu v objemu Ω je pak:

$$\mathcal{P} = \int_{\Omega} \Psi \Psi^* d\Omega; \quad (367)$$

jednotka $[\Psi] = \text{m}^{-3/2}$. I když je elektron rozprostřen, lze mu připsat hmotnost m nebo náboj e . Hledáme rovnici pro Ψ .

Nultý člen vlevo bude jistě její časová derivace, protože právě ji chceme znát! Aby byl rozměr členu J (bez Ψ), musíme jej násobit $\hbar = h/2\pi$.⁵⁹

⁵⁹ viz např. energii fotonu $E = hf$, $[h] = \text{J s}$

První člen vpravo bude nějaká prostorová derivace; změna Ψ na Ψ musí záviset. Otázka je, zda první, nebo druhá? Kdyby první ($\nabla\Psi$), záviselo by znaménko ($\partial\Psi/\partial t$) na tom, zda je stoupání tak $\nearrow$ nebo tak $\nwarrow$, což je nesmyslné. Kdyby druhá ($\nabla \cdot \nabla\Psi$), záviselo by znaménko na rozbíhavosti (sbíhavosti), obdobně jako v případě difuze, což je smysluplné. Aby byl rozměr členu $J = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$, musíme $[\nabla \cdot \nabla] = \text{m}^{-2}$ násobit $\hbar^2/m$.

Druhý člen vpravo je jen potenciál násobený Ψ , což je váhování; nelze volit jedinou hodnotu V , je-li elektron rozprostřen. Rozměr je J .

Poslední úvaha. Co kdyby Ψ byla jako rovinná vlna, $\Psi = \Psi_0 e^{i(kx+\omega t)}$?⁶⁰ Její časová derivace $\partial\Psi/\partial t = i\omega\Psi$ a prostorová derivace $\partial^2\Psi/\partial x^2 = -k^2\Psi$ by se nikdy nemohly rovnat, pokud bychom nedoplňili „i“ vlevo a „-“ vpravo. Odtud plyne Schrödingerova rovnice:

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\Psi - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \Psi. \quad (368)$$

Co vidíme bez toho, abychom ji řešili? Především *rozbíhavost*, tzn. kinetická energie, musí odpovídat *vymezování*, tzn. potenciální energii. Neznamená to, že celková energie (E) elektronu je vždy nulová! Je-li záporná, zůstává v jámě (i když ne přesně vymezeně); atom je ve vázaném stavu.

Je-li kladná, může být kdekoli od $-\infty$ do $+\infty$; atom je ve volném (ionizovaném) stavu. Vlastně pak není důvod mu říkat atom; spíše si představujme rozptyl.

Jaká je charakteristická délka, na niž se mění Ψ ? Nahradíme-li derivaci za podíl délkou L (resp. $2a$), pak:

$$0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{\Psi}{L^2}\right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{L} \Psi,$$

odkud:

$$L = \frac{2\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2},$$

což po dosazení $\epsilon_0 \doteq 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$, $\hbar \doteq 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $m \doteq 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ dá $L \doteq 2,6 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Jedná se o polovinu Bohrova poloměru, čili průměr činí čtyřikrát více (10^{-10} m). Samozřejmě je třeba být ve střehu! Blíží-li se energie nule (zdola), je atom *makroskopický*, klidně takhle (10 cm):

—————|

Ve vesmíru však nebývá atom sám...

C.2 Co když zapomenou Plancka?

Energie fotonu je $E = h\nu$, kde h je Planckova konstanta a ν frekvence. Ve statistické fyzice se přitom energie (jedné částice) poměřuje teplotou pomocí kT , kde $k \doteq$

⁶⁰ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ je Boltzmannova konstanta a T termodynamická teplota. Proto užiji poměr $h\nu/(kT)$.

Rovnovážné rozdělovací funkce obsahují exponenciály, např. $e^{\frac{h\nu}{kT}}$, $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$. Která je správně? Nesmí divergovat pro $\nu \rightarrow \infty$, tzn. druhá, neboli $1/e^{\frac{h\nu}{kT}}$. Ve jmenovateli je ovšem třeba oprava pro $\nu \rightarrow 0$, abychom obdrželi Rayleighův–Jeansův zákon, což je polynom. Napišu si Taylorův rozvoj:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (369)$$

a ihned vidím, že musím odečíst „1“, $1/(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)$, abych dostal polynom (vyšší mocniny lze zanedbat).

Nakonec si musím uvědomit, co chci. Monochromatickou intenzitu, neboť je nejpodrobnější veličinou popisující záření. Její jednotka $[I_\nu] = \text{J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$. Zatím mám jednotku 1. V úvahu připadají h , c , ν , jejichž jednotky jsou J s , m s^{-1} , $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ (asi tam nebude hmotnost Marsu). Určitě tam bude h (kvůli J), určitě $1/c^2$ (kvůli m^{-2}), což konec konců zachrání ν^3 . Číselný faktor 2 si třeba pamatovat, případně si vzpomenout na slovo „polarizace“. Odtud plyne Planckův zákon:

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (370)$$

Kdo chce, přeznačí si na B_ν , což naznačuje, že jde o **absolutně černé těleso**.

C.3 Co když zapomenu Sahu?

Jedná se rovnici popisující ionizaci, resp. *rekombinaci*, vysvětlující vznik spektrálních čar *. Především je třeba si uvědomit, jaké veličiny přicházejí vůbec v úvahu. Jistě ionizační energie E_i ; pro vodík $13,6 \text{ eV}^{61}$. Dále termodynamická teplota T a Boltzmannova konstanta k (jsou vždy spolu, protože kT je energie). Co dalšího? Možná Planckova konstanta h , elementární náboj e (ne, už je zahrnut v E_i), hmotnost elektronu m_e , rychlost světla c (ne, $m_e c^2$ je moc; není to tvoření e^-). Nesmím ovšem zapomenout na koncentraci n ! Kdyby $n \rightarrow 0$, nikde nic (ani i., ani r.). A samozřejmě stupeň ionizace $X \equiv \frac{n_e}{n}$; uvažíme jen 2 stavy: $X = 0$ neutrální, $X = 1$ úplně ionizovaný. Kromě číselného faktoru (10^0) tam horko-těžko může být něco jiného...

Ve statistické fyzice se ukazuje, že se v rovnováze realizuje nejpravděpodobnější rozdělení, obvykle obsahující exponenciály. V našem případě jde o $e^{-\frac{E_i}{kT}}$, neboť pro $T \rightarrow 0$, jde $e \dots \rightarrow 0$ a $X \rightarrow 0$, jak má. Naopak pro $T \rightarrow \infty$, $e \dots \rightarrow 1$, $X \rightarrow 1$. Že by tedy $X = e^{-\frac{E_i}{kT}}$? Nikoliv! Exponenciála sama nikdy není pravděpodobnost.

Na levé straně musí být *poměr* stavů $\frac{X}{1-X}$. Pro $X \rightarrow 1$ (úplnou ionizaci) však diverguje, tzn. že v čitateli musí být něco divergujícího (T). Otázka pak je, v jaké mocnině? Alternativně ve jmenovateli něco jdoucího k nule (n). Než se provede

⁶¹ $1 \text{ eV} = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ (přesně; viz SI 2019)

jednotková (též rozměrová) analýza, sepíšu si jednotky: $[kT] = \text{J} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$, $[n] = \text{m}^{-3}$, $[h] = \text{J s}$, $[hc] = \text{J m}$, $[mc^2] = \text{J}$.

Začnu koncentrací. Ne, začnu chemickou reakcí:



podle které mohu vidět, že ionizace $\propto n$, rekombinace $\propto n_{\text{p}} n_{\text{e}} = n_{\text{e}}^2$ (spec. pro dvouhladinový vodík). Tj. zcela zásadní! Ionizace je zde zářivá (předpokládáme, že záření je vždy v rovnováze s látkou; viz Planck), je tedy úměrná přímo. Rekombinace závisí na kvadrátu, protože se musejí potkat dvě částice. Máme-li vlevo (bezrozměrný) $\frac{X}{1-X}$, musíme mít vpravo $\frac{n}{n_{\text{e}}^2}$. Rozměrově to odpovídá $[n^{-1}] = \text{m}^3$. Původně jsem uvažoval, že je pokrátím výrazem $(kT/hc)^3$, ale nechci nelogické c . Krom toho si matně pamatuji mocninu $^{3/2}$, proto postupuji takto:

$$\begin{aligned} [(kT)^{3/2} n^{-1}] &= \text{kg}^{3/2} \text{m}^6 \text{s}^{-3}, \\ [(m_{\text{e}} kT)^{3/2} n^{-1}] &= \text{kg}^3 \text{m}^6 \text{s}^{-3}, \\ [(m_{\text{e}} kT)^{3/2} n^{-1} h^{-3}] &= 1. \end{aligned}$$

Nakonec doplním faktor 2π (viz de Broglie):

$$\frac{X}{1-X} = \frac{(2\pi m_{\text{e}} kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{n}{n_{\text{e}}^2} e^{-\frac{E_{\text{i}}}{kT}}. \quad (372)$$

Kdo chce, převede všechna n vlevo a upraví na $\frac{X^2}{1-X} n_{\text{e}}$ (tzn. kvadratickou rovnici), ale ať to nedělá, protože pak není dobře vidět role koncentrací!

C.4 Co když zapomenu Maxwella?

Pro pochopení rovnic uvedených níže je asi dobré znát Gaussovu větu:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}, \quad (373)$$

kde $\mathbf{f}$ označuje vektorové pole, ∇ operátor „nabla“⁶², V objem, S plochu (hranici objemu). Rozbíhavost $(\nabla \cdot)$ odpovídá výtoku. Stejně tak Stokesovu větu:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{f} \, dS = \oint_s \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \quad (374)$$

kde s je křivka (hranice plochy). Stáčení $(\nabla \times)$ odpovídá 1 otočce.

Jde o souvislost elektřiny, magnetismu, nábojů a proudů. Především je třeba volit vhodné veličiny, které jsou intenzivní (vztažené k 1 bodu), aby byly rovnice zapsány jako diferenciální. V úvahu přicházejí zejména elektrické pole $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$

⁶² $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

a objemová hustota náboje $\varrho = q/V$ namísto náboje q . Jaký by mohl být vztah mezi $\mathbf{E}$ a ϱ ? Především, jde o vektor a o skalár, čili vůbec nepřicházejí v úvahu $\mathbf{E} \propto \varrho$, $\nabla \mathbf{E} \propto \varrho$, $\nabla \cdot \nabla \mathbf{E} \propto \varrho$, $\partial \mathbf{E} / \partial t \propto \varrho$, $\mathbf{E} \propto \nabla \times \varrho$ apod. Snad $\mathbf{E} \propto \nabla \varrho$? Ne, tj. potenciál. Nebo $\nabla \cdot \mathbf{E} \propto \varrho$? To by bylo v souladu s obrázkem náboje (+), z něhož se rozbíhají siločáry, a (373):

$$\begin{array}{c} \sim \\ | \\ \leftarrow \text{---} (+) \text{---} \rightarrow \\ | \\ \mathbf{v} \end{array}$$

První rovnice pak musí být:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \varrho, \quad (375)$$

kde ε je konstanta úměrnosti. Jmenuje se *permitivita* (pronikavost); je ve jmenovateli, protože se tak jmenuje: když je veliká, pole zasahuje daleko a v daném místě je rozbíhavost menší.

Druhá rovnice říká, že kdybychom hledali magnetické náboje, kde nic tu nic:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (376)$$

kde $\mathbf{B}$ označuje magnetické pole.

Zatím se $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ jeví zcela nezávislé, ale jedná se přece o *elektromagnetické* „dvoupole“. Vzhledem k tomu, že obojí jsou vektory, možností je asi vícero: $\mathbf{B} \propto \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \propto \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \propto \nabla \times \mathbf{E}$, $\partial \mathbf{B} / \partial t \propto \nabla \times \mathbf{E}$, $\partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2 \propto \nabla \times \mathbf{E}$, ... Jistě pole nebudou totožná. Jistě tam bude časová derivace. 1. nebo 2.? 2. lze převést na 1. Zároveň si vzpomínám, že je podezřele často $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$. Třetí rovnice proto říká, že se magnetické pole tvoří, když se elektrické pole stáčí, a to ve směru kolmém. Tvoření je časová derivace, stáčení je operace rotace, kolmost zajišťuje vektorový součin:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (377)$$

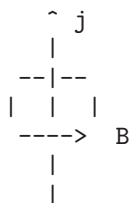
kde konstanta úměrnosti je 1, neboť jsou tak zavedeny jednotky SI (viz níže); znaménko minus je konvencí.

Zřejmě to musí platit i opačně! Čtvrtá rovnice tedy říká opak, $\partial \mathbf{E} / \partial t \propto \nabla \times \mathbf{B}$, bez opačného znaménka (viz antisymetrii $\times$).⁶³ Kvůli jednotkám zde musejí být nejednotkové konstanty; užijeme jednak výše uvedené $1/\varepsilon$ a jednak $1/\mu$, kde μ je *permeabilita* (prostupnost), neboť dovoluje „prostoupení“ ze světa magnetického do elektrického. Zároveň nesmíme zapomenout na zmiňované *proudy*, tečou-li náboje (+) ve směru pole $\mathbf{E}$ (od + k −), jde o ztrátu $\mathbf{E}$; nikoliv zdroj $\mathbf{B}$! Odtud:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j}, \quad (378)$$

⁶³ Kdybychom použili ++ nebo --, neobdrželi bychom vlnovou rovnici; byla by tma!

kde $\mathbf{j}$ označuje proudovou hustotu. Mimochodem, ve stacionárním případě (když $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$) by vyšlo $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$, tzn. okolo drátu by bylo pole podle Ampérova pravidla pravé ruky:



Jednotky se zdají nezapamatovatelné. Nicméně, zapamatujeme-li si alespoň některé, z rovnic (375) až (378) zjistíme zbývající, „aby to vyšlo“: $[\nabla] = [\nabla \cdot] = [\nabla \times] = \frac{1}{\text{m}}$, $[E] = \frac{\text{V}}{\text{m}}$, $[\varrho] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$, $[\varepsilon] = \frac{\text{C}}{\text{V m}}$; dále $[B] = \text{T}$, $[j] = \frac{\text{C}}{\text{s m}^2}$, $[\mu] = \frac{\text{T m s}}{\text{C}}$. Mj. z (381) vidíme souvislost mezi Teslou a Voltou: $\frac{\text{T}}{\text{s}} = \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$.

Přímým důsledkem (381) a (378) pro případ vakua ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) je:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E},$$

neboli:

$$\mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \underbrace{(\nabla \cdot \nabla)}_{=0} \mathbf{E},$$

odkud:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (379)$$

což je *vlnová rovnice*. Má totiž řešení v podobě nekonečné rovinné vlny, např. pro směr x :

$$f = A e^{i(kx + \omega t)};$$

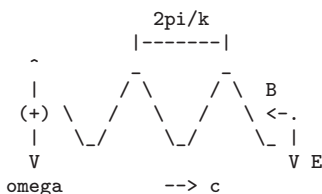
po dosazení:

$$-\omega^2 f = -\frac{1}{\mu \varepsilon} k^2 f$$

dá:

$$|\omega| = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} |k|, \quad (380)$$

což je *disperzní relace* mezi úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi f$ a vlnovým číslem $k = 2\pi/\lambda$; faktor $c = 1/\sqrt{\mu \varepsilon}$ je rychlost, shodou okolností světla. Totéž platí pro $\mathbf{B}$. Je základní vlastností vln ω nebo k ? Začneme-li zběsile kmitat (ω), začnou se šířit vlny skrz prostředí (c), což teprve určí jejich vlnovou délku (k). Čili ω .



Bez toho, abychom rovnice řešili, si představme, co se v rovnicích děje: (i) zpočátku je $\mathbf{E} = 0$; (ii) přijdu sem s nábojem ρ ; (iii) zároveň s ním přijde $\mathbf{E}$ ((375)); (iv) začnu s ním kmitat sem–tam, což je proud $\mathbf{j}$; (v) zpočátku je $\mathbf{B} = 0$; (vi) nerovnováha mezi $\mathbf{j}$ a $\mathbf{B}$ tvoří nestacionární $\mathbf{E}$ ((378)); (vii) jinde je stále $\mathbf{E} = 0$; (viii) tato změna $\mathbf{E}$ v prostoru tvoří nestacionární $\mathbf{B}$ ((381)); (ix) $\mathbf{B}$ se mění monotónně, dokud $\mathbf{j}$ nepřekmitne. Přestanu-li kmitat a ponechám-li ustálené ρ a $\mathbf{j}$, vlny odejdou a zůstane ustálené $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$.

C.5 Co když zapomenou indukovat?

Nultý člen vlevo je jistě časová derivace magnetického pole, protože právě ta nás zajímá. Tu znám z Maxwellovy rovnice:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (381)$$

ale bez znalosti elektrického pole $\mathbf{E}$ neznám nic.

Chci proto dosadit z Ohmova zákona:

$$U = RI, \quad (382)$$

kde U označuje napětí, I proud, R odpor. To nepůjde. Musíme nahradit proměnné za intenzivní (tj. vztažené k 1 bodu):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}, \quad (383)$$

kde $\mathbf{E}$ označuje zmiňované elektrické pole (V m^{-1}), $\mathbf{j}$ hustotu proudu (A m^{-2}), σ vodivost. To nepůjde. Není tam rychlost $\mathbf{v}$ plazmatu! Rychlost nábojů vystupuje mj. ve výrazu pro Lorenzovu sílu (též elektromotorickou):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

To nepůjde. Plazma je kvazineutrální, $\bar{q} = 0$. Plazma je však vodivé; náboje se v něm pohybují vzájemně. Museli bychom pak provést Lorentzovu transformaci pole elektrického, jež vytváří pole magnetické [148]. Nicméně bychom obdrželi obdobný výraz, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, a zobecnění (383) je proto:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (384)$$

Je-li v drátu proud, okolo drátu pole (viz Maxwell):

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (385)$$

kde μ označuje permeabilitu. Nesmím se ovšem nechat zmást drátěnou smyčkou, $\mathbf{B} \propto \nabla \times \mathbf{j}$, kde nevzniká lineární pole ze stáčejícího se proudu, nýbrž dvojnásobně

zatočené. Pro plazma musí platit totéž, obzvláště když jsou v něm tak volně pohyblivé náboje, které svými pohyby okamžitě kompenzují pole, $\mathbf{E} = 0$, čili můžeme předpokládat $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$.

Než dosadím do (381), uvědomím si, že $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$, když $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, musí být $-\nabla \cdot \nabla \mathbf{B}$ dle identity „bác mínus cáb“, neboli slovně: stáčení stáčení = stoupání rozbíhání – rozbíhání stoupání. Odtud:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \cdot \nabla \mathbf{B}. \quad (386)$$

Co vidíme bez toho, abychom rovnici řešili? Sama o sobě nám rovnice neřekne, jak se mění $\mathbf{B}$, protože neznáme $\mathbf{v}$, respektive jej zatím neznáme spolehlivě (ani v nitru Slunce). Pole se nicméně mění advekcí (1. člen) a difuzí (2. člen). Zatímco advekce může pole značně zesílit, zejména když se siločáry zavíjejí (při vhodném $\mathbf{v}$, např. při diferenciální rotaci), difuze obvykle způsobuje zeslabení, zejména když je v daném místě snižena vodivost σ (zvýšená rezistivita $1/\sigma$; např. při erupcích).

Nesmím také nikdy zapomínat na meze platnosti rovnic! Jednu mez určuje *Larmorův poloměr* (též *gyrační*), po němž obíhají nabitě částice v magnetickém poli. Těžko může záviset na něčem jiném než na $|\mathbf{B}|$, q , m , $|\mathbf{v}|$ částice (nikoliv plazmatu!) a těžko mohou být v čitateli a jmenovateli jinak než:

$$r_L = \frac{mv}{qB}. \quad (387)$$

Rovnice (386) platí na škálách $L \gg r_L$.

Druhou mezi je *Debyeova délka*, neboli stínění náboje jinými náboji. V Maxwellově rovnici $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho$ by derivace mohla být nahrazena škálou ($\nabla \sim 1/L$), ale jaká je typická velikost $|\mathbf{E}|$? Mikroskopická pole jsou vytvářena tepelnými pohyby částic, jejichž kinetická energie kT a elektrická energie qU jsou si řádově rovny; vztah napětí U a pole E je $E = U/L$ (jde přece o Volty na metr). Pak (po malém přeznačení):

$$l_D = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{eq}}. \quad (388)$$

Rovnice (386) platí na škálách $L \gg l_D$.

[148] SEDLÁK, B., ŠTOLL, I. *Elektřina a magnetismus*. Praha: Academia, 1987.

C.6 Co když zapomenu Lorentze?

Nejjednodušší transformace souřadnic mezi dvěma *inerciálními* soustavami (ne ' a ') pohybujícími se vzájemnou rychlostí V je zřejmě (viz Galileo):

$$t' = t, \quad (389)$$

$$x' = x - Vt. \quad (390)$$

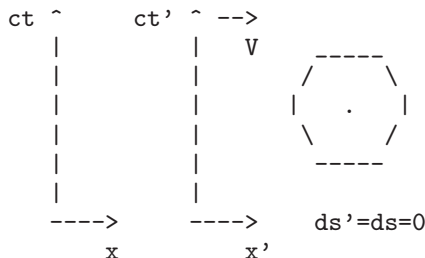
Pro dt , dx platí totéž. Interval mezi 2 událostmi, popsané ve 2 soustavách:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2,$$

$$(ds')^2 = (cdt')^2 - (dx')^2 = (cdt)^2 - (dx - Vdt)^2 \neq (ds)^2,$$

jsou různé. To je v rozporu s Michelsonovým experimentem, že se světlo šíří stejnou rychlostí (c) bez ohledu na rychlost pozorovatele (viz též obr.):

$$(ds')^2 = (ds)^2. \quad (391)$$



Zavedu proto koeficienty takové, že pro $V \ll c$ jde $\beta \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$; zajistím přitom symetrizaci mezi x a t , stejné jednotky (pomocí $\frac{1}{V}$ nebo $\frac{1}{c}$) a znaménko $-$ (protože v ds už je $-$).

Zkusím-li (chybně):

$$t' = t - \frac{\beta}{V} x,$$

$$x' = x - \gamma V t,$$

pak:

$$(ds')^2 = c^2 \left[(dt)^2 - 2dt \frac{\beta}{V} dx + \frac{\beta^2}{V^2} (dx)^2 \right] - [(dx)^2 - 2dx \gamma V dt + \gamma^2 V^2 (dt)^2];$$

koeficienty by musely splňovat $c^2(-2)\frac{\beta}{V} + 2\gamma V = 0$, $c^2 - \gamma^2 V^2 = c^2$, neboli $\gamma = 0$, $\beta = 0$. To nepůjde.

Zkusím-li (správně):

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right), \quad (392)$$

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad (393)$$

pak:

$$(ds')^2 = c^2 \gamma^2 \left[(dt)^2 - 2dt \frac{\beta}{c} dx + \frac{\beta^2}{c^2} (dx)^2 \right] - \gamma^2 [(dx)^2 - 2dx V dt + V^2 (dt)^2].$$

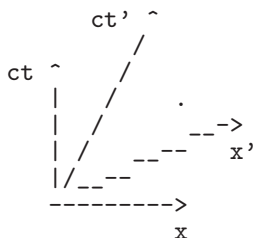
Koeficienty u $dxdt$ jsou $c^2 \gamma^2 (-2) \frac{\beta}{c} - \gamma^2 (-2)V = 0$, čili:

$$\beta = \frac{V}{c} \in \langle 0; 1 \rangle. \quad (394)$$

Koeficienty u $(dt)^2$ potom $c^2 \gamma^2 - \gamma^2 V^2 = c^2$, odkud:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \in \langle 1; \infty \rangle. \quad (395)$$

Graficky (392), (393) odpovídá zvětšení obou souřadnic faktorem γ a zároveň zmenšení o γVt , respektive o $\gamma \frac{\beta}{c}x$, tzn. „zkosení os“ (o úhel $\arctg \beta$; viz obr.).



Inverzní Lorentzovu transformaci lze triviálně získat záměnou $+v$ za $-v$:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right), \quad (396)$$

$$x = \gamma (x' + Vt'). \quad (397)$$

Co můžeme mj. vidět? Pokud pozorovatel v $'$ změří $dt \neq 0$, $dx = 0$,⁶⁴ pak pozorovatel v $'$ (dle (392)):

$$dt' = \gamma dt, \quad (398)$$

tj. dilatace (prodlužování) času. Samozřejmě nesmíme být zmateni z toho, že $dt' \neq 0$, $dx' = 0$ by vedlo na $dt = \gamma dt'$! Tj. jiná událost.

Pokud pozorovatel v $'$ změří $dt' = 0$, $dx' \neq 0$,⁶⁵ pak pozorovatel v $'$ (dle (397)) $dx = \gamma dx'$, odkud:

$$dx' = \frac{dx}{\gamma}, \quad (399)$$

tj. kontrakce (zkracování) délek. Samozřejmě...

C.7 Co když zapomenu Einsteina?

Základní otázka. Co je neznámou? Metrický tenzor. Nejjednodušší by byl:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (400)$$

tj. pro kartézské souřadnice a pro plochý časoprostor⁶⁶. Metrika určuje infinitezimální interval ds mezi dvěma událostmi:

$$(ds)^2 = g_{ik} dx^i dx^k = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (401)$$

⁶⁴ tzn. časový interval *libovolnými* hodinami na 1 místě

⁶⁵ tzn. délkový interval pravítkem v 1 okamžiku

⁶⁶ sice se užívá i „prostorčas“, ale kdo o něm přemýšlí jako o čase?

Proč „–“? Kdyby „+“, bylo by $ds = 0$ pouze pro zároveň současné a soumístné události. Zde požadujeme $ds = 0$, když jsou události *ovlivnitelné* (světelným paprskem). Čili „–“. ⁶⁷

Ve skutečnosti je neznámý:

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (402)$$

kde $\mathbf{e}_i$ jsou vektory báze. Složky jsou obecně nenulové ze dvou důvodů: (i) křivočaré souřadnice; (ii) křivý časoprostor. Mění se místo od místa (čas od času). ⁶⁸ Vzhledem k (401) zde nicméně musí být symetrie vůči záměně $i \leftrightarrow k$, tzn. $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ nezávislých složek. Jednotka $[g_{ik}x^i x^k] = \text{m}^2$, ale nelze obecně říci, jaká je $[g_{ik}]$, $[x^i]$, $[x^k]$.

Inverzní matice odpovídá duální bázi:

$$g^{ik} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k = (g_{ik})^{-1}, \quad (403)$$

neboli $g_{il}g^{lk} = \delta_i^k$ (tj. Kroneckerovo delta; jednotková matice). Operace maticového násobení s metrikou umožňuje zvyšování a snižování indexů.

Pro zapsání kýžených rovnic jsou potřeba parciální derivace (ostatně jako u všech fyzikálních zákonů), které je nutné přepsat na *kovariantní* derivace, aby se zohlednily změny báze při posunu o dx , dy atd. Pro skalár není co řešit: ⁶⁹

$$f_{;i} = f_{,i}, \quad (404)$$

neboť na bázi nezávisí. Pro vektor:

$$f^i_{;j} = f^i_{,j} + f^k \Gamma^i_{kj}, \quad (405)$$

kde jsme použili Γ se 3 indexy, neboť 2 jsou původní a 1 sčítací (relativní změna složky i při derivování dle j , k níž přispívají všechna k). Musí se pochopitelně násobit původními složkami f^k . Pro tenzor (obdobně jako pro diádu $a^i b^j$):

$$f^{ij}_{;k} = f^{ij}_{,k} + f^{lj} \Gamma^i_{lk} + f^{il} \Gamma^j_{lk}. \quad (406)$$

Kdyby nebyly složky ij kontravariantní (nahore), ale $_{ij}$ kovariantní (dole), bylo by – před Γ (a sčítací index by musel být horní).

⁶⁷ Příklad: 1. událost vyslání signálu ze Země ($t_1 = 0$, $x_1 = 0$) a 2. událost příjem signálu na Apollu 10 ($t_2 = 1 \text{ s}$, $x_2 = 299\,792\,458 \text{ m}$) jsou ovlivnitelné, neboť $ds = 0$. Cernan může hned přemýšlet, zda přece jen nepřistát. . .

⁶⁸ Představuji si přitom ruku a tři prsty ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$), jak se soustavně posouvají a sklápějí.

⁶⁹ notace $f_{;i} \equiv \partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}$

Speciálně pro metrický tenzor platí, že se sice mění místo od místa, ale když tyto změny kompenzujeme Γ , tak se nemění:

$$0 = g_{ij,k} - g_{lj}\Gamma_{ik}^l - g_{il}\Gamma_{jk}^l,$$

odkud lze vyjádřit Γ . Nazývá se afinní konexe (též Christoffelův symbol):

$$\Gamma_{kj}^i = \frac{1}{2}g^{im}(g_{mk,j} + g_{mj,k} - g_{kj,m}). \quad (407)$$

Není divu, že závisí na 1. derivacích a inverzi. Indexy: horní je jen jeden, druhý musí být sčítací, derivování dle původních nebo sčítacího (s $-$), zbytek doplňím.

Zásadní otázka. Jak měřit křivost? Zvolím symetrickou dvojici, např. (dx, dy) , (dy, dx) , čili infinitezimální „čtvereček“. Provedu přenos (libovolného) vektoru f_i podle dx a pak podle dy , tzn. 2. derivaci. Totéž obráceně. Rozdíl je:

$$f_{i;jk} - f_{i;kj} \equiv R_{ijk}^l f_l. \quad (408)$$

Když je čtvereček křivý, nedostanu 0. Relativní rozdíly pro nejružnější dvojice si poznamenám do matice. Nazývá se Riemannův tenzor 4. řádu. Jde o nejpodrobnější popis křivosti, neboť je to $16 \cdot 16 = 256$ složek, i když samozřejmě je zde značná symetrie. Odtud plyne:

$$R_{ijk}^l = \Gamma_{ik,j}^l - \Gamma_{ij,k}^l + \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{mk}^l \Gamma_{ij}^m, \quad (409)$$

kde je jednak derivování Γ a jednak násobení $\Gamma\Gamma$, protože jsme použili (405) dvakrát. Indexy: horní je jen jeden, druhý sčítací, dolní dle derivování, poslední sčítací; indexy se nezjevují (cf. strašidla).

Provedeme-li 1. úžení, tj. součet přes opakující se index (nejde o kvadrát), obdržíme křivost pro dvojice souřadnic:

$$R_{ik} = R_{ilk}^l, \quad (410)$$

čili Ricciho tenzor 2. řádu.

Provedeme-li 2. úžení, resp. zvýšení indexu, obdržíme skalární křivost:

$$R = g^{ik} R_{ik} = R_k^k, \quad (411)$$

čili Ricciho skalár.

Proč to děláme? Naším cílem je co nejjednodušší tenzorová rovnice 2. řádu. V ní vystupují t. 2. ř., což jsou v našem případě: R_{ik} , Rg_{ik} , g_{ik} . Že by:

$$R_{ik} = 0?$$

Taková rovnice vskutku platí, avšak pro vakuum. (Pak je i $R = 0$.) Není neúčinná, popisuje např. gravitační vlny (přicházející odjinud).

Máme-li však nenulový tenzor energie a hybnosti T_{ik} , o němž předpokládáme, že souvisí s křivostí, musíme rovnici rozšířit, použít všechny tři a koeficienty volit tak, aby to vyšlo (viz Newton):

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}. \quad (412)$$

Jednotky: řekněme, že $[g_{ik}] = 1$, pak $[\Gamma_{ik}^l] = m^{-1}$, $[R] = [R_{ik}] = [R_{ijk}^l] = m^{-2}$, $[T_{ik}] = J m^{-3} = kg m^{-1} s^{-2}$, jistě tam bude gravitační konstanta (v 1. mocnině), $[G] = kg^{-1} m^3 s^{-2}$ (viz Kepler), součin je $[GT_{ik}] = m^2 s^{-4}$, proto faktor c^{-4} . Číslo 8π je připomínkou Poissona (r.i.p.).

Jedná se o soustavu 10 parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu, nelineárních, pro složky metrického tenzoru g_{ik} . První člen interpretujeme jako celkovou křivost, druhý člen jako křivost způsobovanou křivočarými souřadnicemi. Proto „–“. Rozdíl (nerovnováha) odpovídá křivosti způsobované křivým časoprostorem. Tato je v rovnováze se čtvrtým členem (T_{ik}), neboli „hmotou“ ($\rho, p, v, \dots$). Dodatečný třetí člen (Λ) interpretujeme jako kosmologickou konstantu, nebo jako temnou energii (po začlenění do T_{ik} jako $-c^4/(8\pi G)\Lambda g_{ik}$). Je nutno ji změřit.

[149] KULHÁNEK, P. *Obecná relativita*. [online] [cit. 2018-01-26].

<http://www.aldebaran.cz/studium/otr.pdf>.

[150] MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. ISBN 0716703440.

C.8 Co když zapomenou geodetiku?

Mějme nejjednodušší tenzor energie a hybnosti (pro prach, bez tlaku):

$$T^{ij} = \rho u^i u^j; \quad (413)$$

indexy jsou přirozeně horní, protože čtyřrychlosti u^i mají horní, při změně báze se chovají stejně jako souřadnice (kontravariantně). Mj. $T^{00} = \rho c^2$ je hustota klidové energie (obdoba $E = mc^2$), $T^{11} = \rho (u^1)^2$ hustota složky x kinetické energie atd.

Mějme zákon zachování energie a hybnosti zapsán pomocí kovariantní derivace:⁷⁰

$$T^{ij}_{;j} = 0; \quad (414)$$

index musí být sčítací (zřejmě to neplatí po složkách). Mějme i zákon zachování hmoty:

$$(\rho u^i)_{;i} = 0 \quad (415)$$

s totožným komentářem.

Když oba dva použijeme, pak:

⁷⁰ notace parciální $f_{,i} \equiv \partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}$; kovariantní $f^i_{;j} = f^i_{,j} + \Gamma^i_{kj} f^k$

$$(\rho u^i u^j)_{;j} = \overbrace{(\rho u^j)_{;j}}^{=0} u^i + \rho u^j u^i_{;j} = \rho u^j (u^i_{;j} + \Gamma^i_{kj} u^k) = 0,$$

kde Γ je afinní konexe; známe-li metrický tenzor g_{ik} , známe i Γ^i_{kj} . Búno zapomeneme ρ a vzpomeneme si na definici čtyřrychlosti $u^i \equiv \partial x^i / \partial \tau$, kde τ označuje *vlastní čas*, měřený v soustavě pohybující se s částicí:

$$\rho \frac{\partial x^j}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial \tau} + \Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^k}{\partial \tau} \right) = 0.$$

Odtud:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \tau^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^k}{\partial \tau} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} = 0, \quad (416)$$

což je pohybová rovnice pro volné částice (obdoba $\mathbf{a} = 0$) v zakřiveném časoprostoru. Volně padají.

Známe-li metrický tenzor g_{ik} (Kerra), můžeme počítat pohyb okolo černé díry, gravitační čočkování, posun hvězd poblíž $\odot$, siluetu černé díry, Lenseův–Thirringův jev, Penroseův jev apod.

C.9 Co když zapomenu Schwarzschilda?

Padám-li zrovna do hmotného bodu, asi bych měl znát metriku g_{ik} . Ve velké vzdálenosti je časoprostor (téměř) plochý. I tak jsou složky g_{22} , g_{33} nejedničkové, neboť měřím ve *sférických* (křivočarých) souřadnicích:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r \sin \vartheta)^2 \end{pmatrix}.$$

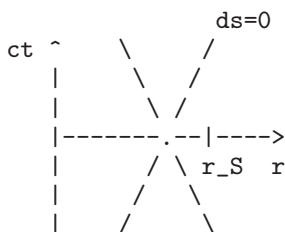
Je to obdobné, jako když se transformují sférické souřadnice na kartézské, $x = r \cos \vartheta \cos \varphi$, $y = r \cos \vartheta \sin \varphi$, $z = r \sin \vartheta$. Infinitesimální interval je jako vždy $(ds)^2 = g_{ik} x^i x^k$.

V malé vzdálenosti *není* časoprostor plochý. Jak se složky změní? Protože se jedná jen o bod, zůstanou kvůli symetrii úhlové stejné. Změnu lze očekávat jen u g_{00} , g_{11} . Změna by měla být značná, když se rovnají (klasické) energie $\frac{1}{2}mc^2 \simeq \simeq GMm/r_S$, tzn. pro poloměr:

$$r_S = \frac{2GM}{c^2}, \quad (417)$$

kterým budu změnu poměřovat. Uvažme např.: $1 + \frac{r}{r_S}$, $1 - \frac{r}{r_S}$, $1 + \frac{r_S}{r}$, $1 - \frac{r_S}{r}$, $(1 - \frac{r_S}{r})^{-1}$ apod. Pro $r \rightarrow \infty$ musí jít k 1, proto „1“. Zároveň nesmí divergovat, takže musí být r ve jmenovateli. Otázka je, zda „+“, nebo „-“? Pro $r \rightarrow r_S$ se musí nějak

měnit světelný kužel, jinak by neexistoval horizont a částice by z pod horizontu mohly odletět pryč (viz obr.)! Proto –.

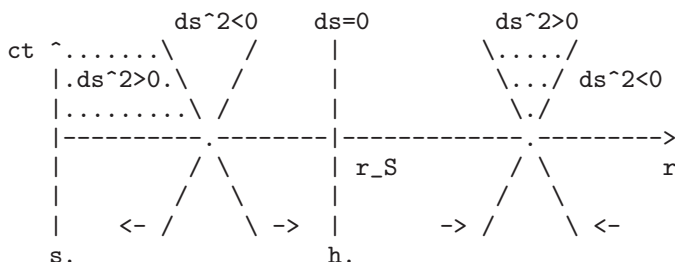


Související otázka je, zda „¹“, nebo „⁻¹“? Kdyby byly koeficienty u g_{00} a g_{11} totožné, kužel (ct vs. r) by se nijak neměnil.⁷¹ Proto jednou ¹ a jednou ⁻¹. Na horizontu pak metrika diverguje; to se „nedá nic dělat“. (Říká se tomu souřadnicová singularita.) Odtud:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r \sin \vartheta)^2 \end{pmatrix}. \quad (418)$$

Kdybychom si chtěli být jisti, dosadíme do Einsteinových rovnic ($R_{ik} = 0$; pro vakuum).

Co lze vidět? Jak se blížím horizontu, můj světelný kužel, resp. jeho časupodobná část $(ds)^2 > 0$, ve které jediné se mohou pohybovat, se zužuje. Na horizontu ($h.$) je nekonečně úzký. Pak se opět rozšiřuje, ale vzhledem ke změně znaménka g_{00} a g_{11} je část $(ds)^2 > 0$ orientovaná k $r \rightarrow 0$, tzn. pád do singularity ($s.$).



C.10 Co když zapomenou Laplace?

Jedná se základní rovnici pro popis gravitačního potenciálu ($\Delta U = 0$; v prázdném prostoru), elektrického potenciálu ($\Delta \varphi = 0$) nebo teplotní rovnováhy ($\Delta T = 0$; v pevné látce). Laplace skoro nelze zapomenout, neboť se zdá triviální:

$$\Delta f = 0, \quad (419)$$

⁷¹ Jinými slovy: časoprostor by se buď nafukoval, nebo smršťoval, ale *nedeformoval*.

kde operátor $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$. [tečka za větou]

Pro sféricky symetrickou funkci $f(r) = \frac{1}{r}$ by vedl na:

$$\nabla f = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x, \dots, \dots \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

a tedy na:

$$\nabla \cdot \nabla f = -\nabla \cdot \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} + x \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} 2x - \dots = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Aha. Laplace je 0, když vektorové pole (po ∇) ubývá jako $\frac{1}{r^2}$, tzn. nepřímě úměrně povrchu koule $4\pi r^2$.

Zřejmě ale bude existovat vícero řešení! Jiná úměra, např. $\frac{1}{r^3}$, by sice vedla k $\Delta_r \neq 0$, avšak to může být kompenzováno vhodnou závislostí úhlových souřadnic $\Delta_{\vartheta, \varphi}$. Proto napíšu gradient ∇ ve sférických, s vědomím, že když se derivuje, resp. dělí úhlem, musí se dělit i r , resp. $r \sin \vartheta$ (viz j.):

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_{\vartheta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_{\varphi} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (420)$$

Laplace je ovšem složitější, neboť divergence $\nabla \cdot$ působí i na *bázové vektory*, které jsou nekonstantní.⁷² Proto:

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (421)$$

Jak asi vypadá obecné řešení $\Delta U = 0$? Obvyklý postup je (úplná) separace proměnných:

$$U(r, \vartheta, \varphi) = f(r)g(\vartheta)h(\varphi). \quad (422)$$

Už s ohledem na 1. příklad se nedivím, že řešením pro radiální část f je polynom $\sim r^{-\ell}$. Z (421) (po $\cdot r^2$) ostatně plyne, že po $\partial_r f$ ubude r , tj. právě vlastnost polynomu. Pouze provedu normalizaci R (tj. poloměrem něčeho; např. $R_{\oplus}$). Úhlová část pro φ je tak jednoduchá, že řešení musí být jednoduché „jako kyvadlo“, neboli harmonická funkce $e^{im\varphi}$. Úhlová část pro ϑ je tak složitá (viz $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta$, $\sin^2 \vartheta$), že řešením je „kombinace“, čili polynomy harmonické funkce. Nazývají se *Legenderovy* přidružené polynomy $P_{\ell m}$; nelze je asi snadno „uhádnout“, nicméně vzhledem k logické substituci $x = \cos \vartheta$ se nedivím členům x , $\sqrt{1-x^2}$, $1-x^2$ apod. Nakonec doplním koeficienty $U_{\ell m}$ (tzn. každý jiný, komplexní, normovaný hmotným bodem $-GM/r$):

$$U = -\frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} U_{\ell m} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell} P_{\ell m}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \right]. \quad (423)$$

⁷² Konkrétně sférické $\mathbf{e}_r = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$, $\mathbf{e}_{\vartheta} = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)$, $\mathbf{e}_{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ a jejich derivace $\partial_{\vartheta} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_{\vartheta}$, $\partial_{\varphi} \mathbf{e}_r = \sin \vartheta \mathbf{e}_{\varphi}$, $\partial_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} = -\mathbf{e}_r$, $\partial_{\varphi} \mathbf{e}_{\vartheta} = \cos \vartheta \mathbf{e}_{\varphi}$, $\partial_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} = (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$.

Jejich hodnoty vyplývají z okrajových podmínek, resp. se musejí určit měřením.

Abychom tomu uvěřili, dosadím:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r}\right)gh + f \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right)h + fg \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} = 0$$

a $\cdot r^2$, $\div fgh$:

$$\overbrace{\frac{1}{f} r^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r}\right)}^F + \overbrace{\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{h} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}}^{-F} = 0.$$

Části radiální jsem přisoudil hodnotu $F = \text{konst.}$ a úhlové $-F$, aby to vyšlo 0. Pro část radiální tedy platí separátně:

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial f}{\partial r} = Ff. \quad (424)$$

Dosadím-li polynom $Cr^{-\ell-1}$ (vylučuji r^0):

$$r^2 C(-\ell-1)(-\ell-2)r^{-\ell-3} + 2rC(-\ell-1)r^{-\ell-2} = FCr^{-\ell-1},$$

získám nutnou podmínku pro F :

$$\ell(\ell+1) = F. \quad (425)$$

Pro část úhlovou ($\cdot \sin^2 \vartheta$):

$$\frac{1}{g} \sin^2 \vartheta \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right) + \overbrace{\frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}}^{-H} = -F \sin^2 \vartheta$$

užiji opět obdobný trik s H a $-H$. Část pro φ separátně splňuje:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} = -Hh, \quad (426)$$

odkud:

$$h = C e^{i\sqrt{H}\varphi}; \quad (427)$$

je pak logické označit:

$$m \equiv \sqrt{H}. \quad (428)$$

Zbývající část pro ϑ :

$$\frac{1}{g} \sin^2 \vartheta \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \vartheta}\right) + F \sin^2 \vartheta = H, \quad (429)$$

kde substituce $x = \cos \vartheta$, $\frac{\partial g}{\partial \vartheta} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} = \sin^2 \vartheta \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \cos \vartheta \frac{\partial g}{\partial x}$ dá:

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial g}{\partial x} + \left(F - \frac{H}{1-x^2}\right)g = 0. \quad (430)$$

Dosadím-li např. polynom 2. stupně: $g = ax^2 + bx + c$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2ax + b$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2a$, pak:

$$(1 - x^2)2a - 2x(2ax + b) + F(ax^2 + bx + c) - H \frac{ax^2 + bx + c}{1 - x^2} = 0.$$

Jde o rovnost koeficientů u x^4 , x^3 , atd. Specificky pro $F = 6$, $H = 0$ (tzn. $\ell = 2$, $m = 0$) by bylo $(-2a - 4a + 6a)x^2 + (-2b + 6b)x + (2a + 6c) = 0$, čili $b = 0$, $a = -3c$; normalizaci lze volit, standardně $g = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, což ozn. P_{20} .

C.11 Co když zapomenu Lanea–Emdena?

Jedná se o jedinou rovnici stavby * pro škálovaný gravitační potenciál φ a škálovanou souřadnici z , aby ji bylo možné používat pro * nejrůznějších hmotností a poloměrů.

Neškálovaný gravitační potenciál zde zavedeme jako $\nabla\Phi = \mathbf{a}_g$, čili kladný a klesající s $R \rightarrow \infty$, takže jeho derivace je záporná:

$$\frac{d\Phi}{dR} = -\frac{GM_R}{R^2}, \quad (431)$$

kde M_R označuje hmotnost obsaženou v kouli o poloměru R . L.–E. není nic jiného než derivace derivace:

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} = -G \frac{dM_R}{dR} \frac{1}{R^2} + GM_R \frac{2}{R^3}.$$

První člen lze zjednodušit, protože hmotnost dM_R kulové slupky o tloušťce dR :

$$dM_R = 4\pi R^2 dR \rho.$$

Druhý člen je podezřele povědomý (viz (431)). Odtud:

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} = -4\pi G \rho - \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR}. \quad (432)$$

Problémem zůstává $\rho(R)$ (neznámá funkce). Nelze mít jen 1 rovnici pro 2 funkce.

Naštěstí existuje vztah $\rho(\Phi)$! Nejdříve ho zkusím uhádnout. Důvodem je (předpokládaná) zjednodušená stavová rovnice, neboli *polytropa*:

$$P = K\rho^\gamma. \quad (433)$$

Když je P tak jednoduchou funkcí (polynomem), i ∇P je jednoduchý (polynom o 1 stupeň nižší než γ). Zároveň tuším (měl bych tušit, jinak za 5), že „gravitace je v rovnováze s gradientem tlaku“, neboli:

$$\nabla\Phi = \frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (434)$$

tj. polynom o 2 stupně nižší. Tento budu muset integrovat, tzn. opět o 1 stupeň nižší. Protože potřebuji vztah inverzní k $\Phi(\rho)$, je výsledný exponent $\frac{1}{\gamma-1} \equiv n$. Konečně škálování. Tím zmizí K aj. Odtud:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \varphi^n = 0. \quad (435)$$

Pro jistotu pořádněji (jako v [151]). Derivace (433) je:

$$\frac{dP}{dR} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dR},$$

a zároveň hydrostatická rovnováha:

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{GM_R\rho}{R^2} = \rho \frac{d\Phi}{dR},$$

odkud:

$$d\Phi = K\gamma\rho^{\gamma-2}d\rho.$$

Určitý integrál $\int_R^\infty$ je:

$$0 - \Phi = K\gamma \left(\frac{0}{\gamma-1} - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \right),$$

tedy:

$$\rho = \left[\frac{\Phi}{K\gamma}(\gamma-1) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

nebo ekvivalentně ($\gamma = \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}$):

$$\rho = \left[\frac{\Phi}{K(n+1)} \right]^n,$$

c.b.d.

Uvědomme si, co to znamená. Za prvé je divné, že ve stavové rovnici (433) není teplota T , když každý ví, že tlak plynu P_g i tlak záření P_r na ní závisejí. Ona je skryta v exponentu, není tam totiž ρ^1 , nýbrž ρ^γ ; obvyklé $\gamma = \frac{4}{3}$. Za druhé je divné, že bez T rovnice (435) vůbec nezávisí na zdrojích energie. Ostatně stavba * byla pochopena dříve, než byly objeveny termonukleární reakce.

Myšlenkový experiment: co by se stalo, kdyby se ve $\odot$ reakce zastavily? Nic! Alespoň krátkodobě (10^3 r.) by $\odot$ svítilo téměř stejně, protože profily Φ , ρ , P (i T) jsou určeny spíše hydrostatikou. Ochlazování (resp. přehřívání) je vzhledem k nepřehlednosti nepatrné ($L/M \doteq 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}/2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 0,00019 \text{ W kg}^{-1}$).

[151] HARMANEC, P, BROŽ, M. *Stavba a vývoj hvězd*. Praha: Matfyzpress, 2011.

C.12 Co když zapomenu Gausse?

Jedná se o rovnice pro časové změny orbitálních elementů, když působí rušící zrychlení. Jeho složky si samozřejmě sladím s orbitou a označím jako radiální R , transversální T , normálové W . Kromě nich na pravé straně nechci nic jiného než elementy: a , e , I , ω , Ω , M , příp. n (střední pohyb, též úhlová frekvence).

Urychlují-li, spirálují, tedy $\frac{da}{dt} \propto T$; jednotky pak sladím n^{-1} . Co ostatní složky? Při $e > 0$, $f \neq 0$ a $f \neq \pi$ se i radiální projeví transverzálně! Závislost na pravé anomálii f zajistím harmonickou funkcí ($\sin f$); přitom i transverzální bude trochu harmonické ($\cos f$). Opravný faktor $\eta \equiv \sqrt{1 - e^2}$ je ve jmenovateli, protože orbita s $e \rightarrow 1$ má mizivý moment hybnosti a je snazší ji změnit. První výsledek je tedy:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\eta}(T + Re \sin f + Te \cos f). \quad (436)$$

Druhý výsledek bude záviset na e , ale ne když už $e \rightarrow 1$, proto η . Pamatuji si, že zde vystupuje *excentrická* anomálie E podle slova na e . Bude se hodit i $(na)^{-1}$ (viz j. vlevo):

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta}{na}(R \sin f + T \cos f + T \cos E). \quad (437)$$

Třetí výsledek nemůže záviset na I , když vždy tlačím kolmo (k o.). Naopak musí záviset na úhlu od uzlu, proto $+\omega$. Faktor $\frac{r}{a}$ je rameno síly, čili moment:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{na\eta} \frac{r}{a} W \cos(f + \omega). \quad (438)$$

Ostatní moc často nepotřebuji...

C.13 Co když zapomenou Lagrange?

Jedná se o rovnice pro změny orbitálních elementů $\frac{da}{dt}$ atd., když působí poruchová funkce $\mathcal{R}$, tj. potenciál (v J kg^{-1}). Vystupují v nich výhradně parciální derivace $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$ atd.

Jediný způsob, jak měnit a , je působit *podél* dráhy, čili derivuji potenciál podle pravé délky λ , resp. pravé délky epochy λ_0 (v $t = t_0$), čímž obdržím zrychlení přesně v kýženém směru. Jednotky m s^{-1} oproti $\text{J kg}^{-1} = \text{m}^2 \text{s}^{-2}$ sladím $(na)^{-1}$. Faktor 2 si pamatuji:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda_0} \quad (439)$$

Žádné další členy zde nejsou, neboť se nijak neodchylujeme od kýženého směru.

Excentricitu lze měnit v rovině dráhy, tzn. derivování dle λ_0 , ϖ ; j. sladím $1/(na^2)$. Pamatuji si znaménko a faktory e , $\eta \equiv \sqrt{1 - e^2}$, $(1 - \eta)$:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\eta}{e} \left[(1 - \eta) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \right]. \quad (440)$$

Sklon lze měnit vícero způsoby, tzn. derivování dle λ_0 , ϖ , Ω . Faktory jsou η , $\sin I$, $(1 - \cos I)$, umenšující vliv v rovině dráhy (pro $I \rightarrow 0$):

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{1}{\eta \sin I} \left[(1 - \cos I) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda_0} + (1 - \cos I) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \right]. \quad (441)$$

Ostatní $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\lambda_0}{dt}$ netřeba uvádět, neboť jsou kvůli akci a reakci antisymetrické.⁷³

[152] BROUWER, D., CLEMENCE, G. M. *Methods of celestial mechanics*. New York: Academic Press, 1961

[153] FITZPATRICK, R. *Derivation of Lagrange planetary equations*. 2016, <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/celestial/Celestial/node150.html>.

C.14 Co když zapomenou Tisseranda?

Jde o integrál pohybu v omezeném kruhovém problému 3 těles (Slunce, Jupiter, kometa). Není to ani energie, ani moment hybosti, ale určitá kombinace obou. Jediné, na čem může záviset, je a , e , I a a_J . Přitom je bezrozměrný, první člen proto musí být buď $\frac{a}{a_J}$, nebo $\frac{a_J}{a}$. Za b) je správně (jako e). Druhý je antisymetrický a má odpovídat m. h. Neboť $|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \simeq r \sqrt{GM_\odot/r} = \sqrt{r\mu}$, bude tam odmocnina. Další element, např. e ($L > 0$ pro $e = 0$), $(1-e)$ (tj. perihélium), $\sqrt{1-e^2}$. Další element, např. I ($L > 0$ pro $I = 0$), $\sin I$ (dtto), $\cos I$. Ostatně odpovídá složce z . Odtud:

$$T_J = \frac{a_J}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{a_J}(1-e^2)} \cos I. \quad (442)$$

⁷³ např. $\frac{d\lambda_0}{dt}$ obsahuje členy z $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{dI}{dt}$ s opačnými znaménky

Rejstřík

Tučným písmem jsou v rejstříku označené odkazy na obrázky.

- k*-d strom: 50, 55
- Λ iterace: 121
- $\varepsilon_{50\text{Ti}}$: **141**
- $\varepsilon_{54\text{Cr}}$: **141**
- $\varepsilon_{182\text{W}}$: 133
- 1. věta termodynamická: 21, 43, 145, 193
- absolutně černé těleso: **106**, 229
- absorpce: 112
- absorpční koeficient: 116
- absorpční pás: 125
- absorpční spektrum: 114
- acidní: 155
- adaptivní zjemňování sítě: 35, 180
- adiabatická konvekce: 197, 198
- adiabatický gradient: 95
- adiabatický index: 22
- ADM: 185
- afinní konexe: 238, 240
- AGB: 205, 206, 207
- ageostrofické proudění: 93
- AGN: 178
- akceleroaná Λ iterace: 122
- akrece: 38, 141
- akreční disk: 40, 191
- aktivační mez: 45
- aktivita: 145
- aktivitní koeficient: 140, 145
- aktivní galaktické jádro: 178
- akustické oscilace: 167
- akustický vrchol: 169
- albedo: 102
- ALI: 122
- ALMA: 124
- ambipolární difuze: 30, 182
- Ampérovo pravidlo: 232
- AMR: 35, **36**, 180
- ANEOS: 43
- anomálie ε : 133
- anticyklóna: 29, 89
- antropogenní emise: 107
- aproximace tenké vrstvy: 85
- Arnowittův–Desserův–Misnerův formalismus: 185
- atmosféra: 85, 101, **106**
- bác minus cáb: 217, 234
- backward time centered space: 66
- Balmerova série: 124
- Balmerův skok: 111, 125
- balvany: 74
- baroklinická nestabilita: 28
- baryonická látka: 170
- báze: 223
- bazické: 155
- bázová funkce: 68, **68**
- bázové vektory: 242
- BD: 205
- Bell a Lin: 128, 202
- BH: 206, 207
- blanketing: 123
- Bohrův poloměr: 228
- Boltzmannova rovnice: 151
- Boltzmannův vztah: 115
- Boussinesqova aproximace: 94
- Bowenovo reakční schéma: 153
- Bruntova–Väisäläova frekvence: 96, 197
- Bruntův gradient: 198
- BSE: 134, **135**
- BSG: 205
- BSM: 135
- BTCS: 66
- bublina: 94, 97
- CAI: 131, 140, 142, **143**, 153
- čára Lyman- α : 177
- časoprostor: 159, 236, 240
- částečné přerozdělení: 123
- částicová difuze: 194
- CC: 139, **142**
- CDM: 180
- černá díra: 215
- chemická reakce: 149
- chemický potenciál: 145, **149**
- chemotermální nestabilita: 181
- Chianti: 120
- chladná temná látka: 180
- Chombo: 36
- chondritický uniformní rezervoár: 131
- chondrule: 143
- Christoffelův symbol: 225
- Christoffelův symbol: 160, 238
- CHUR: 131, 134, **135**

- cirkumstelární prostředí: 125
 Clausiova–Clapeyronova rovnice: 148, 157
 CMB: 131, 139, 183
 CO₂: 106, **107**
 Comptonův rozptyl: 110, 180
 Coriolisovo zrychlení: 85
 Coriolisův parametr: 88
 Cosmos Redshift 7: 178
 Crankova–Nicholsonova metoda: 67
 CSM: 125
 čtyřrychlost: 239
 cyklóna: 29, 89
 cyklostrofické proudění: 87, 88
 cyklotronová emise: 110
 cyklus CNO: **194**
 Debeyeova délka: 234
 decelerační parametr: 165
 deformace: 44, **45**
 degenerace: 207
 Delaunayho triangulace: 72
 depozice: 151
 depoziční sekvence: 152
 derivace: 224
 de Sitterův vesmír: 167
 detailní vyrovnání: 116
 deterministický chaos: 32
 deuterium: 183, 208
 diáda: 221
 diferenciace: 135
 difuzní aproximace: 22, 196, 198
 difuzní koeficient: 25
 difuzní tlumení: 169
 dipól: 53
 dipolární oscilace: 187
 Diracova distribuce δ : 46, 98
 Dirichletova podmínka: 62
 disipace: 61, 194
 disk: 177
 diskretizace: 34, 65, 68, 69, 180, 204
 disperze rychlostí: 177
 disperzní relace: 232
 divergence: 218, **218**, 222
 Dopplerův posun: 117, 123
 dostředivé zrychlení: 87
 druhé hvězdy: 191
 dualita: 223
 duchařská oblast: 35
 duchařské částice: 55
 dvojitá emise: 125
 dvouhadinový atom: 114, 116
 dvoutečkový součin: 221
 dynamická viskozita: 22, 93
 Eddingtonův faktor: 196
 efektivní teplota: 124
 Efremovka: 143
 Einsteinovy rovnice pole: 7, 159, 185, 236, 241
 Einsteinův koeficient: 115, 116, 195
 Ekmanova spirála: 92, **94**
 Ekmanovo číslo: 86
 ekvibrace: 138
 elasticita: 44, 77
 elektromotorická síla: 233
 elektronový přechod: 111
 elementární přenosy: 112
 elementární procesy: 110
 elipsoid: 221
 emise: 112
 emisní čára: 114
 emisní koeficient: 112, 116
 EMO: 138
 EMP: 177
 endotermická reakce: 150
 energetická rovnováha: 193
 enstatit: 154
 entalpie: 146, 147
 entropie: 145
 Epsteinův zákon: 24, 31
 Euklidův prostor: 159
 Eulerova dopředná metoda: 65
 Eulerova zpětná metoda: 66
 Eulerův popis: 21
 evakční rezonance: 138
 exotermická reakce: 150
 expanze: 206
 expanzní parametr: 162, **168**
 explicitní schéma: 64
 extinkce: 125
 extinkční funkce: 126
 falešná konvergence: 122
 fázová přeměna: 145
 fázový diagram: **148**, **156**, 157
 FDM: 64
 felsické: 156
 FEM: 69, 78
 FLD: 22
 FLRW: 161
 fluktuace: 184
 fonon: 118
 formální řešení: 113, 114
 forsterit: 154
 forward time centered space: 65
 fotodisintegrační nestabilita: 182
 fotodisociace: 182

- fotoevaporace: 182
- fotoionizace: 182
- fotosféra: 202, 203
- Fourierova řada: 61
- Fourierova transformace: 97
- fragmentace: 181
- fragmentační fáze: 55
- frakcionace: 133
- frakční krystalizace: 139, 155
- FreeFem++: 70, 79
- Fridmannovy rovnice: 162
- fronta: 29
- FTCS: 65
- fugacita: 139, **140**, 145
- FU Orionis: 208
- FVM: 34, 204
- Galerkinova metoda: 69, 78
- Gaussova věta: 47, 69, 230
- Gaussovy rovnice: 245
- Gaussův profil: **115**, 116
- geochemické rovnice: 132
- geochemie: 131
- geodetika: 239
- geometrická absorpce: 117
- geometrický rozptyl: 118
- geostrofické proudění: 88
- Gibbsova energie: 146, 150
- Gibbsova–Duhemova rovnice: 147
- globální oteplování: 107
- gloriola: 118
- g-mód: 96
- gradient: 217, **218**, 223
- gradientové proudění: 89
- Grashofovo číslo: 86
- gravitační čočka: 184
- gravitační kolaps: 31, 180
- gravitační nestabilita: 31
- gravitační potenciál: 24, 54, 244
- gravitační vlna: 184, 194
- gravitační vlny: 238
- Greenovo lemma: 69, 79
- GRNRHD: 185
- Grotrianův diagram: 120, **120**
- Guttenbergova plocha diskontinuity: 131
- gyrační poloměr: 234
- H₂O: 105
- halo: 177
- hamiltonián: 227
- Hamiltonovy rovnice: 227
- harmonický oscilátor: 96
- Harvardská klasifikace: 206
- Hayashiho linie: 208
- HB: 205, 207
- HDF5: 36
- Heavisidova skoková funkce: 61
- heliový záblesk: 207
- Helmholtzova volná energie: 146
- Herbigova hvězda: 208
- Hertzsprungův–Russelův diagram: **208**, **210**, **213**
- heterogenní reakce: 151
- hexadekupól: 53
- HITRANS: 120
- HMP: 177
- Hookeův zákon: 44, 77
- horizont: 241
- Hubblův parametr: 165
- hustota energie: 22, 185
- hustota energie záření: 196
- hustota pravděpodobnosti: 227
- hvězdné populace: 177
- hybridní schéma: 66
- hydrostatická rovnováha: 86, 192, 201
- ideální kapalina: 160
- ideální plyn: 22
- implicitní metoda: 204
- implicitní schéma: 65
- index lomu: 118
- indexová notace: 77
- indukční rovnice: 22, 233
- inerciální soustava: 85
- infračervený exces: 125
- integrální popis: 127
- intenzita: 109, **200**
- inverzní Comptonův rozptyl: 184
- inverzní Lorentzova transformace: 236
- inverzní profil P Cygni: 125
- inverzní tenzor: 224
- ionizace: 111, 198
- ionizační energie: 229
- iont H⁺: 111
- ISM: 125
- Itokawa: 74
- IW: 139
- izobary: 88
- izochrona: 143, **143**
- izotopická dichotomie: 139, **141**
- jádro čáry: 115
- jakobián: 205
- Jansky: 124
- Jarkovského jev: 72
- Jeansova délka: 180
- jednotky: 35
- Jena: 120

- Jupiter: 141
 Kelvinova–Helmholtzova nestabilita: 26, **27**,
 36
 Keplerův–Olbersův paradox: 159
 kernel: 46
 kinematická viskozita: 85
 Kippenhahnův diagram: **209**, **211**, **214**
 Kirchhoffův zákon: 23
 Kolmogorovo spektrum turbulence: 97
 kompatibilní prvky: 153
 komplexní rychlost: 93
 konstituční rovnice: 44
 kontinuum: 115
 kontrakce: 206
 kontravariantní složka: 223
 konvekce: 28, 94, **96**, 194, 199, **214**
 konvektivní zóna: 203
 konvoluce: 117
 koperníkovský princip: 159
 kořen: 52
 korotační orbita: 32
 korund: 154
 kosmologická konstanta: 160, 170, 239
 kosmologické parametry: 167
 kosmologický princip: 159
 kosmologie: 159
 kovariantní derivace: 185, 224, 237, 239
 kovariantní složka: 223
 kovektor: 223, 225
 křídla čáry: 115
 kritická hustota: 166, 170
 kritický bod: 157
 křivočaré souřadnice: 219
 křivost: 161, 238
 Kroneckerovo delta: 224
 kross-spektrum: 184
 krystalizace: 153
 kulová hvězdokupa: 177
 Kurucz: 120
 kvadrupól: 53
 kvarková látka: 187
 kvintesence: 170
 Lagrangeovy rovnice: 246
 Lagrangeův popis: 5, 26, 43
 Lambertův rozptyl: 72
 Laméova rovnice: 78
 Laméovy konstanty: 77
 laminární proudění: 85
 Laneova–Emdenova rovnice: 244
 Laplaceova rovnice: 241
 Larmorův poloměr: 234
 led: **149**
 Ledouxovo kritérium: 198
 Ledouxův gradient: 198
 Legenderovy přidružené polynomy: 242
 Leiden: 120
 likvidus: 157
 limiter: 22
 linearizace: 63, 70
 lineární forma: 223
 lineární polarizace: 183
 list: 52
 lithium: 209
 litofilní: 131
 lokální inerciální soustava: 160
 lokální kartézské souřadnice: 85
 lokální termodynamická rovnováha: 23, 113,
 196
 Lorentzova síla: 233
 Lorentzova transformace: 233, 234
 Lorentzův profil: **115**, 117
 LTE: 7, 113, 196
 luminozitní vzdálenost: 169
 Lyman- α : 177
 Lymanovo–Wernerovo záření: 183
 mafické: 156
 magmatický oceán: 156
 magnetická difuzivita: 22
 magnetická permeabilita: 22
 magnetohydrodynamika: 21
 magneto–rotační nestabilita: 29, **30**
 magnetorotační nestabilita: 187
 Maxwellova rovnice: 230
 Maxwellovy rovnice: 233
 měrné teplo tání: 157
 měrný výkon: 193, 203
 Mesastar: 205
 Měsíc: 137
 metalicita: 177
 metoda hlazená částicová: 46
 metoda konečných diferencí: 64
 metoda konečných objemů: 34
 metoda konečných prvků: 69, 78
 metoda Monte Carlo: 120
 metoda variace konstant: 113
 metrický tenzor: 160, 185, 222, 224, 225, 236,
 240
 metrika FLRW: 161
 mez pevnosti: 45
 mez pružnosti: 45
 mezihvězdná extinkce: 125
 mezihvězdné prostředí: 125
 MHD: 23
 Michelsonův experiment: 235

- Mieho rozptyl: 112
- Mieho teorie: 118
- migrace: 38
- minihalo: 181
- modrá smyčka: 211
- molární zlomek: 145
- molekulární viskozita: 86
- moment hybnosti: 177, 181
- moment intenzity: 185, 196, 200
- monochromatická intenzita: 109, 229
- monopól: 53
- montáž: 82
- MPI: 36
- MRI: 29, 40, 187
- MRN: 127
- mrtvá zóna: 29
- MS: 205, 206, 207
- multipól: 53
- multipólový rozvoj: 53
- napětí: 23, 44, **45**, 93
- Navierova–Stokesova rovnice: 21, 43, 85, 192
- NC: 139, **142**
- nedivergentní proudění: 85
- neinerciální soustava: 85
- nekompatibilní prvky: 156
- nemechanická práce: 146
- nerovnovážné záření: 125
- nerozlišený zdroj: 109
- nestabilita dvou proudění: 30
- neuhlíkaté chondrity: 139, **141**
- Neumannova podmínka: 62
- neutralino: 183
- neutrino: 193, 207, 208
- neutrinová bomba: 186
- neutronová hvězda: 215
- nevratný děj: 32
- Newtonova–Raphsonova metoda: 204, **204**
- newtonovská tekutina: 23
- Newtonův zákon: 227
- Ngova akcelerace: 123
- NIST: 120
- non-LTE: 114
- normálové zrychlení: 245
- nosník: 80
- NS: 206, 207
- nultý integrál: 196, 200
- nultý moment intenzity: 121
- numerická viskozita: 30
- objekt: 50
- objemová viskozita: 22
- oceán: 85
- ochlazování: 177
- odstředivé zrychlení: 85
- Ohmův zákon: 233
- ohřívání: 177
- okrajové podmínky: 32, 54, 62, 65, 77, 180, 199
- oktupól: 53
- opacita: 103, 112, 127, 206, 207
- opacita atmosféry: 114
- opacita plynu: 116
- opacita prachu: 117
- operátor: 217
- operátor Λ : 121
- optická konstanta: 118
- optická tloušťka: 112, 184
- orbitální element: 245
- otevírací úhel: 52
- otevřená hvězdokupa: 177
- otevřený vesmír: 167
- parametr α : 94
- parametr ϑ : 66
- parciální tlak: 145
- párově nestabilní supernova: 187
- Pauliho vylučovací princip: 207
- P Cygni: 179
- permeabilita: 231, 233
- permitivita: 231
- Planckova funkce: 22, 228
- Planckova intenzita: 113
- Planckova opacita: 22, 127
- planetární embryo: 31
- planetesimála: 31
- planparalelní atmosfére: 200
- plasticita: 44
- plochý vesmír: 167
- počáteční podmínky: 32, 54, 180, 203
- poddajné vztahy: 44
- pohybová rovnice: 21, 77, 96
- Poissonova rovnice: 22, 43, 193
- Poissonův poměr: 77
- polarizace: 183
- polarizace B: 184
- polarizace E: 184
- poloprostorová intenzita: 201
- polytropa: 95, 197, 244
- populace III: 177
- porucha: 45
- poškození: 45
- post-AGB: 205, 207
- posunutí: 77
- potenciál: 192
- potenciálová jáma: 180
- pozitron: 193

- p-proces: 208
 prach: 182
 Prandtlovo číslo: 86
 prasklina: 45
 praskliny: 44
 prázdňý vesmír: 167
 předměsíční impakt: 135
 pre-galaktický objekt: 181
 pre-MS: 205
 přenos energie: 194
 přenos neutrin: 185, 194
 přenos záření: 109, 180, 195
 přerozdělení energie: 125
 přestřelování: 198, **214**
 problém malého pozorovatele: 122
 problém velké matice: 122
 produkce párů: 187
 profil čáry: 116
 profil P Cygni: 125, 179
 prostorové spektrum: 167, 184
 protohvězda: 191, 203, 208
 proton–protonový řetězec: **194**
 proud baryonické látky: 185
 proudění: 194, 197
 pružina: 105
 prvky vzácných zemin: 156
 první hvězdy: 177
 první integrál: 196, 200
 pulzace: 187
 Pythagorova věta: 160
 radiační bilance: 101, **103, 104, 108**
 radiační síla: 72
 radiální zrychlení: 245
 radiometrie: 131
 Rayleighova absorpce: 7, 118
 Rayleighova–Taylorova nestabilita: 27, **28**
 Rayleighovo číslo: 86
 Rayleighův rozptyl: 7, **106**, 112, 118
 Rayleighův–Jeansův zákon: 229
 rázová vlna: 182, 187
 RD: 205
 reakumulační fáze: 55
 Reduce: 162
 REE: 156
 refraktní: 131
 reionizace: 178, 183
 rekombinace: 111, 229
 rekurze: 51
 Reynoldsovo číslo: 85
 reziduum: 156
 RGB: 205, 206, 207
 RGB dip: 210
 Ricciho skálar: 160
 Ricciho skalár: 238
 Ricciho tenzor: 160, 238
 Richardsonovo číslo: 86
 Riemannův řešitel: 180
 Riemannův tenzor: 160, 238
 Rossbyho číslo: 85
 Rossbyho disperzní relace: 91
 Rossbyho vlna: 90, **91**
 Rosselandova opacita: 22, 127
 rotace: 218, **219**
 rotační přechod: 111, 181
 rovina β : 90
 rovinná vlna: 228, 232
 rovnice geodetiky: 239
 rovnice hydrostatické rovnováhy: 77, 86
 rovnice kontinuity: 43, 191
 rovnice přenosu záření: 22, 112, 119
 rovnice statistické rovnováhy: 119
 rovnice tepelné rovnováhy: 21
 rovnice vedení tepla: 61
 rovnovážná konstanta: 151, 152
 rozdělovací koeficient: 131, 138, **140**
 rozhraní jádro/plášť: 131
 rozlišený zdroj: 109
 rozptyl: 110, 114
 rozptyl na elektronech: 110
 rozptyl na molekulách: 112
 rozptýlený tok: 74
 rozsah reakce: 149
 r-proces: 208
 RSG: 205
 RTE: 112
 rudý posuv: 165, 177
 Sachsův–Wolfův jev: 169
 Sahova rovnice: 199, 229
 Salpeterova reakce: 207
 samoabsorpce: 114
 SASI: 187, **187**
 SBI: 29, 40
 Schrödingerova rovnice: 227
 Schwarzschildova metrika: 240
 Schwarzschildova podmínka: 203
 Schwarzschildův poloměr: 240
 Schwarzschildovo kritérium: 197
 šedá atmosféra: 200
 semiempirická konvekce: 94, 197
 semikonvekce: 198, **214**
 separace proměnných: 242
 SESAME: 43
 sférické souřadnice: 220
 SGB: 205, 206

- siderofilní: 131
- síla oscilátoru: 116
- silikátová část Země: 135
- Silkovo tlumení: 169
- skalár: 217, 223
- skalární křivost: 238
- skalární pole: 217
- skalární součin: 217, 221
- skleníkový jev: 101
- skoro izotropní intenzita: 196
- slabá formulace: 67, 78
- slanost: 198
- směrový kosinus: 185
- směšovací délka: 94
- SN: 206
- snižování indexu: 224
- Sobolevova metoda: 123
- solární konstanta: 101
- solidus: 157
- soubor fotonů: 120
- souhybná vzdálenost: 180
- souhybné souřadnice: 169
- souřadnice: 223
- souřadnicová singularita: 241
- spektrální klasifikace: 206
- spektrum: 124
- SPH: 46, **46**, 56
- spirála: 92
- s-proces: 195
- srážka: 43
- srážkové rozšíření: 115
- stacionární vlna: 91
- standardní sluneční model: 198
- statické rovnice stavby: 202
- stavová rovnice: 22, 43, 86, 95, 165, 197, 199
- stechiometrický koeficient: 149
- Stefanův–Boltzmannův zákon: 172
- stínění: 72
- stínová fotografie: **96**
- stojatá akreční rázová nestabilita: 187
- Stokesova věta: 230
- Stokesův zákon: 24
- stratifikace: 139
- střední intenzita: 121
- střední molekulová hmotnost: 22, 206
- střední volná dráha: 25
- stupeň ionizace: **184**
- sublimace: 151
- sumační pravidlo: 77
- Sunyaevův–Zeldovičův jev: 169, 184
- supernova: 187, **189**, 212
- supersonická turbulence: 182, **182**
- světelný kužel: 241
- synchrotronová emise: 110
- systém Hf/W: 131
- systém Pb/Pb: 142, **143**
- systém U/Pb: 142
- systemická rychlost: 125
- tachoklina: 198
- Taylorův rozvoj: 54, 90, 229
- temná energie: 165, 170, 239
- temná látka: 165, 170
- tenzor: 221
- tenzor energie a hybnosti: 160, 185, 222, 239
- tenzor malých deformací: 78, 222
- tenzor momentu setrvačnosti: 222
- tenzor napětí: 44, 77, 93, 222
- tepelná difuzivita: 62, 86
- tepelná vodivost: 22
- tepelný tok: 74
- teplo: 145
- termální rozšíření: 115
- termální rychlost: 24, 25
- termální vítr: 92
- termodynamický potenciál: 145
- termohalinní cirkulace: 198, **214**
- termonukleární reakce: 193, **194**, **195**, 206
- testovací funkce: 69, 78
- TetGen: 72
- Thomsonův rozptyl: 110, 183
- Tillotsonova rovnice: 43
- Tisserandův parametr: 247
- tlak: 185
- tlaková níže: 88, **89**
- tlaková škála: 87, 94
- tlaková výše: 89
- tok: 185, 193
- tok povrchem koule: 193
- Toomreho kritérium: 31
- tornádo: 88, **88**
- TP-AGB: 205, 207
- transformace: 223
- transverzální vedení tepla: 74
- transverzální zrychlení: 245
- triangulace: 72
- třída: 50
- trojný bod: 157
- tromba: 88
- tryskové proudění: 91
- T Tauri: 208
- turbulence: 182, 187, 194
- turbulentní proudění: 85, 199
- turbulentní viskozita: 40, 86
- uhlí: 106, **107**

- uhlíkaté chondrity: 139, **141**
UMP: 177
úniková metoda: 123
uzavírací relace: 196, 201
uzavřený vesmír: 167
vakuum: 54
vápenato–hlinité inkluze: 131, 153
vedení: 194
vektor: 217, 223
vektorové pole: 217
vektorový součin: 217
Velký třesk: 167
Venuše: 88
vertikální střihová nestabilita: 27
vesmír vyplněný zářením: 167
vibrační přechod: 111, 181
víceprocesorové výpočty: 35
vír: 86, 97, 182
virtuální částice: 54
vítr: 85, 207
vlastní čas: 240
vlastní vzdálenost: 180
vlna: 194
vlnová funkce: 227
vlnová rovnice: 232
vnitřní energie: 22, 146
vodivost: 22
Voigtův profil: **115**, 117
volný pád: 182
von Misesovo kritérium: 45
von Neumannovo kritérium: 65
VSI: 27, 40
vulkanismus: 157
výběrové pravidlo: 97
výduť: 177
vývojová stadia: 205
vývojové procesy: 206
vývojové rovnice stavby: 202
vztlak: 94
vztlková nestabilita: 28, 96, 194
vztlková vlna: 96
WD: 205
Widmanstättenovy obrazce: 141
Wolfova–Rayetova hvězda: 178
wolfram: 140
WR: 206, 207
yielding: 44
YORP: 72
Youngův modul pružnosti: 44, 77
zákon čtverců: 109
zářivá difuze: 194
zdrojová funkce: 112, 113
železné meteority: 141
železo: 154
železo–wüstit: 139
Země: 131
zeslabení: 125
zirkon: 142
zorné pole: 109
zvuková vlna: 181, 187
zvyšování indexu: 224

Literatura

Učebnice

- [154] ARTMITAGE, P. J. *Astrophysics of planet formation*. New York: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780511691362.
- [155] CARROL B. W., OSTLIE D. A. *An introduction to modern astrophysics*. San Francisco: Pearson, Addison Wesley, 2007. ISBN 0321442849.
- [156] BROŽ, M., ŠOLC, M. *Fyzika sluneční soustavy*. Praha: MatfyzPress, 2013. ISBN 978807378-2368.
- [157] HARMANEC, P., BROŽ, M. *Stavba a vývoj hvězd*. Praha: MatfyzPress, 2011. ISBN 97880-73781651.
- [158] MIHALAS, D., MIHALAS, B. W. *Foundations of radiation hydrodynamics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1984. ISBN 0195034376.
- [159] SHORE, S. N. *Astrophysical hydrodynamics*. Weinheim: Wiley-Vch, 2007. ISBN 978352740-6692.

Reference

Předchozí reference [1] až [153] byly uvedeny u jednotlivých kapitol.