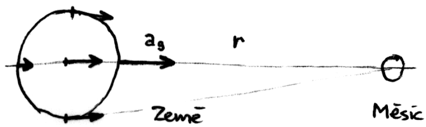
Astronomický kurz (6) — Měsíce a slapy

Miroslav Brož

Co jsou to slapy? Obecně je to působení síly, která se *mění v objemu tělesa* a může tak způsobit změny jeho tvaru. Například gravitační síla působená Měsícem je různá na různých místech Země (v hmotném středu, v bodě nejblíž Měsíci, v bodě nejdál od Měsíce, …); podle Newtonova gravitačního zákona má síla různou velikost i směr, neb se různí polohový vektor $\boldsymbol{r}_{\oplus☾} = r\hat{r}$:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}} = G\,\frac{m_{\text{„kousku }\oplus\text{“}} M_{☾}}{r^2}\,\hat{r}\,. \tag{1}$$

Způsobuje proto deformace zemského tělesa. Připomeňme, že zrychlení můžeme vypočítat podle II. Newtonova pohybového zákona jako $\boldsymbol{a}_{\mathrm{g}} = \frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}}{m}$.



Obr. 1 — Různá gravitační zrychlení Měsíce působící na Zemi.

Jak odhadnout *velikost slapů*? Docela jednoduše — jako rozdíl mezi gravitací Měsíce na dvou různých místech Země (například v bodě nejbližším Měsíci a v těžišti):

$$\delta a_{\mathrm{g}} = \frac{GM_{☾}}{(r+R_{\oplus})^2} - \frac{GM_{☾}}{r^2} = GM_{☾}\frac{\overbrace{-2rR_{\oplus} - R_{\oplus}^2}^{\doteq -2rR_{\oplus}}}{\underbrace{(r+R_{\oplus})^2\,r^2}_{\doteq r^4}} \doteq -\frac{2GM_{☾}}{r^3}R_{\oplus} \doteq$$

$$\doteq -\frac{2\cdot 6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}4\cdot 10^{22}}{3{,}8\cdot 10^{8}}\cdot 6{,}4\cdot 10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 10^{-6}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 10^{-7}\,g\,. \tag{2}$$

Nebo to při $R_{\oplus} \ll r$ můžeme udělat elegantněji — spočteme *gradient* a_{g} v těžišti Země a pak tento gradient vynásobíme rozměrem Země $R_{\oplus}$:

$$\nabla_r a_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}a_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}r} = -\frac{2GM_{☾}}{r^3} \quad\Rightarrow\quad \delta a_{\mathrm{g}} = -\frac{2GM_{☾}}{r^3}R_{\oplus}\,. \tag{3}$$

Zde je vidět, proč se říká, že slapy klesají se vzdáleností jako $\frac{1}{r^3}$ (tedy strměji než gravitace $\frac{1}{r^2}$).

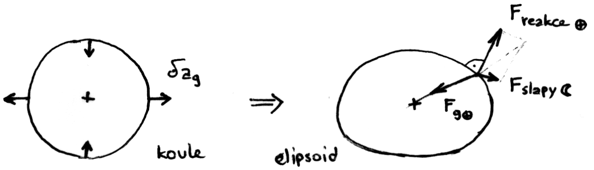
Země–Měsíc

Slapové působení v soustavě Země–Měsíc popíšeme ve třech krocích:

(1) Měsíc svými slapy způsobuje na Zemi dvě vzdutí;
(2) tření na rychle (nesynchronně) rotující Zemi si vynucuje natočení vzdutí ve směru rotace Země;
(3) vzájemná gravitační přitažlivost natočených vzdutí a Měsíce způsobuje vzdalování Měsíce a zároveň zpomalování rotace Země.

Ad 1. Nejprve se podívejme na Zemi v *inerciální* vztažné soustavě se středem v těžišti soustavy Země–Měsíc (obr. 2).[1,2] Pozor! V takové soustavě nejsou žádné odstředivé síly a podobná „zvířátka“. Pouze gravitace Měsíce. Vidíme, že gravitační zrychlení $\boldsymbol{a}_{\mathrm{g}}$ jsou různá, ale Země jako celek obíhá okolo společného těžiště, pro což jsou potřeba stejná zrychlení. Odchylky $\delta\boldsymbol{a}_{\mathrm{g}}$ od zrychlení $\boldsymbol{a}_{\mathrm{g\ ve\ středu}\ \oplus}$ jsou právě slapy způsobující deformaci zemského tělesa.

Kulatou Zemi by natahovaly ve směru k Měsíci a od Měsíce. Když ale Země změní tvar na elipsoid protáhlý ve směru Země–Měsíc (jakoby „ragbyový míč“), ustaví se znovu *rovnováha sil* mezi gravitací Země, reakcí Země (neboli gradientem tlaku v horninách Země neboli odpudivým elektromagnetismem) a gravitačními slapy Měsíce.



Obr. 2 — Odchylky gravitačních zrychlení Měsíce od hodnoty ve středu Země a tomu odpovídající deformace Země.

Teď to zkusme ještě jednou, ale v soustavě *neinerciální*, která má střed v Zemi a *korotuje* s Měsícem. Tady samozřejmě musíme kromě gravitačních zrychlení $\boldsymbol{a}_{\mathrm{g}}$ Měsíce uvážit také *odstředivá zrychlení* $\boldsymbol{a}_{\mathrm{o}}$. Nejdůležitější je uvědomit si, že všechna $\boldsymbol{a}_{\mathrm{o}}$ jsou stejná, protože při obíhání Země okolo těžiště se všechny body Země pohybují po *stejných kružnicích* (jinak by Země nedržela pohromadě, že).[3] Součet $\boldsymbol{a}_{\mathrm{g}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{o}}$ nám dává výsledná zrychlení působící na Zemi. Vidíme, že se ji snaží

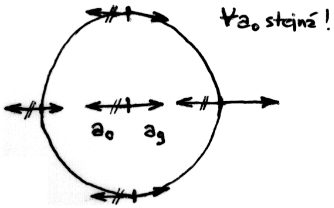
[1] Toto těžiště je uvnitř objemu Země:

$$T_x = \frac{\sum x_i M_i}{\sum M_i} = \frac{0 \cdot M_\oplus + r \cdot M_☾}{M_\oplus + M_☾} \doteq \frac{3{,}8\cdot 10^8 \cdot 7{,}4\cdot 10^{22}}{6{,}0\cdot 10^{24} + 7{,}4\cdot 10^{22}}\,\mathrm{m} \doteq 4\,700\,\mathrm{km} < R_\oplus\,. \tag{4}$$

[2] Pro začátek zcela zapomeneme, že se Země točí okolo své osy.

[3] Liší se to podstatně rotace kolem osy, kde odstředivá zrychlení rostou se vzdáleností od osy a ještě se mění jejich směr: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{o}} = \omega^2_{\mathrm{rot}\oplus}\boldsymbol{r}$.

zdeformovat do elipsoidu. Pochopitelně, oba dva pohledy, inerciální a neinerciální, jsou ekvivalentní a dávají stejné výsledky.



Obr. 3 — Gravitační a odstředivá zrychlení v neinerciální soustavě.

Názorný pokus: Je to něco takového, když na gumičku připevníme tři korálky, delší provázek a roztočíme to. Gumička se protáhne a tři korálky se od sebe navzájem vzdálí, podobně jako se deformuje Zeměkoule.

Všimněme si důležité věci, že *vzdutí jsou evidentně dvě*, nikoli jedno. Ostatně proto se na povrchu Země obvykle střídá *příliv a odliv* přibližně po 6 hodinách (plus nějakých minutách). Země se totiž „pod vzdutími" poměrně rychle otáčí okolo svojí osy.[4]

Ad 2. Nyní do hry vstupuje otáčení Země kolem osy jednou za 23 h 56 min a 4 s. Pevné zemské těleso, ze totiž snaží urychlit vzdutí ve směru rotace, a to za pomoci *tření*. Zejména jde o tření mezi oceány a zemskou kůrou v pevninských šelfech, kde se voda „hrne" na pobřeží. Výsledkem je *natočení vzdutí* od směru Země–Měsíc řádově o 1°.[5]

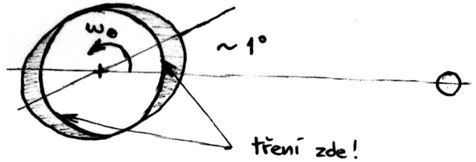
[4] Z několika důvodů to neplatí přesně: voda má jistou setrvačnost a viskozitu, takže nějakou dobu trvá než doteče na pobřeží — záleží na místních podmínkách proudění a profilu mořského dna, maximum přílivu tedy nemusí odpovídat kulminaci Měsíce na obloze; zemská osa není kolmá k oběžné dráze Měsíce, tudíž u pólů mohu potkat pouze jednu přílivovou vlnu za den a ne dvě; navíc se do toho pletou slapy Slunce.

[5] Poznámka o vlivu rotačního zploštění Země na družice. Zploštění Země vzniká především rotací Země, nikoli slapy Měsíce, a je mnohem výraznější. (Polární a rovníkový průměr Země se liší o 20 km, kdežto slapové vzdutí oceánů je řádově 1 m a u pevnin řádově 10 cm.) Neovlivňuje Měsíc takovým způsobem jako slapové výdutě, protože zploštění má jiný tvar, asi jako „rozsednutý balón". Není vzhledem k Měsíci natočené „napřed" nebo „pozadu"; může ale způsobit precesi jeho dráhy, což dokumentují příslušné Gaussovy rovnice pro změny orbitálních elementů:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{\cos I}{\eta^4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{1 - 5\cos^2 I}{\eta^4}$$



Obr. 4 — Natočení vzdutí třením na rotující Zemi, vzhledem ke směru Země–Měsíc.

Ad 3. Rozdělíme si nyní Zeměkouli na tři části, kouli a dvě výdutě, a nakreslíme si vzájemné gravitační přitažlivosti: Měsíce a koule, Měsíce a 1. výdutě, Měsíce a 2. výdutě (obr. 5). Podle III. Newtonova zákona akce a reakce jsou síly v každé z dvojic stejně veliké a opačného směru.

Podívejme se nejprve na Měsíc. Přitažlivost koule je jasná, směřuje přesně podél spojnice Země–Měsíc (radiálně) jejím pohybovým účinkem je oběh Měsíce kolem koule.

Další dvě síly jsou ale zajímavější: *nejsou* stejně velké, protože každá výduť je jinak daleko, ani nemají stejný směr, protože výdutě jsou pootočené! Když je sečteme, zjistíme, že mají kromě radiální také *nenulovou transverzální složku* (tzn. ve směru rychlosti Měsíce), která Měsíc urychluje v dráze. Celkový pohybový účinek radiálních a transverzálních sil je *spirálování* Měsíce pryč od Země.[6,7]

Vidíme, že délka výstupného uzlu Ω a délka pericentra ϖ precedují. Hodnota gravitačního momentu J_2 pro Zemi je řádu 10^{-3}; typická časová škála je pak $\frac{1}{J_2} \simeq 10^3$ orbitálních period. Pro oběžnou periodu 2 h (typickou pro satelity na nízkých oběžných drahách) to znamená precesi za 2 měsíce. Všimněme si též existence *kritického sklonu* dráhy k rovníku Země $I_{\mathrm{crit}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} \doteq 63^\circ$ pro který je $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \simeq 0$; pro menší I nastává retrográdní precese, pro vyšší prográdní. Využívají to například satelity Molniya umístěné právě na I_{crit}, jejichž perigeum pak zůstává nad stále stejnou zeměpisnou šířkou.

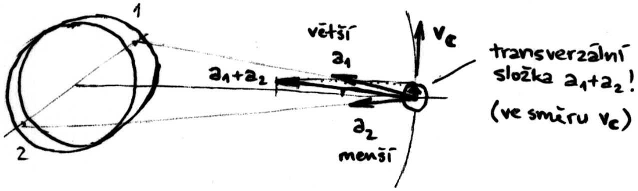
6 Orbitální moment hybnosti $L(r)$ Měsíce roste se vzdáleností. V prvním přiblížení $M_☾ \ll M_\oplus$, kdy Země „trčí“ na místě, stačí spočítat oběžnou rychlost a pak vynásobit rameno a hybnost:

$$F_{\text{dostředivá}} = M_☾ \frac{v^2_{\text{keplerovská}}}{r} = F_{\text{gravitační}} = G\frac{M_\oplus M_☾}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{kepl}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}}\,,$$

$$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}| = r \cdot M_☾ v_{\text{kepl}} = M_☾\sqrt{GM_\oplus}\cdot\sqrt{r}\,. \tag{5}$$

7 Celková mechanická energie $E(r)$ Měsíce, kinetická plus gravitační potenciální, roste se vzdáleností k 0 v ∞. Podobá se poněkud oné potenciální energii, ale je tam dvojka:

$$E = E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}M_☾ v^2_{\text{kepl}} - G\frac{M_\oplus M_☾}{r} = \frac{1}{2}G\frac{M_\oplus M_☾}{r} - G\frac{M_\oplus M_☾}{r} = -G\frac{M_\oplus M_☾}{2r}\,. \tag{6}$$

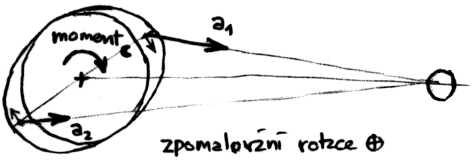


Obr. 5 — Vliv výdutí na Měsíc.

Pozoruhodné je, že přitom „urychlování“ vlastně Měsíc *zpomalí* — místo pouhého vzrůstu kinetické energie o $+\Delta E_{\mathrm{K}}$ totiž dojde k poklesu kinetické energie o $-\Delta E_{\mathrm{K}}$, ale zároveň ke *dvojnásobnému* vzrůstu gravitační potenciální energie $\Delta E_{\mathrm{G}} = +2\Delta E_{\mathrm{K}}$, takže celková energie se zvýší o $\Delta E = \Delta E_{\mathrm{K}} + \Delta E_{\mathrm{G}} = +\Delta E_{\mathrm{K}}$ a ZZE je zachráněn.

Názorný pokus: je to něco takového, jako když cvrnkneme do kuličky kutálející se do kopce (proti směru gravitace). Moc jí nepomůžeme — bude neustále zpomalovat, ale zato se dokutálí výš do kopce (do místa s vyšší E_{G}).

Nakonec se podíváme, co se děje na Zemi. Gravitační sílu Měsíce působící na kouli snad diskutovat nemusíme (je centrální). Avšak dvojice sil, která působí na výdutě, má *nenulový moment* — síly jsou různě veliké, různého směru a je tam pěkně dlouhé rameno ($R_{\oplus}$). Působí proti směru otáčení Země, a tedy zmenšuje její moment hybnosti. Shrňme to: **disipace energie na Zemi přenáší moment hybnosti ze Země na Měsíc.**



Obr. 6 — Vliv Měsíce na výdutě.

Názorný pokus: je to něco takového, jako když přiložíme ruku na otáčející se glóbus. Úplně jasně cítíme, jak nás tření mezi rukou a glóbem urychluje na oběžné dráze a zároveň přitom evidentně zpomaluje rotaci Země. Ruka zde vlastně simuluje gravitační vazbu mezi zemskými výdutěmi a Měsícem.

Důležitá otázka: **proč se L nedisipuje také?** Protože jej nelze přeměnit na neuspořádaný pohyb atomů! To by musely všechny spořádaně rotovat okolo čehosi a navíc hrozně rychle...

Jaký bude konečný stav soustavy Země–Měsíc?

Odpověď na tuto otázku získáme v principu snadno: napíšeme zákon zachování momentu hybnosti a rovnici pro mechanickou energii (není to zákon zachování energie!):

$$L = \overbrace{I_\oplus \omega}^{\text{rotace}\,\oplus} \quad + \overbrace{\frac{\sqrt{G}\, M_\oplus M_☾}{\sqrt{M_\oplus + M_☾}} \sqrt{r}}^{\text{orbitální pohyb}\,\oplus,☾} \tag{7}$$

$$E = \frac{1}{2} I_\oplus \omega^2 - \frac{G M_\oplus M_☾}{2r} \tag{8}$$

Moment setrvačnosti Země je dle měření $I_\oplus = 8{,}0 \cdot 10^{37}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.[8] Orbitální moment hybnosti v rovnici (7) může vypadat záhadně, ale je to prostě oběh Země plus oběh Měsíce okolo společného těžiště.[9] Mimochodem, neuvažovali jsme rotaci Měsíce kolem jeho osy, protože moment hybnosti a rotační energie tomu příslušející jsou zanedbatelné.

Uvědomíme si, co znamená „konečný stav“: Země se zpomalí natolik, že bude rotovat synchronně s oběhem Měsíce, její výdutě nebudou odchýleny od směru k Měsíci, Měsíc se nebude vzdalovat od Země, ustane disipace energie na Zemi, mechanická energie se nebude měnit s časem, tzn. $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$, což je ekvivalentní:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = 0\,. \tag{9}$$

---

[8] Je o něco méně, než moment setrvačnosti homogenní koule $\frac{2}{5} M R^2 = 9{,}7 \cdot 10^{37}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, protože hustota Země je v centru vyšší, čili hmota je vlastně blíž k ose otáčení.

[9] Podle přesného znění III. Keplerova zákona platí pro oběh Měsíce okolo středu Země $a^3/T^2 = G(M_\oplus + M_☾)/4\pi^2$; pro kruhové dráhy je tedy úhlová rychlost (zvaná střední pohyb) $n^2 = G(M_\oplus + M_☾)/r^3$. My ale potřebujeme vyjádřit orbitální moment hybnosti ℓ v inerciální soustavě se středem v těžišti, od kterého je Země vzdálená o $r_\oplus = r M_☾/(M_\oplus + M_☾)$ (viz (4)) a obíhá okolo něj rychlostí $v_\oplus = n r_\oplus$:

$$\ell_\oplus = r_\oplus \cdot M_\oplus v_\oplus = \sqrt{r}\,\sqrt{G}\, M_☾^2 M_\oplus (M_\oplus + M_☾)^{-\frac{3}{2}}\,.$$

Pro Měsíc to uděláme snadno záměnou $M_\oplus \leftrightarrow M_☾$:

$$\ell_☾ = \sqrt{r}\,\sqrt{G}\, M_\oplus^2 M_☾ (M_☾ + M_\oplus)^{-\frac{3}{2}}$$

a součet je:

$$\ell = \ell_\oplus + \ell_☾ = \sqrt{r}\,\sqrt{G}\,(M_☾ + M_\oplus)^{-\frac{3}{2}} M_\oplus M_☾\,(M_☾ + M_\oplus) = \sqrt{r}\,\sqrt{G}\,(M_☾ + M_\oplus)^{-\frac{1}{2}} M_\oplus M_☾\,.$$

Když z rovnice (7) vyjádříme $\omega(r)$, „šílený“ zlomek označíme α, dosadíme do (8) a zderivujeme jako v (9), získáme rovnici pro r:

$$\omega = \frac{L - \alpha\sqrt{r}}{I_\oplus}\,,$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{1}{I_\oplus}(L^2 - 2L\alpha\sqrt{r} + \alpha^2 r) - \frac{GM_\oplus M_☾}{2r}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2I_\oplus}\left(-\frac{L\alpha}{\sqrt{r}} + \alpha^2\right) + \frac{GM_\oplus M_☾}{2r^2} = 0\,,$$

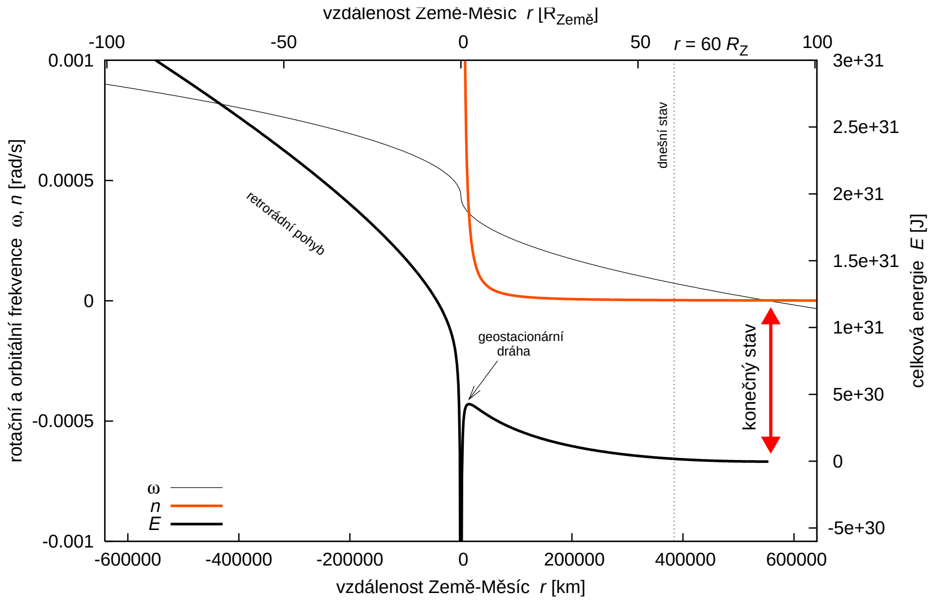
$$\frac{\alpha^2}{I_\oplus}(\sqrt{r})^4 - \frac{L\alpha}{I_\oplus}(\sqrt{r})^3 + GM_\oplus M_☾ = 0\,. \qquad (10)$$

Je to polynom 4. stupně pro $\sqrt{r}$, jehož numerickým řešením obdržíme konečný stav:

$$r \doteq 554\,000\,\mathrm{km} \doteq 87\,R_\oplus \quad \Rightarrow \quad P_{\mathrm{orb}☾} = P_{\mathrm{rot}\oplus} \doteq 47\,\mathrm{dní}\,. \qquad (11)$$

Závislosti mechanické energie $E(r)$, středního pohybu Měsíce $n_☾(r)$, a rotační frekvence Země $\omega_{\mathrm{rot}\oplus}(r)$ jsou také znázorněny na obr. 7.

Nejpozoruhodnějším výsledkem je, že *Měsíc v budoucnu neunikne od Země*! Lagrangeův bod L_1, za nímž by se stal oběžnicí Slunce, je totiž ještě třikrát dál.



Obr. 7 — Vypočtené funkce $E(r)$, $n_☾(r)$ a $\omega_{\mathrm{rot}\oplus}(r)$. Konečnému stavu odpovídá bod, kde je $\omega_{\mathrm{rot}\oplus} = n_☾$ (tedy synchonizovaná rotace) a také $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = 0$ (nulová disipace).

Jak rychle slapy působí?

Změnu orbitálního momentu hybnosti L za jednotku času pro Měsíc, ovlivňovaný výdutěmi Země, můžeme vypočítat podle vztahu „padlého z nebe“ [2]:

$$\dot{L}_☾ = \frac{3}{2} \underbrace{\frac{\overbrace{k_{T\oplus}}^{\text{Loveho číslo}}}{Q_\oplus}}_{\text{disipační faktor}} \frac{GM_☾^2 R_\oplus^5}{r^6} \cdot \overbrace{\frac{\omega_{\mathrm{rot}\oplus} - n_☾}{|\omega_{\mathrm{rot}\oplus} - n_☾|}}^{\text{toto je pouze znaménko}} \,. \tag{12}$$

Pozor! Toto je pouze L samotného Měsíce, celkový L se samozřejmě zachovává, Jedná se vlastně o rychlost jeho vzdalování nebo přibližování. Všimněme si, že ve vztahu vystupují pěkně velké mocniny $R_\oplus$ a r. Loveho číslo $k_{T\oplus}$ odráží velikost deformace Země. Disipační faktor $Q_\oplus$ je zase úměrný tření a natočení výdutí.

Celý zlomek s absolutní hodnotou, úhlovou frekvencí $\omega_{\mathrm{rot}\oplus}$ a středním pohybem $n_☾$ je vlastně jenom znaménko: L se bude zvětšovat, když Měsíc obíhá prográdně vně *geostacionární dráhy*[10] nebo retrográdně uvnitř. Naopak L by se zmenšovalo, kdyby Měsíc obíhal retrográdně vně nebo prográdně uvnitř. To přesně odpovídá natočení výdutí „napřed“ nebo „pozadu“.

Systém Země–Měsíc se od všech jiných liší tím, že máme přesnou informaci o dnešní rychlosti vzdalování Měsíce a také o zpomalování rotace Země. První veličina se měří laserovými dálkoměry na Zemi a koutovými odražeči na Měsíci, které tam umístily kosmické lodě Apollo:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 3{,}84\,\mathrm{cm/rok} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{působením slapů}} = 2{,}3\,\mathrm{ms/století}\,. \tag{14}$$

Druhá je výsledkem sledování zákrytů hvězd a Slunce Měsícem a moderního měření rotace Země, které se provádí kvůli časomíře (obr. 8):

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{měřená}} = 1{,}7\,\mathrm{ms/století}\,. \tag{15}$$

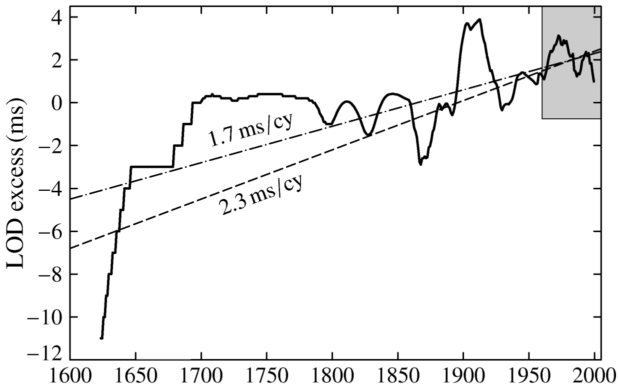
[10] V současnosti je geostacionární dráha vzdálená od středu Země:

$$a_{\text{dostředivé}} = \omega_{\mathrm{rot}\oplus}^2 r_{\mathrm{geo}} = a_{\text{gravitační}} = \frac{GM_\oplus}{r_{\mathrm{geo}}}\,,$$

$$r_{\mathrm{geo}} = \sqrt[3]{\frac{GM_\oplus}{\omega_{\mathrm{rot}\oplus}^2}} \doteq \sqrt[3]{\frac{6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{(7\cdot 10^{-5})^2}}\ \mathrm{m} \doteq 42\,000\,\mathrm{km}\,. \tag{13}$$

V minulosti byla a v budoucnosti bude samozřejmě jinde, protože $\omega_{\mathrm{rot}\oplus}$ se mění.

Vypadá to, jakoby by měřené vzdalování Měsíce a měření zpomalování rotace Země nebyly v souladu! Vysvětlujeme si to tak, že kromě slapů působí na Zemi ještě další vlivy, které naopak *rotaci urychlují*: přesuny hmot v zemském plášti, interakce planety s atmosférou, apod. Není ale jisté, co to přesně je.



Obr. 8 — Pozorované změny délky dne (LOD) v závislosti na čase. Převzato z [1].

Při vzniku Měsíce kolizí před 4,45 miliardami let bylo r mnohem menší než dnes, $r_{-4{,}45\,\mathrm{Gyr}} \simeq r_{\mathrm{Roche}} \doteq 3\,R_\oplus \doteq \frac{1}{20} r_{\mathrm{teď}}$, čili $\dot{L}_{☾}(\oplus)$ bylo 64 milionkrát větší než dnes. Navíc byla Země roztavená (mohla mít větší k_{T}, Q), takže to je spíše spodní limit. Takové obrovské slapy velmi rychle způsobí vázanou rotaci Měsíce, a také cirkularizaci jeho dráhy.

Kdybychom počítali, za jak dlouhou dobu se Měsíc mohl posunout ze $3\,R_\oplus$ na $60\,R_\oplus$, vyjde nám pouhá 1 až 2 miliardy let. To, že ve skutečnosti vývoj trval 4,45 miliard let si vysvětlujeme tak, že v minulosti bylo na Zemi nejspíš *méně mělkých moří*, tedy i menší tření a Měsíc se vzdaloval pomaleji než dnes.

Měsíc–Země

Doposud jsme všechny úvahy dělali pro soustavu Země–Měsíc. Zkusme nyní ta dvě tělesa „prohodit“: Měsíc–Země.

(1) Země svými slapy způsobuje na Měsíci dvě vzdutí;
(2) tření na rychle rotujícím Měsíci by způsobilo natočení vzdutí;
(3) gravitace těchto dvou vzdutí by způsobila zvětšování vzdálenosti Země a odpovídající zpomalování rotace Měsíce.

Dnešní situace je ale taková, že Měsíc *již rotuje vázaně*, tudíž tření je tam nulové, natočení výdutí také nulové a vzdalování Země také nulové. Uplatní se vlastně jen krok 1.

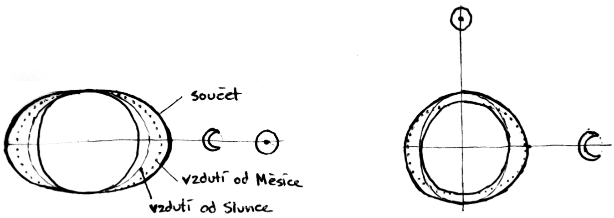
Naprosto stejný postup lze samozřejmě aplikovat i pro jiné soustavy: Země–Slunce, Slunce–Země, Venuše–Slunce, Jupiter–Io, Io–Jupiter, atd.

Země–Slunce

V případě Země–Slunce jsou slapová vzdutí asi poloviční oproti Zemi–Měsíci. Ostatně si to můžeme vypočítat:

$$\delta a_{\mathrm{g}} = -\frac{GM_\odot}{r^3_{\oplus\odot}} R_\oplus \doteq -\frac{6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}}{(150\cdot 10^9)^3}\, 6\,378\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq -5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

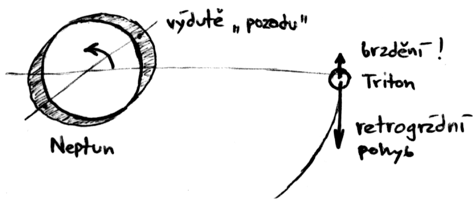
Když jsou Slunce a Měsíc blízko na obloze anebo naproti sobě, jsou vzdutí natočena stejným směrem a vzniká vysoký příliv. Když jsou naopak kolem 90° od sebe, každé vzdutí míří jinam a příliv je menší (hluchý).



Obr. 9 — Vysoký a hluchý příliv.

Neptun–Triton

Triton obíhá Neptun *retrográdně*, opačným směrem než rotuje planeta. Je tedy zřejmé, že díky tření na Neptunu jsou pak vzdutí posunuta „dozadu“ (na opačnou stranu než je tomu u Země–Měsíce). Výsledkem je přibližování Tritonu a zrychlování rotace Neptunu (obr. 17)

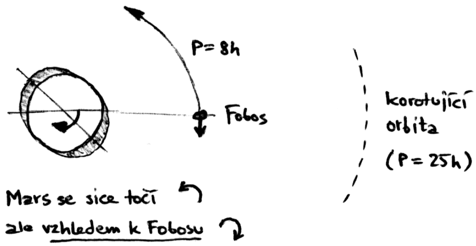


Obr. 10 — Natočení výdutí Neptunu vzhledem k Tritonu.

Na grafu $E(r)$ (obr. 7) by byl Triton na levé větvi, kde neexistuje místo s nulovou derivací $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$, tudíž neexistuje ustálený stav. Rychlost disipace energie na Neptunu neznáme přesně, ale odhadujeme, že za několik miliard roků by Triton mohl dosáhnou Rocheovy meze, působením slapů se rozpadnout a dát tak vzniknout monumentálnímu prstenci okolo Neptunu (Triton je 1 000 krát hmotnější než celý Saturnův prstenec).

Mars–Fobos

Fobos obíhá Mars prográdně, ale *uvnitř stacionární dráhy*. Oběh Fobosu trvá 8 h, kdežto rotace bezmála 25 h. Jinými slovy: příslušná vzdutí jsou planetou brzděna, nikoli urychlována, oproti Fobosu jsou pozadu a způsobují tak jeho spirálování dovnitř. Fobos zřejmě spadne na Mars za několik desítek miliónů roků, respektive se předtím rozpadne na úlomky a ty vytvoří prstenec.

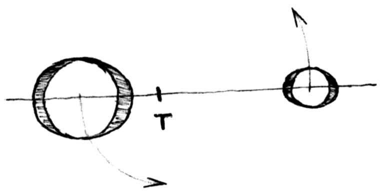


Obr. 11 — Natočení výdutí Marsu vzhledem k Fobosu.

Otázkou je, kde se Fobos vůbec vzal?! I kdyby startoval z vyšší dráhy (stacionární je 11 000 km od Fobosu), stejně nemůže obíhat Mars delší dobu než 100 miliónů roků. Navíc přímý záchyt na oběžnou dráhu v problému dvou těles není možný, muselo by se toho účastnit nějaké třetí těleso, například se původně mohlo jednat o prolétávající dvojplanetku. A ještě jeden problém: dráha Fobosu je prakticky kruhová a neskloněná k rovníku. Po zachycení obvykle těleso obíhá po protáhlé dráze. Slapy by musely působit relativně dlouho dobu (delší než 100 miliónů roků), aby se z eliptické dráhy stala kruhová.

Pluto–Charon, dvojplanetky

Pluto a Charon jsou jediným velkým systémem, který již dosáhl stavu *úplné synchronizace*. Otáčení Pluta, otáčení Charona i obíhání okolo společného těžiště trvá 6,4 dne. Výdutě na Plutu i na Charonu směřují radiálně, disipace je nulová a systém se dále nevyvíjí.



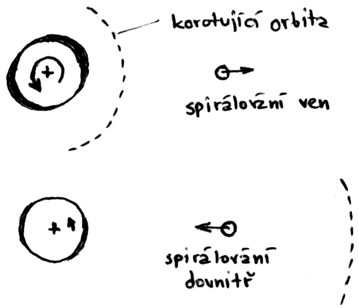
Obr. 12 — Nákres plně synchonizovaného sytému.

Kromě toho pozorujeme úplnou vázanou rotaci u některých dvojplanetek, zejména u souměřitelně velikých, jako (90) Antiope nebo (4769) Castalia.

Merkur–Slunce, Venuše–Slunce

U Merkuru a Venuše hrají podstatnou roli slapy Slunce — podstatně zpomalily rotaci těchto planet. Merkur se zachytil ve spin–orbitální rezonanci 3:2, takže k jeho vázané rotaci (rezonanci 1:1) nedošlo. Venuše pod vlivem jiných (neslapových) procesů nakonec získala retrográdní rotaci pomalejší než oběh.[11]

Zajímavá otázka: Proč Venuše ani Merkur nemají žádné měsíce? To je pravděpodobně způsobeno tím, že při postupném zpomalování rotace se podle rovnice (13) vzdaluje od planety stacionární dráha. Bývalé měsíce Venuše si tak mohly v klidu obíhat planetu, když se znenadání dostaly pod stacionární dráhu a „bum“, záhy spadly na Venuši. Dnes je situace taková, že stacionární dráha je až za Lagrangeovým bodem L_1.



Obr. 13 — Venuše rotující rychle a pomalu a odpovídající vývoj jejich měsíců.

Jupiter, Io a Europa

Všichni vědí, že Jupiterův měsíc Io je zahřívaný slapy. Jenomže v systému Jupiter–Io nastává disipace na Jupiteru, nikoli na Io, a v systému Io–Jupiter slapy nefungují, protože Io samozřejmě již dávno rotuje vázaně! Jak je tedy možné, že se ten měsíček zahřívá? Slapy na Io totiž fungují jinak.

---

[11] Mimochodem, Venuše rotuje tak pomalu, že na změnu její rotace stačí vcelku malý necentrální impakt. Zkusme cvičně spočítat velikost tělesa, které je potřeba na to, aby Venuši „překotilo“. Jeho moment hybnosti musí být srovnatelný s momentem hybnosti Venuše:

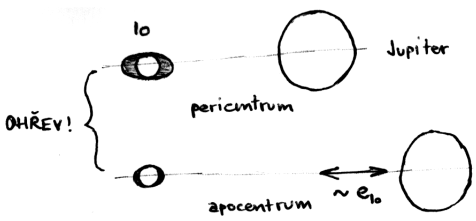
$$L_{\text{Venuše}} = I\omega \simeq L_{\text{impaktu}} \leq R_{\text{Venuše}} m_{\text{planetky}} v_{\text{planetky}} \,,$$

$$m = \frac{I\omega}{Rv} \doteq \frac{10^{38} \cdot 3{\cdot}10^{-7}}{6{\cdot}10^{6} \cdot 10^{5}}\,\text{kg} \doteq 4{\cdot}10^{19}\,\text{kg} \Rightarrow R_{\text{planetky}} = \sqrt[3]{\frac{m}{\frac{4}{3}\pi\varrho}} \doteq 150\,\text{km}\,.$$

V dávné minulosti mohl být takových 100 km těles dostatek...

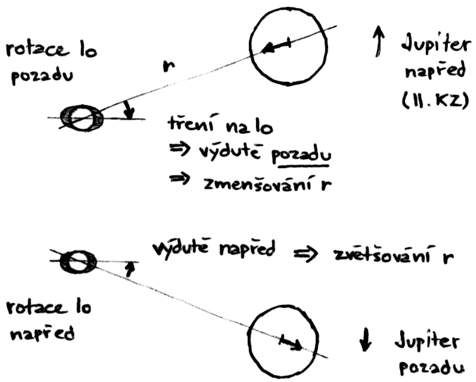
Jedná se o *časově proměnné slapy*, které vznikají díky excentrické dráze Io, protože:

(1) *mění se vzdálenost* Io–Jupiter a tedy i velikost slapů, které působí Jupiter na Io. (mění se velikost výdutí, resp. zploštění).



Obr. 14 — Změny vzdálenosti Jupitera a odpovídající změny výdutí na Io.

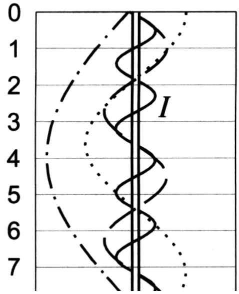
(2) *mění se oběžná rychlost* Io podle II. Keplerova zákona, ale vázaná rotace Io je konstantní podle střední rychlosti, tudíž se mění natočení Io vůči pohybujícím se slapům (výdutím), za něž může Jupiter.



Obr. 15 — Změny rychlosti Jupitera a odpovídající změny natočení výdutí na Io.

Názorný pokus: vezměte balón a začněte jej různě mačkat, za chvíli pocítíte, jak se zahřál (a vy osobně také).

Slapy v systému Io–Jupiter by excentricitu snížily k 0, ale zde je excentricita $e = 0{,}04$ vynucena *gravitační rezonancí* 2:1 s dalším měsícem Europa, který je navíc v rezonanci 2:1 s Ganymedem (obr. 16).

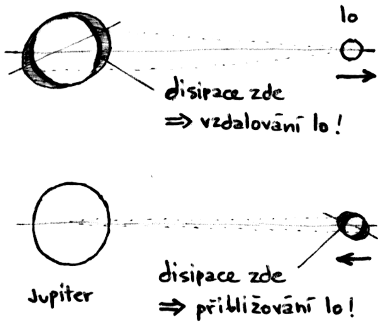


Obr. 16 — Graf z Hvězdářské ročenky, na kterém je znázorněno obíhání Io, Europy, Ganymeda a Kallisto okolo Jupitera. Úsek zachycuje čtyři oběžné periody Io a je z něj patrný poměr period 1:2:4 mezi Io, Europou a Ganymedem.

Již víme, že *disipace na Jupiteru způsobuje vzdalování Io* a zpomaluje rotaci Jupitera. Jak to je ale s disipací na Io? Má nějaký vliv na orbitální pohyb?

Nejlepší je představit si Io jako Zemi a Jupiter jako Měsíc, ale obíhající po excentrické dráze: v perijovu (resp. apojovu) jsou výdutě působené Jupiterem na Io napřed (pozadu) oproti rovnoměrně rotaci Io. To ale znamená, že tření na Io je bude brzdit (urychlovat), takže se dostanou dozadu (napřed) oproti spojnici Io–Jupiter! Nestejná dvojice sil na Jupiteru pak bude způsobovat přibližování (vzdalování) Jupitera.

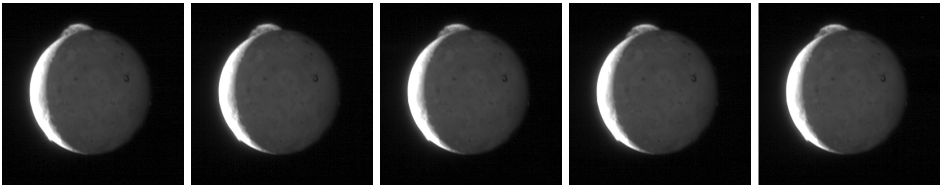
Mohlo by se zdát, že nula od nuly pojde, jenomže v perijovu jsou výdutě větší než v apojovu, takže jejich vliv převládne: *disipace na Io způsobuje přibližování Io.* A na rotaci Jupitera to nemá vliv.



Obr. 17 — Porovnání disipace na Jupiteru a disipace na Io.

Podle malé amplitudy librací kritického úhlu zmiňované rezonance $\varphi_{\mathrm{L}} = \lambda_{\mathrm{Io}} - 3\lambda_{\mathrm{Europy}} + 2\lambda_{\mathrm{Ganymeda}} = 180° \pm 0{,}06°$ lze značně složitým výpočtem [3] usoudit, že na Io „nic netlačí“ — tzn. že disipace energie na Io musí být stejně veliká jako na Jupiteru. Kdyby tam byla nerovnováha a Io byl nucen se slapově vzdalovat nebo přibližovat, byla by amplituda φ_{L} řádově větší.

Io je působením slapů natolik zahřívaný, že je roztavená většina jeho nitra. (Teplo produkované rozpadem radioaktivních prvků by na to samo nestačilo. Nicméně, Io by i bez slapů nebyl příliš daleko od stavu částečného roztavení.) Na povrchu je pozorovaných několik aktivních sopek (obr. 18). Pokud byly sopky aktivní po dobu 4,5 miliardy let stejně jako dnes, vyvrhly snad tisícinásobek objemu celého Io!



Obr. 18 — Sekvence záběrů Io ze sondy New Horizons zachycující jeden sopečný „deštník“.

Výhodou systému Jupiter–Io je, že mohu přímo *měřit disipaci energie na Io*, a to pozorováním toku infračerveného záření, který k nám z Io přichází. Odtud lze vypočítat výkon vyzařovaný z celého povrchu $P \doteq 10^{14}$ W. Je-li stav Io stacionární (nestoupá ani neklesá jeho teplota, ale udržuje se na současné hodnotě), odpovídá to právě výkonu uvolňovanému slapovou disipací.

Nakonec ještě jedna krásná věc: když z rezonanční dynamiky vím, že disipace na Io je stejná jako disipace na Jupiteru, mohu usuzovat na *dění v nitru Jupiteru*. Například lze odvodit, že disipační faktor v Jupiteru je velmi vysoký $Q \simeq 10^3$.

[1] Bertotti, B., Farinella, P., Vokrouhlický, D. *Physics of the Solar System.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 1402014287.

[2] de Pater, I., Lissauer, J. J. *Planetary Sciences.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN 0521482194.

[3] Murray, C. D., Dermott, S. F. *Solar System Dynamics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0521575974.