

Miroslav Brož

HYDRODYNAMIKA V ASTRONOMII

VYDAL MATFYZPRESS ???

PRAHA 2017???

Obsah

Slovo úvodem	7
1 Hydrodynamika protoplanetárního disku	9
1.1 Magnetohydrodynamika s přenosem záření, Eulerův popis	9
1.2 Vliv částic a dalších fyzikálních jevů	12
1.3 Vztah Eulerova a Lagrangeova formalismu	14
1.4 Kelvinova–Helmholtzova nestabilita	14
Vertikální stříhová nestabilita.	
1.5 Rayleighova–Taylorova nestabilita	15
Baroklinická nestabilita.	
1.6 Magneto–rotační nestabilita	17
1.7 Nestabilita dvou proudění	18
1.8 Gravitační nestabilita	19
1.9 Počáteční a okrajové podmínky	20
1.10 Formalismus v programu Pluto	21
1.11 Metoda konečných objemů (FVM)	22
Škálované jednotky.	
1.12 Adaptivní zjemňování sítě a víceprocesorové výpočty	23
AMR. MPI.	
1.13 Migrace planet v plynném disku	25
Typ II. Typ I. Turbulentní viskozita.	
2 Atmosféry a oceány	31
2.1 Hydrostatická rovnováha	32
2.2 Cyklostrofické proudění	33
2.3 Geostrofické proudění	34
2.4 Rossbyho vlny	36
2.5 Termální vítr ve výšce	38
2.6 Ekmanova spirála v hlubce	38
2.7 Semiempirická konvekce	40
Adiabatický gradient teploty. Bruntova–Väisäläova frekvence.	
2.8 Kolmogorovovo spektrum turbulence	43
3 Hydrodynamika srážek asteroidů	47
3.1 Lagrangeův popis	47

3.2	Elasticita, plasticita a praskliny	48
3.3	Metoda hlazená částicová (SPH)	50
3.4	Alternativní vyjádření prostorových derivací	52
3.5	Kernel čili hladící funkce	53
3.6	Umělá viskozita	54
3.7	Metoda k -d stromu	54
3.8	Multipólový rozvoj	57
3.9	Počáteční a okrajové podmínky	58
3.10	Fragmentační fáze	59
3.11	Reakumulační fáze	59
3.12	Škálovací zákon pro terče	62
4	Rovnice vedení tepla	65
4.1	Fourierovský rozvoj zářivého toku	65
4.2	Analytické jednorozměrné řešení	66
4.3	Metoda konečných diferencí (FDM)	68
	Explicitní schéma. Implicitní schéma. Hybridní schéma.	
4.4	Slabá formulace problému	71
4.5	Metoda konečných prvků (FEM)	73
4.6	Implementace v programu FreeFem++	74
	Triangulace. Radiační síla.	
4.7	Nekonvexní stínění, tepelný a rozptýlený tok	76
	Balvany na Itokawě.	
5	Elasticita montáže	81
5.1	Rovnice rovnováhy, Hookeův zákon a Lamého rovnice	81
5.2	Metoda konečných prvků (FEM)	82
5.3	Implementace v programu FreeFem++	83
5.4	Testovací příklad s jednoduchým nosníkem	84
5.5	Výpočet deformace montáže	86
A	Skaláry, vektory a operátory	89
	Skalární součin. Vektorový součin. Operátor gradientu.	
	Operátor divergence. Operátor rotace. Křivočaré souřadnice.	
	Sférické souřadnice.	
B	Lagrangeovy planetární rovnice	93
B.6	Lagrangeovy závorky	93
B.7	Časová invariance Lagrangeových závorek	94
B.8	Transformace při otočeních	95

B.9	Vyčíslení v pericentru	96
B.10	Lagrangeovy planetární rovnice	97
Rejstřík		99
Literatura		103

Slovo úvodem

Hydrodynamika má v astronomii výsadní postavení. Dovoluje nám fyzikálně popí-
sovat jevy v jejich složitosti a úplnosti, a umožňuje nám tak proniknout k podstatě
věci. Pokud nás jako nejzašší cíl zajímá vznik planety Země — který ovšem úzce
souvisí se vznikem a vývojem ostatních planet, asteroidů i komet, jejich vzájemnými
srážkami, interakcemi s meziplanetárním plynem a prachem, atd. — bez hydrody-
namiky se prostě neobejdeme.

Učebnice Hydrodynamika v astronomii je určitým pokračováním Fyziky sluneční
soustavy (vydané v roce 2013), ale zde se zabýváme obtížnějšími problémy a po-
kročilejšími metodami. Základem první části jsou pojednání o protoplanetárním
disku, srážkách asteroidů a vedení tepla, což jsou úlohy, na nichž se můžeme dobře
naučit eulerovskému i lagrangeovskému popisu, a také vícero numerickým metodám
(FDM, FVM, FEM nebo SPH).

Uvědomme si již nyní, že nás čekají opravdu *zásadní* obtíže. Vyjádřeno čtyř-
mi slovy: i) turbulence, ii) nevratnost, iii) chaos a iv) stochasticita. Více slovy:
hydrodynamické rovnice vykazují několik nevyhnutelných nestabilit, které se pro-
jevují jako turbulence. Procesy jako srážky těles jsou termodynamicky nevratné,
čili rovnice nelze integrovat zpět v čase; měření počátečních podmínek v čase $t = 0$
— který ani neznáme *a priori* — je zcela nemožné. I v jednoduchých systémech
 N těles vzniká deterministický chaos, ovlivňující vývoj celého systému. A konečně,
některé události jsou zřídka a buď nastanou, nebo ne; uvážit ovšem musíme obě
možnosti.

Poděkování za spolupráci v posledních letech patří přinejmenším: Davidovi Vo-
krouhlickému, Tomášovi Zemanovi, Tomášovi Turkovi, Martinovi Cholastovi, Vác-
lavu Špačkovi, Zdenku Bardonovi, Josefu Ďurechovi, Josefu Hanušovi, Martinovi
Lehkému, Ondřeji Chrenko, Pavlovi Ševečkovi, Jakubovi Rozehnalovi. V této učeb-
nici jsme uplatnili poznatky získané při řešení projektů Grantové agentury ČR
(P209/13/01308S) a Technologické agentury ČR (TA 03011171).

1 Hydrodynamika protoplanetárního disku

Majíc určitou představu, že ve vesmíru existují hvězdy a okolo nich plynoprachové disky (Brož a Šolc 2013), zkonstruujeme zde poměrně úplný fyzikální model tohoto disku. Budeme přitom postupovat „opačně než kolega Komenský“, čili od složitěho k jednoduchému. Sepíšeme nejprve všechny relevantní rovnice, abychom je viděli v celé kráse, a teprve poté budeme diskutovat jednoduché situace.

Disk si budeme představovat jako *spojité prostředí*, což je velmi významné, nicméně obvyklé zjednodušení plynu, respektive plazmatu (obsahujícího ionty, elektrony i neutrální atomy a molekuly). Umožní nám to pro fyzikální veličiny používat diferencovatelné spojité funkce.

1.1 Magnetohydrodynamika s přenosem záření, Eulerův popis

Pro popis zvolíme Eulerův formalismus, tzn. statického pozorovatele, který sleduje proudění plynu okolo. Fyzikální zákony, které nám popisují vývoj hustoty ρ disku, rychlosti $\mathbf{v}$ atd. od nějakého — zatím neznámého — počátečního stavu, jsou následující. Rovnice kontinuity (neboli zákon zachování hmoty, např. v jednotkách $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$):¹

$$\overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho}^{\text{derivace } f(\mathbf{r}, t)} = \overbrace{-\rho \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{zředění}}, \quad (1)$$

Navierova–Stokesova rovnice pro tekutiny (též pohybová, m s^{-2}):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \overbrace{\nabla \Phi}^{\text{gravitace}} + \overbrace{\frac{1}{\rho} \frac{1}{\mu_{\text{vac}}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}^{\text{Lorentz}} + \overbrace{\frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \mu_1 \nabla \mathbf{v} + \nabla (\mu_2 + \frac{1}{3} \mu_1) \nabla \cdot \mathbf{v}]}^{\text{viskozita}}, \quad (2)$$

rovnice tepelné rovnováhy (1. věta termodynamická, $\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}$):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla U}^{\text{konvekce}} = -\overbrace{U \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{zředění}} - \overbrace{P \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{práce}} - \overbrace{\kappa_{\text{P}} \rho \frac{\sigma}{4} T^4}^{\text{emise}} + \overbrace{\kappa_{\text{P}} \rho c E_{\text{rad}}}_{\text{absorpce}} - \overbrace{\nabla \cdot F_{\star} \hat{\mathbf{r}}}_{\text{ozáření}} + \overbrace{\nabla \cdot K \nabla T}_{\text{difuze}}, \quad (3)$$

¹ pro připomenutí, operátor gradientu jest $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, divergence $\nabla \cdot$ (tj. skalární součin), rotace $\nabla \times$ (vektorový součin); mějme na paměti jejich české významy: stoupání, rozbíhavost a stáčení, jež mohou pochopení rovnic napomoci; viz též dodatek A

rovnice přenosu záření ($\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}$):²

$$\frac{\partial E_{\text{rad}}}{\partial t} = \overbrace{\nabla \cdot \frac{c\lambda_{\text{lim}}}{\kappa_{\text{R}}\rho} \nabla E_{\text{rad}}}^{\text{difuze}} + \overbrace{\kappa_{\text{P}}\rho \frac{\sigma}{4} T^4}^{\text{emise}} - \overbrace{\kappa_{\text{P}}\rho c E_{\text{rad}}}^{\text{absorpce}}, \quad (4)$$

indukční rovnice (T s^{-1}):³

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \overbrace{\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}^{\text{advekce}} + \overbrace{\nabla \cdot \eta_{\text{mag}} \nabla \mathbf{B}}^{\text{difuze}}, \quad (5)$$

Poissonova rovnice ($\text{J kg}^{-1} \text{m}^{-2}$):

$$\nabla^2 \Phi_{\text{disk}} = 4\pi G\rho, \quad \Phi = -\frac{GM_{\star}}{r} + \Phi_{\text{planet}} + \Phi_{\text{disk}}, \quad (6)$$

stavová rovnice pro ideální plyn (Pa):

$$P = (\Gamma - 1)U = \frac{\rho}{\mu m_{\text{H}}} kT, \quad (7)$$

rovnice pro tok záření od hvězdy (včetně zeslabování opacitou prachu a plynu; $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$):

$$F_{\star} = \int_{\omega} \int_{\nu} B_{\nu}(T_{\star}) \left(\frac{R_{\star}}{r} \right)^2 e^{-\tau_{\nu}} d\nu d\omega, \quad \tau_{\nu} = \int_{R_{\star}}^r \kappa_{\nu} \rho dr. \quad (8)$$

Značení veličin je standardní: t čas, $\mathbf{r}$ polohový vektor, ρ hustota, $\mathbf{v}$ rychlost, U vnitřní energie plynu (na jednotku objemu), E_{rad} hustota energie záření, $\mathbf{B}$ magnetické pole, Φ gravitační potenciál, P tlak, T termodynamická teplota, $F_{\star}$ zářivý tok (od hvězdy), μ_1 dynamická (první) viskozita, μ_2 dynamická objemová viskozita, κ_{P} Planckova opacita, κ_{R} Rosselandova opacita, σ Stefanova–Boltzmannova konstanta, c rychlost světla, K tepelná vodivost, λ_{lim} limiter toku, η_{mag} magnetická difuzivita (nepřímo úměrná vodivosti σ' a magnetické permeabilitě μ_{vac}), G gravitační konstanta, Γ adiabatický index, μ střední molekulová hmotnost plynu, m_{H} hmotnost atomu vodíku, k Boltzmannova konstanta, B_{ν} Planckova funkce (pro intenzitu), ν frekvence, ω prostorový úhel, $T_{\star}$ efektivní teplota hvězdy, $R_{\star}$ její poloměr, τ_{ν} optická tloušťka, κ_{ν} monochromatická opacita.

Jedná se o soustavu 10 nelineárních partiálních diferenciálních rovnic druhého řádu (plus 3 algebraických), jež obsahují 13 neznámých funkcí (skalárních): $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $U(\mathbf{r}, t)$, $E_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$, $P(\mathbf{r}, t)$, $T(\mathbf{r}, t)$, $F_{\star}(\mathbf{r}, t)$; které jsou závislé

² v difuzní aproximaci omezené tokem záření

³ zahrnující Maxwellovy rovnice a Ohmův zákon pro kvazineutrální plazma

na 4 nezávislých veličinách: $\mathbf{r}$, t . Dále zde máme volné parametry: $M_\star$, $R_\star$, $T_\star$, M_{planet} , μ_1 , μ_2 , η_{mag} , μ , Γ ; a dané funkce (složitě, ale dané): $\kappa_P(\rho, T)$, $\kappa_R(\rho, T)$, $\kappa_\nu(\rho, T)$, $\lambda_{\text{lim}}(E_{\text{rad}}, \nabla E_{\text{rad}})$, $\tau_\nu(\mathbf{r}, \kappa_\nu, \rho)$.

K jednotlivým rovnicím si dovolíme několik „praktických“ poznámek. Rovnici (1) je možno rozumět intuitivně: mějme vlevo hustotu velkou a vpravo nulovou. Pokud vektory rychlosti směřují zleva doprava, budeme mít za chvíli vpravo nějakou látku (a vlevo nic, respektive to, co bylo vlevo od leva). Kladná rozbíhavost rychlostí $\nabla \cdot \mathbf{v}$ by přitom odpovídala růstu (elementárního) objemu dV , čili zředění a poklesu hustoty ρ .

V rovnici (2) vystupuje na pravé straně zejména gradient tlaku ∇P , neboli makroskopický projev elektromagnetických sil mezi mikroskopickými částicemi plynu. Představme si například, že vlevo máme vyšší tlak, vpravo nižší, tudíž na ploše rozhraní jsou dvě různě velké tlakové síly opačného směru, které způsobují zrychlení $-\frac{1}{\rho} \nabla P$.

Lorentzův člen odpovídá klasickému vztahu $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, kde ovšem obecně $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{nábojů}} \neq \mathbf{v}_{\text{plynu}}$! V plazmatu je makroskopické elektrické pole $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ a hustotu proudu $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$ lze vyjádřit z Ampérova zákona $\mu_{\text{vac}} \mathbf{j} \doteq \nabla \times \mathbf{B}$.

Viskózní člen se zde objevuje proto, že mezi vrstvami tekutiny proudícími různými rychlostmi vznikají třecí síly; síla na jednotku plochy se označuje jako *napětí* (s jednotkou Pascal). Pro obvyklé (newtonovské) tekutiny je přitom tření úměrné rozdílu rychlostí, čili $\mu_1 \nabla \mathbf{v}$. Napětí od vrstvy horní má však opačný směr než od dolní; teprve když se jejich velikost mění (tzn. nenulovou 2. derivaci rychlosti), vzniká zrychlení $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mu_1 \nabla \mathbf{v}$.

Rovnice (3) jest obdobou (1), jen zde namísto hustoty hmoty ρ vystupuje hustota energie U . Pak jsme museli dle 1. věty termodynamické ($dU = -dW + dQ$) připsat mechanickou práci vykonanou plynem ($-PdV$) a všechny zdroje tepla.

Skutečnost, že při emisi záření hraje roli opacita, se může zdát podezřelá, ale to je způsobeno skutečností, že emisní koeficient je za předpokladu lokální termodynamické rovnováhy dán Kirchhoffovým zákonem, $j_\nu = \kappa_\nu B_\nu$. V popisu středovaném přes všechny frekvence se používá opacita buď Planckova, tzn. středovaná přes hustotu zářivé energie, nebo Rosselandova, středovaná přes zářivý tok, podle toho, jaký jev právě popisujeme.

Tok tepla je podle Fourierova zákona úměrný gradientu teploty, $\mathbf{F}_{\text{heat}} = -K \nabla T$, neboť teplo teče z místa s vyšší teplotou do místa s nižší teplotou. Pokud se tok navíc rozbíhá ($\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{heat}}$ je kladná), děje se tak na úkor vnitřní energie U , proto je výsledné znaménko členu v (3) +. Toto platí obecněji pro difuzi čehokoliv, nejen tepla, ale též záření, částic, magnetického pole. Kdybychom chtěli, lze ze (3) odvodit klasickou rovnici vedení tepla. Pro statickou pevnou látku by totiž bylo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\rho = \text{konst.}$ (jde pak o parametr), též $V = \text{konst.}$ Stačilo by psát $\frac{\partial U}{\partial t} = K \nabla^2 T$ a použít jinou stavovou rovnici, $U = \rho c_V T$.

V rovnici (4) není advekce, protože záření není přenášeno plynem v podobě E_{rad} , nýbrž prostřednictvím U . Emise a absorpce jsou zde pochopitelně s opačným znaménkem než v rovnici (3), která se týká plynu.

Gravitační potenciál v rovnici (6) je zaveden tak, že zrychlení $\mathbf{a}_g = -\nabla\Phi$.

Uvědomme si, že výše uvedené rovnice jsou *velmi obecné*! S výjimkou kvantovky a relativity v sobě zahrnují (téměř) celou klasickou fyziku, popisující většinu jevů v našem okolí i ve vesmíru. Nicméně i tak musíme být obezřetní, protože některé členy jsou platné pouze ve stavu (lokální) termodynamické rovnováhy.

1.2 Vliv částic a dalších fyzikálních jevů

Při numerickém řešení rovnic máme vždy omezené rozlišení, což si obvykle vynucuje odlišení „malých“ pevných částic (prachu, balvanů, planetesimál, planet) od plynu (tzn. spojitého prostředí).

Občas musíme přidat další rovnice, respektive členy v rovnicích, abychom postihli „méně důležité“ fyzikální jevy, které však mohou být v dané situaci (pro vysvětlení určitého pozorování) zcela zásadní, například:

0. neinerciální členy, pokud bychom pracovali nějaké v neinerciální souřadnicové soustavě, například rotující úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$:

$$\mathbf{a}_{\text{neinerciální}} = -\overbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r})}^{\text{odstředivé}} - \overbrace{2\vec{\Omega} \times \mathbf{v}}^{\text{Coriolis}}, \quad (9)$$

kde první člen je opravdu $-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) = \vec{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \vec{\Omega}) = \mathbf{r}\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} - \vec{\Omega}\vec{\Omega} \cdot \mathbf{r} = \Omega^2 \mathbf{r}_\perp$ podle vektorové identity „bác mínus cáb“ (175);

1. pohyb částic, jejich vzájemná gravitace:

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i \neq j} -\frac{GM_i}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}, \quad (10)$$

pro jejíž řešení je dobré použít symplektický integrátor. Pokud by částic bylo obrovské množství, zavádějí se sledovací částice, reprezentující vždy učitou skupinu částic na podobných trajektoriích;

2. vazba částice $\leftrightarrow$ plyn, skrze gravitaci $\mathbf{a}_{\text{částice}} \doteq \int_{\text{disk}} -\frac{GdM}{r^3} \mathbf{r}$, a aerodynamické tření dle Epsteinova nebo Stokesova zákona:

$$\mathbf{a}_{\text{Epstein}} = -S\rho v_T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad \text{pro } D \ll \ell, \quad (11)$$

$$\mathbf{a}_{\text{Stokes}} = -\frac{1}{2}CS\rho|\mathbf{u} - \mathbf{v}|(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad \text{pro } D \gg \ell, \quad (12)$$

kde S označuje průřez částice, D průměr, C koeficient odporu, v_T termální rychlost (plynu), $\mathbf{u}$ rychlost částice, $\mathbf{v}$ rychlost plynu a ℓ střední volnou dráhu molekul (plynu);

3. vzájemné srážky částic, příslušná fragmentace nebo akrece, popsané relacemi $\frac{dM}{dt}(M)$, $\frac{d\mathbf{v}}{dt}(M)$, používají se simulace Monte–Carlo nebo samostatná hydrodynamika;
4. tlak záření $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$, $P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}$;
5. radiační zrychlení, $\mathbf{a}_{\text{rad}} \doteq \frac{\kappa_{\text{R}}}{c}\mathbf{F}_{\text{rad}}$, přičemž tok už známe, $\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{c\lambda_{\text{lim}}}{\kappa_{\text{R}}\rho}\nabla E_{\text{rad}}$;
6. viskózní ohřev, čili $\mathbf{S} \cdot \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$, kde tenzor napětí $\mathbf{S}$ je týž jako ve viskóznímu členu $\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{S}$;
7. rezistivní ohřev, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \doteq \frac{1}{\sigma}\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \doteq \frac{\mu_{\text{vac}}^2}{\sigma}(\nabla \times \mathbf{B})^2$, dle Ohmova a Ampérova zákona, kde $\mathbf{j}$ označuje hustotu proudu a $\mathbf{E}$ elektrické pole;
8. anizotropní vedení tepla a jeho saturace, $\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{heat}}, \mathbf{F}_{\text{heat}} = \frac{F_{\text{sat}}}{F_{\text{sat}} + |\mathbf{F}|}\mathbf{F}$, $\mathbf{F} = K_{\parallel}\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla T) + K_{\perp}[\nabla T - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla T)]$, $F_{\text{sat}} = 5\phi\rho c_s^3$, kde $\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$, $c_s = \sqrt{\Gamma \frac{\partial P}{\partial \rho}}$ označuje rychlost zvuku a $\phi < 1$ je volný parametr;
9. radiativní rozpad, $\rho\epsilon_{\text{decay}}(X, Y, Z)$, se změnami abundancí $\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_k \frac{\epsilon_k}{\alpha_k}$;
10. částicová difuze, $\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot D\nabla n$, $D = \frac{1}{3}\ell v_T$, kde n označuje koncentraci, D difuzní koeficient, ℓ střední volnou dráhu, v_T termální rychlost;
11. fázové přeměny, depozice plynu a sublimace pevných částic;
12. chemické reakce, případně jejich katalyzace zářením nebo povrchy;
13. Hallův jev, čili člen $-\nabla \times (\frac{1}{en_e}\mathbf{j} \times \mathbf{B})$ v indukční rovnici (5) (Armitage 2010);
14. ambipolární difuze, $+\nabla \times (\frac{1}{\gamma\rho_i\rho}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})$ tamtéž, v řidším prostředí, tj. při nižší frekvenci srážek, se neutrální částice mohou pohybovat systematicky jinak než ionty, což se projeví jako tření, skrze koeficient $\gamma \equiv \langle \sigma v_i \rangle / (m_i + m_n)$.
15. změny ionizace a rekombinace, popsané rovnovážnou Sahovou rovnicí:

$$\frac{X_i^2}{1 - X_i} n_e = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi}{kT}}, \quad (13)$$

kde X_i označuje stupeň ionizace, a χ ionizační energii atomu. Nepřímo je ovlivněna i stavová rovnice prostřednictvím $\mu(\rho, T, X, Y, Z)$ a tamtéž bychom měli správně zohlednit *degeneraci* elektronového plynu faktorem $\lambda_{\text{deg}}(\rho, T)$;

16. termonukleární reakce včetně ztrát energie neutrinu, $\rho\epsilon_{\text{nukl}}(\rho, T, X, Y, Z) - \rho\epsilon_{\nu}$, a odpovídající rovnice pro změny chemického složení (abundancí X vodíku, Y helia a Z těžších prvků, resp. jednotlivých izotopů):⁴

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \sum_i \frac{\epsilon_i}{\alpha_i}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_j \frac{\epsilon_j}{\alpha_j}, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_k \frac{\epsilon_k}{\alpha_k}. \quad (14)$$

⁴ Po zahrnutí posledně jmenovaných jevů již můžeme počítat *celý* vývoj hvězd, včetně jedno-rozměrné hydrostatické aproximace, konvekce, hvězdného větru, trojrozměrné struktury, rotace, magnetického dynama, případných vnějších vlivů ($\Phi_{\text{dvoj*}}$, $F_{\text{dvoj*}}$). Na druhou stranu je nutné připustit, že některé jevy, například erupce, rekonexe, výboje, resp. pohyb svazků částic, jsou natolik *nerovnovážné*, že předpoklad LTE bychom museli opustit a mj. bychom nesměli vůbec používat teplotu T , nýbrž „divoké“ distribuční funkce jednotlivých veličin.

Čtenář se přečtením tohoto řádku vzdává jakéhokoliv nároku na úplnost výčtu...

1.3 Vztah Eulerova a Lagrangeova formalismu

Alternativně bychom mohli použít Lagrangeův formalismus, tzn. souhybného pozorovatele, který se líně nechává unášet proudící tekutinou. Neznámé jsou pak *trajektorie* (nekonečného množství) bodů kontinua $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, respektive $\rho(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$, apod. pro další veličiny, všechny závislé na čase t a „indexované“ například počátečními polohami $\mathbf{r}_0$ (v čase $t = 0$).

Namísto parciálních derivací $\frac{\partial}{\partial t}$ a vlastně celých levých stran bychom užili totálních $\frac{d}{dt}$, jejichž vztah plyne z derivace funkce $\phi(\mathbf{r}, t)$ dvou proměnných:

$$\overbrace{\frac{d\phi}{dt}}^{\text{Lagrange}} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \overbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}^{v_i} = \overbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi}^{\text{Euler}}. \quad (15)$$

Polohy $\mathbf{r}$ lze posléze spočíst z $\mathbf{v}$ jako:

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) dt \quad (16)$$

V dalším zůstaneme u našeho Eulera, nicméně je dobré tušit, že existují kódy využívající Lagrange.⁵ Výhodou Lagrangeova popisu mj. je, že nemusíme předem konstruovat (zbytečně rozlehlou) fixní síť bodů, zvláště když předem nevíme, kam se body kontinua dostanou. Opačně řečeno, výhodou Eulerova popisu je, pokud nás eminentně zajímá jen omezená oblast prostoru, nepočítáme zbytečně trajektorie, které stejně skončí mimo ni.

1.4 Kelvinova–Helmholtzova nestabilita

Řešení hydrodynamických rovnic vykazují několik zásadních nestabilit, z nichž nejzákladnější je Kelvinova–Helmholtzova. Vzniká již ve velmi jednoduché situaci⁶: dvě vrstvy nestlačitelné kapaliny, jedna proudící tam a druhá zpět, bez gravitace. Z celé soustavy (1) až (6) nám zůstanou jen dvě „očesané“ rovnice:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (18)$$

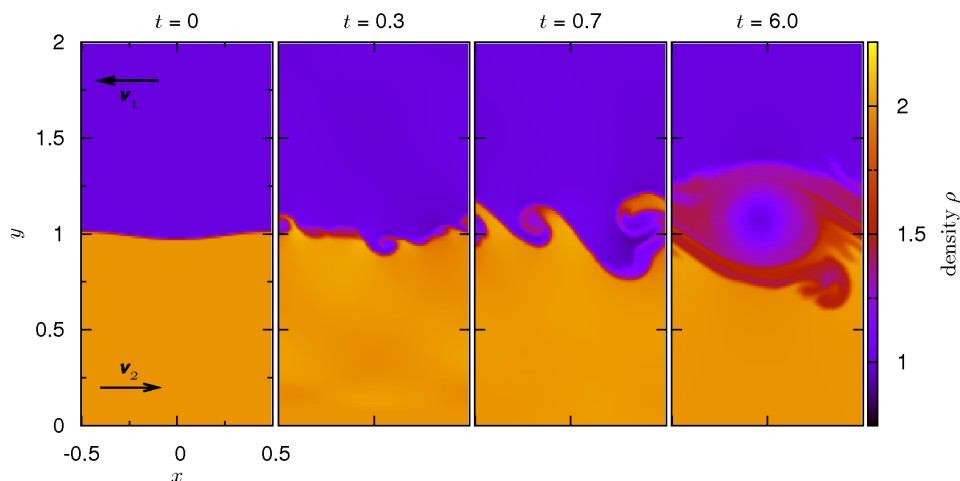
Jak vidíme z numerického řešení (obr. 1), jedná se o významný zdroj turbulence neboli vírů. Kvalitativně je možno říci, že sledujeme-li proudnice ve směru $-x$,

⁵ Aby se Euler a Lagrange nepletli, je potřeba se podívat na jejich podobizny. Lagrange se zdá hubenější a asketičtější, nebude mu tedy dělat problém jít sledovat trajektorie. Naopak Euler je na první pohled „tlustší a línější“, ten se za žádnou cenu nikam se nepohne.

⁶ Pozor na implikaci! Neznamená to, že nevzniká ve složitějších situacích.

tak *nad* každou vlnkou jsou zhuštěné, rychlost v_x je zápornější a tlak P menší, neboť jediné, co mohlo tekutinu urychlit, je $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ (tj. ostatně v naprostém souladu s Bernoulliho rovnicí). Pod vlnkou je to přesně naopak, čímž vzniká $\frac{\partial P}{\partial y} < 0$, v_y kladné a vlnka roste. Není možno nevědět, že vlny na moři jsou způsobené právě tímto jevem.

U každé nestability bychom si měli také uvědomit, co omezuje její růst. V tomto případě je samoomezující, velikost největšího víru je dána počátečními podmínkami a parametry problému; zároveň těžko může být větší než okraj výpočetní domény.



Obr. 1 — Vývoj Kelvinovy–Helmholtzovy nestability z počáteční malé perturbace rozhraní. Počáteční podmínky (v bezrozměrných jednotkách): $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, $P_1 = P_2 = 10$, $\mathbf{v}_1 = (-1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (+1, 0)$. Okrajové podmínky: vlevo a vpravo periodické, nahoře a dole $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. Stavová rovnice v tomto případě odpovídala ideálnímu plynu. Výpočet byl proveden programem Pluto (Mignone aj. 2007) ve dvou rozměrech, v síti 100×200 bodů.

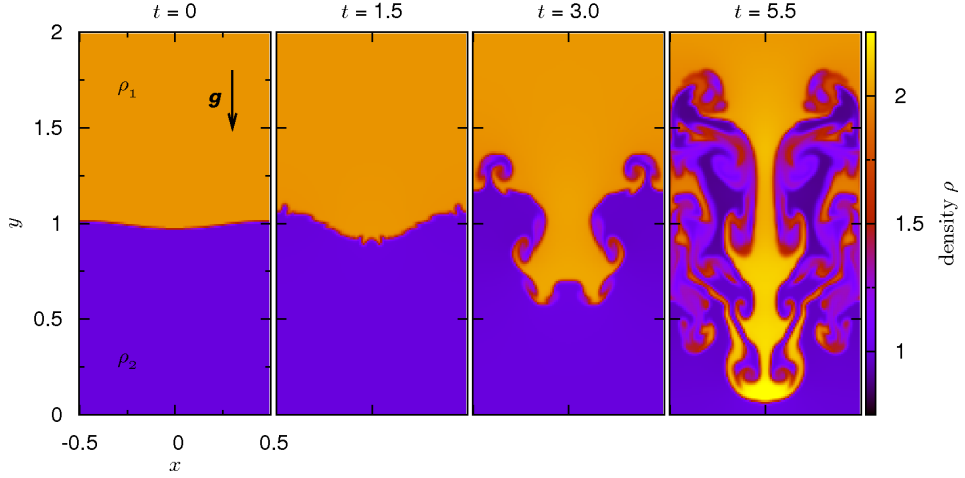
Vertikální stříhová nestabilita. V protoplanetárním disku se rozvíjí zejména ve svislém směru, neboť větší z znamená trochu větší $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ od Slunce, čili menší keplerovskou rychlost $v_{\text{kepl}} = \sqrt{GM_*/r}$ než v základní rovině, což vede ke stříhu; proto se jinými slovy nazývá vertikální stříhová nestabilita (angl. VSI).

1.5 Rayleighova–Taylorova nestabilita

Pro vznik druhé, Rayleighovy–Taylorovy nestability je třeba: hustší nestlačitelná kapalina nahoře, řidší dole, to vše v gravitačním poli. Příslušné rovnice jsou:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi. \quad (20)$$



Obr. 2 — Vývoj Rayleighovy–Taylorovy nestability z počáteční malé perturbace rozhraní. Protože dochází ke vzájemným pohybům tekutiny, nevyhnutelně se objeví i nestability Kelvinovy–Helmholtzovy. Počáteční podmínky: $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 1$, $\Phi = y$, resp. $\mathbf{g} = -\nabla\Phi = (0, -1)$, $P(y)$ odpovídá hydrostatické rovnováze, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = (0, 0)$. Okrajové podmínky: vlevo a vpravo periodické, nahoře a dole $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. Stavová rovnice odpovídá ideálnímu plynu. Výpočet programem Pluto ve dvou rozměrech, v síti 100×200 bodů.

Vývoji (obr. 2) je možno rozumět následovně: jde o stav s vyšší energií, který samovolně přejde do stavu s nižší energií a vyšší neuspořádaností (entropií). S ohledem na Archimédův zákon se tato nestabilita nazývá též *vztlaková*. Pokud bychom řešili zároveň tepelnou rovnováhu (3) a viděli bychom transport vnitřní energie, hovořili bychom o *konvekci*.

Při vývoji nestability RT vždy dochází ke vzájemným pohybům tekutin, čili se nevyhnutelně objeví i nestabilita KH. Obě nestability (kouřící komín) běžně kreslí děti v mateřské školce, rodiče jim pouze zatajili, oč se jedná.

Nestabilitu obvykle omezuje až hranice (resp. okraj domény). V atmosféře bývá vytvářena přirozeně teplotním zvrstvením či zvratem.

Baroklinická nestabilita. Jen trochu složitější variantou RT je nestabilita baroklinická (Klahr a Bodenheimer 2003, Lesur a Papaloizou 2010), ve které máme kromě kompresibilní rovnice kontinuity i difuzi vnitřní energie a nějaký ohřev:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi. \quad (22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla U = -U \nabla \cdot \mathbf{v} - P \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot K \nabla T - \nabla \cdot F_\star \hat{\mathbf{r}}; \quad (23)$$

jedná se evidentně o termodynamický tepelný stroj, neustále pohánějící víření. V protoplanetárním disku je podkritická (lokální) baroklinická nestabilita (angl. SBI) patrně hlavním zdrojem turbulence.

Kvalitativně funguje takto: fluktuace posune bublinu plynu „nahoru“ (radiálně, proti $\mathbf{a}_g$), v okolí je (obvykle) nižší P_o , v bublině se vždy udržuje totéž $P_b = P_o$, nastává víceméně adiabatická expanze, při níž jak ρ_b , tak T_b klesají ($P \propto \rho T$). Pokud ale teplotní profil $T_o(r)$ klesá dostatečně strmě, například proto, že prostředí je mizerně průhledné (κ_ν velké), bývá $T_b > T_o$, $\rho_b < \rho_o$; profil je konvektivně nestabilní. Bublina je balón.

Nahoře se ovšem okolí pohybuje jinou rychlostí v_{kepl} , bublina se proto posouvá „horizontálně“, ve směru $-\hat{\phi}$. Zde je čas na difuzi vnitřní energie bubliny, která se odevzdá okolí, ρ_b , T_b klesnou na úroveň ρ_o , T_o . Protože si kontinuita a tlakový člen vynucují další pohyb, bublina padá zpět „dolu“, dochází k adiabatické kompresi, pohybu ve směru $\hat{\phi}$, a přijímání tepla z okolí, čímž se cyklus uzavírá.

V meteorologii se setkáváme s týmiž situacemi. V cyklónách nebo anticyklónách, roztočených díky spolupůsobení gradientu tlaku a Coriolisova zrychlení (viz Brož a Šolc 2013, str. 177), se chladný a teplý vzduch vyskytují takřka vedle sebe (rozhraní nazýváme fronty), přičemž jejich rozpad bývá způsoben právě baroklinickou nestabilitou, když chladný vzduch nateče pod teplý (říkáme, že nastala okluze).

1.6 Magneto–rotační nestabilita

Třetí nestabilita, magneto–rotační (Balbus a Hawley 1991, angl. MRI) vyžaduje přinejmenším toto nastavení: nestlačitelná kapalina, bez gravitace, diferenciální rotace, magnetické pole, bez difuze. Čili:

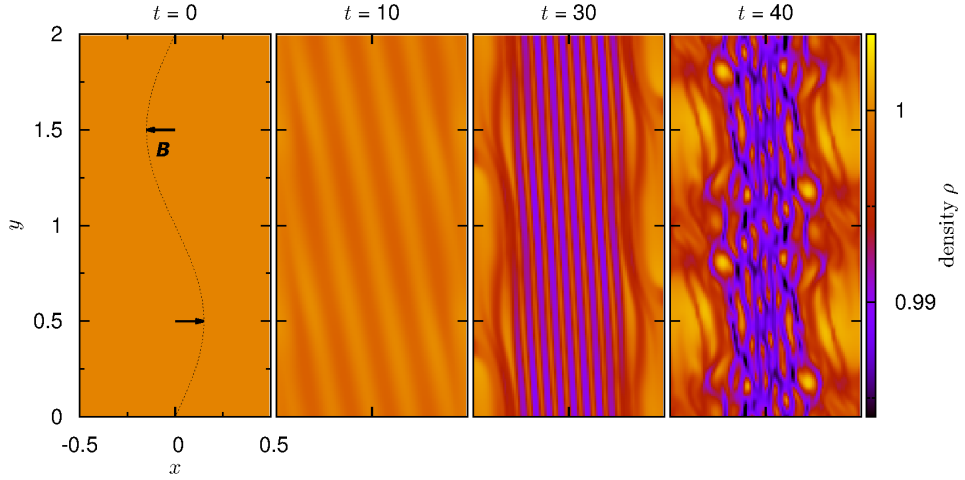
$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi_* + \frac{1}{\rho \mu_{\text{vac}}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26)$$

Základním principem je zamrznutí siločar v plazmatu a jejich navíjení v diferenciálně rotujícím prostředí (se stříhem rychlostí), čili zesilování slabých perturbací magnetického pole. Ostatně magnetické dynamo v nitru Slunce nebo Země je totéž. Rozvoj nestability je znázorněn na obr. 3. Podotkněme, že předpoklad „bez difuze“ nutně znamená nemalý stupeň ionizace látky, jinak by Lorentzův člen byl irelevantní. Dostatečný stupeň ionizace je v blízkosti Slunce, daleko od Slunce (i díky kosmickému záření), též na povrchu disku ozařovaného UV, ale není jisté, zda uprostřed. Tam může existovat *mrtvá zóna*, v níž MRI nefunguje a disk není (tak) turbulentní.

Nestabilitu rozvíjející se za výše uvedených podmínek omezuje až hranice (zde tloušťka disku) nebo difúzní člen, kdybychom ho měli. Pokud však dochází k am-



Obř. 3 — Vývoj magneto–rotační nestability z počáteční malé perturbace magnetického pole $\mathbf{B}$. Počáteční podmínky: $\rho = 1$, $\mathbf{v} = (0, -0.5x)$, $\mathbf{B} = (B_0 \sin(\pi y), 0)$, $\Phi = 0$. Okrajové podmínky: vlevo a vpravo je jednoduše předepsán stříh rychlosti (proto nepotřebujeme $\Phi \neq 0$), nahoře a dole periodické. Stavová rovnice odpovídá ideálnímu plynu. Výpočet programem Pluto ve dvou rozměrech, v síti 100×200 bodů. V časech $t > 30$ se již projevuje numerická viskozita, tzn. špatné rozlišení zejména ve směru x ; celistvost 1 buňky je poměrně silnou vazbou ($\nu \rightarrow \infty$).

bipolární difuzi, čili ionty se pohybují beze srážek s neutrálními atomy, nestabilita se rozvíjí pouze v plazmatu a její celkový vliv je víceméně zanedbatelný.

1.7 Nestabilita dvou proudění

Pozoruhodná nestabilita vzniká pro dvě proudění s určitou vazbou (Youdin a Johansen 2007, angl. streaming instability). V našem kontextu jde o plyn a prach a vazbou jest aerodynamické tření, obojí pod vlivem gravitace centra.

Príslušná nestabilita se nazývá též „dvoutekutinová“, popisujeme-li prach jako tekutinu (s hustotou ρ_S a rychlostí $\mathbf{u}$).⁷ Plyn nemusí být nutně stlačitelný, ale prach ano, což zní podezřele, ale nejedná se samozřejmě o stlačování zrn, nýbrž o jejich soustřeďování v prostoru:

$$\frac{\partial \rho_S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_S = -\rho_S \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \Phi_* - S \rho v_T (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad (28)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (29)$$

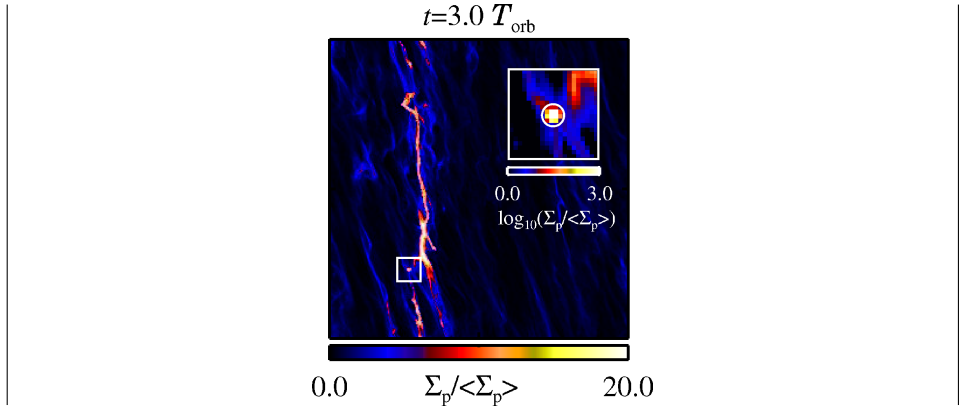
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi_* + S \rho_S v_T (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (30)$$

⁷ Nestabilita ovšem přetrvává i případě, když prach popíšeme jako částice.

V Navierově–Stokesově rovnici pro prach jsme použili Epsteinův zákon a v rovnici pro plyn totéž s faktorem $-\frac{\rho_s}{\rho}$, kvůli zachování hybnosti. Často se namísto globálních simulací provádějí lokální, v korotujícím systému, s diferenciální rotací.

Oscilace ρ_s (i ρ) vytvářejí tak vysoká lokální maxima, že v nich gravitační nestabilita (kolaps) prachu nebo balvanů může vést ke vzniku planetesimál nebo rovnou planetárních embryí (viz obr. 4).

Je tu i jistá analogie s Tour de France — cyklista na čele cítí odpor vzduchu o ostatní „lenoši“ v závětrí ho snadno dojedou. V tomto specifickém případě nestabilitu omezuje cíl.



Obr. 4 — Nestabilita dvou proudění (plynu a prachu). Znáznorněna je plošná hustota σ části disku
Převzato z Johansen aj. (2007).

1.8 Gravitační nestabilita

Pro kolaps jsou třeba dvě věci: stlačitelný plyn, vlastní gravitace. Dále potřebujeme rovnice:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi, \quad (32)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (33)$$

ze kterých je možné odvodit ještě jednu (podstatnou) podmínku, neboli *Toomreho kritérium* pro nestabilitu (Toomre 1964):

$$Q \equiv \frac{c_s \omega_{\text{kepl}}}{\pi G \sigma_0} < 1, \quad (34)$$

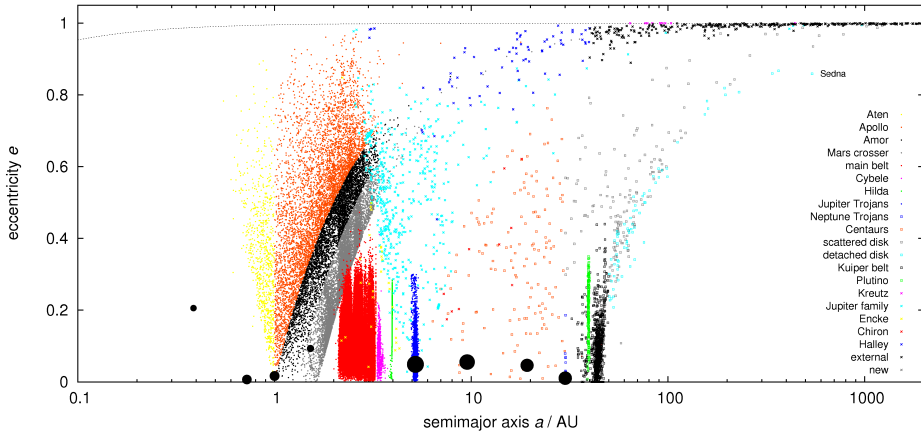
kde c_s označuje rychlost zvuku, $\omega_{\text{kepl}} = \sqrt{GM_*/r^3}$ střední pohyb na daném poloměru, σ_0 počáteční plošnou hustotu disku (odvození viz Armitage 2010, str. 135).

Růst ρ , P , Φ nade všechny meze je sice teoreticky možný, pak bychom všichni skončili v černé díře, ale obvykle se nakonec ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) ustaví dosti velký hydrostatický ∇P .

1.9 Počáteční a okrajové podmínky

Výše uvedené rovnice však neobsahují jednu veledůležitou věc: počáteční podmínky! Navíc čelíme třem takřka neřešitelným problémům: (i) rovnice *nelze* integrovat zpět v čase kvůli termodynamicky nevratným dějům (například difuzi, srážkám, unikajícímu infračervenému záření) a deterministickému chaosu, čili nemůžeme volit čas $t_0 = \text{dnes}$, kdy by bylo možné něco měřit; (ii) sluneční soustava vznikla v apriori neznámém čase $t_?$; (iii) v čase $t_?$ dávno minulém beztak nelze měřit nic.

Naštěstí je možno využít skutečnosti, že: (i) chemické složení Slunce, planet a meteoritů je totožné, až na těkavé prvky (zejména H, He); (ii) radiometrické stáří primitivních meteoritů je okolo $t = -(4,56 \pm 0,01)$ Gyr; (iii) minimální počáteční plošnou hustotu disku lze odhadnout podle pozorovaných planet, rozprostřených podél jejich drah a doplněných o zmiňované těkavé prvky. Pak již lze rozumně volit počáteční podmínky v čase $t_0 = -4,56$ Gyr, integrovat rovnice dopředu (dodnes) a nakonec posoudit model dle souladu s pozorovanou sluneční soustavou (obr. 5).



Obr. 5 — Pozorovaný stav sluneční soustavy znázorněný na grafu velká poloosa a , excentricita e . Symboly a barvami jsou rozlišeny planety a jednotlivé populace malých těles: asteroidy jsou označeny kroužky, transneptunické objekty čtverečky a komety křížky. Tečkovaná linie (nahore) odpovídá perihelové vzdálenosti rovné poloměru Slunce.

Poznámka na okraj: vnitřní okraj disku (ve sférických souřadnicích) obvykle volíme $r_1 \simeq 0,1$ AU kvůli působení magnetického pole rotující hvězdy, které pod korotační orbitou skutečně vytváří mezeru v disku. Vnější okraj $r_2 \simeq 40$ AU musí být dostatečně daleko, aby (příliš) neovlivňoval pohyb ve studované oblasti. Ve sférických souřadnicích by okrajové podmínky mohly být voleny takto:

1. $r = r_1$ (vnitřní okraj): $v_r = v_\vartheta = 0$, $v_\phi = \sqrt{GM_\star/r_1}$, tj. keplerovská rychlost;
2. $r = r_2$ (vnější okraj): $v_r = v_\vartheta = 0$, $v_\phi = \sqrt{GM_\star/r_2}$;
3. $\vartheta = 0^\circ$ (u pólu)⁸ zrcadlové podmínky, tzn. skaláry zůstávají totožné, normálové složky vektorů mění znaménko: $\rho \rightarrow \rho$, $v_n \rightarrow -v_n$, $B_n \rightarrow -B_n$, $v_t \rightarrow v_t$, $B_t \rightarrow B_t$;
4. $\vartheta = 90^\circ$ (na rovníku) symetrické podle roviny: $\rho \rightarrow \rho$, $v_n \rightarrow -v_n$, $B_n \rightarrow B_n$, $v_t \rightarrow v_t$, $B_t \rightarrow -B_t$;
5. $\varphi = 0^\circ = 360^\circ$ periodické.

1.10 Formalismus v programu Pluto

Pro výpočetní účely se rovnice optimalizují následovně (Mignone aj. 2007). Maximum členů vyjádříme pomocí divergence, abychom se vyhnuli výpočtům rotace, které jsou náročné a při kterých hrozí větší zaokrouhlovací chyby. Pro přehlednost zde také předpokládáme $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $F_\star = 0$ (tj. bez přenosu záření), $K = 0$, $\eta_{\text{mag}} = 0$, $\Phi_{\text{disk}} = 0$ (beztak převažuje $\Phi_\star$):⁹

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{p} \\ E + \rho\Phi \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{B} + I\mathbf{P} \\ (E + \rho\Phi + P)\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{v}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho\nabla\Phi \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

kde $\mathbf{p} = \rho\mathbf{v}$ označuje hustotu hybnosti, $E = U + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2\mu_{\text{vac}}}\mathbf{B}^2$ hustotu energie a $P = P_{\text{gas}} + \frac{1}{2\mu_{\text{vac}}}\mathbf{B}^2$ celkový tlak.

Identita (35) s (1) je zřejmá:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Druhý řádek odpovídá rovnici (2) (bez μ_{vac} , které je zahrnuto v $\mathbf{B}$):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{B} + I\mathbf{P}_{\text{gas}} + I\frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \right) = \\ & = \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \dot{\nabla} \cdot \dot{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v} + \dot{\nabla} \cdot \dot{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v} + \dot{\nabla} \cdot \dot{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v} - \dot{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B} - \dot{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B} + \nabla P_{\text{gas}} + \frac{1}{2}\dot{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{B}} \cdot \nabla \mathbf{B} = \\ & \mathbf{v} \text{ krát (1)} \\ & = \underbrace{\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \nabla \rho}_{\text{bác}} + \underbrace{\rho\mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{v}}_{\text{bác}} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \underbrace{\mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{B}}_{\text{bác}} - \underbrace{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}_{\text{bác}} + \nabla P_{\text{gas}} + \underbrace{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}_{\text{cáb}} = \\ & = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla P_{\text{gas}} - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\rho\nabla\Phi \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Vezmeme nyní raději 4. řádek a rovnici (5):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \dot{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{v}}\mathbf{B} + \dot{\nabla} \cdot \mathbf{v}\dot{\mathbf{B}} - \dot{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{B}}\mathbf{v} - \dot{\nabla} \cdot \mathbf{B}\dot{\mathbf{v}} = \\ & = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} = \\ & = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \dot{\nabla} \times (\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}) - \dot{\nabla} \times (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{B}}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

⁸ pro plochý disk je zřejmě možno volit větší hodnotu, např. $\vartheta = 85^\circ$

⁹ Symboly typu $\mathbf{v}\mathbf{B}$ (nebo $\mathbf{B}\mathbf{v}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}$) jsou diády, čili tenzory druhého řádu (matice 3×3) se složkami $v_i B_j$. Někdy bývají označovány $\mathbf{v} \otimes \mathbf{B}$.

Nakonec rychle porovnáme 3. řádek a rovnici (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \rho \Phi \right) + \nabla \cdot \left(U \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \mathbf{v} + \rho \Phi \mathbf{v} + P_{\text{gas}} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \right) = \\ = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot U \mathbf{v} + P_{\text{gas}} \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \text{Navier-Stokes} + \mathbf{B} \cdot \text{indukční rce} + \Phi \text{ krát rce kontinuity} = \\ = 0, \end{aligned}$$

což bylo dokázati.

1.11 Metoda konečných objemů (FVM)

Jednou z metod používaných pro numerické řešení hydrodynamických rovnic je metoda konečných objemů (FVM, angl. finite volume method). Budeme ji zde demonstrovat na rovnici kontinuity, ale samozřejmě ji lze použít na celou soustavu rovnic (35):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{p} = 0.$$

Provedeme integraci přes nějaký objem V :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{p} dV = \int_V 0 dV,$$

a použijeme Gaussovu větu:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

kde na levé straně jsme napsali průměrnou hodnotu hustoty $\bar{\rho}$ v onom V a na pravé straně jsme z výukových důvodů ponechali „průměrnou nulu“.

Diskretizace v prostoru spočívá ve vyjádření integrálu přes hranici V , resp. sumy přes příslušné plošky S :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} \doteq & \frac{S_{i+1/2,j,k}}{V_{i,j,k}} p_{i+1/2,j,k} - \frac{S_{i-1/2,j,k}}{V_{i,j,k}} p_{i-1/2,j,k} \\ & + \frac{S_{i,j+1/2,k}}{V_{i,j,k}} p_{i,j+1/2,k} - \frac{S_{i,j-1/2,k}}{V_{i,j,k}} p_{i,j-1/2,k} \\ & + \frac{S_{i,j,k+1/2}}{V_{i,j,k}} p_{i,j,k+1/2} - \frac{S_{i,j,k-1/2}}{V_{i,j,k}} p_{i,j,k-1/2}, \end{aligned} \quad (36)$$

kde indexy i, j, k příslušejí jednotlivým kartézským souřadnicím a mění se od 0 do počtu bodů sítě. Hodnoty $p_{i,j,k}$ v polovinách prostorového kroku (na hranicích mezi sousedními objemy) určujeme interpolací.

Diskretizace v čase je v nejjednodušším případě:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \doteq \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t}. \quad (37)$$

Schéma explicitní vnikne tak, že v (36) použijeme staré $\rho_{i,j,k}^n$ a $p_{i,j,k}^n$ (tj. z minulého časového kroku). Explicitní se jmenuje proto, že můžeme obratem vyjádřit nové $\rho_{i,j,k}^{n+1}$.

Ve schématu implicitním bychom všude použili nové (avšak neznámé!) $p_{i,j,k}^{n+1}$. Rovnice proto spolu s ostatními tvoří soustavu rovnic, kterou je třeba vyřešit. Z matematického hlediska tedy musíme provést inverzi (velké) matice. Výhodou je ovšem větší stabilita a možnost použití většího Δt .

V programu PLUTO jsou implementovány metody přesně nebo přibližně řešící Riemannův problém, který spočívá v nalezení časového vývoje nespojitosti hustoty a rychlosti pro linearizované rovnice (1) a (2). Vybírat můžeme z vícero postupů (např. Roe, HLLE, HLLC).

Škálované jednotky. Abychom částečně předešli numerickým problémům a zao-krouhlovacím chybám, je dobré používat vhodně škálované jednotky. Například pro simulace protoplanetárního disku je můžeme volit následovně: $[r] = a_J$, $[\rho] = M_\odot/a_J^3$, $[v] = \sqrt{GM_\star/a_J}/(2\pi)$, odkud plyne $[m] = M_\odot$, $[t] = 2\pi/\sqrt{GM_\star/a_J^3}$, $[P] = M_\odot GM_\star/a_J^4/(4\pi^2)$.

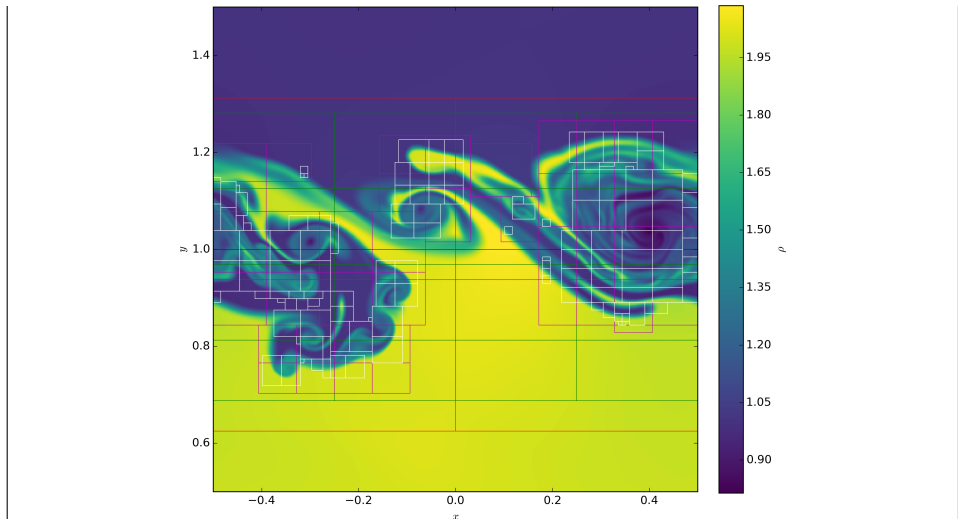
1.12 Adaptivní zjemňování sítě a víceprocesorové výpočty

Když se při simulacích je nutné simulovat turbulenci, rázové vlny nebo obojí, bývá použití jednoduté sítě výpočetně natolik náročné, že by se problém stal prakticky neřešitelný. Naštěstí existují technologie, které řešení umožňují, ovšem za cenu určitého přizpůsobení algoritmů.

AMR. První pomůckou, kterou zmíníme, je adaptivní zjemňování sítě (angl. adaptive mesh refinement, AMR). Na začátku výpočtu použijeme síť hrubou a v ní identifikujeme oblasti, kde jsou velké (malé) derivace a je tedy třeba zjemnění (příp. zhrubení). Tuto identifikaci je možné provést v několika úrovních, čímž se problém stane numericky řešitelný (obr. 6). Zároveň se drasticky omezí množství ukládaných dat. Přizpůsobení sítě je možné provést jako její deformaci, zjemnění v jednotlivých buňkách nebo zjemnění v celistvých oblastech. Vzniká pak obvyklá stromová struktura (oct-tree), s pořadím oblastí ve tvaru „Z“ (Mortonovo).

Kromě samotné oblasti jsou potřeba *duchařské oblasti* okolo, a to kvůli výpočtu derivací (1. nebo 2.). Tyto se vyplňují před vlastní integrací, buď dle okrajové podmínky, nebo ze sousední oblasti stejné úrovně, případně z vyšší nebo nižší úrovně, ale pak musíme použít interpolace nebo středování a dbát zachování toku (obr. 7) Pro AMR existují hotové knihovny (např. Chombo) i vhodné formáty pro ukládání stromových dat (HDF5).

MPI. Nestačí-li pro výpočet procesor jeden a musíme jich použít více, využijeme rozhraní MPI (angl. message-passing interface), umožňující spouštět paralelní výpočty na počítačích propojených rychlou počítačovou sítí. Struktura programu ale musí zahrnovat přinejmenším následující: inicializaci MPI, rozdělení si práce, vlastní práci, redukci a finalizaci MPI. V primitivním příkladu uvedeném níže spočívá



Obr. 6 — Adaptivní zjemňování sítě (AMR) při výpočtu Kelvinovy–Helmholtzovy nestability ve dvou rozměrech; zobrazena je (plošná) hustota ρ . Výpočet by proveden programem PLUTO s knihovnou Chombo. Hrubá síť má rozměry pouhých 64×128 bodů, ale při 4 úrovních zjemňování je rozlišení větší faktorem 2^4 , tzn. 1024×2048 bodů. Obdélníky různých barev označují různé úrovně.

rozdělení pouze v pečlivém určení mezí cyklů pro výpočty na jednotlivých strojích, procesorech, jádrech nebo vláknech. Jinak bývá potřeba kopírovat hodnoty ze sousedních oblastí do duchařských oblastí. Redukcí se rozumí provedení nějaké operace s výsledky výpočtů na jednotlivých procesorech (zde součet mezisoučtů):

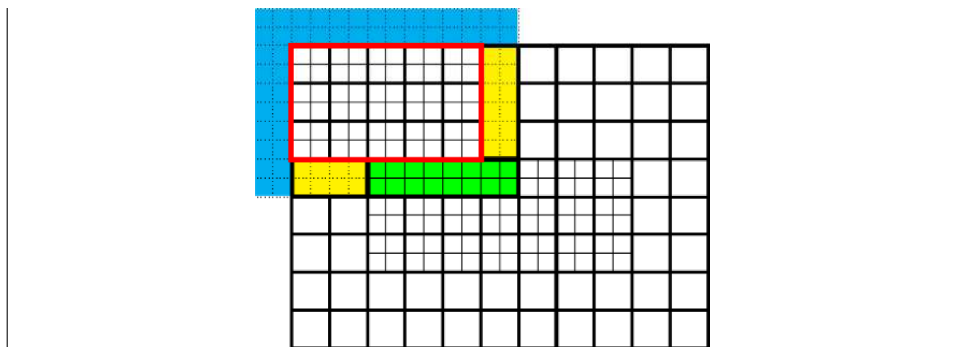
```
#include <stdio.h>
#include <mpi.h>

int main(int argc, char** argv) {
    int myrank, nprocs;
    int i, n, n1, i1, i2;
    float sum, sumsum;

    MPI_Init(&argc, &argv);
    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &myrank);
    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &nprocs);
    printf("Hello from node/cpu/core/thread %d out of %d\n", myrank, nprocs);

    n = 1000;
    n1 = (int)(n/nprocs);
    if (n1*nprocs < n) { n1 += 1; }
    i1 = myrank * n1;
    i2 = i1 + n1;
    if (i2 > n) { i2 = n; }

    sum = 0.0;
    for (i = i1; i < i2; i++) {
        sum += i;
    }
}
```



Obr. 7 — Ducharská oblast v okolí zjemnělé sítě, která se vyplňuje z okrajové podmínky (modře), z jednoho sousedního bloku se stejným rozlišením (zeleně) a z dvou sousedních bloků s odlišným rozlišením (žlutě). Převzato z [6].

```

}
printf("sum = %f\n", sum);

MPI_Reduce(&sum, &sumsum, 1, MPI_FLOAT, MPI_SUM, 0, MPI_COMM_WORLD);
if (myrank == 0) {
    printf("sumsum = %f\n", sumsum);
}

MPI_Finalize();
return 0;
}

```

Pro kompilaci programu musíme používat speciální kompilátor: `mpicc hello.c -o hello`. Před spuštěním programu na více procesorech si musíme připravit `hostfile`, v němž jednotlivé řádky popisují, kolik procesů má být spuštěno na kterých strojích: `hilda20 slots=4, hilda21 slots=4`, atd. Při spuštění pak volíme počet procesorů: `mpiexec -np 8 -hostfile hostfile ./hello`. Zásadní otázkou je, jak se výpočet škáluje s rostoucím počtem procesorů. Počítáme-li například vývoj protoplanetárního disku ve dvourozměrné aproximaci a máme přitom 1024 buněk v radiálním směru, asi nemá cenu dělit výpočet na víc než 64 procesorů, protože pak na 1 procesor připadá pouhých 16 buněk a komunikace MPI začíná již převažovat.

1.13 Migrace planet v plynném disku

Je třeba především rozlišovat, zda se jedná o migraci v disku tvořeném plynem nebo planetesimálami; obojí se pochopitelně chová jinak. Zde se budeme soustředit pouze na plyn a v něm vnořenou planetu. Pak lze rozlišovat tři základní typy ustálené migrace: I, II a III — tzn. bez mezery, s mezerou a s částečnou mezerou.

Typ II. Asi nejsnadněji lze popsat typ II. Značná část plynu v okolí dráhy již spadla na planetu, čímž se vytvořila mezera. Zároveň vznikla spirální ramena, která jsou vlastně přímou gravitační vazbou mezi planetou a diskem. Třecí neboli viskózní síly mezi rameny a zbytkem disku mají transversální složku, která způsobuje spirálování

planety dle první Gaussovy rovnice (viz též dodatek B, resp. (198)):

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2\mathcal{T}}{n} + \mathcal{O}(e), \quad (38)$$

kde a označuje velkou poloosu planety, $\mathcal{T}$ transversální složku zrychlení (tj. v rovině dráhy, kolmo k radiusvektoru), $n = \sqrt{GM_\odot}a^{-\frac{3}{2}}$ střední keplerovský pohyb neboli úhlovou rychlost, přičemž předpokládáme kruhovou dráhu ($e = 0$). Transverzální složka je vytvářena viskózním členem v rovnici (2):

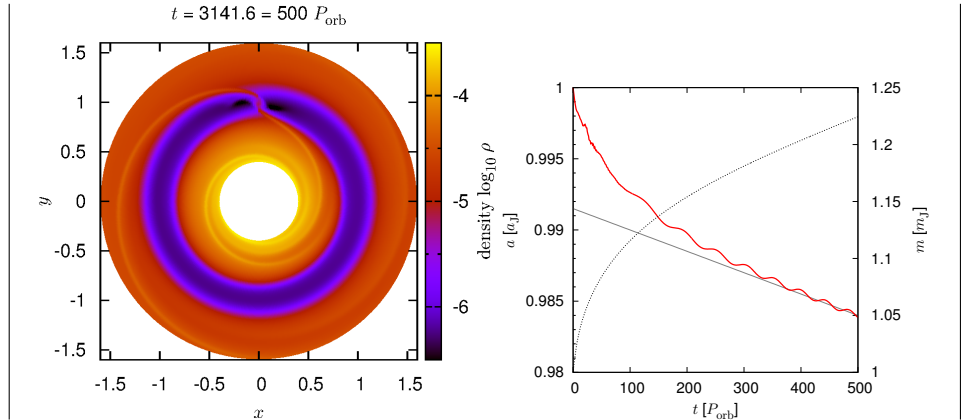
$$\mathcal{T} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \mu_1 \frac{\partial}{\partial r} v_{\text{kepl}} = \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sqrt{GM_\odot} r^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mu_1}{\rho} \sqrt{GM_\odot} \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}},$$

což po dosazení (a obvyklé náhradě $r \rightarrow a$) dává:

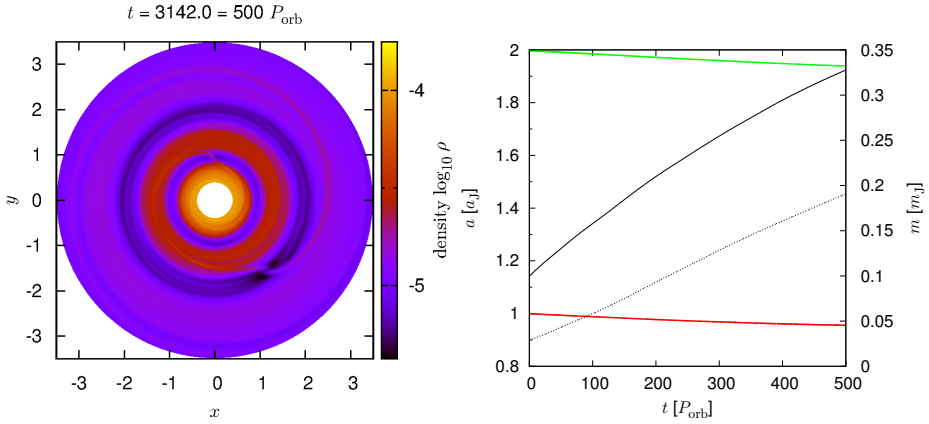
$$\left(\frac{da}{dt} \right)_{\text{II}} = -\frac{3\nu}{2a}, \quad (39)$$

kde $\nu \equiv \mu_1/\rho$ je kinematická viskozita. Znaménko je zde záporné, neboť k planetě je blíže vnější spirální rameno, disk tam obíhá (keplerovsky) pomaleji, čili dochází k brzdění.

Situaci pro jednu planetu ukazuje obr. 8, spočtený programem Fargo (Masset 2000). Po vytvoření mezery se vývoj ustálí a změna velké poloosy odpovídá vztahu (39). Pro dvě interagující planety (obr. 9) je situace obecně složitější. Pokud se vytvoří dvě mezery a překryjí se, vnější spirální rameno je od vnitřní planety mnohem dál, takže převažuje vliv vnitřního, kde ale disk obíhá rychleji, a zmiňovaná planeta se tedy nutně také urychluje a vzdaluje od Slunce.



Obr. 8 — Plynňý disk a jedna vnořená planeta, vlevo plošná hustota disku $\sigma(x, y)$, vpravo časový vývoj velké poloosy $a(t)$ (znázorněn červeně) a hmotnosti $m(t)$ planety (tečkovaně). Pro porovnání je znázorněn i pokles a dle rovnice (39), která platí poté, co se v disku vytvoří mezera. Parametry simulace byly voleny takto: hmotnost centra $M = 1$, poměr $H/r = 0,05$, plošná hustota $\sigma = 6,37 \cdot$



Obr. 9 — Disk a dvě planety. Obdobné nastavení parametrů jako u obr. 8, s výjimkou $r \in (0,4; 3,5)$, 1-rozměrná síť sahající do $r' = 20$, planety $a_1 = 1$, $m_1 = 10^{-4}$, $a_2 = 2$, $m_2 = 2,9 \cdot 10^{-5}$. Simulace programem Fargo.

$10^{-5} r^{-1,5}$, kinematická viskozita $\nu = 10^{-5}$, planeta s počáteční velkou poloosou $a = 1$, orbitální periodou $P_{\text{orb}} = 2\pi$ a hmotností $m = 0,001$. Rozsah poloměrů byl $r \in (0,4; 1,6)$, dvourozměrnou síť (r, ϕ) tvořilo 128 krát 384 bodů a časový krok $\Delta t \doteq 0,31416$. Simulace programem Fargo (Masset 2000).

Typ I. V případě málo hmotných planet nebo embryí se mezera neotevře, ale to neznamená, že nic nepůsobí, naopak. Můžeme přitom odlišit čtyři příspěvky: (i) spirální ramena, (ii) korotační oblast, (iii) studený prst a (iv) akreční ohřev. Spirální ramena jsou stejná jako předtím, dokonce sahají blíž k planetě. Protože orbity s $a < a_J$ jsou rychlejší, je vnitřní rameno před planetou (a naopak). Vnější rameno je ale obvykle blíž, jeho vliv proto převažuje a samo o sobě by způsobovalo brzdění a $\frac{da}{dt} < 0$.

Korotační oblast podél dráhy planety podkovovité orbity orbita s $a < a_J$ je opět rychlejší, za planetou planetu dohání pak se ovšem přesune na $a > a_J$ plyn se tak z míst s vyšší teplotou T a tlakem P dostává ven, kde je okolí s nižší T, P , a proto se rozpíná. Před planetou je situace opačná, čímž vzniká asymetrie, která by (sama o sobě) způsobovala $\frac{da}{dt} > 0$.

Při pohybu v korotační oblasti navíc v potenciálové jámě u planety dochází ke stlačení plynu, zářivé difuzi tepelné energie (skrz vazbu rovnic tepelné rovnováhy a přenosu záření), dodatečnému ochlazení plynu, čímž vzniká „studený prst“, posilující výše uvedený jev (Lega aj. 2014).

Planeta, na níž padá okolní materiál, se touto akrecí zahřívá, a stává se tak významným zdrojem záření. Přispívají k tomu zejména balvany, které se v Hillově sféře mohou aerodynamicky zbrzdít. Plyn prolétávající kolem planety se namísto zářivého ochlazení zářivě ohřeje, asymetrie se obrátí a výsledkem může být opět $\frac{da}{dt} < 0$ (Benítez-Llambay aj. 2015). Tímto mechanismem se dokonce vytvářejí nenulové excentricity protoplanet (Chrenko aj. 2017).

Turbulentní viskozita. Otázkou je, jaká je *hodnota* viskozity? Obvyklá molekulární viskozita řídkého plynu se zdá nepatrná a planety by vlastně nemigrovaly vůbec. Turbulence ovšem efektivně způsobuje viskozitu také; i když bychom ji nebyli schopni detailně rozlišit v numerickém modelu, mohli bychom ji zahrnout jako zvýšenou hodnotu ν .

Vzhledem k tomu, jaké má ν jednotky ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), je logické ji vztáhnout k nějaké rychlosti a nějakému rozměru. Je podruhé logické zvolit buď rychlost obíhání v_{kepl} , nebo zvuku c_s , a jako rozměr výšku H disku, neboť tato omezuje maximální velikost vírů. Shakura a Sunyaev (1973) navrhli parametrizaci vztahem:

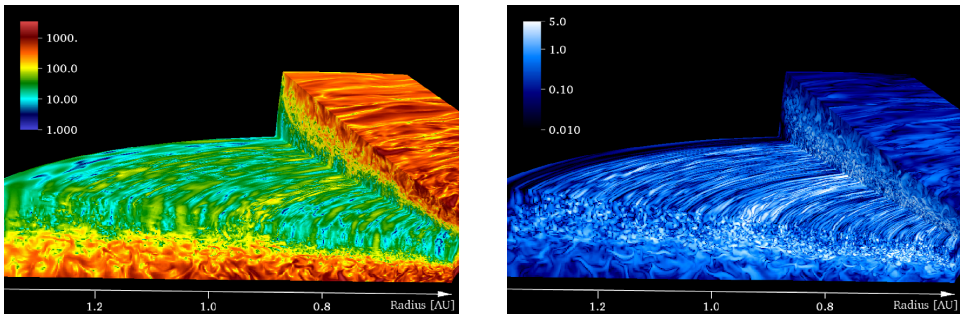
$$\nu = \alpha c_s H, \quad (40)$$

kde α je bezrozměrný parametr, nabývající hodnot od 0 do řádově 1. Ze stacionárního modelu disku (Brož a Šolc 2013, str. 206) můžeme případně dosadit za $H \simeq c_s/n_{\text{kepl}}$. Pokud bychom měli onu detailní simulaci s víry (jako na obr. 10), lze ekvivalentní hodnotu α počítat jako (Flock aj. 2013):

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle \frac{\int \rho \left(\frac{\rho v'_\phi v'_r}{P} - \frac{B_\phi B_r}{P} \right) dV}{\int \rho dV} \right\rangle,$$

kde čárkované rychlosti v'_ϕ , v'_r označují fluktuace okolo středních hodnot.

Kromě zmiňovaných nestabilit SBI, VSI, MRI, které jsou potenciálně důležitým zdrojem turbulence, a tudíž zvýšené makroskopické viskozity, může hrát roli i fotoevaporace a hvězdný vítr, který strhává ionty, odnáší tak moment hybnosti ven a zbývající hmota disku se proto sune dovnitř (a pak bychom nepotřebovali velkou hodnotu α). Jsou to ostatně tytéž procesy, jaké ve vesmíru nutí akreční disky akretovat.



Obr. 10 — Rozvinutá magneto-rotační nestabilita v protoplanetárním disku, projevující se jako turbulence rychlosti $|\mathbf{v}|$ (v jednotkách m/s, vlevo) a složitá struktura magnetického pole $|\mathbf{B}|$ (v jednotkách Gauss = 10^{-5} T, vpravo). Převzato z Flock aj. (2013).

[1] ARMITAGE, P. J. *Astrophysics of planet formation*. New York: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780511691362.

- [2] BALBUS, S. A., HAWLEY, J. F. *A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution.* *Astrophys. J.*, **376**, 214–233, 1991.
- [3] BENÍTEZ-LLAMBAY, P., MASSET, F., KOENIGSBERGER, G., SZULÁGYI, J. *Planet heating prevents inward migration of planetary cores.* *Nature*, **520**, 63–65, 2015.
- [4] BROŽ, M., ŠOLC, M. *Fyzika sluneční soustavy*. Praha: MatfyzPress, 2013. ISBN 978807378-2368. (http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/fyzika_malych_teles/).
- [5] FLOCK, M., FROMANG, S., GONZÁLES, M., COMMERÇON, B. *Radiation hydrodynamics in global simulations of protoplanetary discs* *Astron. Astrophys.*, **560**, A43, 2013.
- [6] GUARRASI, M. *An introduction to Adaptive Mesh Refinement*. [online] [cit. 2016-01-13]. (http://www.training.prace-ri.eu/uploads/tx_pracetmo/AMRIntroHNDSCi15.pdf)
- [7] CHRENKO, O., BROŽ, M., LAMBRECHTS, M. *Eccentricity excitation and merging of planetary embryos heated by pebble accretion.* *Astron. Astrophys.*, submitted, 2017.
- [8] JOHANSEN, A., OISHI, J. S., MAC LOW, M.-M., KLAHR, H., HENNING, T., YODIN, A. *Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar discs.* *Nature*, **448**, 1022–1025, 2007.
- [9] KLAHR, H. H., BODENHEIMER, P. *Turbulence in accretion disks: Vorticity generation and angular momentum transport via the global baroclinic instability* *Astrophys. J.*, **582**, 869–, 2003.
- [10] LEGA, E., CRIDA, A., BITCH, B., MORBIDELLI, A. *Migration of Earth-sized planets in 3D radiative discs.* *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **440**, 683–695, 2014.
- [11] LESUR, G., PAPALOIZOU, J. C. B. *The subcritical baroclinic instability in local accretion disc models.* *Astron. Astrophys.*, **513**, A60, 2010.
- [12] MASSET, F. *FARGO: A fast eulerian transport algorithm for differentially rotating disks.* *Astron. Astrophys. Suppl. S.*, **141**, 165–173, 2000.
- [13] MIGNONE, A., BODO, G., MASSAGLIA, S. A. J. *PLUTO: A numerical code for computational astrophysics* *Astron. J. Suppl. S.*, **170**, 228, 2007.
- [14] SHAKURA, N. I., SUNYAEV, R. A. *Black holes in binary systems. Observational appearance.* *Astron. Astrophys.*, **24**, 337–355, 1973.
- [15] SHORE, S. N. *Astrophysical hydrodynamics*. Weinheim: Wiley-Vch, 2007. ISBN 978352740-6692.
- [16] TOOMRE, A. *On the gravitational stability of a disk of stars.* *Astrophys. J.*, **139**, 1217–1238, 1964.
- [17] *Wikipedia. Accretion disc* [online]. [cit. 2015-03-10]. (http://en.wikipedia.org/wiki/Accretion_disc)
- [18] YODIN, A., JOHANSEN, A. *Protoplanetary disk turbulence driven by the streaming instability: linear evolution and numerical methods.* *Astrophys. J.*, **662**, 613–626, 2007.

2 Atmosféry a oceány

Jednou ze základních vlastností atmosféry je *vítr*, neboli rychlost proudění $\mathbf{v}$, kterou v této kapitole budeme studovat výhradně pomocí Navierovy–Stokesovy rovnice. Tato zapsána v inerciální soustavě zní:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}^{\text{advekce}} = -\overbrace{\frac{1}{\rho} \nabla P}^{\text{gradient tlaku}} + \overbrace{\mathbf{g}}^{\text{tíhové}} + \overbrace{\nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}}^{\text{viskozita}}, \quad (41)$$

kde t označuje čas, ρ hustotu, P tlak, $\mathbf{g}$ tíhové zrychlení a ν kinematickou viskozitu; dovolili jsme si ji napsat před operátor, tzn. je uniformní.

Pokud bychom vítr studovali v neinerciální soustavě, rotující úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$, a provedli potřebnou transformaci souřadnic, pak by ovšem bylo:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)' = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g}' + \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}' + \overbrace{\Omega'^2 \mathbf{r}'_{\perp}}^{\text{odstředivé}} - \overbrace{2\vec{\Omega}' \times \mathbf{v}'}^{\text{Coriolis}}, \quad (42)$$

kde $\mathbf{r}'_{\perp}$ označuje vzdálenost od osy. Zcela přirozeně se používají lokální kartézské souřadnice, $\mathbf{r}' = (x, y, z)$, kde x směřuje na východ, y na sever, z svisle nahoru a odpovídající rychlosti $\mathbf{v}' = (u, v, w)$. Zřejmě nemá cenu psát neustále čárky, protože prakticky celá kapitola je čárkovaná. Ve zmiňované lokální soustavě ovšem potřebujeme vyjádřit vektor $\vec{\Omega}' = (0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)$, kde φ je zeměpisná šířka inkriminovaného místa.

V literatuře se setkáváme s nejrůznějšími přibližnými rovnicemi, čili musíme být neustále ve střehu, kdy co platí. Nejčastější aproximace jsou: aproximace tenké vrstvy ($w \ll u, v$), izotermální ($T = \text{konst.}$, čili $P(\rho)$), neviskózní ($\nu = 0$), nedivergentní ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), zanedbatelné odstředivé zrychlení ($r_{\perp} \doteq 0$), příp. Coriolisovo ($\Omega \doteq 0$) nebo Boussinesqův vztah pro vztlak ($-g\delta\rho/\rho$).

Abychom mohli posoudit významnost jednotlivých členů v rovnici (41), případně (42), spočteme si několikero bezrozměrných čísel. Získáme je tak, že jednotlivé členy (značené svorkami) podělíme, přičemž operátory nahradíme za škály, $\nabla \rightarrow 1/L$, a neznámé rychlosti očekávanými rychlostmi U . Konkrétně jde o Reynoldsovo číslo:

$$\text{Re} = \frac{\text{advekce}}{\text{viskozita}} = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu}; \quad (43)$$

pro $\text{Re} \ll 1$ bývá proudění laminární, kdežto pro $\text{Re} > 10^3$ turbulentní. Mezi tím je přechodová oblast se zajímavějším chováním. Dále Rossbyho číslo:

$$\text{Ro} = \frac{\text{advekce}}{\text{Coriolis}} = \frac{U^2/L}{2U\Omega \sin \varphi} = \frac{U}{2L\Omega \sin \varphi}, \quad (44)$$

Ekmanovo číslo:

$$\text{Ek} = \frac{\text{viskozita}}{\text{Coriolis}} = \frac{\text{Ro}}{\text{Re}} = \frac{\nu U/L^2}{2U\Omega \sin \varphi} = \frac{\nu}{2L^2\Omega \sin \varphi}, \quad (45)$$

Richardsonovo číslo:

$$\text{Ri} = \frac{\text{vztlak}}{\text{střih}} = \frac{g \frac{\delta \rho}{\rho}}{(\delta U)^2/L} = \frac{g}{\rho} \frac{\nabla \rho}{(\nabla U)^2}. \quad (46)$$

V případě, kdy bychom byli nuceni použít i rovnici přenosu energie, zajímalo by nás Prandtlovo číslo:

$$\text{Pr} = \frac{\text{viskozita}}{\text{vedení}} = \frac{\nu}{\chi}, \quad (47)$$

kde χ označuje tepelnou difuzivitu; Grashofovo číslo:

$$\text{Gr} = \frac{\text{vztlak}}{\text{viskozita}} = \frac{g \frac{\delta \rho}{\rho}}{\nu U/L^2} = \frac{g \alpha_V \delta T L^3}{\nu^2 T}, \quad (48)$$

kde jsme vzali typickou rychlost $U = \nu/L$ při $\text{Re} = 1$ a α_V je koeficient tepelné roztažnosti; potažmo Rayleighovo číslo:

$$\text{Ra} = \frac{\text{vztlak}}{\text{vedení}} = \text{Gr Pr} = \frac{g \delta T L^3}{\chi \nu T}. \quad (49)$$

Některá čísla má smysl určovat zvlášť pro škálu velkou (L) a malou (l). Mějme také v patrnosti, že viskozita ν může být buď molekulární, kdy difuzi rychlosti způsobují molekuly letící v rámci své střední volné dráhy l_f , nebo turbulentní (angl. eddy, bulk), tzn. včetně příspěvku vírů.

2.1 Hydrostatická rovnováha

Nejprve zanedbáme vše, dokonce i vítr, $\mathbf{v} = 0$, $d\mathbf{v}/dt = 0$, $T = \text{konst.}$, $r_\perp = 0$, $\Omega = 0$. Pak nezbyvá, než aby bylo $P = P(z)$ a nulové horizontální gradienty. Rovnice (42) přejde na rovnici hydrostatické rovnováhy:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} - g, \quad (50)$$

kam dosadíme ze stavové rovnice ideálního plynu:

$$P = \frac{\rho}{\mu m_H} kT, \quad (51)$$

čili:

$$\frac{1}{P} dP = -\frac{g \mu m_H}{kT} dz.$$

Provedeme-li integraci obou stran:

$$\int \frac{1}{P} dP = \ln P = -\frac{g\mu m_H}{kT} \int dz + C = -\frac{g\mu m_H}{kT} z + C,$$

odkud:

$$P = P_0 \exp\left(-\overbrace{\frac{g\mu m_H}{kT}}^{=1/H_P} z\right), \quad (52)$$

kde jsme si označili H_P jako tlakovou škálu, na které se podstatně mění tlak (na Zemi je řádově $H_P \simeq 7,5$ km). Na kulaté a ke všemu rotující planetě ozářené zboku to však nemůže dlouho vydržet, neboť $T \neq \text{konst.}$

2.2 Cyklostrofické proudění

Zanedbáme-li skoro vše, $w = 0$, $\nu = 0$, $r_\perp = 0$, $\Omega = 0$, zůstanou nám rovnice pro horizontální rychlosti:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (53)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (54)$$

Použijeme-li souřadnice tangenciální a normálové (s, n) , tzn. ve směru $\mathbf{v}$ a kolmé na $\mathbf{v}$, pak:

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}, \quad (55)$$

$$\frac{dv_n}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n}. \quad (56)$$

Lze samozřejmě ztotožnit složku v_s s velikostí rychlosti $|\mathbf{v}|$, neboť $v_n = 0$ z definice. Normálové zrychlení dv_n/dt způsobuje zakřivování trajektorie větru. Pokud si ji přiblížíme jako kružnici (část kružnice) o poloměru r , pak pro normálové alias dostředivé zrychlení musí platit známý geometrický vztah $dv_n/dt = v_s^2/r$, čili:

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}, \quad (57)$$

$$\frac{v_s^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n}. \quad (58)$$

V ustáleném stavu $dv_s/dt = 0$, kdy se již nic nemění, musí tedy být velikost rychlosti v souladu s normálovým gradientem tlaku:

$$v_s = \sqrt{-\frac{r}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n}}. \quad (59)$$

Takové situaci říkáme *cyklostrofické proudění*. Vyskytovat se může pouze okolo tlakové níže, aby nám nevyšlo v_s imaginární. Točit se může libovolným směrem. Jde o dobré přiblížení proudění v tornádu (obr. 11), trombě, blízko rovníku nebo na pomalu rotující planetě, jako je Venuše. V řeci charakteristických čísel toto proudění může vzniknout za podmínek: $Re \rightarrow \infty$, $Ro \rightarrow \infty$, $Ek \rightarrow 0$.



Obr. 11 — Tornádo, v němž lze vířivé proudění popsat přibližně jako cyklostrofické. © OAR, ERL, NSSL.

2.3 Geostrofické proudění

Mějme $w = 0$, $\nu = 0$, $r_\perp = 0$. Po provedení vektorového součinu $\Omega(0, \cos \varphi, \sin \varphi) \times (u, v, 0)$ pak obdržíme:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \overbrace{2\Omega \sin \varphi}^{f_C} v, \quad (60)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi u, \quad (61)$$

kde jsme si označili $f_C = 2\Omega \sin \varphi$ jako Coriolisův parametr.

Pro zcela ustálené proudění ($du/dt = dv/dt = 0$) bychom měli rovnost:

$$(u, v) = \frac{1}{\rho f_C} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (62)$$

což ovšem znamená, že *vítr stále vane podél izobar, nikoli ve směru gradientu tlaku!* Složky (u, v) a $(-y, x)$ jsou zde „přehozené“; při izobarách ve směru y je totiž $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$, čili vítr ve směru y . Této rovnovážné situaci říkáme *geostrofické proudění*.

Při uvážení křivosti trajektorie v souřadnicích (s, n) :

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}, \quad (63)$$

$$\frac{v_s^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} - f_C v_s, \quad (64)$$

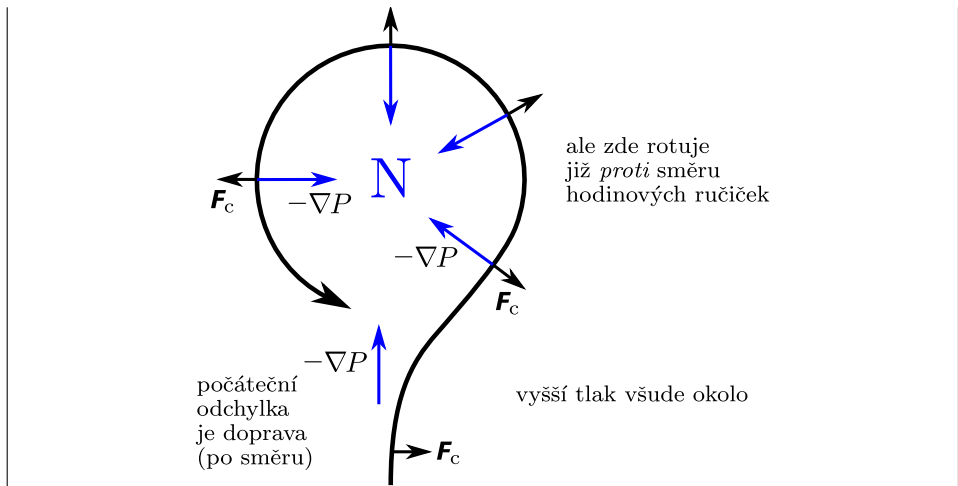
odkud plyne kvadratická rovnice pro v_s , mající řešení:

$$v_s = -\frac{f_C r}{2} \pm \sqrt{\frac{f_C^2 r^2}{4} - \frac{r}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}}. \quad (65)$$

Toto drobné zobecnění se nazývá *gradientové proudění*. Charakteristická čísla přitom bývají: $Re \rightarrow \infty$, $Ro \rightarrow 0$, $Ek \rightarrow 0$.

Zopakujme nakonec naše poznatky jinými slovy: na rotující planetě zásadně *nevanou* větry z oblastí vysokého tlaku do nízkého! Když se totiž vzduch pohne rychlostí $\mathbf{v}$ proti směru gradientu tlaku ($\mathbf{a}_{\nabla P} = -\frac{1}{\rho} \nabla P$), je záhy odchýlen Coriolisovým zrychlením ($\mathbf{a}_C$, kolmým na $\mathbf{v}$) tak, že nakonec jsou obě zrychlení antiparalelní a proudění sleduje izobary ($\mathbf{v}$ je kolmé i na $\mathbf{a}_{\nabla P}$) — viz obr. 12. Je to mimochodem důvod, proč se na Zemi gradienty tlaku vyrovnávají dosti obtížně.

Rychlost $|\mathbf{v}|$ proudění se ustaví přibližně tak velká, aby Coriolisova síla úměrná $|\mathbf{v}|$ byla dostatečná na vyrovnání gradientu tlaku. Velký gradient tlaku (husté izobary) tedy automaticky znamenají rychlý geostrofický vítr! Pointa je ale v tom, že $\mathbf{a}_{\nabla P}$ není *přesně* rovno $-\mathbf{a}_C$, takže se vzduch se může pohybovat po křivkách. Vzduch okolo oblastí nízkého tlaku (cyklóny) rotuje na severní polokouli *proti* směru hodinových ručiček; vysoký tlak (anticyklóna) znamená rotaci *po* směru.



Obr. 12 — Proudění vzduchu rychlostí $\mathbf{v}$ okolo tlakové níže (cyklóny), zpočátku ve směru zrychlení od gradientu tlaku ($-\frac{1}{\rho} \nabla P$), ale záhy odchýlené Coriolisovým zrychlením ($-2\vec{\Omega} \times \mathbf{v}$, kolmým na $\mathbf{v}$) tak, že nakonec sleduje izobary.

2.4 Rossbyho vlny

Velmi pozoruhodná situace (oscilace) nastává, když $w = 0$, $\nu = 0$, $r_\perp = 0$, $\vec{\Omega}' = \Omega(0, \cos \varphi, \sin \varphi)$, ale $\varphi \neq \text{konst.}$ Úhlovou rychlost proto rozvineme v Taylorovu řadu:

$$\vec{\Omega}' \doteq \vec{\Omega}'_0 + \left. \frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} d\varphi, \quad (66)$$

kde $\frac{d\vec{\Omega}'}{d\varphi} = \Omega(0, -\sin \varphi, \cos \varphi)$, $d\varphi = \frac{y}{R_\oplus}$. Jde vlastně o aproximaci zakulaceného povrchu Země tečnou rovinou, označovanou též jako rovina β . Pak máme rovnice:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \overbrace{2\Omega \sin \varphi_0}^{f_C = \text{konst.}} v + \overbrace{2\Omega \cos \varphi_0 \frac{1}{R_\oplus}}^{\beta \equiv \frac{\partial f_C}{\partial y}} y v, \quad (67)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi_0 u - 2\Omega \cos \varphi_0 \frac{1}{R_\oplus} y u. \quad (68)$$

V následujícím budeme dále předpokládat: $u = u_G + u^*$, $v = v_G + v^*$, tzn. že na pozadí geostrofického proudění probíhají nějaké další pohyby, $u_G = \text{konst.}$, $v_G = 0$ (proudění $V \leftrightarrow Z$), $u^*, v^* \ll u_G$ a konec konců nedivergentní proudění $\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0$. Není divu, že aproximací musí být celá řada (asi 10), jinak by nám nikdy nemohly vyjít jednoduché harmonické vlny! Po prvotním dosazení:

$$\begin{aligned} \frac{d(u_G + u^*)}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f_C(v_G + v^*) + \beta y(v_G + v^*), \\ \frac{d(v_G + v^*)}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - f_C(u_G + u^*) - \beta y(u_G + u^*). \end{aligned}$$

Všechny členy odpovídající geostrofickému proudění (60), (61) (tj. včetně ∇P) odečteme a zůstanou nám rovnice pro poruchy, kde jsme dočasně pedagogicky ponechali $v_G \neq 0$:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial u^*}{\partial x} + v_G \frac{\partial u^*}{\partial y} = +f_C v^* + \beta y(v_G + v^*), \quad (69)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial v^*}{\partial x} + v_G \frac{\partial v^*}{\partial y} = -f_C u^* - \beta y(u_G + u^*), \quad (70)$$

ale jinak samozřejmě:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial u^*}{\partial x} &= +f_C v^* + \beta y v^*, \\ \frac{\partial v^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial v^*}{\partial x} &= -f_C u^* - \beta y(u_G + u^*). \end{aligned}$$

Derivujeme-li první rovnici parciálně dle y a druhou dle x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u^*}{\partial x} &= +f_C \frac{\partial v^*}{\partial y} + \beta v^* + \beta y \frac{\partial v^*}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v^*}{\partial t} + u_G \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v^*}{\partial x} &= -f_C \frac{\partial u^*}{\partial x} - \beta y \frac{\partial u^*}{\partial x}, \end{aligned}$$

zmizí nám po odečtení 4 otravné členy (kvůli nedivergenci) a zůstane krásná rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) + u_G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) = \beta v^*, \quad (71)$$

mající vlnový charakter. S jednou rovnicí pro dvě funkce pochopitelně nic nezmůžeme, nicméně bez velké újmy na obecnosti můžeme předpokládat řešení ve tvaru:

$$u^* = 0, \quad (72)$$

$$v^* = C e^{i(kx - \omega t)}, \quad (73)$$

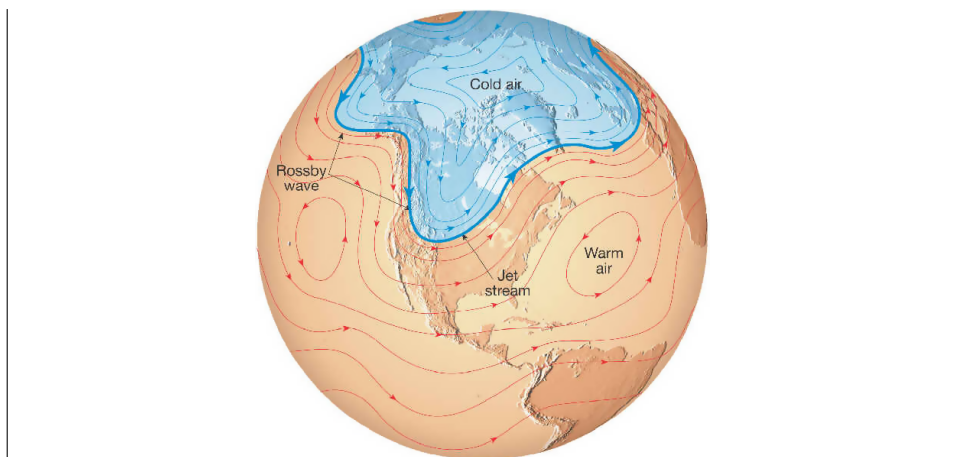
odkud po dosazení:

$$-k\omega C e^{i(kx - \omega t)} + u_G k^2 C e^{i(kx - \omega t)} = \beta C e^{i(kx - \omega t)}$$

a krácení vychází Rossbyho disperzní relace:

$$\omega = u_G k - \frac{\beta}{k}. \quad (74)$$

Fázová rychlost, s níž vlny postupují tam, příp. zpět, by byla $c = \lambda f = \frac{\omega}{k}$. Při $c = 0$ by vznikla stacionární vlna, s $\omega = 0$ a $k^2 = \frac{\beta}{u_G}$. Jedná se o nejvýznamnější vlny planetárního měřítka (obr. 13).



Obr. 13 — Rossbyho vlny velkého měřítka ($\lambda \gtrsim 10^3$ km) se nacházejí na rozhraní mezi mírným a polárním pásmem. V ose ve výšce se také vyskytuje tryskové proudění (angl. jet stream), vyvolané termálním větrem. Převzato z http://www.geography.hunter.cuny.edu/tbw/wc.notes/7.circ.atm/rossby_waves.htm.

2.5 Termální vítr ve výšce

Je-li stále $w = 0$, $\nu = 0$, $r_\perp = 0$, $du/dt = dv/dt = 0$, můžeme zkombinovat naše znalosti horizontální (62) a vertikální (52) a pro *rozdíly* rychlostí ustáleného geostrofického větru ve dvou výškových hladinách psát:

$$u_2 - u_1 = -\frac{1}{f_C} \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial y} \right), \quad (75)$$

$$v_2 - v_1 = \frac{1}{f_C} \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} \right), \quad (76)$$

kde si při hydrostatické rovnováze, $z_2 - z_1 = \frac{k\bar{T}}{g\mu m_H} \ln \frac{P_1}{P_2}$, snadno spočteme horizontální derivace:

$$0 - 0 = \frac{k}{g\mu m_H} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \ln \frac{P_1}{P_2} + \bar{T} \frac{P_2}{P_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{1}{P_2} - \bar{T} \frac{P_2}{P_1} \frac{P_1}{P_2^2} \frac{\partial P_2}{\partial x} \right),$$

odkud vyjádříme:

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{P_2}{\bar{T}} \ln \frac{P_1}{P_2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{P_2}{P_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\frac{k}{\mu m_H} \rho_2 T_2}{\bar{T}} \frac{g\mu m_H}{k\bar{T}} (z_2 - z_1) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{T_2}{T_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x},$$

což dosadíme do (76):

$$v_2 - v_1 = \frac{1}{f_C} \left[\frac{T_2}{\bar{T}^2} g (z_2 - z_1) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{T_2}{T_1} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} \right].$$

Zcela stejně bychom postupovali pro $\frac{\partial}{\partial y}$ a obdrželi bychom zásadní vztah:

$$(u_2 - u_1, v_2 - v_1) = \frac{T_2}{\bar{T}^2} \frac{g}{f_C} (z_2 - z_1) \left(-\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) (u_1, v_1). \quad (77)$$

Popisuje totiž změny horizontálního větru s výškou, když jsou přítomné *horizontální* teplotní gradienty $\nabla_{xy} T$. Zejména $\frac{\partial T}{\partial y}$ (ve směru J→S) bývá hodně záporný, tudíž rychlost u ve směru Z→V roste se z , až se proudění nahoře (na rozhraní troposféry a stratosféry) stává tryskové.

Jinými slovy: nad místem, kde je vedro (větší T), je atmosféra více „nadýchaná“ (má větší H_P), $P(z)$ zde klesá relativně pomaleji, což v porovnání s místem, kde byla zima, naklání plochy konstantního tlaku víc a víc, a jakékoliv ∇P nutně vede k $\mathbf{v}$. Původně barotropní atmosféra ($P = P(\rho)$) je nyní baroklinická ($P = P(\rho, T)$).

2.6 Ekmanova spirála v hlubce

Zkonstruujeme nyní rovnice i pro vodu, *nad* kterou fouká vítr. Předpokládejme pro ni $w = 0$, $r_\perp = 0$ a píšme:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f_C v + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (78)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - f_C u + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \quad (79)$$

Dále si dovolíme předpokládat ustálený stav, $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{dv}{dt} = 0$, totéž proudění v blízkém okolí, tzn. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$; 2. derivace jsou také nulové, a nestlačitelnost (nedivergentnost), $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, která je pro vodu více než přijatelná. Pak se nám rovnice redukuje na:

$$0 = f_C v + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (80)$$

$$0 = -f_C u + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (81)$$

Dále musíme specifikovat dvě okrajové podmínky (na dně a na hladině). Vítr charakterizujeme napětím na hladině, což v pohybové rovnici odpovídá zrychlení $\mathbf{a} = \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma$, odkud plyne vztah $\nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\mu} \sigma$, kde $\mu = \nu \rho$ je dynamická viskozita. Při působení na plochu $\hat{x}\hat{y}$, kolmou na $\hat{z}$, a to ve směru osy $\hat{y}$, máme pouze jedinou složku tenzoru napětí σ_{zy} nenulovou, čili:¹⁰

$$u, v \rightarrow 0 \quad \text{pro } z \rightarrow -\infty, \quad (82)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \sigma_{zy} \quad \text{pro } z = 0. \quad (83)$$

Provedeme substituci za komplexní rychlost $\mathcal{V} \equiv u + iv$, čímž získáme:

$$0 = -if_C \mathcal{V} + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2}. \quad (84)$$

Obecným řešením je exponenciála (s vědomím, že $\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ a $a \equiv \sqrt{\frac{f_C}{2\nu}}$):

$$\mathcal{V} = C_1 e^{(1+i)az} + C_2 e^{-(1+i)az}. \quad (85)$$

Z (82) ihned plyne $C_2 = 0$. Abychom vyčíslili 1. integrační konstantu, potřebujeme 1. derivaci:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right|_{z=0} = C_1 (1+i)a = i \frac{1}{\mu} \sigma_{zy},$$

odkud:

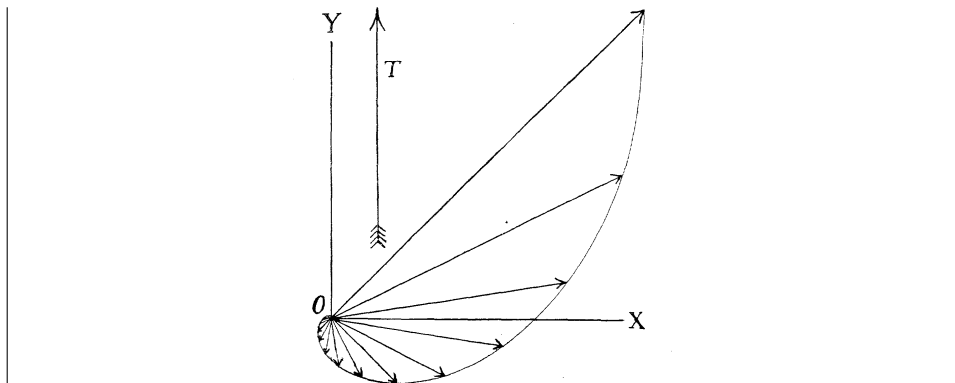
$$C_1 = \frac{i}{1+i} \frac{1}{a\mu} \sigma_{zy} = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{2}{f_C \rho \mu}} \sigma_{zy} = e^{i\frac{\pi}{4}} \overbrace{\frac{\sigma_{zy}}{\sqrt{f_C \rho \mu}}}^{v_0}$$

¹⁰ Obdobný model existuje pro přízemní vrstvu atmosféry, kde si proudění opět rozdělíme na geostrofické a ageostrofické (viskózní): $u = u_G + u^*$, $v = v_G + v^*$. Požadové geostrofické a gradienty tlaku se odečtou, zbudou nám rovnice: $0 = f_C(v - v_G) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $0 = -f_C(u - u_G) + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, spolu s vhodně upravenými okrajovými podmínkami: $u = 0$, $v = 0$ pro $z = 0$ a $u = u_G$, $v = v_G$ pro $z \rightarrow \infty$.

a tedy:

$$\mathcal{V} = u + iv = v_0 e^{az} e^{i(az + \frac{\pi}{4})}. \quad (86)$$

Závěr je zřejmý: slabý vánek mívá hluboký vliv! Navíc jako námořníci nebudeme překvapeni, že nás mořský proud unáší o 45° jinam než vítr (viz obr. 14).



Obr. 14 — Ekmanova spirála, vytvářená vektory rychlosti (u, v) ve směrech standardních souřadnicových os (x, y) pro rostoucí hloubky z . Vyznačen je i směr větru (napětí) $\mathbf{T}$, odpovídající složce tenzoru napětí σ_{zy} . Povrchové proudění ($z = 0$) je odchýlené o úhel 45° , který se s hloubkou stáčí po směru hodinových ručiček. Převzato z Ekman (1902).

2.7 Semiempirická konvekce

Konvekci, neboli přenos energie prouděním, je možné posoudit tak, že budeme studovat pohyb jediné bubliny, která je trochu řidší (příp. hustší) než okolí. Využijeme přitom *Boussinesqovy aproximace* pro vztlak:

$$a_{vz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \doteq -\frac{(\rho_b - \rho_o)V_b g}{m_b} = -g \frac{\delta \rho}{\rho} = g \alpha_V \frac{\delta T}{T}, \quad (87)$$

kde ρ_b , V_b , m_b označují hustotu, objem a hmotnost bubliny, ρ_o hustotu okolí, g tíhové zrychlení a α_V koeficient teplotní roztažnosti, jenž je pro ideální plyn roven 1. Tento vztah implicitně předpokládá tlak bubliny neustále vyrovnaný s okolím, neboli $P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T$, $dP = \frac{k}{\mu m_H} (d\rho T + \rho dT) = 0$ při $\mu = \text{konst.}$

Druhou závažnou aproximací je, že všechny řídké bubliny se pohybují vzhůru po stejné dráze, směšovací délce:

$$\ell = \alpha H_P, \quad (88)$$

která je vztažena k tlakové škále:

$$H_P = \frac{kT}{g\mu m_H}, \quad (89)$$

přičemž parametr α se volí empiricky.

Bublina, která vystoupila vzhůru má obecně teplotu odlišnou o δT od okolí, a tedy měrnou tepelnou energii (v J m^{-3}) odlišnou o dQ :

$$dQ = c_P \overbrace{\left(\frac{dT}{dz} \Big|_{\text{b}} - \frac{dT}{dz} \Big|_{\text{o}} \right)}^{\delta T} \ell \rho, \quad (90)$$

jež se může přenést do okolí; c_P označuje měrnou tepelnou kapacitu při konstantním tlaku. Přitom vzniká tok tepla (ve W m^{-2}):

$$\mathcal{F}_{\text{semi}} = dQ \bar{v},$$

kde průměrnou rychlost $\bar{v}$ odvodíme z průměrného zrychlení (na začátku je $a \doteq 0$):

$$\bar{a} = \frac{1}{2} g \frac{\delta T}{T},$$

neboť práce konaná vztlakem se s určitou účinností β přemění v kinetickou energii bubliny:

$$\beta m_{\text{b}} \bar{a} \ell = \frac{1}{2} m_{\text{b}} \bar{v}^2,$$

tudíž:

$$\bar{v} = \sqrt{2\beta \bar{a} \ell}. \quad (91)$$

Poslední problém: kde vzít ∇T pro bublinu a okolí? Vždyť si ji pouze mlhavě představujeme! Nemáme zde sice žádnou informaci o rychlostním poli $\mathbf{v}$, ale snad je $\bar{v}$ dost velké, abychom pro *všechny* bubliny mohli použít ∇T adiabatický (viz níže). S okolím nelze dělat nic, jen ho přeznačit na „semi“. Výsledný tok tepla:

$$\mathcal{F}_{\text{semi}} = c_P \delta T \rho \sqrt{\beta g \frac{\delta T}{T} \alpha \frac{kT}{g \mu m_{\text{H}}}} = \alpha^2 \sqrt{\beta} c_P \rho \left(\frac{k}{\mu m_{\text{H}}} \right)^2 \left[\frac{T}{g} \left(\frac{dT}{dz} \Big|_{\text{ad}} - \frac{dT}{dz} \Big|_{\text{semi}} \right) \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (92)$$

což je semiempirický vztah, který se musí pro danou aplikaci kalibrovat volbou α a β .¹¹ Vizualním příkladem konvektivního proudění je obr. 15.

Adiabatický gradient teploty. Pro adiabatické děje (bez zdroje nebo výměny tepla s okolím) platí zjednodušená stavová rovnice:

$$P = K \rho^\gamma, \quad (93)$$

jejíž diferenciál:

$$dP = K \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho = \frac{\gamma P}{\rho} d\rho. \quad (94)$$

¹¹ Kdybychom potřebovali vyjádřit $\frac{dT}{dz} \Big|_{\text{semi}}$ pro účely stavění hvězd, předpokládáme, že veškerý tok $\mathcal{F} = \frac{L_R}{4\pi R^2}$ je přenášen konvektivně a invertujeme (92).

Pro obecnější stavovou rovnici bychom měli $P = P(\mu, \rho, T)$:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial P}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial P}{\partial T} dT.$$

Za předpokladu homogenního chemického složení ($d\mu = 0$) odtud lze vyjádřit dT , vypočítat parciální derivace pro ideální plyn (51) a dosadit za $d\rho$ z (94):

$$dT|_{\text{ad}} = \frac{\partial T}{\partial P} \left(dP - \frac{\partial P}{\partial \rho} d\rho \right) = \frac{T}{P} \left(dP - \frac{P}{\rho} d\rho \right) = \frac{T}{P} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) dP. \quad (95)$$

Vidíme, že ∇T je určen ∇P . Asi není divu, když se vlastně nic neděje ($dQ = 0$).

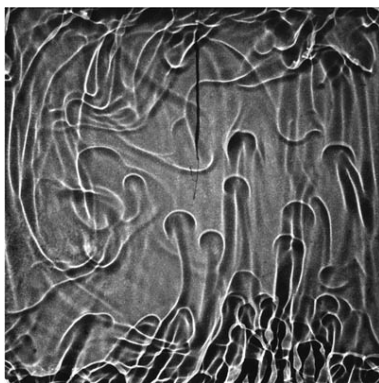
Bruntova–Väisäläova frekvence. Vztlakové zrychlení (87) můžeme ekvivalentně vyjádřit pomocí gradientů a dosadit za $d\rho$ z (94):

$$a_{\text{vz}} = -\frac{g}{\rho} \overbrace{\left(\frac{d\rho}{dz} \Big|_{\text{b}} - \frac{d\rho}{dz} \Big|_{\text{o}} \right)}^{\delta\rho} z = -\frac{g}{\rho} \left(\frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP}{dz} - \frac{d\rho}{dz} \right) z \equiv -N^2 z.$$

Z vertikální pohybové rovnice:

$$\frac{dw}{dz} = -N^2 z,$$

kteřá je obdobou harmonického oscilátoru, je potom zřejmé, že pro $N^2 > 0$ dochází k oscilacím, neboli vztlakovým vlnám. Naopak pro $N^2 < 0$ (N imaginární) nastává vztlaková (konvektivní) nestabilita. N nazýváme Bruntova–Väisäläova frekvence, neboť vystupuje také v disperzní relaci pro vztlakové vlny (g-módy).



Obr. 15 — Stínová fotografie konvektivního proudění. Změny ρ a T způsobují změny indexu lomu $n(\rho, T)$, které se projevují ve vrženém stínu odkláněním paprsků a kaustikami. Převzato z (<http://www.math.nyu.edu/am1/wetlab/projects/3d-convection.html>).

2.8 Kolmogorovo spektrum turbulence

Ovšemže víry (bubliny) nemají totožné rozměry. Rozměr víru L souvisí s jeho vlnovým číslem $k = 2\pi/L$ i úhlovou frekvencí ω jeho otáčení, skrz disperzní relaci typu $\omega \simeq kc_v$, kde c_v je typická rychlost otáčení. Může přitom docházet ke splývání vírů nebo k jejich rozpadání, přičemž z Navierovy–Stokesovy rovnice lze odvodit výběrové pravidlo $k_3 = k_1 + k_2$; nikoliv $L_3 = L_1 + L_2$! V limitním případě, kdy jsou víry stejně velké stejného směru, platí $k_3 \simeq 2k_1$, nebo naopak, je-li druhý mnohem větší než první, $k_3 \simeq k_1 + \delta$ (Salmon 1998). Maximální škála, tj. minimální k_{inj} , se nazývá *vstřikovací* a je určena vnějšími okolnostmi (např. rozměrem planety). Naopak nejmenší škála, maximální k_ν , je svou podstatou *viskózní*, daná molekulární viskozitou ν , způsobující definitivní disipaci vírů.

Splývání a rozpadání vírů lze relativně snadno popsat pro nedivergentní proudění. Nemusí se nutně jednat o nestlačitelnou kapalinu, jenom to prostě teď nediverguje. Mějme tedy:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (96)$$

Aplikujme proto divergenci na poslední jmenovanou rovnici (s tím, že operátory působí výhradně doprava):

$$\frac{\partial}{\partial t} \overbrace{\nabla \cdot \mathbf{v}}^0 + (\nabla \mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v} + \overbrace{v_j \nabla_i \nabla_i v_j}^0 = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla P + \nu \overbrace{\nabla_j \nabla_i \nabla_i v_j}^0,$$

čili:

$$(\nabla \mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla P. \quad (97)$$

Nyní si představme, že za rychlost i tlak dosadíme z jejich *zpětné* Fourierovy transformace:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (98)$$

$$p(\mathbf{r}, t) = \int q(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (99)$$

Pak člen vlevo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int u_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x_i} \int u_i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} = \int u_j i k_i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \int u_i i k_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} = \\ &= \iint u_j i m_i e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{m} u_i i n_j e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{n}, \end{aligned}$$

kde jsme zaměnili integrační proměnnou za dvě různé, abychom mohli integrovat *en bloc*; a člen vpravo:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla P = \dots \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int q e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} = \dots \int q(-k^2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} = \frac{1}{\rho} k^2 p.$$

Po dosazení provedme ještě násobení $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, integraci přes objem $\int d\mathbf{r}$ a využijme také dopřednou Fourierovu transformaci $q(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int p(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$:

$$- \iiint u_j u_i m_i n_j e^{i(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} d\mathbf{m} d\mathbf{n} d\mathbf{r} = \frac{1}{\rho} k^2 \int p e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{1}{\rho} k^2 (2\pi)^3 q. \quad (100)$$

Jeden z integrálů vlevo lze ovšem spočítat:

$$\int e^{i(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k}) \quad (101)$$

pro jakoukoliv harmonickou funkci to je 0, jen pro $e^{i0} = 1$ to diverguje, což je právě vlastnost Diracovy distribuce δ . Musíme ovšem integrovat od $-\infty$ do $+\infty$, abychom náhodou neintegrovali přes „půlvíry“.

Uvědomme si, co jsme tak získali:

$$- \iint u_j u_i m_i n_j \delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k}) d\mathbf{m} d\mathbf{n} = \frac{1}{\rho} k^2 q$$

tj. vztah pro fourierovský tlak q , vyjádřený pomocí fourierovských rychlostí u , v němž však vystupuje δ . Kdybychom ho dosadili do Fourierovy transformace (96), získali bychom rovnici, v níž existuje vazba mezi víry různých vlnových vektorů, pouze když:

$$\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k} = 0, \quad (102)$$

což je ono výběrové pravidlo.

Veličina vhodná pro posouzení vírů je energie $\mathcal{E}_k$ na jednotku hmoty a vlnové číslo, respektive její závislost na k . Bylo-li toto spektrum vírů vytvořeno pouze a jen splýváním, rozpadáním a disipací, pak by nemělo záviset na ničem jiném než na k a právě rychlosti ψ disipace energie na jednotku hmoty, která by zase měla být pouze a jen funkcí viskozity ν . Když tam žádné jiné procesy neprobíhají, tak to na nich logicky ani nezávisí. Předpokládejme proto nejjednodušší možnou mocninnou závislost (stejně jako Kolmogorov 1941):

$$\mathcal{E}_k(k, \psi) = C k^\alpha \psi^\beta. \quad (103)$$

Jednotky výše zmiňovaných veličin jsou přitom $[k] = \text{m}^{-1}$, $[\mathcal{E}_k] = [mv^2 m^{-1} k^{-1}] = \text{m}^3 \text{s}^{-2}$, $[\psi] = [mv^2 m^{-1} t^{-1}] = \text{m}^2 \text{s}^{-3}$ a $[\nu] = [a \nabla^{-2} v^{-1}] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Proto nezbyvá, než aby exponenty splňovaly podmínku:

$$\text{m}^3 \text{s}^{-2} = \text{m}^{-\alpha} \text{m}^{2\beta} \text{s}^{-3\beta},$$

tzn. $3 = -\alpha + 2\beta$, $-2 = -3\beta$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\alpha = -\frac{5}{3}$. Výsledné spektrum je nevyhnutelně:

$$\mathcal{E}_k(k, \psi) = C k^{-\frac{5}{3}} \psi^{\frac{2}{3}}. \quad (104)$$

Vidíme, že pro velká k , malá L , je turbulence vskutku tlumena viskozitou. Není divu, že $\mathcal{E}_k$ je klesající.

Obdobně lze argumentovat a odvodit úměrnost viskózní škály:

$$k_\nu = D\nu^\gamma \psi^\delta, \quad (105)$$

$$m^{-1} = m^{2\gamma} s^{-\gamma} m^{2\delta} s^{-3\delta},$$

a proto:

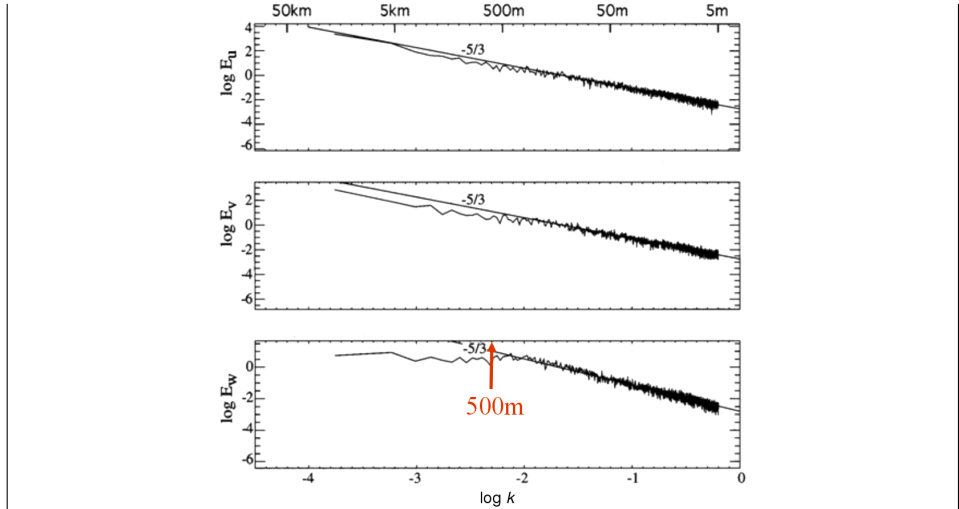
$$k_\nu = D\nu^{-\frac{3}{4}} \psi^{\frac{1}{4}}. \quad (106)$$

Energie na jednotku hmoty a jednotku délky L by byla zřejmě:

$$\mathcal{E}_L(L, \psi) = \mathcal{E}_k \frac{dk}{dL} = C' L^{\frac{5}{3}} \psi^{\frac{2}{3}} \left(-\frac{2\pi}{L^2} \right) = C'' L^{-\frac{1}{3}} \psi^{\frac{2}{3}}. \quad (107)$$

Richardson (1922) podle této rovnice dokonce složil báseň: „Velké víry mají malé víry, dbající jejich rychlosti, malé víry mají menší víry, a tak dál až do vazkosti.“ :)

Reálné spektrum vírů může být pochopitelně ovlivněno i jinými procesy a odchýlovat se od kolmogorovského. Konkrétně je možné, že turbulence ještě není plně rozvinutá. Začneme-li s jedním vírem, chvíli trvá, než vznikne celé spektrum. V tekutině mohou vznikat vlny postupné, odnášející určitou energii pryč, anebo vlny stojaté, buzené v dutinách. Často bývá spektrum omezeno nikoli viskozitou, nýbrž omezeným rozlišením. V každém případě je (107) v přímém rozporu s (88)...



Obr. 16 — Energetické spektrum $\mathcal{E}_k$ odvozené z pozorování vývoje oblačnosti. Trojice grafů odpovídá třem složkám rychlosti u , v a w . V případě vertikály je velikost vírů omezena na asi 500 m, nad kterou již turbulence nemůže být kolmogorovská. Naopak malé velikosti jsou zde omezeny rozlišením pozorování, nikoli viskozitou. Převzato z Duynkerke (1998).

- [19] CARROL, B. W., OSTLIE, D. A. *An Introduction to Modern Astrophysics*. San Francisco: Pearson, Addison Wesley, 2007. ISBN 0321442849.
- [20] EKMAN, V. W. *On the influence of the Earth's rotation on ocean-currents*. *Arkiv för matematik, astronomi o. fysik*, **2**, 11, 1905.
- [21] KOLMOGOROV A. N. *Dissipation of energy in locally isotropic turbulence*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **32**, 1, 1941.
- [22] PECHALA, F., BEDNÁŘ, J. *Příručka dynamické meteorologie* Praha: Academia, 1991. ISBN 8020001980.
- [23] RICHARDSON, L. F. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1922.
- [24] ROSSBY, C. G. *Planetary flow patterns in the atmosphere*. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **66**, 68, 1939.
- [25] SALMON, R. *Lectures on geophysical fluid dynamics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1998. ISBN 0195108086.
- [26] SHORE, S. N. *Astrophysical hydrodynamics*. Weinheim: Wiley-Vch, 2007. ISBN 978352740-6692.
- [27] WATKINS, T. *Kolmogorov's theory of turbulence and the energy spectrum*. [online] [cit. 2017-05-10]. (<http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/kolmo.htm>).

3 Hydrodynamika srážek asteroidů

Při srážkách pevných těles se potýkáme s následujícím problémem: tělesa na začátku zabírají jen omezený prostor a okolo je vakuum. Po srážce se však rozpadnou na úlomky, které odlétají vysokou rychlostí. Výpočetní doména by tak musela být zbytečně veliká a kdyby se ukázalo, že úlomky letí „do Prčic“, byli bychom tamtéž. Proto je mnohem výhodnější pro srážky použít popis *lagrangeovský*, při kterém se pozorovatel pohybuje s prouděním kamkoliv.

3.1 Lagrangeův popis

Sepišme nejprve potřebné rovnice. Říkali jsme, že sledujeme pohyb, čili na levé straně používáme zásadně totální časové derivace. Jde o obdobu pohybových rovnic, jak je známe pro hmotné body, $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$. Rovnice kontinuity je tedy (v jednotkách $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (108)$$

Navierova–Stokesova rovnice (m s^{-2}):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (109)$$

1. věta termodynamická ($\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$):¹²

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} P \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{S} : \overbrace{\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]}^{= \varepsilon_{ij}}, \quad (110)$$

Poissonova rovnice ($\text{J kg}^{-1} \text{m}^{-2}$):

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (111)$$

stavová rovnice pro pevnou látku (Tillotson 1962; Pa)¹³:

$$P = \begin{cases} A\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) + B\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)^2 + a\rho U + \frac{b\rho U}{\frac{U}{U_0} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} + 1} & \text{pro } U < U_{iv}, \\ a\rho U + \left[\frac{b\rho U}{\frac{U}{U_0} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} + 1} + A\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) e^{-\beta\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)} \right] e^{-\alpha\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)} & \text{pro } U > U_{cv}, \end{cases} \quad (112)$$

¹² Dvoutečkový součin tenzorů $\mathbf{S} : \varepsilon_{ij}$ je skalár $\sum_i \sum_j S_{ij} \varepsilon_{ij}$, kde přes opakující se indexy i a j sčítáme, i kdybychom sumy zapomněli; zde zavedené ε_{ij} se jinak nazývá tenzor malých deformací.

¹³ Přibližně zohledňuje i fázové přechody, ostatně člen ρU odpovídá ideálnímu plynu; dokonalejší stavovou rovnici by byla ANEOS (Melosh 2000) nebo SESAME (Plesko aj. 2014), ale tyto nejsou volně dostupné.

konstituční rovnice pro pevnou látku (Hookeův zákon; Pa s^{-1}):

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = 2\mu_1 \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T] + (\mu_2 - \frac{2}{3}\mu_1) \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I}. \quad (113)$$

Značení jest následující: ρ hustota, $\mathbf{v}$ rychlost, P tlak (izotropní část), $\mathbf{S}$ tenzor napětí (deviatorická část), U měrná vnitřní tepelná energie (tentokrát na kg), ρ_0 hustota při nulovém tlaku, U_0 vnitřní energie při nulovém tlaku, U_{iv} při počínajícím vypařování, U_{cv} při úplném vypaření, $A, B, a, b, \alpha, \beta$ další parametry stavové rovnice, μ_1 dynamická (první) viskozita, μ_2 objemová viskozita, $\mathbf{I}$ jednotkový tenzor.^{14,15}

Kdybychom chtěli konstituční rovnici rozepsat maticově, viděli bychom, že:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} = 2\mu_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \\ + (\mu_2 - \frac{2}{3}\mu_1) \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že se zde tenzor napětí $\mathbf{S}$ velmi liší od tekutin! Napětí je v pevné látce přítomno, i když pohyb ustane. V tekutinách by napětí existovalo pouze při vzájemných pohybech; konstituční rovnice by proto byla bez časové derivace vlevo, tzn. $\mathbf{S} = \mu_1 [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T] + (\mu_2 - \frac{2}{3}\mu_1) \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I}$.

Kolik je zde neznámých funkcí? Jde o $\rho(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $U(t)$, $\Phi(t)$, $P(t)$, $\mathbf{S}(t)$, tzn. 13, počítáme-li 1 vektor jako 3 skaláry a symetrický tenzor jako 6 skalárů. Uvědomme si, že se jedná výhradně o funkce času, nikoli souřadnic! Někdy se pouze setkáváme s tím, že se body kontinua „indexují“ pomocí *počátečních* souřadnic ($\mathbf{r}_0$), ale to jsou pouhé značky, nikoli nezávislé proměnné.

3.2 Elasticita, plasticita a praskliny

U pevných látek musíme být obezřetní, neboť platnost Hookeova zákona je omezena. Platí pouze v *elastické oblasti* (viz obr. 17), ve které je vztah mezi deformací (tj. relativní změnou délky) a napětím lineární, schematicky $\varepsilon = E\sigma$; kde E označuje Youngův modul pružnosti.

Pak ovšem následuje *plastická oblast*, kde deformace rostou i při takřka konstantním (velkém) napětí. Toto popisují poddajné vztahy (angl. yielding), například von

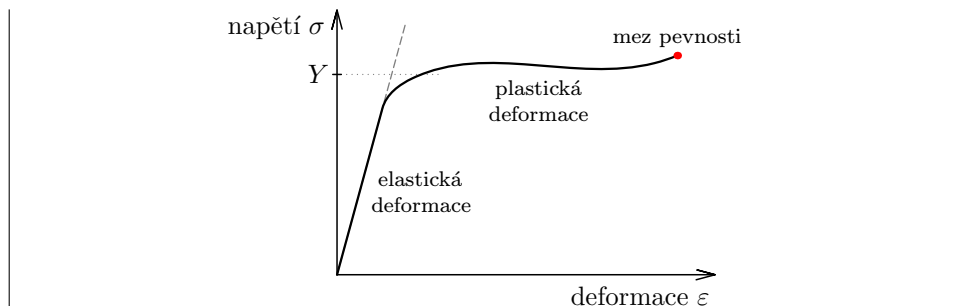
¹⁴ Symboly $\nabla\mathbf{v}$, $(\nabla\mathbf{v})^T$ jsou tenzory druhého řádu se složkami $\nabla_i v_j$, resp. $\nabla_j v_i$.

¹⁵ Faktor $-\frac{2}{3}\mu_1$ je před $\nabla \cdot \mathbf{v}$ proto, že izotropní působení již bylo vyčleněno jako tlak, resp. ∇P , čili zde ho musíme odečíst! V Navierově–Stokesově rovnici, tzn. po provedení $\nabla \cdot \mathbf{S}$, by odpovídal faktoru $+\frac{1}{3}\mu_1$.

Misesovo kritérium. Jde o horní mez pro tenzor napětí, resp. jeho neizotropickou část:

$$\mathbf{S} = f\mathbf{S}, \quad f = \min \left[\frac{Y^2}{3J_2}, 1 \right], \quad J_2 = \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}, \quad (114)$$

kde Y označuje mez pružnosti.



Obr. 17 — Typická závislost mezi napětím σ a deformací ε pro pevné látky. První oblast, elastická, je přibližně lineární, $\sigma = E\varepsilon$. Druhá oblast je plastická, ve které ε roste i při stálém (velkém) $\sigma \simeq Y$.

Nakonec je při určitém ε překročena mez pevnosti. Podle Maindl (2013).

Nakonec musíme uvážit *mez pevnosti*, po jejímž překročení se nepatrné poruchy v materiálu rozvíjejí jako praskliny, rostoucí řádově poloviční rychlostí zvuku. Grady a Kipp (1980) pro popis těchto jevů zavedli parametr *poškození* D (angl. damage), $0 \leq D \leq 1$, a provádějí logickou úpravu celkového tenzoru napětí pro případ stlačování nebo roztahování:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{cases} -P\delta_{\alpha\beta} + (1-D)S_{\alpha\beta} & \text{pro } P \geq 0, \\ -(1-D)P\delta_{\alpha\beta} + (1-D)S_{\alpha\beta} & \text{pro } P < 0. \end{cases} \quad (115)$$

Zcela zničený materiál (rozuměj rozdrcený na prach) s $D = 1$ nevykazuje žádná nediagonální napětí ani se nijak nebrání roztahování.

Související a neméně důležitou vlastností materiálu je koncentrace poruch, respektive její rozdělení (Weibull 1939):

$$n(\epsilon) = k\epsilon^m \quad (116)$$

dle aktivační meze ϵ , nad kterou se začnou poruchy rozvíjet v praskliny; k, m jsou materiálové parametry. Rovnice pro vývoj poškození je:

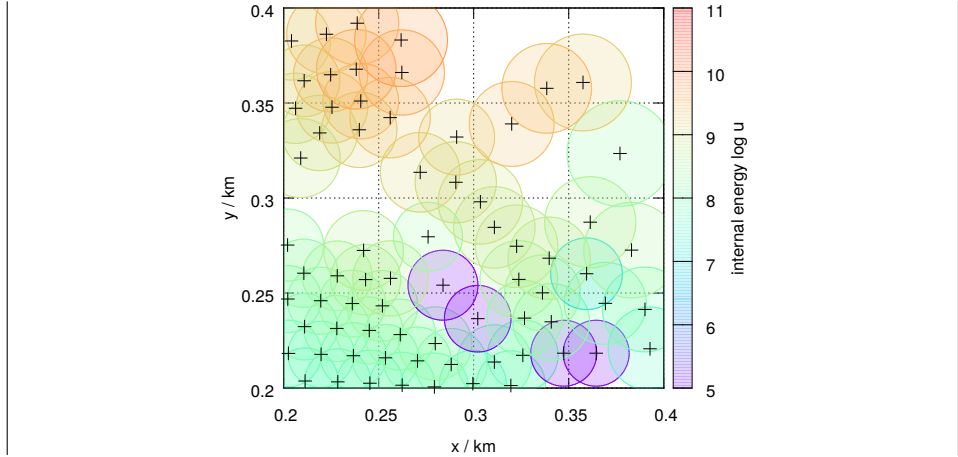
$$\frac{dD^{\frac{1}{3}}}{dt} = \left[\left(\frac{c_g}{R_s} \right)^3 + \left(\frac{m+3}{3} \alpha^{\frac{1}{3}} \epsilon^{\frac{m}{3}} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (117)$$

kde c_g je rychlost růstu poruch (řádově polovina rychlosti zvuku c_s), R_s poloměr příslušný objemu, v němž poruchy studujeme, a parametr $\alpha \equiv 8\pi c_g^3 k / [(m+1)]$

$(m + 2)(m + 3)]$. Podrobný popis této složité problematiky je uveden v Benz a Asphaug (1994).

3.3 Metoda hlazená částicová (SPH)

Pro numerické výpočty se často používá metoda SPH (z angl. smoothed particle hydrodynamics), čili metoda hlazená částicová. Namísto kontinua uvažujeme množinu vzájemně interagujících částic (obr. 18). Hustota je prostě daná jejich počtem v daném objemu. Pohybují se jako by šlo hmotné body (dle lagrangeovských rovnic), ale mají samozřejmě přisouzeno vícero vlastností ($\mathbf{v}$, U , P , $\mathbf{S}$). Možná bychom jim proto neměli říkat částice, ale raději „numerická vozidla“.



Obr. 18 — Grafické znázornění rozlehlých částic v metodě . Poloměr zde odpovídá hladící délce h , interakce (gradienty) se počítají pro částice vzdálené méně než $2h$.

Vezměme nejprve rovnici kontinuity (108). Využijeme následující integrální reprezentaci funkce pomocí konvoluce s Diracovou distribucí δ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega.$$

K čemu nám to vůbec je, vyjádřit hodnotu v bodě $\mathbf{r}$ pomocí hodnot „někde jinde“?! Genialita postupu (Gingold a Monaghan 1977, Lucy 1977) spočívá v tom, že δ nahradíme vhodnou diferencovatelnou funkcí W , zvanou *kernel*, a následně se elegantně zbavíme všech prostorových derivací, konkrétně $\nabla \cdot \mathbf{v}$. Čili:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \doteq \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega, \quad (118)$$

kde Ω označuje oblast prostoru, h hladící délku; jde o aproximaci s přesností $\mathcal{O}(h^2)$. Pak vyjádříme divergenci:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} [\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h)] d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \\
&\quad = 0 \text{ na hranici} \\
&= \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \overbrace{W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h)}^{\vec{\Gamma}} d\vec{\Gamma} - \dots = \\
&= - \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega, \quad (119)
\end{aligned}$$

kde jsme využili derivaci součinu, Gaussovu větu a skutečnost, že na hranici je kernel W roven nule. Poznamenejme, že operátor ∇ nejprve působí na $\mathbf{r}'$, ale na konci jsme uplatnili antisymetrii ∇W . Derivace samozřejmě nezmizely úplně; zůstal nám zde ale jakýsi vážený průměr gradientu W , který lze při zvoleném W předpočítat.

Diskretizace v prostoru spočívá v nahrazení integrálu sumou:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i \doteq \sum_{j=1}^{N_{\text{okolo}}} \mathbf{v}_j \cdot \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (120)$$

přičemž sčítáme pouze přes částice nacházející se v okolí $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < h$.

Nejjednodušší diskretizace v čase by zřejmě byla:

$$\frac{d\rho}{dt} \doteq \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t}; \quad (121)$$

výsledné explicitní integrační schéma je pak:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \Delta t \rho_i^n \sum_j \mathbf{v}_j^n \cdot \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j^n}.$$

Pro Navierovu–Stokesovu rovnici (109) bychom potřebovali ∇P :

$$\nabla P(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} [\nabla_{\mathbf{r}'} P(\mathbf{r}')] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \int_{\Omega} P(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega,$$

což po diskretizaci vede na:

$$\nabla P_i \doteq \sum_j P_j \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (122)$$

Tento výraz však není symetrický vzhledem k i, j , což se ukazuje jako nebezpečné z hlediska numerického. Obdobně musíme vyjádřit $\nabla \cdot \mathbf{S}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} [\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}')] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega,$$

čili:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_i \doteq \sum_j \mathbf{S}_j \cdot \nabla W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (123)$$

s touž poznámkou.

Pro energetickou rovnici (110) bychom potřebovali ještě znát diskretizaci tenzoru (psáno raději ve složkách):

$$\nabla_\alpha v_\beta = \int_\Omega [\nabla_\alpha v_\beta] W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\Omega = \sum_j v_{\beta j} \nabla_\alpha W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h) \frac{m_j}{\rho_j}.$$

Celá metoda SPH by tedy mohla vypadat takto (píšeme ovšem stručněji $W_{ij}(h)$ namísto $W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$):

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \Delta t \rho_i^n \sum_j \mathbf{v}_j^n \cdot \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n}, \quad (124)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} \sum_j P_j^n \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n} + \frac{\Delta t}{\rho_i^n} \sum_j \mathbf{S}_j^n \cdot \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n}, \quad (125)$$

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t P_i^n \sum_j \mathbf{v}_j^n \cdot \nabla W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n} + \\ + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 S_{\alpha\beta}^n \frac{1}{2} \sum_j \left[v_{\beta j}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} W_{ij}(h) + v_{\alpha j}^n \frac{\partial}{\partial x_\beta} W_{ij}(h) \frac{m_j}{\rho_j^n} \right]. \end{aligned} \quad (126)$$

Pro jednoduchost jsme si dovolili vynechat gravitační zrychlení ($-\nabla\Phi$), abychom nemuseli řešit Poissonovu rovnici, nicméně viz níže.

3.4 Alternativní vyjádření prostorových derivací

Existují ovšem i alternativní lepší formulace (ekvivalentní až na $\mathcal{O}(h^2)$), které jsou numericky stabilnější (Cossins 2010, Price 2008). Vycházejí z lagrangiánu nebo z následující vektorové identity, resp. gradientu součinu:

$$\nabla P \rho^a = \rho^a \nabla P + P a \rho^{a-1} \nabla \rho,$$

odkud:

$$\nabla P = \frac{1}{\rho^a} [\nabla P \rho^a - P a \rho^{a-1} \nabla \rho].$$

Speciálně pro $a = 1$:

$$\nabla P = \frac{1}{\rho} [\nabla P \rho - P \rho^{-1} \nabla \rho],$$

což by mimochodem přesně řešilo konstantní P . Pro $a = -1$ bychom obdrželi:

$$\nabla P = \rho \nabla P \rho^{-1} + P \rho^{-1} \nabla \rho,$$

což by naopak zachovávalo celkovou hybnost. Tlakový člen by měl po provedení příslušných diskretizací podobu buď:

$$\nabla P_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_j (P_i - P_j) \nabla W_{ij}(h) m_j,$$

nebo:

$$\nabla P_i = \rho_i \sum_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij}(h) m_j;$$

obzvláště poslední je krásně symetrický.

3.5 Kernel čili hladící funkce

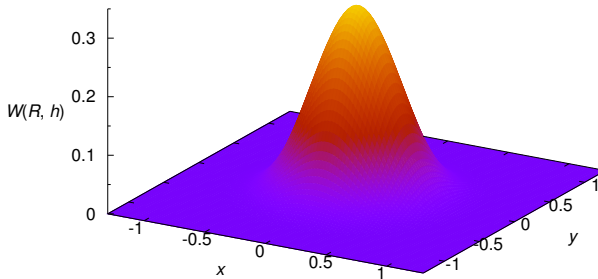
Ideálně by měl kernel W splňovat tyto požadavky: i) normalita, ii) kompaktnost, iii) limita pro $h \rightarrow 0$ je δ funkce, iv) pozitivita, v) být ryze klesající, vi) symetrie, vii) hladkost. Splnit všech sedm najednou je takřka nemožné, například Gaussova funkce postrádá ii). Nicméně nejpoužívanější kubický spline na tom není špatně, lze mu vytýkat jen vii) (obr. 19, $R \equiv r/h$):

$$W(R, h) = \frac{3}{2\pi h^3} \begin{cases} \frac{2}{3} - 4R^2 + 4R^3 & \text{pro } 0 \leq R < \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} - 4R + 4R^2 - \frac{4}{3}R^3 & \text{pro } \frac{1}{2} \leq R < 1, \\ 0 & \text{pro } R \geq 1. \end{cases} \quad (127)$$

Jeho první derivace je:

$$W'(R, h) = \frac{3}{2\pi h^3} \begin{cases} -8R + 12R^2 & \text{pro } 0 \leq R < \frac{1}{2}, \\ -4 + 8R - 4R^2 & \text{pro } \frac{1}{2} \leq R < 1, \\ 0 & \text{pro } R \geq 1, \end{cases} \quad (128)$$

druhá je lomená a třetí nespojitá. Volba hladící funkce může ovlivnit přesnost řešení a je nutné jí věnovat zvýšenou pozornost, obzvláště v případech derivací vyšších řádů.



Obr. 19 — Kubický spline $W(R, h)$ dle rovnice (127).

3.6 Umělá viskozita

V případě nadzvukových srážek se setkáváme s rázovými vlnami, což při omezeném rozlišení znamená skokovou změnu, čili nekonečné gradienty. Rovnice (124) až (126) pak bohužel divergují. Řeší se to „rozmazáním“ průběhu veličin pomocí uměle zvýšené viskozity¹⁶ (Monaghan 1989):

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha_{av} c_{s,ij} \mu_{ij} + \beta_{av} \mu_{ij}^2}{\rho_{ij}} & \text{pro } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde

$$\mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2 + \epsilon h^2}$$

a parametry jsou obvykle $\alpha_{av} = 1,5$, $\beta_{av} = 3$; $\epsilon = 0,01$ je malé číslo. Získáme tak konvergenci, ovšem za cenu ztráty rozlišení. Obvyklým testem je porovnání s analytickým řešením rázové trubice (Sod 1978).

Členy, které musíme doplnit, jsou jednak $-\sum_j m_j \Pi_{ij} \nabla_j W_{ij}$ do rovnice (125) a jednak $+\sum_j m_j \Pi_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_j W_{ij}$ do (126), protože to, co se viskózně zbrzdí, se v zájmu zachování celkové energie trochu zahřeje.

3.7 Metoda k -d stromu

Nyní je třeba přiznat, že v metodě SPH je skryt zádrhel, vlastně dva: i) musíme hledat, které částice jsou v okolí všech částic, ii) gravitace je dalekodosahová síla, tudíž musíme beztak sčítat přes všechny pro všechny. Obojí by vedlo k „brutálnímu“ algoritmu o složitosti $\mathcal{O}(N^2)$, což je zásadní omezení pro $N \gg 10^3$.

Naštěstí existuje algoritmus se složitostí $\mathcal{O}(N \log_2 N)$, nazývaný k -d strom, neboli k -rozměrný strom. V našem případě bude třírozměrný, ale kvůli názornosti je zde dvourozměrný. Namísto zdlouhavého slovního popisu jej rovnou implementujeme v objektovém jazyce Python. Nejprve si vytvoříme tři třídy — pro částici, uzel a strom, dle nichž se budou vytvářet jednotlivé objekty:

```
class Particle(object):
    def __init__(self, r):
        self.r = r

class Node(object):
    def __init__(self, particle, left, right):
        self.particle = particle
        self.left = left
        self.right = right

class Kdtree(object):
    def __init__(self, k, particles):
        self.k = k
```

¹⁶ Alternativně bychom museli použít riemannovský algoritmus, přesné nebo přibližně řešící Rankinovy–Hugoniotovy rovnice (Godunov 1959, Roe 1981).

```

def build_tree(particles, depth=0):
    if len(particles) == 0:
        return None

    axis = depth % self.k
    particles.sort(key=lambda particle: particle.r[axis])
    i = len(particles) // 2 # median index

    return Node( \
        particles[i], \
        build_tree(particles[:i], depth+1), \
        build_tree(particles[i+1:], depth+1), \
    )

self.root = build_tree(particles)

def main():
    r = [(2, 3), (5, 4), (9, 6), (4, 7), (8, 1), (7, 2)]
    particles = []
    for i in xrange(0, len(r)):
        particles.append(Particle(r[i]))

    kdtree = Kdtree(2, particles)

if __name__ == "__main__":
    main()

```

Co vidíme: na konci v hlavním programu se prostě zavolá hlavní funkce. V ní si připravíme seznam částic. Voláním `Particle` se vždy vytváří objekt částice. Objekty zde používáme proto, abychom později částicím mohli snadno připsat další vlastnosti, např. hmotnost, že. Voláním `Kdtree` vzniká objekt strom, přičemž se spouští příslušná metoda `__init__`, kde se definuje rekurzivní funkce `build_tree`. Ta třídí částice při prvním volání podle jejich souřadnice x , nalezne index mediánu i a voláním `Node` tvoří jeden uzel, sestávající z částice, levé větve (s částicemi majícími $x < x_i$) a pravé větve ($x > x_i$), kterýžto obratem vrátí. Při druhém volání třídí podle y , pak znovu dle x , y , atd. až nezbude nic. Výsledný strom je nakreslen na obr. 20 a 21.

Pro hledání nejbližšího souseda bychom do třídy `Kdtree` doplnili vhodnou metodu, opět s jistou rekurzivní funkcí:

```

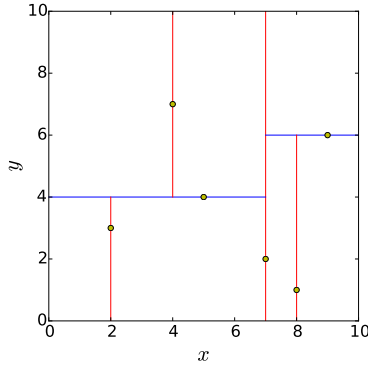
def nearest_neighbor(self, destination):
    best = [None, float('inf')] # particle & squared distance

    def recursive_search(node, depth=0):
        if node is None:
            return

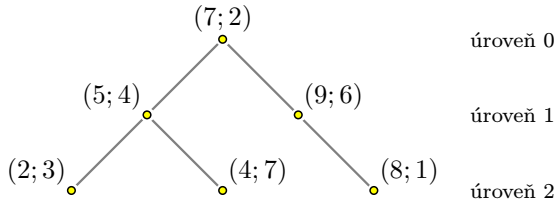
        particle, left, right = node.particle, node.left, node.right
        node_sqdist = square_distance(particle.r, destination)
        if node_sqdist < best[1]:
            best[:] = particle, node_sqdist # in-place!

        axis = depth % self.k
        diff = destination[axis] - particle.r[axis]

```



Obr. 20 — Dvourozměrný strom vytvořený ze šesti (žlutých) částic. Svislé a vodorovné linie vyznačují, kde se strom rozvětvil podle souřadnice x (červeně) nebo y (modře). Jako první proběhlo větvení v bodě se souřadnicí $x_i = 7$.



Obr. 21 — Jiné znázornění téhož stromu, na kterém je patrné větvení. Uzel v úrovni 0 se nazývá kořen, kdežto uzly bez větví v nejnižších úrovních (zde 2) se nazývají listy.

```

close, away = (left, right) if diff <= 0.0 else (right, left)

recursive_search(close, depth+1)
if diff**2 < best[1]:
    recursive_search(away, depth+1)

recursive_search(self.root)
return best[0], math.sqrt(best[1])

```

a volali ji jako `particle`, `dist = kdtree.nearest_neighbor((8, 5))`. Vrátila by pochopitelně (9, 6) a 1.4242...¹⁷. Vidíme, že doslova na pár řádků lze dosáhnout kýžené složitosti, respektive jednoduchosti. Úprava pro hledání N_{okolo} nejbližších částic jest triviální.

S výhodou můžeme strom použít i pro rychlý, ale jen *přibližný* výpočet gravitačního zrychlení. Prerekvizitou je, že si pro všechny uzly (rekurzivně) spočteme jejich celkovou hmotnost `node.tm`, polohu těžiště `node.cm` a kvadrát celkového rozměru `node.sqsize`. Pak si zvolíme *otevírací úhel* φ_{open} v radiánech a zrychlení spočteme (rekurzivně):

¹⁷ Alternativně se místo stromu používá lineární seznam (angl. linked list).

```

def compute_gravity(self, destination, phi=0.5):
    phi2 = phi*phi
    eps = 1.e-16

    def recursive_gravity(node):
        dist2 = square_distance(node.cm, destination)
        ag = [0.0] * self.k

        if node.sqsize/(dist2+eps) < phi2: # do NOT open this node
            if dist2 > eps:
                tmp = node.tm/(dist2*math.sqrt(dist2))
                for i in xrange(0, self.k):
                    ag[i] = tmp*(node.cm[i]-destination[i])
            else:
                dist2 = square_distance(node.particle.r, destination)
                if dist2 > eps:
                    tmp = node.particle.m/(dist2*math.sqrt(dist2))
                    for i in xrange(0, self.k):
                        ag[i] = tmp*(node.particle.r[i]-destination[i])

                for branch in node.left, node.right:
                    if branch is not None:
                        accel = recursive_gravity(branch)
                        for i in xrange(0, self.k):
                            ag[i] += accel[i]

        return ag

    return recursive_gravity(self.root)
    
```

Když je uzel (se svými větvemi) malý nebo daleko, takže vytnutý úhel $\varphi < \varphi_{\text{open}}$, počítáme pouze gravitaci těžiště. V opačném případě uzel otevřeme a sčítáme gravitaci částice a obou větví. Čím menší φ_{open} , tím přesnější výsledek, ale při $\varphi_{\text{open}} \rightarrow 0$ skončíme samozřejmě s $\mathcal{O}(N^2)$.

3.8 Multipólový rozvoj

Existuje ovšem možnost, jak výpočet gravitace zpřesnit i při zachování složitosti $\mathcal{O}(N \log_2 N)$. Namísto pouhého těžiště spočteme pro soubor N hmotných bodů vícero gravitačních momentů neboli *multipólů* (Stadel 2001, str. 8). Využijeme přitom *řádovou* notaci, kdy se podtržením označuje nikoli index nýbrž *počet* indexů:

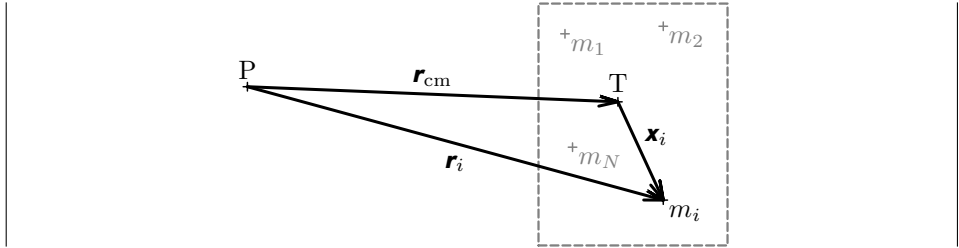
$$M^n \equiv \sum_i^N m_i x_i^n. \quad (129)$$

Pak $M^0 \equiv M = \sum_i m_i$ je monopól, tj. skalár známý jako celková hmotnost, $M^1 \equiv M^j = \sum_i m_i x_i^j$ dipól, vektor odpovídající těžišti (který bude nulový, budeme-li $\mathbf{x}_i$ k těžišti $\mathbf{r}_{\text{cm}}$ vztahovat, ale spočteme si jej pro kontrolu), $M^2 \equiv M^{jk} = \sum_i m_i x_i^j x_i^k$ kvadrupól, $M^3 \equiv M^{jkl}$ oktapól, $M^4 \equiv M^{jklm}$ hexadekupól, příp. tenzory řádů ještě vyšších.

Gravitační potenciál souboru hmotných bodů posléze můžeme vyjádřit pomocí Taylorova rozvoje okolo těžiště (viz obr. 22):

$$\Phi = \sum_i \underbrace{-\frac{G}{|\mathbf{r}_i|}}_{\gamma(r_i)} m_i = \sum_i m_i \gamma(|\mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{x}_i|) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\partial_n \gamma(r_{\text{cm}})] M^n, \quad (130)$$

kde jsme promptně využili definice (129) a zkráceného zápisu $\partial_n \equiv \partial/\partial r^n$. Aproximace pochopitelně spočívá ve sčítání jen do $n < \infty$, např. 4.



Obr. 22 — K výpočtu gravitačního potenciálu Φ v bodě P, způsobovaného soustavou N hmotných bodů. Bod T označuje polohu těžiště této soustavy. Podle Stadel (2001).

Abychom nepočítali spočtené, měli bychom multipóly spočtené pro větve využít pro výpočet multipólu uzlu. Nejedná se ovšem o triviální součet, protože se posunuje poloha těžiště! Musíme proto použít Steinerovu větu, respektive její zobecnění v „šílené“ závorkové notaci, kdy závorky uzavřené přes podtržené indexy značí sčítání přes všechny unikátní permutace (Stadel 2001, str. 17):

$$M_{\text{posunuto}}^n = \sum_{m=0}^n M^{(n-m \underline{d}^m)}, \quad (131)$$

kde vektor $\underline{d}^j$ je onen posun. Při implementaci je však vše nutné rozepisovat...

3.9 Počáteční a okrajové podmínky

Vytvoření počátečních podmínek pro simulace srážek je jednoduché — spočívá generování požadovaného počtu částic SPH, jejich rozmístění uvnitř koule, resp. simulovaného tělesa, přiřazení počátečních ρ_0 , $\mathbf{v}_0$, U_0 . Často se používá rovnoměrné rozmístění částic; nelze použít zcela náhodné, protože by vznikaly nereálně velké gradienty. Možná je optimální něco mezi tím (viz Diehl aj. 2012).

Okrajové podmínky jsou ještě jednodušší, neboť okolo je vakuum, čili nemusíme dělat nic. Ostatně metoda SPH je pro tento případ zvláště vhodná.

V opačném (horším) případě bychom museli vytvářet *virtuální částice* s vhodnými vlastnostmi, které by vymezovaly hranici. Připisuje se jim odpudivá síla, která brání unikání normálních částic z daného prostoru. Druhou možností je použití

duchařských částic, které aktuální stav částic uvnitř prostoru zrcadlí vně, pouze rychlosti jsou opačné.

3.10 Fragmentační fáze

Po kontaktu projektilu a terče začíná první fáze srážky, a to hydrodynamická fragmentace terče. Pro terče o velikosti planetek ($D \lesssim 100$ km) lze simulaci provádět metodou SPH (Benz a Asphaug 1994) bez vlivu gravitace, tzn. bez řešení Poissonovy rovnice.¹⁸ Požadujeme ale, aby její trvání odpovídalo přinejmenším době průchodu rázové vlny terčem tam a zpět:

$$\Delta t_{\min} = \frac{2D}{v_{\text{imp}}} \simeq 40 \text{ s}.$$

Naopak nejdelší přípustná doba je dána poměrem typické rychlosti výhozu v_{ej} , což přirozeně bývá $v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM/R}$, a gravitačního zrychlení $a_g = GM/R^2$, čili:

$$\Delta t_{\max} = \frac{v_{\text{esc}}}{a_g} = \sqrt{\frac{3}{2\pi G\rho}} \simeq 10^3 \text{ s}.$$

Průběh jedné takové simulace zachycuje obr. 23.

3.11 Reakumulační fáze

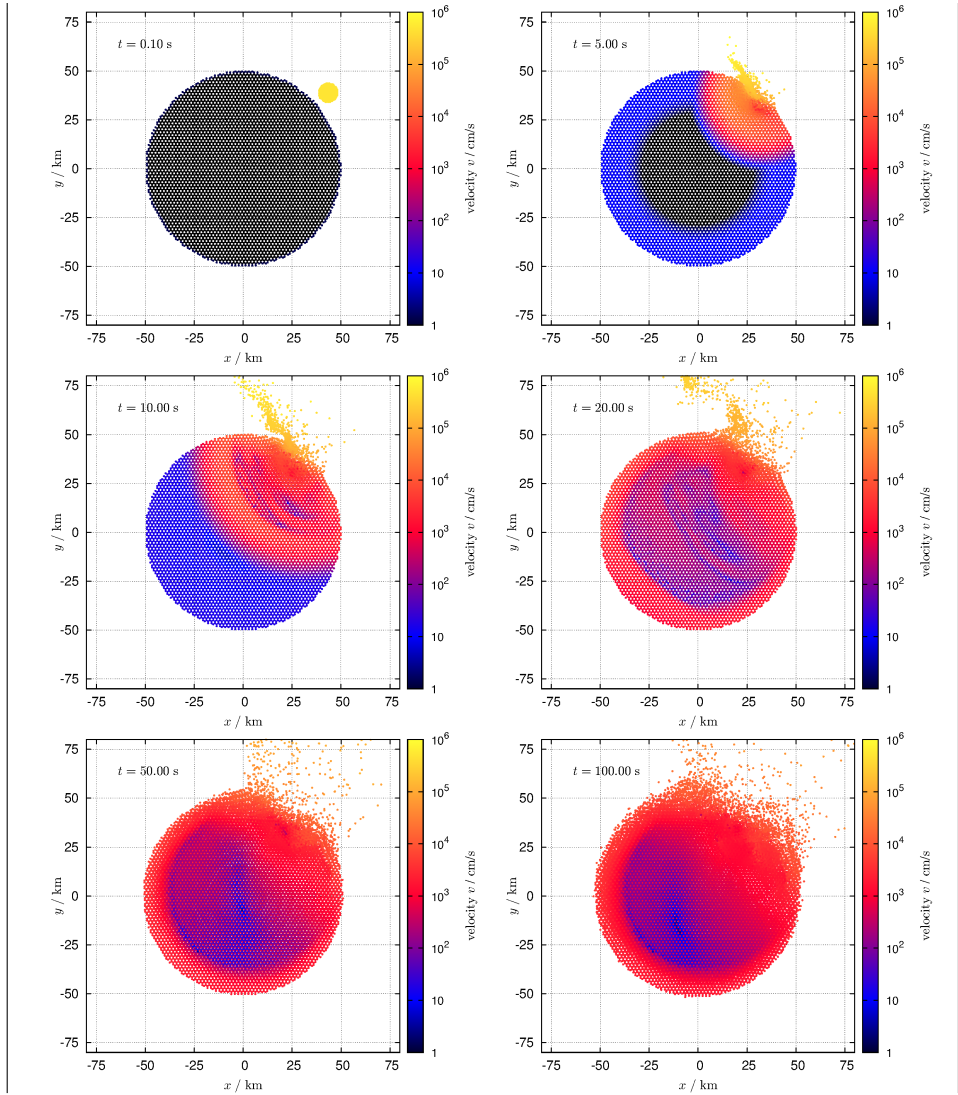
Druhou navazující fází je gravitační reakumulace. Tu je možno v prvním přiblížení počítat naopak *bez* jakékoliv hydrodynamiky, jako čistě gravitační interakci fragmentů počítanou N -částicově (Richardson et al. 2000). Výsledek hydrodynamického výpočtu se ovšem musí nějak transformovat do podoby počátečních podmínek pro pevné částice. Dalšími obvyklými zjednodušujícími předpoklady jsou: i) všechno jsou koule; ii) při prvním dotyku se koule spojují do větší koule. Ztrácíme tím samozřejmě jakékoliv informace o rotaci nebo tvaru fragmentů. Počáteční poloměry koulí mohou být vypočteny z vlastností částic SPH jako:

$$R_i = \frac{3m_i}{4\pi\rho_i},$$

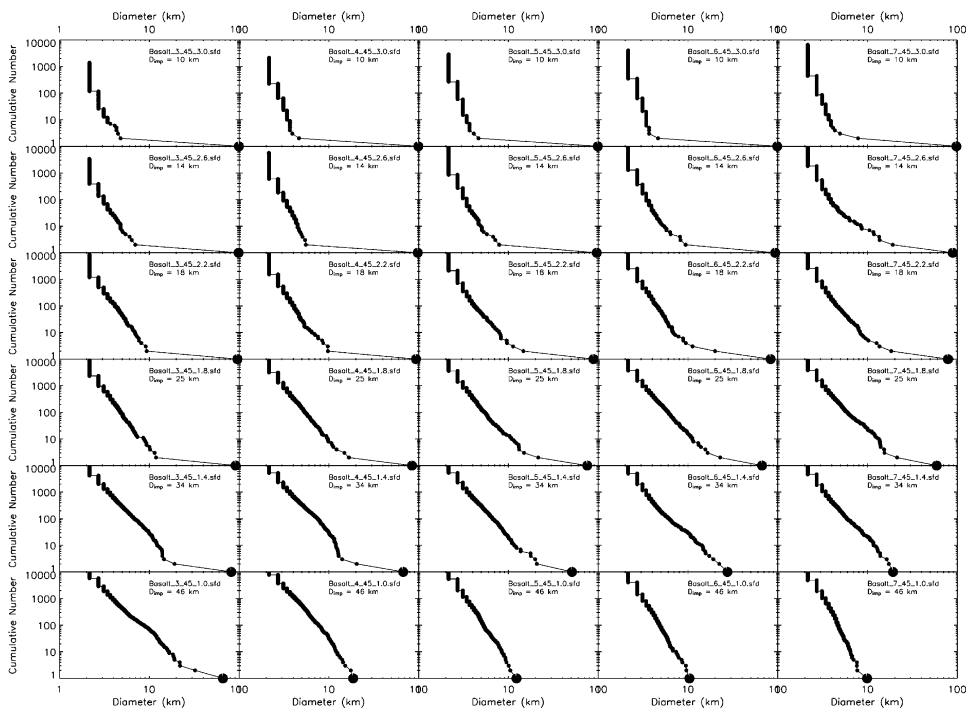
přičemž částice zplynněné ($U_i \gtrsim U_{\text{cv}}$) se zahazují. Navíc, aby byla úloha výpočetně zvládnutelná, používá se výše uvedená přibližná metoda k -d stromu, čili působení vzdálených částic se nepočítá jednotlivě, ale hromadně.

Výsledek celé simulace (obr. 25) lze porovnávat například s pozorovaným rozdělením velikostí členů dané rodiny asteroidů (Durda aj. 2007, Benavidez aj. 2012), případně s pozorovaným rychlostním polem (Nesvorný aj. 2006). Musíme samozřejmě uvážit, že obojí mohlo být změněno při dlouhodobém orbitálním vývoji rodiny a sekundárních srážkách.

¹⁸ Pro impakty planetárních rozměrů si to ovšem dovolit nemůžeme (Canup 2004).

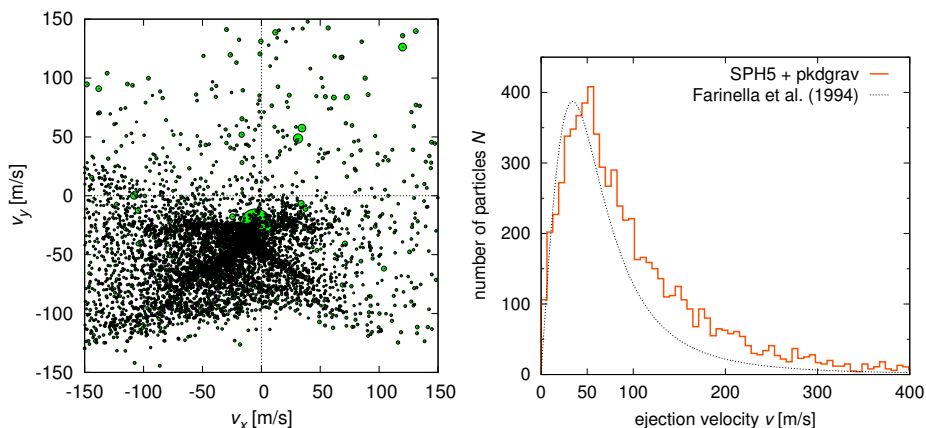


Obr. 23 — Simulace srážky mezi terčem o průměru $D = 100$ km a projektilem s $D = 10$ km, s impaktní rychlostí $v_{\text{imp}} = 5$ km/s a úhlem $\varphi_{\text{imp}} = 45^\circ$. Graf ukazuje polohy (x, y) přibližně $1,42 \cdot 10^5$ SPH částic; jejich barvy odpovídají logaritmu rychlosti v (v jednotkách cm s^{-1}). Integrace byla řízena Courantovým číslem $C = 1,0$, typický časový krok byl tedy $\Delta t \simeq 10^{-4}$ s, trvání $t_{\text{stop}} = 100$ s. Materiálové parametry pro bazalt (Benz and Asphaug 1999): hustota při nulovém tlaku $\rho_0 = 2,7 \text{ g cm}^{-3}$, objemový modul $A = 2,67 \cdot 10^{11} \text{ erg cm}^{-3}$, nelineární tlakový člen $B = 2,67 \cdot 10^{11} \text{ erg cm}^{-3}$, Tillotsonovy parametry $U_0 = 4,87 \cdot 10^{12} \text{ erg g}^{-1}$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\alpha = 5,0$, a $\beta = 5,0$, počínající vypařování $U_{\text{iv}} = 4,72 \cdot 10^{10} \text{ erg g}^{-1}$, úplné vypaření $U_{\text{cv}} = 1,82 \cdot 10^{11} \text{ erg g}^{-1}$, modul pružnosti ve smyku $\mu = 2,27 \cdot 10^{11} \text{ erg cm}^{-3}$, mez pružnosti $Y = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ erg g}^{-1}$, měrná energie tavení $U_{\text{melt}} = 3,4 \cdot 10^{10} \text{ erg g}^{-1}$, parametry Weibullova rozdělení poruch $k = 4,0 \cdot 10^{29} \text{ cm}^{-3}$, a $m = 9,0$. Počítáno programem SPH5 (Benz and Asphaug 1994).



Obr. 24 — Kumulativní rozdělení velikostí $N(>D)$ pro podmnožinu 30 různých simulací srážek monolitických asteroidů s průměrem terče $D = 100$ km a impaktním úhlem $\phi_{\text{imp}} = 45^\circ$. Jednotlivé simulace se liší rozměrem projektilu $d = 10, 14, 18, 25, 34$ a 46 km (směrem shora dolů) a impaktní rychlostí $v_{\text{imp}} = 3, 4, 5, 6$ a 7 km/s (zleva doprava). To odpovídá rozsahu od pouhého kráterování po katastrofický rozpad, což se projevuje i zřetelně odlišnými histogramy $N(>D)$.

Převzato z Durda aj. (2007).



Obr. 25 — Vlevo konečné rychlosti těles po simulaci srážky terče $D = 100$ km a projektilu $d = 25$ km, s rychlostí $v_{\text{imp}} = 5$ km s $^{-1}$ a úhlem $\phi_{\text{imp}} = 45^\circ$. Velikosti symbolů odpovídají hmotnostem.

Vpravo odpovídající diferenciální histogram rychlostí výhozu $dN(v_{ej})$, v porovnání s jednoduchým modelem Farinelly aj. (1994). Vidíme, že vrchol histogramu je na hodnotě srovnatelné s únikovou rychlostí v_{esc} původního mateřského tělesa. Počítáno programem Pkdgrav (Richardson aj. 2000).

3.12 Škálovací zákon pro terče

Z celé sady simulací lze odvodit škálovací zákon $Q_D^*(r)$ (Benz a Asphaug 1999), čili závislost pevnosti (v jednotkách J kg^{-1}) na poloměru r , která je nejdůležitějším vstupem pro statistické modely srážek (viz kap. ??). Stačí pomocí interpolace zjistit, při jaké kinetické energii E_k projektilu dochází k rozptýlení poloviny hmotnosti terče. Průběh funkce lze vystihnout polynomem:

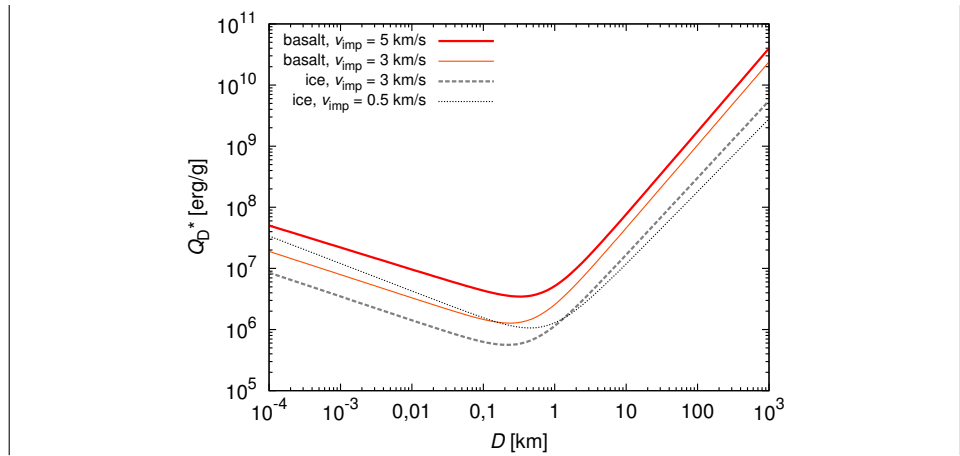
$$Q_D^* = \frac{1}{q_{\text{fact}}} (Q_0 r^a + B \rho r^b), \quad (132)$$

kde hodnoty parametrů pro různé materiály shrnuje tab. 1 a funkci obr. 26. Faktor q_{fact} se užívá pouze tehdy, chceme-li vyjádřit, že pevnost je q krát menší než nějaký standardní materiál; jinak nemá smyslu. Všimněme si, že a je záporné a b kladné. Důvodem prvního je skutečnost, že v malých balvanech je málo poruch (prasklin), a tudíž jsou pevnější. Tato část škálovacího zákona je ostatně ověřena laboratorními experimenty. Důvodem druhého je rostoucí gravitační vazebná energie E_v , ale závislost nebývá tak strmá jako $b = -2$, neboť nerozptylujeme celý terč, nýbrž pouze nějakou polovinu.

	v_{imp} km s	Q_0 erg g ⁻¹	B erg cm ³ g ⁻²	a	b
basalt	5	$9,0 \cdot 10^7$	0,5	-0,36	1,36
led	3	$1,6 \cdot 10^7$	1,2	-0,39	1,26

Tab. 1 — Parametry škálovacího zákona (132) pro basaltický a ledový materiál s monolitickou strukturou. Převzato z Benz a Asphaug (1999).

- [28] BENAVIDEZ, P. G., DURDA, D. D., ENKE, B. L., BOTTKKE, W. F., NESVORNÝ, D., RICHARDSON, D. C., ASPHAUG, E., MERLINE, W. J. *A comparison between rubble-pile and monolithic targets in impact simulations: Application to asteroid satellites and family size distributions. Icarus*, **219**, 57, 2012.
- [29] BENZ, W., ASPHAUG, E. *Impact simulations with fracture. I. Method and tests. Icarus*, **107**, s. 98–116, 1994.
- [30] BENZ, W., ASPHAUG, E. *Catastrophic disruptions revisited. Icarus*, **142**, s. 5–20, 1999.
- [31] CANUP, R. M. *Simulations of a late lunar-forming impact. Icarus*, **168**, 433, 2004.
- [32] COSSINS, P. *Smoothed particle hydrodynamics. ArXiv*, 1007.1245v2, 2010.
- [33] DIEHL, S., ROCKEFELLER, G., FRYER, C. L., RIETHMILLER, R., STATLER, T.S. *Generating optimal initial conditions for Smooth Particle Hydrodynamics simulations. ArXiv*, 1211.0525, 2012.
- [34] DURDA, D. D., BOTTKKE, W. F., NESVORNÝ, D., ENKE, B. L., MERLINE, W. J., ASPHAUG, E., RICHARDSON, D. C. *Size-frequency distributions of fragments from SPH/N-body simulations of asteroid impacts: Comparison with observed asteroid families. Icarus*, **186**, 498, 2007.



Obr. 26 — Škálovací zákon Q_D^* , neboli závislost pevnosti na průměru D , pro monolitický basalt a led a různé hodnoty impaktní rychlosti v_{imp} . Podle Benz a Asphaug (1999).

- [35] FARINELLA, P., FROESCHLÉ, C., GONCZI, R. *Meteorite delivery and transport*. *IAUS Conf.*, **160**, 205, 1994.
- [36] GINGOLD, R. A., MONAGHAN, J. J. *Smoothed particle hydrodynamics — Theory and application to non-spherical stars*. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **181**, s. 375–389, 1977.
- [37] GODUNOV, S. K. *A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hyperbolic equation*. *Math. Sbornik*, **47**, s. 271–306, 1959.
- [38] LUCY, L. B. *A numerical approach to the testing of the fission hypothesis*. *Astron. J.*, **82**, s. 1013–1024, 1977.
- [39] MAINDL, T. I., SCHÄRFER, CH., SPEITH, R. *SPH for simulating impacts and collisions* [online]. [cit. 2014-08-12], (<http://www.univie.ac.at/adg/Teaching/Planetformation2012/NF-NSPH2013-01-22.pdf>), 2013.
- [40] MELOSH, H. J. *A new and improved equation of state for impact computations*. *LPI Conf.*, **31**, 1903, 2000.
- [41] MONAGHAN, J. *On the problem of penetration in particle methods*. *J. Comput. Phys.*, **82**, 1, s. 1–15, 1989.
- [42] NESVORNÝ, D., ENKE, B. L., BOTTKE, W. F., DURDA, D. D., ASPHAUG, E., RICHARDSON, D. C. *Karin cluster formation by asteroid impact*. *Icarus*, **183**, s. 296–311, 2006.
- [43] NIEDOBA, P. *Bezsítové metody ve výpočetní dynamice tekutin*. Diplomová práce, VUT Brno, 2012.
- [44] PRICE, D. J. *Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics*. *J. Comp. Phys.*, **231**, 759, 2012.
- [45] RICHARDSON, D. C., QUINN, T., STADEL, J., LAKE, G. *Direct large-scale N-Body simulations of planetesimal dynamics*. *Icarus*, **143**, 45, 2000.
- [46] ROE, P. L. *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*. *J. Comput. Phys.*, **43**, s. 357–372, 1981.
- [47] SOD, G. A. *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*. *J. Comput. Phys.*, **27**, s 1–31, 1978.
- [48] STADEL, J. G. *Cosmological N-body simulations and their analysis*. Ph.D. Thesis, Univ. of Washington, 2001.
- [49] TILLOTSON, J. H. *Metallic equations of state for hypervelocity impact*. *General Atomic Report*, GA-3216, 1962.

4 Rovnice vedení tepla

Ač se vedení tepla v asteroidech zdá být pouhou kuriozitou, jde o základní problém ve fyzice malých těles. Anizotropie tepelného vyzařování s povrchu asteroidu je příčinou *disipace* (nebo i růstu) mechanické energie; zatímco samotné gravitační působení by bylo konzervativní. Trajektorie proto nejsou přibližně eliptické, nýbrž přibližně spirálové, což se zřetelně projevuje na struktuře celého hlavního pásu asteroidů i počtu blízkozemních objektů.

4.1 Fourierovský rozvoj zářivého toku

Předtím, než budeme analyticky řešit rovnici vedení tepla uvnitř, se musíme zabývat jednou okrajovou záležitostí — ozářením. Pro určité místo na rovníku rotujícího asteroidu je tok dán periodickou funkcí ($P = 2\pi/\omega$):

$$\mathcal{F}(t) = (1 - A)\Phi \Xi(\cos \omega t), \quad (133)$$

kde $\Xi(x) \equiv xH(x)$, $H(x) = 0$ pro $x < 0$ a $H(x) = 1$ pro $x \geq 0$ je Heavisidova skoková funkce; $\Phi = L/(4\pi r^2)$ zářivý tok od Slunce v dané vzdálenosti r a A Bondovo albedo. Neboť je po částech spojitě diferencovatelná, lze počítat ji příslušnou Fourierovu řadu:

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n e^{in\omega t}, \quad (134)$$

jejíž koeficienty:

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{P} \int_0^P \mathcal{F}(t) e^{in\omega t} dt. \quad (135)$$

Konkrétně člen $\mathcal{F}_0$:

$$\frac{1}{P} \int_0^P \Xi(\cos \omega t) dt = \frac{2}{P} \int_0^{\frac{P}{4}} \cos \omega t dt = \frac{2}{P} \left[\frac{\sin \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{P}{4}} = \frac{1}{\pi}$$

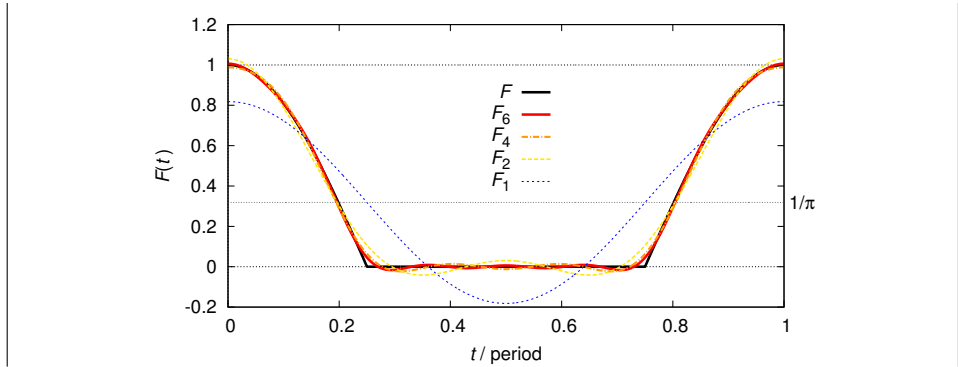
a člen $\mathcal{F}_{\pm 1}$:

$$\frac{2}{P} \int_0^{\frac{P}{4}} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{P} \int_0^{\frac{P}{4}} (\cos 2\omega t + 1) dt = \frac{2}{P} \left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} + t \right]_0^{\frac{P}{4}} = \frac{1}{4},$$

atd.

Do 6. řádu ($\mathcal{F}_{\pm 6}$) pak vypadá řada následovně (viz obr. 27):

$$\mathcal{F}(t) \doteq (1 - A)\Phi \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega t - \frac{2}{15\pi} \cos 4\omega t + \frac{2}{35\pi} \cos 6\omega t \right). \quad (136)$$



Obr. 27 — Zářivý tok $\mathcal{F}(t)$ od Slunce na rovníku rotujícího asteroidu a jeho postupná aproximace několika členy fourierovské řady, $\mathcal{F}_0$ až $\mathcal{F}_6$. Hodnoty vynesené v grafu jsou v jednotkách $(1 - A)\Phi$, kde A označuje Bondovo albedo a Φ tok záření (ve W m^{-2}) v dané vzdálenosti od Slunce.

4.2 Analytické jednorozměrné řešení

Existují-li (alespoň přibližná) analytická řešení, lze pomocí nich ověřovat správnost (obdobně zjednodušených) numerických řešení. Proto se budeme zprvu zabývat rovnicí vedení tepla v nejjednodušším jednorozměrném případě. Neznamená to pochopitelně, že celý asteroid je jednorozměrný, nýbrž se představujeme sloupec materiálu s Neumannovou okrajovou podmínkou na povrchu a Dirichletovou v hloubce:

$$\rho C \partial_t u - \partial_x K \partial_x u = 0, \quad (137)$$

$$K \partial_x u + \epsilon \sigma u^4 = \mathcal{F}(t) \quad \text{pro } x = 0, \quad (138)$$

$$u = \text{konst.} \quad \text{pro } x \rightarrow -\infty, \quad (139)$$

kde $u(x, t)$ označuje teplotu, jakožto neznámou funkci souřadnice a času, ρ hustotu, C měrnou tepelnou kapacitu, K tepelnou vodivost, ϵ infračervenou emisivitu, σ Stefanovu–Boltzmannovu konstantu a $\mathcal{F}(t)$ zářivý tok dle (133). Jakékoliv laterální vedení tepla zanedbáváme.

Vzhledem k charakteru (136) zkusíme nalézt *ustálené*¹⁹ řešení ve tvaru Fourierovy řady:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x) e^{in\omega t}. \quad (140)$$

Je-li $K = \text{konst.}$, zavedeme tepelnou difuzivitu $\chi \equiv \frac{K}{\rho C}$. Dosadíme-li řadu do (137), obdržíme:

$$\sum_n u_n in\omega e^{in\omega t} - \chi \sum_n \partial_{xx} u_n e^{in\omega t} = 0,$$

¹⁹ Samozřejmě se tím připravujeme o možnost popisovat přechodové stavy, jež nejsou periodické, např. postupný ohřev z nějaké konstantní teploty.

čili pro každé n musí platit:

$$\partial_{xx} u_n = \frac{in\omega}{\chi} u_n. \quad (141)$$

Obecná řešení se evidentně liší pro $n = 0$, $n > 0$ a $n < 0$. Neboť víme, že $\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $\sqrt{-i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$, vycházejí:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 + b_0 x, \\ u_n(x) &= a_n e^{-(1+i)\beta_n x} + b_n e^{(1+i)\beta_n x}, \\ u_{-n}(x) &= a_{-n} e^{-(1-i)\beta_n x} + b_{-n} e^{(1-i)\beta_n x}, \end{aligned}$$

kde jsme kromě integračních konstant a_n , b_n byli nuceni pro zkrácení zápisu zavést $\beta_n \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \frac{|n|\omega}{\chi}}$; shodou okolností je $1/\beta_n$ hloubka proniku tepelné vlny. Neboť nás vesměs zajímají řešení nedivergující, je $b_n = 0$, a tedy $u_0 = \text{konst.}$

Zatím neznámá a_n určíme jako obvykle z konkrétní okrajové podmínky (138). Povrchová teplota je zřejmé:

$$u(0, t) = \sum_n a_n e^{in\omega t}$$

a její derivace:

$$\partial_x u(0, t) = - \sum_{n>0} a_n (1+i)\beta_n e^{in\omega t} - \sum_{n>0} a_{-n} (1-i)\beta_n e^{-in\omega t}.$$

Abychom nemuseli umocňovat do nekonečna, budeme předpokládat (a později ověřovat) malé změny teploty $u_n \ll u_0$, což by umožnilo provést linearizaci:

$$u^4 = \left(u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n e^{in\omega t} \right)^4 \doteq u_0^4 + 4u_0^3 \sum_{n \neq 0} u_n e^{in\omega t}.$$

Po dosazení do (138):

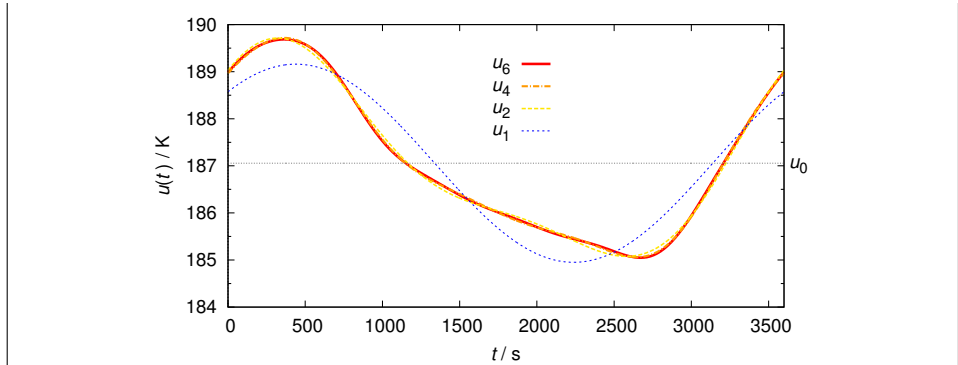
$$\begin{aligned} & -K \sum_{n>0} a_n (1+i)\beta_n e^{in\omega t} - K \sum_{n>0} a_{-n} (1-i)\beta_n e^{-in\omega t} + \\ & + \epsilon \sigma u_0^4 + 4\epsilon \sigma u_0^3 \sum_{n \neq 0} a_n e^{in\omega t} = \sum_n \mathcal{F}_n e^{in\omega t} \end{aligned}$$

vidíme, že se musejí rovnat koeficienty u všech $e^{in\omega t}$, odkud:

$$u_0 = \sqrt[4]{\frac{\mathcal{F}_0}{\epsilon \sigma}}, \quad (142)$$

$$a_n = \frac{\mathcal{F}_n}{4\epsilon \sigma u_0^3 + K(1+i)\beta_n}, \quad (143)$$

$$a_{-n} = \frac{\mathcal{F}_{-n}}{4\epsilon \sigma u_0^3 + K(1-i)\beta_n}. \quad (144)$$



Obr. 28 — Povrchová teplota $u(0, t)$ daného místa na asteroidu, získaná řešením jednorozměrné rovnice vedení tepla, respektive její postupné aproximace několika fourierovskými členy u_0 až u_6 . Volené parametry jsou: rotační perioda $P = 1$ h, vzdálenost od Slunce $r = 2,5$ au, Bondovo albedo $A = 0,1$, infračervená emisivita $\epsilon = 0,9$, hustota $\rho = 2\,500 \text{ kg m}^{-3}$, měrná tepelná kapacita $C = 480 \text{ J kg}^{-1}$ a tepelná vodivost $K = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Výsledná funkce $u(0, t)$ je zobrazena na obr. 28. Zřetelný je fázový posun oproti $\mathcal{F}(t)$. Pohledem na něj zároveň ověříme náš předpoklad $u_n \ll u_0$; o.k.

4.3 Metoda konečných diferencí (FDM)

Když podmínky pro linearizaci nejsou splněny, uchýlíme se k řešení numerickému. Navíc lze studovat i stavy přechodové. Všechny derivace (operátory) proto převedeme na konečné difference, což je obzvláště snadné, když je geometrie jednoduchá (jednorozměrná).

Explicitní schéma. Převedme nejprve 1. derivaci podle času:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t},$$

kde jsme zavedli horní indexy n a $n-1$, odpovídající času novému ($t + \Delta t$) a starému (t). Vyjádření 2. derivace podle souřadnice je prostým rozdílem prvních:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} - \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2},$$

kde jsme zavedli dolní indexy $j+1$, j a $j-1$ pro tři sousedící body. Při dosazování do (137) se musíme především rozhodnout, v jakém čase vyčíslíme prostorové derivace! Pokud ve starém:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \chi \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0,$$

tak nám to umožňuje explicitně vyjádřit nové teploty:

$$u_j^n = u_j^{n-1} + \frac{\chi \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) \quad \text{pro } j = 1 \dots M-1.$$

Toto numerické schéma se nazývá explicitní dopředný Euler, často angl. forward time centered space nebo zkr. FTCS.

Je sice nejjednodušší, ale před jeho použitím musíme zkontrolovat splnění *von Neumannova kritéria*:

$$\frac{2\chi\Delta t}{\Delta x^2} < 1,$$

bez kterého není zaručena stabilita, resp. je zaručena nestabilita. Je však třeba důsledně rozlišovat — stabilita v žádném případě není konvergence k neznámému řešení! Tu musíme jako vždy ověřovat např. sledováním změn $u(x, t)$ při dalším zmenšování kroku časového Δt i prostorového Δx .

Na povrchu $j = 0$ ani v hloubce $j = M$ nelze vyčíslovat druhou derivaci, neboť nemáme třetí bod. Právě proto potřebujeme (diskretizované) okrajové podmínky (138) a (139). Konkrétně je:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} \simeq \frac{u_0 - u_1}{\Delta t},$$

čili:

$$K \frac{u_0^n - u_1^n}{\Delta t} + \epsilon \sigma (u_0^n)^4 = \mathcal{F}(t),$$

což představuje polynom 4. stupně pro u_0^n (u_1^n již známe):

$$\epsilon \sigma (u_0^n)^4 + \frac{K}{\Delta t} u_0^n - \frac{K}{\Delta t} u_1^n - \mathcal{F}(t) = 0;$$

řeší se numericky (např. Laguerrovou metodou).

Okrajová podmínka v (konečné) hloubce $x_M \gg \beta$ je o dost jednodušší:

$$u_M = u_{\text{eq}},$$

ale rovnovážnou teplotu musíme volit obezřetně, abychom si nevynutili řešení nesmyslné.

Implicitní schéma. Použijeme-li namísto starých teplot nové:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \chi \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0,$$

jedná se o poněkud jiný problém:

$$-\overbrace{\frac{\chi\Delta t}{\Delta x^2}}^a u_{j+1}^n + \left(1 + \frac{2\chi\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_j^n - \frac{\chi\Delta t}{\Delta x^2} u_{j-1}^n = u_j^{n-1} \quad \text{pro } j = 1 \dots M-1,$$

neboli:

$$u_j^n A_{ij} = B_i,$$

kde matice je tridiagonální řídka:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -a & 1+2a & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a & 1+2a & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (145)$$

a pravá strana:

$$B = \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n-1} \\ u_M^n \end{pmatrix}. \quad (146)$$

V každém kroku tedy musíme invertovat matici (společně s neustále se měnící pravou stranou)! Takové schéma se nazývá implicitní zpětný Euler, angl. backward time centered space, zkr. BTCS.

Aby matice nezůstala singulární, je naprosto nezbytné v B_i dosadit za u_0^n , u_M^n dosadit z okrajových podmínek: použít okrajové podmínky:

$$\epsilon\sigma(u_0^n)^4 + \frac{K}{\Delta t}u_0^n - \frac{K}{\Delta t}u_1^{n-1} - \mathcal{F}(t) = 0, \quad (147)$$

$$u_M = u_{\text{eq}}, \quad (148)$$

kde jsme si pomohli „faulem“, neboť jsme použili starou hodnotu podpovrchové teploty u_1^{n-1} namísto nové u_1^n , kterou zatím nikdo nezná; „za trest“ provedeme několik iterací.²⁰

Hybridní schéma. Jako výhodná se ukazuje být kombinace schémat explicitního a implicitního, parametrizovaná parametrem θ :

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \theta\chi \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - (1-\theta)\chi \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0,$$

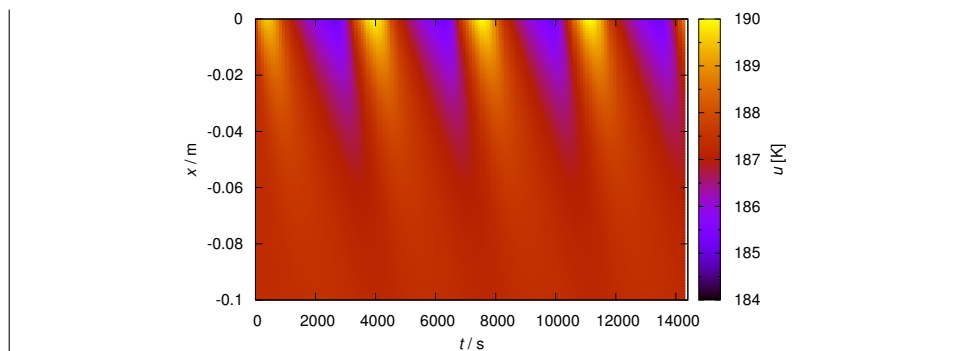
což opět vede na soustavu:

$$u_j^n A'_{ij} = B'_i.$$

²⁰ Druhou možností by byla linearizace 4. mocniny v (147), použití u_1^n a této rovnice namísto 1. řádku matice A_{ij} , ale linearizace se musí taktéž odčinit iteracemi.

θ	schéma	přesnost	stabilita
0	explicitní dopředný Euler	$\Delta x^2, \Delta t$	von Neumannovo kritérium
1/2	implicitní Crank–Nicolson	$\Delta x^2, \Delta t^2$	stabilní
1	implicitní zpětný Euler	$\Delta x^2, \Delta t$	stabilní

Tab. 2 — Hodnoty parametru θ , určující konkrétní schéma numerické metody FDM, přesnost schématu a případná podmínka stability.



Obr. 29 — Numerické řešení rovnice vedení tepla metodou FDM, schématem BTCS, zobrazené na grafu čas t , hloubka x ; teplota u je znázorněna barevně. Počáteční podmínka byla $u(x, t = 0) = u_{\text{eq}}$, okrajová podmínka na povrchu je zářivá (odpovídá obr. 27) a v hloubce $u(x = -0,2 \text{ m}, t) = u_{\text{eq}}$. Výpočet byl proveden včetně přechodového stavu. Tepelné parametry jsou tytéž jako na obr. 28, stejně jako průběh $u(x = 0, t)$.

Výhodou hybridního schématu nazývaného Crankovo–Nicholsonovo je kromě bezpodmínečné stability také vyšší přesnost integrace, neboť pro výpočet 2. derivací využíváme 6 bodů (viz tab. 2; Langtangen 2003).

4.4 Slabá formulace problému

Přejdeme nyní k obecnému trojrozměrnému numerickému řešení, které je možné použít v libovolné nepravidelné geometrii, tzn. i pro celý šišatý asteroid. Rovnici vedení tepla si nejprve zapíšeme pomocí operátoru:

$$\mathcal{L} \equiv \rho C \partial_t - \nabla \cdot K \nabla, \quad (149)$$

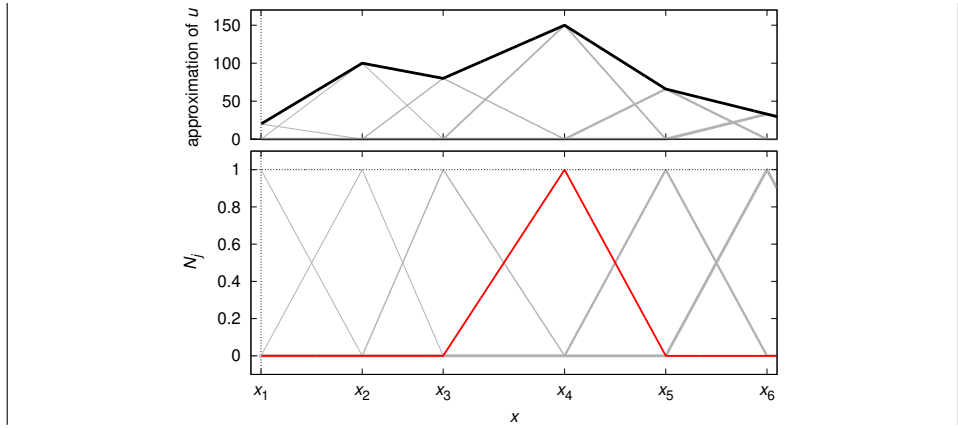
abychom její zápis maximálně zjednodušili:

$$\mathcal{L}(u) = 0; \quad (150)$$

okrajovou podmínku už máme jen jednu:

$$K \partial_n u + \epsilon \sigma u^4 = (1 - A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) \text{ na } \partial\Omega, \quad (151)$$

přičemž tentokrát je hranice domény v podstatě libovolná uzavřená, prozatím konvexní, takže v argumentu zářivého toku vystupuje směr ke Slunci $\mathbf{s}(t)$ a normály $\mathbf{n}(\mathbf{r})$.



Obr. 30 — Dole nejjednodušší jednorozměrné lineární báze funkce $N_j(x)$; zvýrazněná je pro $j = 4$. Nahoře je odpovídající funkce $\hat{u}$ pro případ, kdyby koeficienty byly číselně rovny: $u_1 = 20$, $u_2 = 100$, $u_3 = 80$, $u_4 = 150$, $u_5 = 66$, $u_6 = 33$. Ve dvou rozměrech by $N_j(x, y)$ měly podobu čtyřbokých jehlanů. Ve třech rozměrech bychom $N_j(\mathbf{r})$ kreslit nechtěli.

Slabá formulace problému spočívá v nahrazení (neznámé) funkce $u(\mathbf{r})$ za její přibližný rozvoj:

$$u \doteq \hat{u} = \sum_{j=1}^M u_j N_j, \quad (152)$$

kde u_j jsou neznámé číselné koeficienty a $N_j(\mathbf{r})$ známé *báze funkce* (též „konečné prvky“). Nejjednodušší funkce jsou obyčejné střechovité, které jsou nenulové jen mezi několika nejbližšími body sítě; schematicky jednorozměrně (obr. 30):

$$N_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{pro } x \in (x_{j-1}, x_j), \\ \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}} & \text{pro } x \in (x_j, x_{j+1}), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (153)$$

Samozřejmě lze volit též funkce kvadratické, kubické, harmonické, pokrývající celou oblast Ω , vlastní funkce operátoru $\mathcal{L}$, jsou-li známy, různé speciální atd. Volba vhodné báze se podobá umění.

Právě provedená diskretizace v prostoru převádí problém spojitý (hledání $u(\mathbf{r}, t)$) na diskrétní konečný (hledání u_j). Pak ale nemůže všude přesně platit (150)! Obecně je tedy:

$$\mathcal{L}(\hat{u}) \neq 0,$$

s čímž nelze být spokojen.

4.5 Metoda konečných prvků (FEM)

V metodě konečných prvků se s tím smíříme. Avšak požadujeme, aby součet reziduí byl nula. Nelze ovšem napsat bez rozmyslu:

$$\oint_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) d\Omega = 0,$$

protože to bychom mohli mít v levé části domény Ω kladné odchylky a v pravé záporné. Ba co hůř, s jednou rovnicí pro M neznámých u_j nenaděláme nic. Proto musíme splnění podmínky požadovat mnohokrát, vždy v omezené části Ω , kterou si vymezíme pomocí *testovací funkce* (váhy) $W_i(\mathbf{r})$:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) W_i d\Omega = 0 \quad \text{pro } i = 1 \dots M. \quad (154)$$

Zvolíme-li jednoduše $W_i \equiv N_i$, hovoříme o tradiční *Galerkinově metodě*:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) N_i d\Omega = 0 \quad \text{opět pro } i = 1 \dots M. \quad (155)$$

Rozepsáním $\mathcal{L}$ pro náš problém pak obdržíme:

$$\int_{\Omega} \rho C \partial_t \hat{u} N_i d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u}) N_i d\Omega = 0.$$

Protože divergence všeho (součinu):

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \partial_n \hat{u} N_i) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u}) N_i d\Omega + \int_{\Omega} K \nabla \hat{u} \cdot \nabla N_i d\Omega$$

a protože zároveň platí Gaussova věta:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \partial_n \hat{u} N_i) d\Omega = \int_{\partial\Omega} K \partial_n \hat{u} N_i d\Gamma, \quad (156)$$

plyne odtud *Greenovo lemma*:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u}) N_i d\Omega = - \int_{\Omega} K \nabla \hat{u} \cdot \nabla N_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} K \partial_n \hat{u} N_i d\Gamma, \quad (157)$$

které se využívá pro elegantní dosazení za $K \partial_n \hat{u} = -\epsilon \sigma \hat{u}^4 + (1 - A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})$ z okrajové podmínky (151), čímž ji automaticky splňujeme a nemusíme se jí dále zabývat.

Musíme ještě provést diskretizaci v čase:

$$\partial_t \hat{u} \simeq \frac{\hat{u}^n - \hat{u}^{n-1}}{\Delta t}, \quad (158)$$

kde jsme opět horními indexy n a $n-1$ označili hodnoty nové a staré.

Aby výsledná soustava rovnic byla a zůstala lineární, aproximujeme novou teplotu jako:

$$\hat{u}^4 \simeq (\hat{u}^{n-1})^3 \hat{u}^n; \quad (159)$$

případnou nelinearitu budeme řešit *ex post* iteracemi.

Shrneme-li naše dosavadní snažení:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \hat{u}^n N_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \hat{u}^{n-1} N_i d\Omega + \int_{\Omega} K \nabla \hat{u}^n \cdot \nabla N_i d\Omega + \\ & + \int_{\partial\Omega} \epsilon \sigma (\hat{u}^{n-1})^3 \hat{u}^n N_i d\Gamma - \int_{\partial\Omega} (1-A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) N_i d\Gamma = 0 \quad \text{pro } i = 1 \dots M; \end{aligned} \quad (160)$$

kde to jen šlo, použili jsme nové hodnoty $\hat{u}^n$, jak je obvyklé v implicitních metodách. Evidentně jde o soustavu M lineárních rovnic pro M neznámých u_j , kterou zbývá vyřešit.

Kdybychom to vyjádřili otrocky:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \sum_j u_j^n N_j N_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \sum_j u_j^{n-1} N_j N_i d\Omega + \int_{\Omega} K \nabla \sum_j u_j^n N_j \cdot \nabla N_i d\Omega + \\ & + \int_{\partial\Omega} \epsilon \sigma \left(\sum_j u_j^{n-1} N_j \right)^3 \sum_j u_j^n N_j N_i d\Gamma - \int_{\partial\Omega} (1-A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) N_i d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

a přeuspořádali:

$$\begin{aligned} & \sum_j u_j^n \left[\frac{\rho C}{\Delta t} \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + K \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega + \epsilon \sigma \int_{\partial\Omega} \left(\sum_j u_j^{n-1} N_j \right)^3 N_j N_i d\Gamma \right] = \\ & = \sum_j u_j^{n-1} \frac{\rho C}{\Delta t} \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + (1-A) \Phi \int_{\partial\Omega} \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) N_i d\Gamma, \end{aligned}$$

už by bylo nad slunce jasné, že jde o soustavu typu:

$$u_j^n A_{ij} = B_i,$$

kde prvky matice jsou buď integrály, které lze pro danou síť bodů předpočítat předem (1. a 2. člen), nebo jednoduché integrály známých funkcí (3. člen). Totéž platí pro pravou stranu. Při jemné diskretizaci (velkém M) je matice A_{ij} nebezpečně velká a její inverze obtížná, nicméně bývá řídká.

4.6 Implementace v programu FreeFem++

Prakticky lze pro řešení použít program FreeFem++ (Hecht 2012), který dovoluje symbolický zápis integrálů ve stejné podobě jako rovnice (171):

```

real C = 680; // specific heat capacity [J/kg/K]
real K = 2.5; // thermal conductivity [W/m/K]
real rho = 2500; // bulk density [kg/m^3]
real epsil = 1.0; // infrared emissivity []
real sigma = 5.66962e-8; // Stefan-Boltzmann constant [W/m^2/K-4]
real A = 0.0; // Bond albedo []
real S0 = 1371.; // solar constant [W/m^2]
real r = 2.5; // distance [AU]
real Phi = S0/r^2; // solar flux [W/m^2]

real sx, sy, sz; // Sun direction []
real phi; // corresponding longitude [rad]
real theta = pi/2.; // co-latitude [rad], 0 deg ... north pole
real P = 7200.; // rotation period [s]
real t; // time [s]
real dt = 72.0; // time step [s]
real tstop = 100.*P; // time to stop [s]
int iterations = 3; // number of iterations

real chi = K/(rho*C); // thermal diffusivity [m^2 s^-1]
cout << "chi = " << chi << " m^2 s^-1" << endl;
func u0 = ((1.-A)*Phi/(4*epsil*sigma))^(1./4.); // equilibrium temperature [K]
cout << "u0 = " << u0 << " K" << endl;

load "msh3";
mesh3 Th = readmesh3("file.1.msh"); // read the mesh produced by tetgen
mesh3 Thirr; // a copy of the mesh (for shadowing)

fespace Vh(Th, P1); // the space of (linear) finite elements
Vh u, uold, v, b; // definitions of functions on this space

problem HDE(u,v) // the PDE definition, weak formulation
= int3d(Th) (rho*C/dt * u*v) // linear term
- int3d(Th) (rho*C/dt * uold*v) // from time discretization, implicit Euler
+ int3d(Th) (K * (dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) + dz(u)*dz(v))) // bilinear part
+ int2d(Th) (b * u*v) // Neumann BC
- int2d(Thirr,1) ( ((sx*N.x + sy*N.y + sz*N.z) > 0) * // zero on night side
(1-A)*Phi * (sx*N.x + sy*N.y + sz*N.z) * v); // simple irradiation

include "savedat.edp";
include "shadowxm.edp";

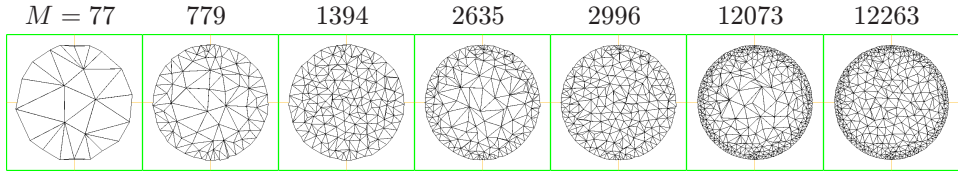
u = uold = u0; // initial condition
for (t=dt; t <= tstop; t+=dt) { // cycle in time
  phi = t/P*2*pi; // change solar unitvector
  sx = cos(phi)*sin(theta);
  sy = sin(phi)*sin(theta);
  sz = cos(theta);
  shadowxm(sx, sy, sz); // determine non-shadowed facets (Thirr)

  for (int k=0; k < iterations; k++) { // iterations due to non-linearity of BC
    b = epsilon*sigma * u^3; // semi-linearization of the u^4 term
    HDE; // solution of the PDE
  }
  uold = u; // time step
  savedat("output.dat", t, sx, sy, sz); // data output
}

```

Jediným rozdílem je drobná změna notace $\hat{u}$ na u , N_i na v . Navíc je zde naznačeno volání výpočtu stínění pro nekonvexní tvary, kde nestačí použít jen skalární součin $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$.

Triangulace. Důležitá otázka: „Jak zkonstruovat síť?“ Tzn. nejen seznam bodů, ale i jejich spojnic, podle nichž se vyčíslují báze funkce N_j . Závisí na ní nejen přesnost numerického řešení, ale i samotná možnost inverze matice A_{ij} , protože nevhodná síť může vést k singularitě. Často užívanou metodou je *Delaunayho triangulace*. V k -rozměrném prostoru zajišťuje, že pro každý útvar s $k + 1$ body (trojúhelník, čtyřstěn) jemu opsaná kružnice neobsahuje žádný další vrchol. Prakticky je možné triangulaci provést programem TetGen (Si 2006; viz obr. 31).



Obr. 31 — Různé diskretizace v prostoru, tzn. sítě čtyřstěnů vytvořené programem TetGen (Si 2006), které byly použity pro numerické řešení rovnice vedení tepla ve sférickém tělese. Číslo M označuje počet vrcholů sítě.

Radiační síla. Známe-li již povrchovou teplotu $u(\mathbf{r}, t)$, můžeme vypočítat i příslušné dynamické působení. Element radiační síly za předpokladu Lambertova rozpylu je:

$$d\mathbf{F} = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon \sigma}{c} u^4 \mathbf{n} d\Gamma. \quad (161)$$

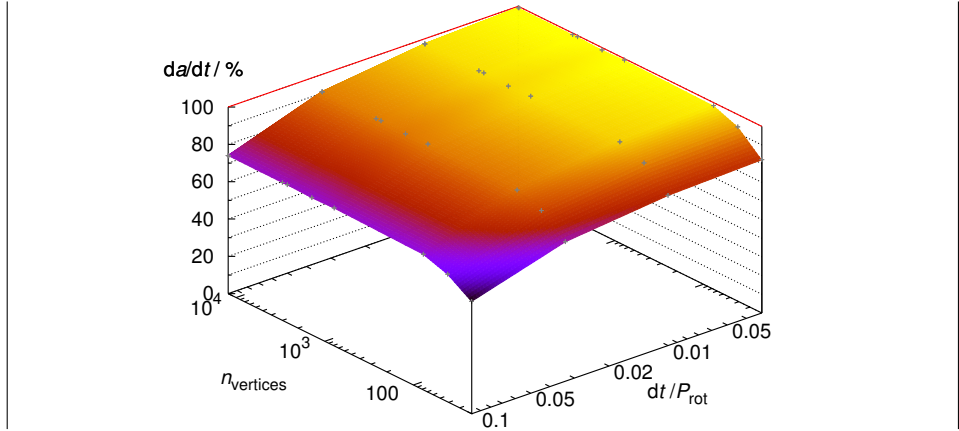
Celkové zrychlení je zřejmě $\mathbf{a} = \frac{1}{m} \int_{\partial\Omega} d\mathbf{F}$ a moment síly $\mathbf{T} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}$. Kromě toho musíme počkat na ustálení a provést středování přes periodu rotační, v horším případě i orbitální. Z historických důvodů se působení nazývají Jarkovského jev a YORP. Pro ověření přesnosti numerického výpočtu jej můžeme porovnat s analytickou teorií pro koule (Vokrouhlický 1998; obr. 32). Příklad pro nepravidelný meteoroid je na obr. 33.

4.7 Nekonvexní stínění, tepelný a rozptýlený tok

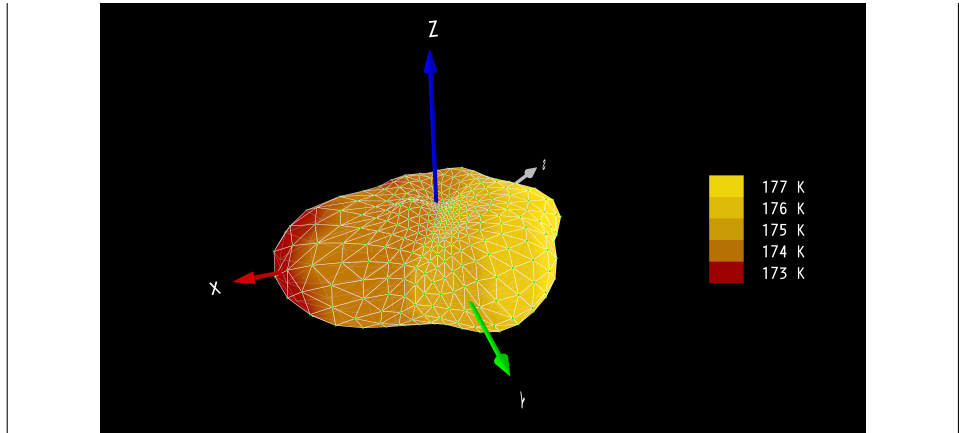
Dokonalejší modely mívají úplnější popis zářivého toku. Jednak je v zářivém toku od Slunce zohledněno stínění od jiných míst povrchu (Ševeček aj. 2015):

$$\mathcal{F} = (1 - A)\Phi\mu(\mathbf{s}, \mathbf{r})\Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}), \quad (162)$$

kde μ je funkce stínění, nabývající hodnoty 0 nebo 1. Protože je třeba pro každou plošku kontrolovat všechny plošky s $\Xi > 0$, šlo by o problém složitosti $\mathcal{O}(N^2)$. Pro daný nekonvexní tvar je ale možné jí předpočítat s určitým krokem v úhlech; pro konvexní by bylo všude $\mu = 1$.



Obr. 32 — Podíl Jarkovského driftu velké poloosy $da/dt = 2\mathcal{T}/n$ spočteného numericky a analyticky, pro různé diskretizace v prostoru (počet M vrcholů sítě) a diskretizace v čase (časový krok Δt). Předpokládali jsme zde sférické těleso, poloměr $R = 0,1$ m, rotační periodu $P_{\text{rot}} = 2$ h. Pro $M > 10^3$ a $\Delta t/P_{\text{rot}} < 0.02$ je rozdíl mezi numerickým a analytickým řešením menší než 3 %. Drift je úměrný $2\mathcal{T}/n'$ (dle (198)), kde $\mathcal{T}$ označuje transversální složku zrychlení $\mathbf{a}$ a n' střední pohyb.



Obr. 33 — Rozložení teploty $u(\mathbf{r}, t)$ na povrchu meteoroidu o efektivním poloměru $R \simeq 10$ cm, spočtené metodou FEM. Osy $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ jsou fixní v tělese, zatímco vektor $\mathbf{s}$ směřuje ke Slunci. Zohledněno je i nekonvexní stínění. Maximum teploty i vyzařování jsou posunuté oproti $\mathbf{s}$, což vede k nenulovému transversálnímu zrychlení měnícímu orbitální pohyb (Jarkovského jevu). Anizotropie vyzařování také vytváří nenulový moment síly měnící rotaci tělesa (jev YORP).

Další je tepelné záření přicházející od jiných míst povrchu:

$$\mathcal{F}_{\text{th}} = (1 - A_{\text{th}}) \int_{\Gamma} \epsilon' \sigma u'^4 \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma', \quad (163)$$

kde $\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ je funkce viditelnosti, opět nabývající hodnoty 0 nebo 1, v závislosti na tom, zda se plošky $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'$ mohou ozařovat; pro konvexní tvar by bylo všude $\nu = 0$. Pro vyzařování předpokládáme také Lambertův kosinový zákon. Zde musíme pro každou plošku počítat integrál přes povrch, jde tedy o problém složitosti $\mathcal{O}(N^2)$. Navíc zde v integrálu vystupuje hledaná funkce u , tzn. že se problém formálně stává integrodiferenciální; buď bychom se museli smířit s použitím starých teplot u^{n-1} , anebo provést iterování, abychom v okrajové podmínce měli skutečně u^n .

Konečně jde o rozptýlené záření od jiných míst povrchu:

$$\mathcal{F}_{\text{sc}} = (1 - A) \int_{\Gamma} A' \Phi \mu' \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}' \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma'. \quad (164)$$

Platí obdobná tvrzení jako v předchozím případě.

Při výpočtu radiační síly bychom pak měli zohlednit, že záření z dané plošky nemůže vždy nerušeně uniknout, ale může zapůsobit na tytéž plošky, které ji ozařují:

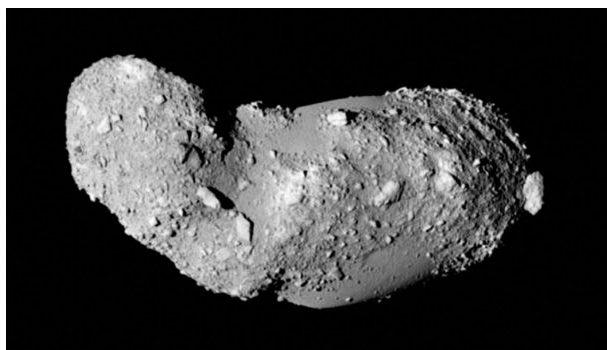
$$d\mathbf{F}' = + \frac{\epsilon \sigma}{c} u^4 \int_{\Gamma} \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma', \quad (165)$$

i účinek rozptylování sama o sobě:

$$d\mathbf{F}_{\text{sc}} = - \frac{2}{3} \frac{A\Phi}{c} \mu(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \mathbf{n} d\Gamma.$$

Balvany na Itokawě. Kromě celkového tvaru je u malých planetek nutné zohledňovat i vedení tepla v malých útvarech v transversálním směru. Například planetka (25143) Itokawa má rozměr zhruba 0,5 km, ale na detailních fotografiích je poseta balvany o rozměrech řádově $1/\beta_1 \simeq 10$ cm, což je mnohem méně než rozlišení modelu tvaru.

Slunce přitom každé ráno svítí na východní stranu balvanů, teplo je vedeno skrz od východu k západu, odpoledne je západní strana navíc osvětlená Sluncem, její teplota je tedy v průměru vyšší, což vytváří značnou asymetrii tepelného vyzařování a radiační sílu $d\mathbf{F}$ ve směru východním. Moment síly $\mathbf{T}$ od všech balvanů působí ve směru osy rotace $\vec{\Omega}$ a tudíž způsobuje zrychlování dle momentové věty $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{T}$, které klidně může převažovat nad zpomalováním od celkového tvaru. Pro pozorované rozdělení velikostí balvanů ze sondy Hayabusa (Saito aj. 2010) vychází řádově $d\omega/dt \simeq 10^{-7} \text{ rad d}^{-2}$ (Ševeček aj. 2015).



Obr. 34 — Celkový snímek planety (25143) Itokawa ze sondy Hayabusa. Rozměr planety dosahuje $0,54 \times 0,31 \times 0,25$ km. Pozorovaná rotační perioda $P = 12,1$ h není konstantní, úhlové zrychlení dosahuje $d\Omega/dt = (0,35 \pm 0,04) \cdot 10^{-7} \text{ rad d}^{-2}$. Z dálky jsou viditelné jednotlivé velké balvany. © JAXA.

- [50] ČAPEK, D. *Thermal effects in the physics and dynamics of the small Solar System bodies*. PhD. Thesis, Charles Univ., 2007.
- [51] HECHT, F. *New development in FreeFem++*. *J. Numer. Math.*, **20**, 251, 2012.
- [52] LANGTANGEN, H. P. *Computational partial differential equations. Numerical methods and Diffpack programming*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [53] SAITO, J. A. J. *Hayabusa AMICA V1.0*. NASA Planetary Data System 90, 2010.
- [54] SI, H. *TetGen — A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional Delaunay triangulator*. 2006. (<http://tetgen.berlios.de>).
- [55] ŠEVEČEK, P. *Vliv tepelné emise topografických útvarů na rotační dynamiku planetek*. Bc. Thesis, Charles Univ., 2014.
- [56] ŠEVEČEK, P., BROŽ, M., ČAPEK, D., ĎURECH, J. *The thermal emission from boulders on (25143) Itokawa and general implications for the YORP effect*. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **450**, 2104–2115, 2015.
- [57] VOKROUHLICKÝ, D. *Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. I. Linear theory*. *Astron. Astrophys.*, **335**, 1093–1100, 1998.

5 Elasticita montáže

Jednou z praktických úloh, se kterou se setkáváme při konstrukci dalekohledů a jejich montážích, je výpočet průhybu při určitém zatížení. V porovnání se srážkami asteroidů se zdá problém poněkud „nudnější“, protože se nikde nic nehýbe, hledáme jen rovnovážný stav, ale uvědomme si, že většina věcí v našem okolí je *blízko* rovnováhy.

5.1 Rovnice rovnováhy, Hookeův zákon a Lamého rovnice

Pohybová rovnice pro pevnou látku, zapsaná v indexové notaci, je:²¹

$$\rho u_{r,tt} = \sigma_{rs,s} + \rho f_r$$

kde u_r označuje *posunutí*, index $r = 1..3$, resp. do počtu dimenzí, označuje složky souřadnic, ρ hustotu, σ_{rs} tenzor napětí (čili vnitřní síly působící na jednotku plochy, $[\sigma_{rs}] = \text{Pa}$), f_r zrychlení působící uvnitř tělesa (čili síly na jednotku objemu, $[\rho f_r] = \text{N/m}^3$), například by se mohlo jednat o gravitaci.

Vynecháním časových derivací získáme *rovnici rovnováhy*:

$$\sigma_{rs,s} + \rho f_r = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad (166)$$

kteřá musí platit v celém objemu Ω tělesa.

Tuto parciální diferenciální rovnici musíme doplnit o konkrétní *okrajovou podmínku*, aby řešení bylo jednoznačné:

$$\sigma_{rs} n_s = g_r \quad \text{na } \Gamma, \quad (167)$$

platící na hranici Γ objemu Ω , kde působí povrchové síly g_r (vyjádřené na jednotku plochy, $[g_r] = \text{Pa}$); n_s zde označuje normálu k ploše. Pro volný povrch by bylo samozřejmě $g_r = 0$.

Hookeův zákon v nejjednodušší podobě je $\sigma = E\varepsilon$, kde σ označuje napětí (sílu na jednotku plochy, resp. průřezu), E Youngův modul pružnosti (též elastický modul, $[E] = \text{Pa}$) a ε je deformace (bezrozměrná, změna délky lomená délkou). Pro popis deformací ve třech rozměrech však potřebujeme jeho složitější podobu:

$$\sigma_{rs} = \lambda \varepsilon_{qq} \delta_{rs} + 2\mu \varepsilon_{rs}, \quad (168)$$

kde δ_{rs} je Kroneckerovo delta (pro $r = s$ je $\delta_{rr} = 1$ jinak $\delta_{rs} = 0$) a λ a μ jsou Laméovy konstanty, mající určitý vztah k modulu pružnosti E a Poissonově poměru ν , jež jsou obvykle udáványmi charakteristikami materiálů:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

²¹ Indexy za čárkou označují v této notaci derivace $,t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $,s \equiv \frac{\partial}{\partial x_s}$, při totožných indexech platí sumační pravidlo $_{qq} \equiv \sum_q$.

Tenzor malých deformací je zaveden jako:

$$\varepsilon_{rs} \equiv \frac{1}{2}(u_{r,s} + u_{s,r}).$$

Dosazením Hookova zákona do rovnice pro rovnováhu obdržíme *Laméovu rovnici*, čili parciální diferenciální rovnici pro posunutí u_r („skrytá“ v tenzoru deformace):

$$(\lambda \varepsilon_{qq} \delta_{rs})_{,s} + (2\mu \varepsilon_{rs})_{,s} + \rho f_r = 0, \quad (169)$$

neboli:

$$(\lambda u_{q,q} \delta_{rs})_{,s} + [\mu(u_{r,s} + u_{s,r})]_{,s} + \rho f_r = 0.$$

Tuto rovnici zapíšeme abstraktněji pomocí diferenciálního operátoru:

$$\mathcal{L}(u_r) = 0. \quad (170)$$

5.2 Metoda konečných prvků (FEM)

Namísto (zatím neznámého) řešení u_r rovnice (170) hledáme jeho aproximaci (Langtangen 2003):

$$u \doteq \hat{u}_r = \sum_{j=1}^M u_{jr} N_{jr},$$

kde N_{jr} jsou báze funkce a u_{jr} hledané koeficienty; M je počet bodů sítě, kterou triangulujeme objem Ω . Pro aproximaci však nebude rovnice (170) platit přesně, nýbrž:

$$\mathcal{L}(\hat{u}_r) \neq 0.$$

Požadujeme alespoň, aby součet všech reziduí byl nulový:

$$\int_{\Omega} \sum_{r=1}^3 \mathcal{L}(\hat{u}_r) W_{ir} d\Omega = 0,$$

kde W_{ir} jsou vhodné váhy, neboli *testovací funkce*. Tato rovnice je tedy *slabou formulací*, neboť nepožadujeme přesnou platnost rovnice všude. Integrace přes objem Ω zde odpovídá sumaci $\sum_{i=1}^M$. Sumy přes body sítě i a přes dimenze r lze sdružit do jedné, abychom tu druhou nemuseli stále vypisovat.

V Galerkinově metodě bereme za váhy přímo báze funkce, $W_{ir} \equiv N_{ir}$, takže:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}_r) N_{ir} d\Omega = 0.$$

Pro naši rovnici rovnováhy (166) pak máme:

$$\int_{\Omega} \sigma_{rs,s} N_{ir} d\Omega + \int_{\Omega} \rho f_r N_{ir} d\Omega = 0.$$

Pro její úpravu využijeme Greenovo lemma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{rs,s} N_{ir} d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma_{rs} N_{ir,s} d\Omega + \int_{\Gamma} \overbrace{\sigma_{rs} n_s}^{g_r} d\Gamma$$

a zároveň dosadíme z Hookova zákona (168) a šikovně z okrajové podmínky (167):

$$- \int_{\Omega} (\lambda \varepsilon_{qq} \delta_{rs} + 2\mu \varepsilon_{rs}) N_{ir,s} d\Omega + \int_{\Gamma} g_r N_{ir} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f_r N_{ir} d\Omega = 0, \quad (171)$$

čímž získáme základní rovnici pro metodu konečných prvků.

5.3 Implementace v programu FreeFem++

V programu FreeFem++ (Hecht 2012) je implementace velmi snadná, protože umožňuje symbolický zápis integrálů přes Ω a Γ . Aby bylo zápisu dobře rozumět, některé členy rovnice (171) rozepíšeme:

$$\begin{aligned} \sum_q \varepsilon_{qq} &= \sum_q \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_q}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\ \sum_r \sum_s \delta_{rs} N_{ir,s} &= \sum_r \frac{\partial N_{ir}}{\partial x_r} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \\ \sum_r \sum_s \varepsilon_{rs} N_{ir,s} &= \sum_r \sum_s \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right) \frac{\partial N_{ir}}{\partial x_s} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \\ &= \left[\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, \frac{\partial u_3}{\partial z}, \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right] \cdot \\ &\cdot \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial v_3}{\partial z}, \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Vlastní implementace pak je:

```
load "msh3";
mesh3 Th = readmesh3("cube.1.msh");           // read mesh from file

real ag = 9.81;                                // gravitational acceleration [m/s^2]
real a = 0.1;                                  // cross section dimensions [m]
real b = 0.15;
real m = 1.0;                                  // mass attached at the end [kg]
real E = 21.5e10;                              // Young modulus [Pa], steel
real nu = 0.29;                                // Poisson ratio [], steel
real rho = 7800.;                             // density [kg/m^3], steel
```

```

real f = rho * ag; // volumetric force [Pa/m = N/m^3]
real g = m*ag / (a*b); // surface force [Pa = N/m^2]
real mu = E/(2*(1+nu)); // Lamé's constants
real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu));

fespace Vh(Th, [P1,P1,P1]); // finite elements space (vectorial)
Vh [u1,u2,u3], [v1,v2,v3];

real sqrt2 = sqrt(2.);
macro epsilon(u1,u2,u3) [ dx(u1), dy(u2), dz(u3), (dz(u2)+dy(u3))/sqrt2,
  (dz(u1)+dx(u3))/sqrt2, (dy(u1)+dx(u2))/sqrt2 ] // end-of-macro
macro div(u1,u2,u3) ( dx(u1)+dy(u2)+dz(u3) ) // end-of-macro

solve lame([u1,u2,u3], [v1,v2,v3]) = // weak formulation
  int3d(Th)(
    lambda * div(u1,u2,u3) * div(v1,v2,v3) // divergence term
    + 2.*mu*( epsilon(u1,u2,u3) '* epsilon(v1,v2,v3) ) //' ) // dot product
  )
  - int3d(Th) (-f*v3) // volumetric forces
  - int2d(Th,3) (-g*v3) // surface forces
  + on(1, u1=0, u2=0, u3=0); // Dirichlet boundary condition

savemesh(Th, "output.sol.mesh"); // save output
savesol("output.sol", Th, [u1,u2,u3], order=1);

real umax = max(abs(u1[].min), u1[].max); // plot amplified mesh
cout << "\numax = " << umax << " m" << endl;
real coef = 0.2*b/umax;
mesh3 Thamp = movemesh3(Th, transfo = [x+u1*coef, y+u2*coef, z+u3*coef]);
int[int] ref0 = [1,0, 2,0, 3,0, 4,0, 5,0, 6,0];
int[int] ref2 = [1,2, 2,2, 3,2, 4,2, 5,2, 6,2];
Th = change(Th, label=ref2);
Thamp = change(Thamp, label=ref0);
plot(Th, Thamp, wait=1, cmm = "coef = " + coef);

```

Složky vektorové funkce $\hat{u}_r$ jsou v programu značeny $u1$, $u2$, $u3$, testovací funkce N_{ir} , pak $v1$, $v2$, $v3$. Program lze spustit z příkazové řádky FreeFem++ `lame.edp`. Příklad výsledku výpočtu je na obr. 35.

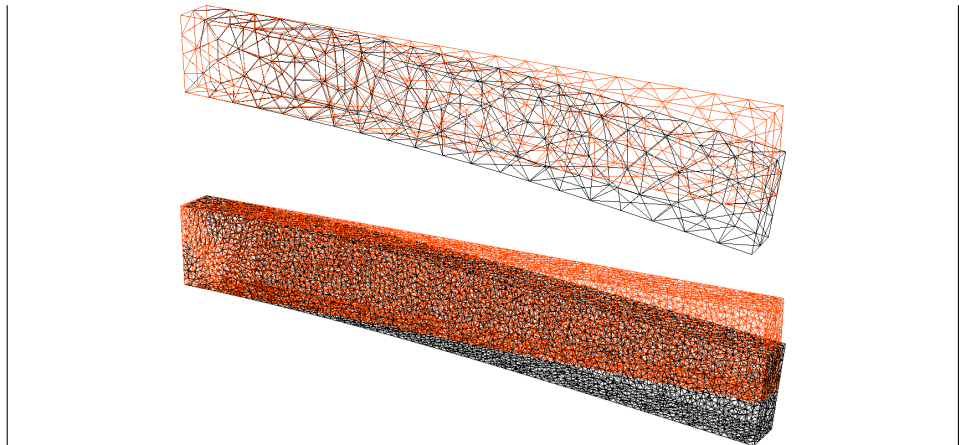
5.4 Testovací příklad s jednoduchým nosníkem

Analytické řešení lze použít pro kontrolu implementace. Pro nosník na jednom konci upevněný a na druhém konci zatížený, je výchylka konce [60]:

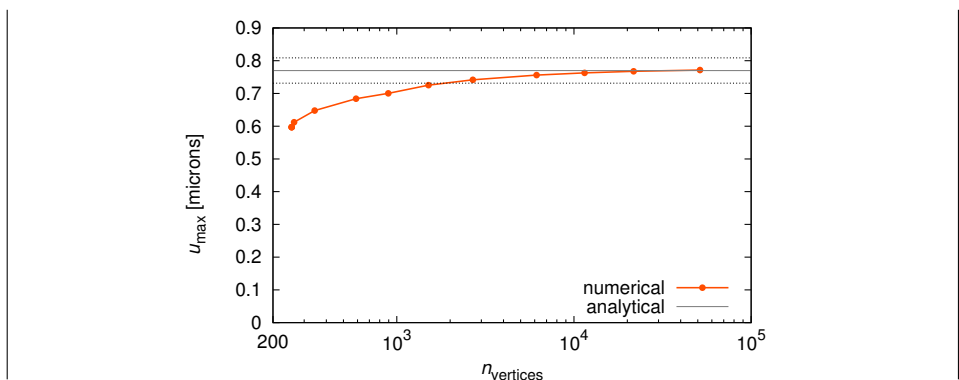
$$x_l = \frac{Fl^3}{3EI_a},$$

kde $F = ma_g$ je síla působící svisle na konec nosníku, m hmotnost závaží, a_g tíhové zrychlení, l délka nosníku, E modul pružnosti a I_a kvadratický moment průřezu. Pro obdélníkový průřez o rozměrech a , b (měřených vodorovně a svisle) a pro osu procházející středem je:

$$I_a = \frac{ab^3}{12}.$$



Obr. 35 — Porovnání nedeformované a deformované sítě, kde posunutí spočtená programem FreeFem++ byla zvětšena faktorem asi 10^5 . Maximální posunutí jinak dosahuje $u_{\max} = -0,77 \mu\text{m}$. Vlevo síť hrubá a vpravo jemná, s počtem vrcholů $n_{\text{vertices}} = 255$, resp. 11 484. Objem, vymezený povrchovou sítí ve formátu MESH byl triangulován čtyřstěny pomocí programu Tetgen (Si 2006), konkrétně příkazem `tetgen -Vgpnq1.2a1.e-6 cube.mesh`, kde parametr $q = 1,2$ omezuje poměr stran čtyřstěnu a $a = 10^{-6}$ jejich maximální objem. Pro import se osvědčilo použít formát MSH, jenž získáme použitím skriptu `./nodeelementface2msh.awk cube.1.node cube.1.ele cube.1.face > cube.1.msh`.



Obr. 36 — Porovnání numerického a analytického modelu deformace jednoduchého nosníku pro různé počty vrcholů sítě n_{vertices} . Hodnoty parametrů byly v obou případech zvoleny následovně: $l = 1,5 \text{ m}$, $a = 0,1 \text{ m}$, $b = 0,15 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $a_g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $E = 21,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0,29$.

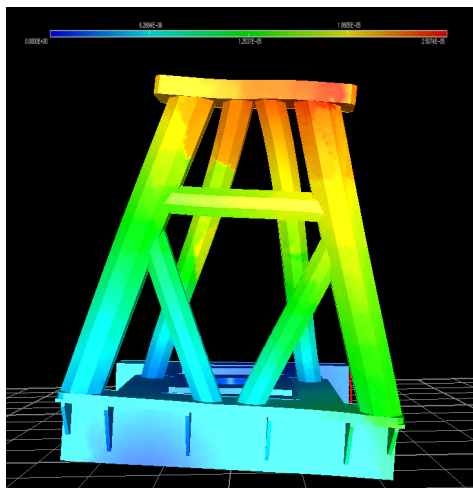
Rozdíly mezi analytickým a numerickým modelem dosahují méně než 5 % pro počet vrcholů $n_{\text{vertices}} \gtrsim 10^3$ (viz obr. 36). Mohou být dány jednak diskretizací numerického modelu a jednak omezeními analytického modelu.

5.5 Výpočet deformace montáže

Pro vidlici (montáž) lze postupovat obdobně. Před exportem z programu CAD je vhodné konstrukci zjednodušit. Pak stačí konvertovat příslušnou síť do formátu MESH, triangulovat a přitom zadat působení silou určitého směru na určitou plochu (označenou pomocí sloupce label v síti). Výsledek výpočtu je ukázán na obr. 37; celou observatoř pak vidíme na obr. 38.

Nakonec je třeba zdůraznit, že výše uvedená lineární teorie je platná pouze pro *malé* deformace. Velké deformace by bylo třeba popsat rigorózněji.

- [58] HECHT, F. *New development in FreeFem++*. *J. Numer. Math.*, **20**, 251, 2012.
- [59] LANGTANGEN, H. P. *Computational partial differential equations. Numerical methods and Diffpack programming*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [60] *Ohyb vetknutého nosníku*. [online] [cit. 2017-05-04]. (http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/-skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/3_5).
- [61] SI, H. *TetGen — A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional Delaunay triangulator*. 2006. (<http://tetgen.berlios.de>).



Obr. 37 — Spočtené deformace vidlice, respektive části alt–azimutální montáže, při působení síly 1 300 N na horní část, kde budou umístěny domečky pro momentové motory. Maximální posunutí činí $20\text{ }\mu\text{m}$. Vpravo výsledná podoba montáže.



Obr. 38 — Autonomní observatoř BlueEye 600, vyrobená firmou Projectsoft v rámci grantu Technologické agentury ČR, byla umístěna v Ondřejově.

A Skaláry, vektory a operátory

Mějme reálné číslo (skalár), označované jednoduše a . Dále mějme vektor, který lze zapsat ve vektorové, složkové nebo indexové notaci:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_i. \quad (172)$$

Skalární součin. Skalární součin dvou vektorů je číslo definované jako:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \equiv a_i b_i, \quad (173)$$

přičemž jeho hodnota je zároveň rovna $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha$, kde vystupuje kosinus sevřeného úhlu. Výraz $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = a^2$ je proto velikost vektoru na druhou.

Vektorový součin. Vektorový součin dvou vektorů je vektor definovaný jako:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}a_2a_3 - \hat{i}a_3b_2 + \hat{j}a_3b_1 - \hat{j}a_1b_3 + \hat{k}a_1b_2 - \hat{k}a_2b_1 = \epsilon_{ijk}a_jb_k. \quad (174)$$

Jeho směr je kolmý k $\mathbf{a}$ i k $\mathbf{b}$, přičemž jeho velikost $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha$, kde vystupuje sinus sevřeného úhlu. Výraz $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ je tudíž nulový vektor.

Mezi zmiňovanými součiny platí identita nazývaná mnemotechnicky „bác mínus cáb“:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (175)$$

která se často užívá při úpravách vektorových rovnic.

Jako skalární pole označujeme funkci přiřazující číslo každému bodu prostoru, např. jde o hustotu $\rho(\mathbf{r})$. Vektorové pole je funkce přiřazující vektor každému bodu prostoru, např. rychlost $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Různé derivace těchto funkcí je možné zapisovat elegantně pomocí diferenciálních operátorů.

Operátor gradientu. Operátor gradientu (čes. stoupání) je vektor definovaný jednoduše v kartézských souřadnicích:

$$\text{grad} \equiv \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Gradient skalárního pole $\rho(\mathbf{r})$ je tedy vektor $\nabla \rho$ v tom směru, ve kterém ρ nejvíce stoupá (viz obr. 39).

Operátor divergence. Operátor divergence (čes. rozbíhavost) úzce souvisí se skalárním součinem:

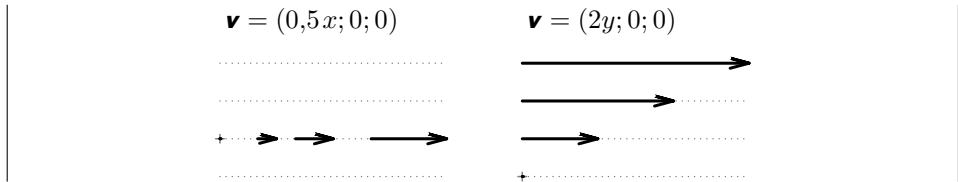
$$\operatorname{div} \equiv \nabla \cdot \equiv \frac{\partial ?_x}{\partial x} + \frac{\partial ?_y}{\partial y} + \frac{\partial ?_z}{\partial z}.$$

Divergence vektorového pole $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ je skalár $\nabla \cdot \mathbf{v}$, který je kladný, pokud se vektory v okolí daného místa (spíše) rozbíhají (obr. 40).

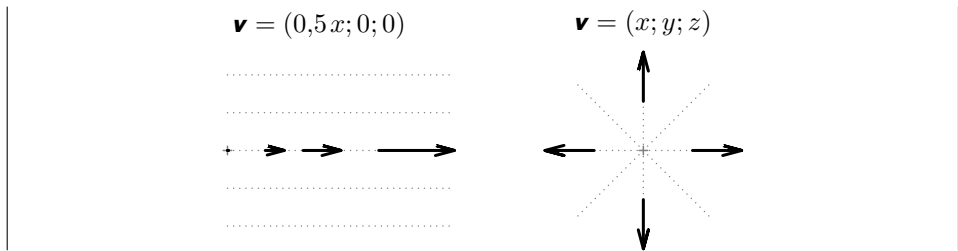
Operátor rotace. Operátor rotace (čes. stáčení) naopak souvisí s vektorovým součinem:

$$\operatorname{rot} \equiv \nabla \times \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ?_x & ?_y & ?_z \end{vmatrix}$$

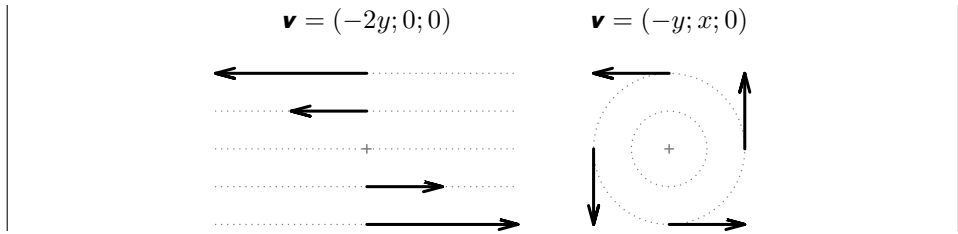
Rotace vektorového pole $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ je vektor $\nabla \times \mathbf{v}$, jehož složka z je kladná, pokud se vektory v okolí (rovině x, y) stáčíjí proti směru hodinových ručiček; $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ je pak kladné a $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ záporné (obr. 41).



Obr. 39 — Příklady skalárních polí $v_x(\mathbf{r})$ stoupajících. Vlevo je pole $v_x = 0,5x$, jehož $\nabla v_x = (0,5; 0; 0)$. Vpravo je $v_x = 2y$, čili $\nabla v_x = (0; 2; 0)$. Zde jsme pro názornost vynechali fyzikální jednotky. Odpovídající proudnice jsou znázorněny šedě tečkovaně. Namísto skalárního pole $\rho(\mathbf{r})$ jsme zvolili jednu ze složek rychlosti, aby se nám veličina dobře kreslila. Kdybychom operátor gradientu aplikovali na vektorové pole $\nabla \mathbf{v}$, získali bychom tenzor 2. řádu, tzn. matici 3×3 s řádky $\nabla v_x, \nabla v_y, \nabla v_z$.



Obr. 40 — Příklady vektorových polí $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ s kladnou rozbíhavostí. Vlevo je pole $\mathbf{v} = (0,5x; 0; 0)$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,5$. Vpravo $\mathbf{v} = (x; y; z)$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 3$.



Obr. 41 — Příklady vektorových polí $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ s kladným stáčením v rovině xy . Vlevo je pole $\mathbf{v} = (-2y; 0; 0)$, $\nabla \times \mathbf{v} = (0; 0; 2)$. Vpravo $\mathbf{v} = (-y; x; 0)$, $\nabla \times \mathbf{v} = (0; 0; 2)$.

Křivočaré souřadnice. V křivočarých souřadnicích mají operátory podstatně složitější vyjádření. Namísto kartézských x, y, z mějme jiné ortogonální, ale obecně křivočaré souřadnice u, v, w . Diferenciál polohového vektoru:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw$$

upravíme pomocí velikostí parciálních derivací:

$$h_u \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|, \quad h_v \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|, \quad h_w \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| \quad (176)$$

a báze vektorů křivočarých souřadnic na:

$$d\mathbf{r} = h_u \mathbf{e}_u du + h_v \mathbf{e}_v dv + h_w \mathbf{e}_w dw.$$

Element vzdálenosti je pak dán:

$$d\ell^2 = (h_u du)^2 + (h_v dv)^2 + (h_w dw)^2, \quad (177)$$

element různě orientovaných ploch:

$$dS_u = h_v h_w dv dw, \quad dS_v = h_u h_w du dw, \quad dS_w = h_u h_v du dv \quad (178)$$

a element objemu:

$$dV = h_u h_v h_w du dv dw. \quad (179)$$

Nakonec bez odvození uvádíme vyjádření základních operátorů [62]:

$$\nabla f = \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right), \quad (180)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial f_u h_v h_w}{\partial u} + \frac{\partial h_u f_v h_w}{\partial v} + \frac{\partial h_u h_v f_w}{\partial w} \right), \quad (181)$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u f_u & h_v f_v & h_w f_w \end{vmatrix} \quad (182).$$

Sférické souřadnice. Pro konkrétní případ sférických souřadnic bychom měli:

$$x = r \cos \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = r \cos \vartheta \sin \varphi,$$

$$z = r \sin \vartheta,$$

odkud:

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta} = 1, \quad (183)$$

$$h_\vartheta = r, \quad (184)$$

$$h_\varphi = r \sin \vartheta, \quad (185)$$

které se použijí pro dosazení do (177) až (182).

- [62] *Gradient, divergence and curl in curvilinear coordinates.* [online] [cit. 2017-05-05].
[⟨https://www.jfoadi.me.uk/documents/lecture_mathphys2_05.pdf⟩](https://www.jfoadi.me.uk/documents/lecture_mathphys2_05.pdf).

B Lagrangeovy planetární rovnice

V případě planetárního systému, jež má více než 1 planetu, nemohou být obvyklé orbitální elementy $a, e, i, \Omega, \omega, M$ konstantami a o to více nás zajímají jejich hodnoty, respektive jejich vývoj v čase. Mohli bychom sice pohybové rovnice pro N těles rovnou integrovat numericky a z výsledných $\mathbf{r}_i(t), \mathbf{v}_i(t)$ vypočítávat *oskulační* elementy, čili takové, jaké by mělo těleso v okamžiku t , pokud bychom poruchu náhle vypnuli.²² Hlubší pochopení však umožňují Lagrangeovy rovnice pro časové derivace elementů $\frac{da}{dt}$ atd., které zde odvodíme pomocí Lagrangeových závorek.

B.6 Lagrangeovy závorky

Pokud bychom se nenechali ničím rušit, pohybová rovnice pro planetu v *relativní* soustavě spojené se Sluncem, $\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$, kde $\mu \equiv G(m_1 + m_2)$, by právě odpovídala problému 2 těles (viz např. Brož a Šolc 2013). Tuto obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu pro $\mathbf{r}$ zde opišeme jako dvě obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu pro $\mathbf{r}$ a $\mathbf{v}$ a navíc na pravou stranu doplníme poruchu:

$$\dot{\mathbf{v}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \mathcal{R} \quad (186)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \quad (187)$$

kde jsme zavedli skalární *poruchovou funkci* $\mathcal{R}$, což je obecně fyzikálně potenciál. Zatím ji nebudeme nijak specifikovat, ale představme si místo ní například gravitační potenciál ostatních planet. Tyto rovnice chceme přepsat pro 6 elementů, konkrétně $a, e, i, \Omega, \varpi, \bar{\lambda}_0$, kde $\varpi = \Omega + \omega$ je délka pericentra a $\bar{\lambda}_0 = \lambda - nt$ střední délka epochy, čili pomalá proměnná, nikoli (rychlá) pravá délka $\lambda = M + \varpi$ nebo střední anomálie $M = n(t - \tau)$; $n = \sqrt{a^3/\mu}$ označuje střední pohyb (úhlovou frekvenci).

Abychom se neupsali přeznačíme elementy jako c_1 až c_6 . Mezi souřadnicemi i rychlostmi a elementy určité existují nějaké funkční vztahy:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t), \quad (188)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t). \quad (189)$$

Pak časové derivace:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt},$$

²² Musíme si být ovšem vědomi, že je-li porucha opravdu velká, odchyluje se skutečná trajektorie od oskulační kuželosečky natolik, že oskulační elementy poněkud ztrácejí smysl.

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt}.$$

Protože polohový vektor má zásadně nezávislé složky, $x \neq x(y)$, je $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$. Zároveň $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ je řešení nerušeného problému 2 těles. Tudíž musí být:

$$\sum_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} = 0,$$

$$\sum_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} = \nabla \mathcal{R}.$$

Nakonec provedeme symetrizaci, a to násobením první rovnice skalárně $-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_j}$, druhé $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j}$ a jejich sečtením, čímž získáme 6 skalárních rovnic:

$$\sum_k \left(-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_j} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \right) = \nabla \mathcal{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j}, \quad j = 1..6,$$

čili:

$$\sum_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_k} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_j} \right) \frac{dc_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_j}.$$

Zavedeme-li *Lagrangeovy závorky* jako zkratku za:

$$[c_j, c_k] \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_k} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_j}, \quad (190)$$

je možné zapsat pohybové rovnice pro elementy elegantně jako:

$$\sum_k [c_j, c_k] \frac{dc_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_j}, \quad j = 1, 6 \quad (191)$$

a nazvat je „Lagrangeovy planetární“.

B.7 Časová invariance Lagrangeových závorek

Zatím nevíme nic konkrétního, neboť jsme závorky nevyčíslili. Jejich vyčíslení asi nebude nic jednoduchého, když se $\mathbf{r}$ i $\mathbf{v}$ neustále mění. Nicméně jejich parciální derivace podle času je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [c_j, c_k] &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial c_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_k} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t \partial c_k} - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial c_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_j} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t \partial c_j} \right) = \\ &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mu \nabla \frac{1}{r} \equiv \nabla U_0 \\ &= \frac{\partial}{\partial c_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_k} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_j} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_0}{\partial c_k} \\
& = \frac{\partial}{\partial c_j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\partial c_k} - \overbrace{\nabla U_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_k}}^{\frac{\partial U_0}{\partial c_k}} \right) - \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\partial c_j} - \nabla U_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v^2}{\partial c_j \partial c_k} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial c_j \partial c_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v^2}{\partial c_k \partial c_j} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial c_k \partial c_j} = 0, \tag{192}
\end{aligned}$$

kde jsme zavedli pomocný potenciál $U_0 \equiv \frac{\mu}{r}$, což je spojitá diferencovatelná funkce, a všechny členy typu $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial c_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_k}$ se pak odečtou. Tzn. že závorky se nemění! Nejsou explicitní funkce času. Můžeme si je proto spočíst v libovolném bodě dráhy (třeba v pericentru).

B.8 Transformace při otočeních

Nejjednodušší způsob, jak to provést, je otočit souřadnicovou soustavu natříkrát tak, aby (neporušená) dráha ležela v rovině $x'''y'''$ a pericentrum na ose x''' . Potřeba jsou 3 otočení, o úhly Ω , i a ω . Nejprve provedeme otočení o Ω kolem Z ($XYZ \rightarrow x'y'z'$), přičemž pro dosažení do (190) potřebujeme staré vlevo:

$$\begin{aligned}
X &= x' \cos \Omega - y' \sin \Omega, \\
Y &= x' \sin \Omega + y' \cos \Omega, \\
Z &= z',
\end{aligned}$$

pak:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial c_j} &= \overbrace{\left(\frac{\partial x'}{\partial c_j} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial c_j} \right)}^{A_1} \cos \Omega - \overbrace{\left(\frac{\partial y'}{\partial c_j} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial c_j} \right)}^{B_1} \sin \Omega, \\
\frac{\partial \dot{X}}{\partial c_j} &= \overbrace{\left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial c_j} - \dot{y}' \frac{\partial \Omega}{\partial c_j} \right)}^{C_1} \cos \Omega - \overbrace{\left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial c_j} - \dot{y}' \frac{\partial \Omega}{\partial c_j} \right)}^{D_1} \sin \Omega, \\
\frac{\partial Y}{\partial c_j} &= B_1 \cos \Omega + A_1 \sin \Omega, \\
\frac{\partial \dot{Y}}{\partial c_j} &= D_1 \cos \Omega + C_1 \sin \Omega
\end{aligned}$$

a samozřejmě $\frac{\partial Z}{\partial c_j} = \frac{\partial z'}{\partial c_j}$, $\frac{\partial \dot{Z}}{\partial c_j} = \frac{\partial \dot{z}'}{\partial c_j}$; obdobně mějme A_2, B_2, C_2, D_2 pro c_k .

Dosazení do (190) dá:

$$\begin{aligned}
 [c_j, c_k] &= \frac{\partial X}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{X}}{\partial c_k} + \frac{\partial Y}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial c_k} + \frac{\partial Z}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{Z}}{\partial c_k} - \frac{\partial X}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{X}}{\partial c_j} - \frac{\partial Y}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial c_j} - \frac{\partial Z}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{Z}}{\partial c_j} = \\
 &= (A_1 \cos \Omega - B_1 \sin \Omega)(C_2 \cos \Omega - D_2 \sin \Omega) + (B_1 \cos \Omega + A_1 \sin \Omega)(D_2 \cos \Omega + C_2 \sin \Omega) - \\
 &- (A_2 \cos \Omega - B_2 \sin \Omega)(C_1 \cos \Omega - D_1 \sin \Omega) - (B_2 \cos \Omega + A_2 \sin \Omega)(D_1 \cos \Omega + C_1 \sin \Omega) + \\
 &+ \frac{\partial z'}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{z}'}{\partial c_k} - \frac{\partial z'}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{z}'}{\partial c_j} = \\
 &= A_1 C_2 - A_2 C_1 + B_1 D_2 - B_2 D_1 + \frac{\partial z'}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{z}'}{\partial c_k} - \frac{\partial z'}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{z}'}{\partial c_j} = \\
 &= \frac{\partial x'}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}'}{\partial c_k} + \frac{\partial y'}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{y}'}{\partial c_k} + \frac{\partial z'}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{z}'}{\partial c_k} - \frac{\partial x'}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{x}'}{\partial c_j} - \frac{\partial y'}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{y}'}{\partial c_j} - \frac{\partial z'}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{z}'}{\partial c_j} + \\
 &+ \frac{\partial \Omega}{\partial c_j} \left(\frac{\partial x'}{\partial c_k} \dot{y}' + x' \frac{\partial \dot{y}'}{\partial c_k} - \frac{\partial y'}{\partial c_k} \dot{x}' - y' \frac{\partial \dot{x}'}{\partial c_k} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial c_k} \left(\frac{\partial x'}{\partial c_j} \dot{y}' + x' \frac{\partial \dot{y}'}{\partial c_j} - \frac{\partial y'}{\partial c_j} \dot{x}' - y' \frac{\partial \dot{x}'}{\partial c_j} \right) = \\
 &= [c_j, c_k]' + \frac{\partial \Omega}{\partial c_j} \frac{\partial (x' \dot{y}' - y' \dot{x}')}{\partial c_k} - \frac{\partial \Omega}{\partial c_k} \frac{\partial (x' \dot{y}' - y' \dot{x}')}{\partial c_j}.
 \end{aligned}$$

Použijeme-li poněkud zkrácený závorkový zápis:

$$[c_j, c_k] = [c_j, c_k]' + \frac{\partial(\Omega, x' \dot{y}' - y' \dot{x}')}{\partial(c_j, c_k)} = [c_j, c_k]' + \frac{\partial(\Omega, \mathcal{G})}{\partial(c_j, c_k)}, \quad (193)$$

kde $x' \dot{y}' - y' \dot{x}' = h \cos i = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i \equiv \mathcal{G}$ je složka z' momentu hybnosti.

Analogicky otočení o i kolem x' ($x' y' z' \rightarrow x'' y'' z''$):

$$[c_j, c_k]' = [c_j, c_k]'' + \frac{\partial(\Omega, y'' \dot{z}'' - z'' \dot{y}'')}{\partial(c_j, c_k)} = [c_j, c_k]'' + 0, \quad (194)$$

protože $z'' = 0, \dot{z}'' = 0$; dráha již leží v $x'' y''$.

Zcela analogicky otočení o $\omega = \varpi - \Omega$ kolem z'' ($x'' y'' z'' \rightarrow x''' y''' z'''$):

$$[c_j, c_k]'' = [c_j, c_k]''' + \frac{\partial(\omega, x''' \dot{y}''' - y''' \dot{x}''')}{\partial(c_j, c_k)} = [c_j, c_k]''' + \frac{\partial(\omega, \mathcal{H})}{\partial(c_j, c_k)}, \quad (195)$$

kde $x''' \dot{y}''' - y''' \dot{x}''' = h \cos 0^\circ = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \equiv \mathcal{H}$ je celkový moment hybnosti. Zbývá spočítat $[c_j, c_k]'''$.

B.9 Vyčíslení v pericentru

V pericentru je $M = \bar{\lambda}_0 - \varpi + nt = 0$, ale nemůžeme tam rovnou dosadit nulu, nýbrž $M \rightarrow 0$, protože bychom jinak nemohli počítat derivace. V soustavě $x''' y''' z'''$

jsou jinak $i = \varpi = \Omega = 0$:

$$\begin{aligned} x &= a(1 - e), \\ y &\dot{=} 0 + aM\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \\ \dot{x} &\dot{=} 0 - an\frac{M}{(1-e)^2}, \\ \dot{y} &= an\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \end{aligned}$$

Nenulové derivace jsou pouze (ovšemže po dosazení $M = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} &= 1 - e, \\ \frac{\partial x}{\partial e} &= -a, \\ \frac{\partial y}{\partial M} &= a\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial M} &= -an\frac{1}{(1-e)^2}, \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial a} &= -\frac{n}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial e} &= an(1+e)^{-1/2}(1-e)^{-3/2}, \end{aligned}$$

což po dosazení do (190):

$$[c_j, c_k]''' = \frac{\partial(\bar{\lambda}_0 - \varpi, a)}{\partial(c_j, c_k)} \frac{na}{2} = \frac{\partial(\bar{\lambda}_0 - \varpi, \mathcal{L})}{\partial(c_j, c_k)}, \quad (196)$$

kde $\mathcal{L} \equiv \sqrt{\mu a}$.

Dosazením (196) do (195) do (194) do (193) obdržíme:

$$[c_j, c_k] = \frac{\partial(\bar{\lambda}_0 - \varpi, \mathcal{L})}{\partial(c_j, c_k)} + \frac{\partial(\omega, \mathcal{H})}{\partial(c_j, c_k)} + \frac{\partial(\Omega, \mathcal{G})}{\partial(c_j, c_k)}. \quad (197)$$

B.10 Lagrangeovy planetární rovnice

Zbývá spočítat parciální derivace $\mathcal{L}, \mathcal{H}, \mathcal{G}$ dle elementů (jen 6): $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial e}, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a}, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial e}, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial i}$; nemá cenu počítat všechny. Posléze nenulové Lagrangeovy závorky (jen 6): $[\lambda_0, a], [\varpi, a], [\varpi, e], [\Omega, a], [\Omega, e], [\Omega, i]$ a opačně s mínusem, což je zřejmé z (197).

Kupříkladu:

$$[\bar{\lambda}_0, a] = \underbrace{\frac{1}{\partial(\bar{\lambda}_0 - \varpi)}}_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} - \underbrace{\frac{\partial(\bar{\lambda}_0 - \varpi)}{\partial a}}_{\text{samé } 0 \dots} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\lambda}_0} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\lambda}_0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} - \frac{\partial \omega}{\partial a} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\lambda}_0} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\lambda}_0} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} - \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\lambda}_0} = \frac{na}{2}.$$

Rozepsáním (191):

$$\begin{aligned} [a, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [a, \varpi] \frac{d\varpi}{dt} + [a, \bar{\lambda}_0] \frac{d\bar{\lambda}_0}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}, \\ [e, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [e, \varpi] \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}, \\ [i, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\ [\Omega, a] \frac{da}{dt} + [\Omega, e] \frac{de}{dt} + [\Omega, i] \frac{di}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \\ [\varpi, a] \frac{da}{dt} + [\varpi, e] \frac{de}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}, \\ [\bar{\lambda}_0, a] \frac{da}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\lambda}_0} \end{aligned}$$

a přeuspořádáním vydobudeme Lagrangeovy planetární rovnice ve standardním tvaru:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\lambda}_0}, \quad (198)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\eta(1-\eta)}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\lambda}_0} - \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}, \quad (199)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2\eta} \frac{1-\cos i}{\sin i} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\lambda}_0} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2\eta \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \quad (200)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{1}{na^2\eta} \frac{1-\cos i}{\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \quad (201)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\eta \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \quad (202)$$

$$\frac{d\bar{\lambda}_0}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\eta(1-\eta)}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{1}{na^2\eta} \frac{1-\cos i}{\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \quad (203)$$

kde $\eta \equiv \sqrt{1-e^2}$. Všimněme si, že velkou poloosu a měníme působením v délce λ a obráceně, což je fyzikálně princip akce a reakce nebo matematicky antisymetrie Lagrangeových závorek.

[63] BROUWER, D., CLEMENCE, G. M. *Methods of celestial mechanics*. New York: Academic Press, 1961

[64] FITZPATRICK, R. *Derivation of Lagrange planetary equations*. 2016, <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/celestial/Celestial/node150.html>.

Rejstřík

Tučným písmem jsou v rejstříku označené odkazy na obrázky.

- 1. věta termodynamická: 9, 47
- adaptivní zjemňování sítě: 23
- adiabatický gradient: 41
- adiabatický index: 10
- ageostrofické proudění: 39
- akrece: 25
- akreční disk: 28
- aktivační mez: 49
- ambipolární difuze: 18
- AMR: 23, **24**
- ANEOS: 47
- anticyklóna: 17, 35
- aproximace tenké vrstvy: 31
- atmosféra: 31
- bác mínus cáb: 87
- backward time centered space: 70
- balvany: 77
- baroklinická nestabilita: 16
- bázová funkce: 72, **72**
- Boussinesqova aproximace: 40
- Bruntova–Väisäläova frekvence: 42
- BTCS: 70
- bublina: 40
- Chombo: 23
- Coriolisovo zrychlení: 31
- Coriolisův parametr: 34
- Crankova–Nicholsonova metoda: 71
- cyklóna: 17, 35
- cyklostrofické proudění: 33, 34
- deformace: 48, **49**
- Delaunayho triangulace: 75
- deterministický chaos: 20
- difuzní aproximace: 10
- difuzní koeficient: 13
- dipól: 57
- Diracova distribuce δ : 44, 50
- Dirichletova podmínka: 66
- dispace: 65
- diskretizace: 22, 69, 72, 73
- divergence: 88, **88**
- dostředivé zrychlení: 33
- duchařská oblast: 23
- duchařské částice: 59
- dynamická viskozita: 10, 39
- Ekmanova spirála: 38, **40**
- Ekmanovo číslo: 32
- elasticita: 48, 79
- Epsteinův zákon: 12, 19
- Eulerova dopředná metoda: 69
- Eulerova zpětná metoda: 70
- explicitní schéma: 68
- FDM: 68
- FEM: 73, 80
- forward time centered space: 69
- Fourierova řada: 65
- Fourierova transformace: 43
- fragmentační fáze: 59
- FreeFem++: 74, 81
- fronta: 17
- FTCS: 69
- FVM: 22
- Galerkinova metoda: 73, 80
- Gaussova věta: 51, 73
- geostrofické proudění: 34
- g-mód: 42
- gradient: 87, **88**
- gradientové proudění: 35
- Grashofovo číslo: 32
- gravitační kolaps: 19
- gravitační nestabilita: 19
- gravitační potenciál: 12, 58
- Greenovo lemma: 73, 81
- harmonický oscilátor: 42
- HDF5: 23
- Heavisidova skoková funkce: 65
- hexadekupól: 57
- Hookeův zákon: 48, 79
- hustota energie: 10
- hybridní schéma: 70
- hydrostatická rovnováha: 32
- ideální plyn: 10
- implicitní schéma: 69
- indexová notace: 79
- indukční rovnice: 10
- inerciální soustava: 31
- Itokawa: 78
- izobary: 34
- Jarkovského jev: 76
- jednotky: 23
- k -d strom: 54, 59

- Kelvinova–Helmholtzova nestabilita: 14, **15**,
24
 kernel: 50
 kinematická viskozita: 31
 Kirchhoffův zákon: 11
 Kolmogorovo spektrum turbulence: 43
 komplexní rychlost: 39
 konstituční rovnice: 48
 konvekce: 16, 40, **42**
 kořen: 56
 křivočaré souřadnice: 89
 kvadrupól: 57
 Lagrangeovy závorky: 92
 Lagrangeův popis: 3, 14, 47
 Lambertův rozptyl: 75
 Laméova rovnice: 80
 Laméovy konstanty: 79
 laminární proudění: 31
 limiter: 10
 linearizace: 67, 74
 list: 56
 lokální kartézské souřadnice: 31
 lokální termodynamická rovnováha: 11
 magnetická difuzivita: 10
 magnetická permeabilita: 10
 magneto–rotační nestabilita: 17, **18**
 metoda hlazená částicová: 50
 metoda konečných diferencí: 68
 metoda konečných objemů: 22
 metoda konečných prvků: 73, 80
 mez pevnosti: 49
 mez pružnosti: 49
 migrace: 25
 molekulární viskozita: 32
 monopól: 57
 montáž: 84
 MPI: 23
 MRI: 17, 28
 mrtvá zóna: 17
 multipól: 57
 multipólový rozvoj: 57
 napětí: 11, 39, 48, **49**
 Navierova–Stokesova rovnice: 9, 31, 47
 nedivergentní proudění: 31
 neinerciální soustava: 31
 nestabilita dvou proudění: 18
 Neumannova podmínka: 66
 nevratný děj: 20
 newtonovská tekutina: 11
 nosník: 82
 numerická viskozita: 18
 objekt: 54
 objemová viskozita: 10
 oceán: 31
 odstředivé zrychlení: 31
 okrajové podmínky: 20, 58, 66, 69, 79
 oktapól: 57
 operátor: 87
 otevírací úhel: 56
 parametr α : 40
 parametr θ : 70
 Planckova funkce: 10
 Planckova opacita: 10
 planetární embryo: 19
 planetesimála: 19
 plasticita: 48
 počáteční podmínky: 20, 58
 poddajné vztahy: 48
 pohybová rovnice: 9, 42, 79
 Poissonova rovnice: 10, 47
 Poissonův poměr: 79
 porucha: 49
 poruchová funkce: 91
 poškození: 49
 posunutí: 79
 Prandtlovo číslo: 32
 praskliny: 48
 radiační síla: 75
 Rayleighova–Taylorova nestabilita: 15, **16**
 Rayleighovo číslo: 32
 reakumulační fáze: 59
 rekurze: 55
 Reynoldsovo číslo: 31
 Richardsonovo číslo: 32
 Rossbyho číslo: 31
 Rossbyho disperzní relace: 37
 Rossbyho vlna: 36, **37**
 Rosselandova opacita: 10
 rotace: 88, **89**
 rovina β : 36
 rovnice hydrostatické rovnováhy: 32, 79
 rovnice kontinuity: 47
 rovnice přenosu záření: 10
 rovnice tepelné rovnováhy: 9
 rovnice vedení tepla: 65
 rozptýlený tok: 77
 SBI: 17, 28
 semiempirická konvekce: 40
 SESAME: 47
 sférické souřadnice: 90
 skalár: 87
 skalární pole: 87
 skalární součin: 87
 slabá formulace: 71, 80

- směšovací délka: 40
- SPH: 50, **50**, 60
- spirála: 38
- srážka: 47
- stacionární vlna: 37
- stavová rovnice: 10, 32, 41, 47
- stínění: 77
- stínová fotografie: **42**
- Stokesův zákon: 12
- střední molekulová hmotnost: 10
- střední volná dráha: 13
- sumační pravidlo: 79
- Taylorův rozvoj: 36, 58
- tenzor malých deformací: 80
- tenzor napětí: 39, 48, 79
- tepelná difuzivita: 32, 66
- tepelná vodivost: 10
- tepelný tok: 77
- termální rychlost: 12, 13
- termální vítr: 38
- testovací funkce: 73, 80
- TetGen: 75
- Tillotsonova rovnice: 47
- tlaková níže: 34, **35**
- tlaková škála: 33, 40
- tlaková výše: 35
- Toomreho kritérium: 19
- tornádo: 34, **34**
- transverzální vedení tepla: 77
- triangulace: 75
- třída: 54
- tromba: 34
- tryskové proudění: 37
- turbulentní proudění: 31
- turbulentní viskozita: 28, 32
- vakuum: 58
- vektor: 87
- vektorové pole: 87
- vektorový součin: 87
- Venuše: 34
- vertikální střihová nestabilita: 15
- víceprocesorové výpočty: 23
- virtuální částice: 58
- vítr: 31
- vnitřní energie: 10
- vodivost: 10
- von Misesovo kritérium: 49
- von Neumannovo kritérium: 69
- VSI: 15, 28
- výběrové pravidlo: 43
- vztlak: 40
- vztlková nestabilita: 16, 42
- vztlková vlna: 42
- yielding: 48
- YORP: 76
- Youngův modul pružnosti: 48, 79

Literatura

Učebnice

- [65] ARTMITAGE, P. J. *Astrophysics of planet formation*. New York: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780511691362.
- [66] BROŽ, M., ŠOLC, M. *Fyzika sluneční soustavy*. Praha: MatfyzPress, 2013. ISBN 978807378-2368.
- [67] HARMANEC, P., BROŽ, M. *Stavba a vývoj hvězd*. Praha: MatfyzPress, 2011. ISBN 97880-73781651.
- [68] SHORE, S. N. *Astrophysical hydrodynamics*. Weinheim: Wiley-Vch, 2007. ISBN 978352740-6692.

Reference

Předchozí reference [1] až [64] byly uvedeny u jednotlivých kapitol.