0.1 Efemeridy a integrace

Jak známo, tělesa sluneční soustavy netrčí na místě, nýbrž se pohybují. Abychom věděli, kde se právě nacházejí, musíme pro ně počítat *efemeridy*. Asi nejjednodušší způsob výpočtu efemerid je *numerická integrace*. V principu to znamená nahrazení přesného zákona pohybu ve tvaru dvou diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_i\,, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_i \tag{1}$$

přibližnými rovnicemi *diferenčními*:

$$\Delta\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{a}_i\Delta t\,, \quad \Delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{v}_i\Delta t\,, \tag{2}$$

přičemž pro případ gravitačního zrychlení platí:

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{j\neq i} \frac{Gm_j}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^2}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)\,. \tag{3}$$

Z nějakého počátečního stavu $(t_0, \boldsymbol{r}_i^0, \boldsymbol{v}_i^0)$ pak sčítáme počítačem $\Delta\boldsymbol{v}_i, \Delta\boldsymbol{r}_i, \Delta t$ po n malých krůčcích Δt až do požadovaného okamžiku t, takže obdržíme konečný stav $(t, \boldsymbol{r}_i^n, \boldsymbol{v}_i^n)$, doufajíc přitom, že to alespoň blíží (neznámému) řešení původní diferenciální rovnice.

Samozřejmě zmiňované kroky musíme dělat *zároveň* pro všechna relevantní tělesa! Například pro efemeridu planetky Vesta musíme uvážit Slunce (těleso 0), planety Merkur až Neptun (1 až 8) a samotnou planetku (těleso 9), tzn. $i = 0..9$. Úlohu si obvykle usnadňujeme tím, že planetky mají $m_i \doteq 0$, čímž se dramaticky zkracuje suma (3), a tedy i doba potřebná pro praktický výpočet.

Zbývají dva „drobné“ problémy: (i) kde sehnat počáteční podmínky pro všechna tělesa; (ii) jakou numerickou metodu použít, aby se výsledek co nejvíce blížil skutečnosti?

0.1.1 Počáteční podmínky

Obvykle se snažíme, aby počáteční podmínky $(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i)$ pro všechna tělesa ($i = 0..9$) co nejlépe odpovídaly *astrometrickým pozorováním*. Nejjednodušší je vzít nějakou hotovou efemeridu dostupnou přes WWW, například systém JPL Horizons [63], efemeridu MPC [80], a nechat si vypsat polohy $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ a rychlosti $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ v požadovaném čase t_0.

Pokud by někdo chtěl zakomponovat vytváření počátečních podmínek do svého vlastního programu, může pro planety použít přesnou efemeridu JPL DE405 [64] pro období mezi roky 1600 a 2200, což je vlastně binární soubor

s koeficienty Čebyševových polynomů a program ve Fortranu, který interpoluje polohy a rychlosti planet pro zadané t_0. Jinou možností je semianalytická teorie VSOP82 popsaná v [136]. Pro planetky je k dispozici katalog drah AstOrb [12], kde pouze musíme keplerovské elementy $a, e, I, \omega, \Omega, M$ přepočítat na $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ pomocí vztahů z problému dvou těles (viz kap. ??).

V případě planetek vnějšího hlavního pásu a zejména transneptunických objeků můžeme bez újmy na přesnosti počítat pouze se *4 vnějšími planetami*, nikoli s 8. Aby se nám však příliš nezměnily sekulární frekvence planetárního sytému, musíme provést *barycentrickou korekci*: (i) spočteme hmotný střed $\boldsymbol{T}$ vnitřní sluneční soustavy (tzn. od Slunce po Mars) i jeho rychlost:

$$\boldsymbol{T} = \frac{\sum_{i=0..4} m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=0..4} m_i}\,, \quad \boldsymbol{v}_\mathrm{T} = \frac{\sum_{i=0..4} m_i\boldsymbol{v}_i}{\sum_{i=0..4} m_i}\,;$$

(ii) od všech ostatních planet to odečteme:

$$\boldsymbol{r}_j := \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{T}\,, \quad \boldsymbol{v}_j := \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_\mathrm{T} \text{ pro } j = 5..8\,;$$

(iii) hmotnosti 4 vnitřních planet přičteme ke Slunci:

$$m_0 := \sum_{i=0..4} m_i\,.$$

Pro výpočty kritických úhlů rezonancí je nezbytné, aby souřadnice z odpovídala směru celkového momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ sluneční soustavy. Proto provádíme *otočení do Laplaceovy roviny*: (i) spočteme celkový moment hybnosti v heliocentrické ekliptikální souřadnicové soustavě:

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{ecl} = \sum_{j=1..8} \boldsymbol{r}_j \times m_j\boldsymbol{v}_j\,;$$

(ii) vyjádříme jej ve sférických souřadnicích:

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{ecl} = (L_\mathrm{ecl}, \theta, \phi)\,;$$

(iii) otočíme souřadnicovou soustavu okolo osy z o úhel ϕ a okolo osy y o θ:

$$\boldsymbol{r}_j := \boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_z(\phi)\boldsymbol{r}_j\,, \quad \boldsymbol{v}_j := \boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_z(\phi)\boldsymbol{v}_j\,,$$

takže $\boldsymbol{L}_\mathrm{Laplace} = (0, 0, L_\mathrm{Laplace})$.

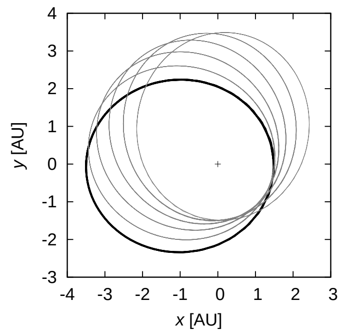
0.1.2 Eulerova metoda

Pro skalární diferenciální rovnici prvního řádu: $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, je předpis pro Eulerovu metodu: $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, kde $h \equiv \Delta t$ je integrační krok. Přepíšeme-li to do naší notace, tj. pro dvojice vektorů:

$$\boldsymbol{v}_i^{n+1} = \boldsymbol{v}_i^n + \boldsymbol{a}_i^n \Delta t\,,$$

$$\boldsymbol{r}_i^{n+1} = \boldsymbol{r}_i^n + \boldsymbol{v}_i^n \Delta t\,,$$

a samozřejmě $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Chyba v jednom kroku je řádu $(\Delta t)^2$, ale kumulace chyb vede k celkové chybě řádu Δt. Metoda je sice nejjednoduší, ale málo přesná pro uzavřené trajektorie, kdy odchylka mezi skutečnou trajektorií a numerickou aproximací je vždy stejného znaménka, čímž dochází ke kumulaci chyby a třeba k fiktivnímu stáčení pericentra (obr. 1).



Obr. 1 — Fiktivní stáčení pericentra při výpočtu trajektorie Eulerovou metodou (výpočet byl proveden s časovým krokem $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{yr}$ a celkovou dobou integrace $10\,000\,\mathrm{yr}$).

0.1.3 Metoda leap-frog

Následující metoda poněkud připomíná „skákání žab“:

$$\boldsymbol{r}_i^n = \boldsymbol{r}_i^{n-1} + \boldsymbol{v}_i^{n-1/2} \Delta t\,,$$

$$\boldsymbol{v}_i^{n+1/2} = \boldsymbol{v}_i^{n-1/2} + \boldsymbol{a}_i^n \Delta t\,.$$

kde první poloviční krok získáme jako první člen Taylorova rozvoje:

$$\boldsymbol{v}_i^{1/2} = \boldsymbol{v}_i^0 + \boldsymbol{a}_i^0 \frac{\Delta t}{2}\,.$$

Jiný způsob zápisu téže metody je:

$$\boldsymbol{r}_i^{n+1} = \boldsymbol{r}_i^n + \boldsymbol{v}_i^n \Delta t + \boldsymbol{a}_i^n \frac{(\Delta t)^2}{2}\,,$$

$$\boldsymbol{v}_i^{n+1} = \boldsymbol{v}_i^n + (\boldsymbol{a}_i^n + \boldsymbol{a}_i^{n+1}) \frac{\Delta t}{2}\,.$$

Všimněme si, že $\boldsymbol{a}_i^{n+1}$ naštěstí závisí pouze na polohách $\boldsymbol{r}_i^{n+1}$, nikoli na rychlostech. Metoda je druhého řádu (chyba v jednom kroku je $(\Delta t)^3$, celková chyba $(\Delta t)^2$). Eulerovu metodu zlepšuje takovým způsobem, že uvažuje více minulých hodnot, nejen jednu. Tato drobná změna vede k výraznému zlepšení: odstraní se zmiňovaný problém s perihéliem.

0.1.4 Rungova–Kuttova metoda 4. řádu

Jiné zlepšení spočívá v uvážení více hodnot na intervalu $[t_n, t_{n+1}]$. Metoda RK4 obecně vypadá takto:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)\,,$$

kde:

$$k_1 = f\left(t_n, y_n\right)\,,$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)\,,$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)\,,$$

$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right)\,.$$

V našem případě by algoritmus (ve Fortranu 77) vypadal asi takto:

```
call f(n, t, r, v, k1)
h2 = h*h
tp = t + 0.5*h
do i = 1, 3*n
  vp(i) = v(i) + k1(i)*h*0.5                   ! tj. jako v = v0 + a*t
  rp(i) = r(i) + v(i)*h*0.5 + k1(i)*h2*0.125  ! s = s0 + v0*t + 1/2*a*t^2
enddo
call f(n, tp, rp, vp, k2)
do i = 1, 3*n
  vp(i) = v(i) + k2(i)*h*0.5
  rp(i) = r(i) + v(i)*h*0.5 + k2(i)*h2*0.125
enddo
call f(n, tp, rp, vp, k3)
tp = t + h
do i = 1, 3*n
  vp(i) = v(i) + k3(i)*h
```

```
        rp(i) = r(i) + v(i)*h + k3(i)*h2*0.5
      enddo
      call f(n, tp, rp, vp, k4)

      do i = 1, 3*n
c  tj. ekvivalentni  r(i) = r(i) + h/6. * (v1(i) + 2*v2(i) + 2*v3(i) + v4(i))
        r(i) = r(i) + v(i)*h + h2/6. * (k1(i) + k2(i) + k3(i))
        v(i) = v(i) + h/6. * (k1(i) + 2*(k2(i) + k3(i)) + k4(i))
      enddo
```

přičmež v těle procedury `f`, počítající zrychlení, bude něco jako:

```
      do i = 0, n-1
        do k = 1, 3
          a(3*i+k) = 0.0
        enddo
        do j = 0, npl-1               ! pouze planety s m > 0
          if (i.ne.j) then
            Gm_r3 = Gm(j+1) / (
     :        (r(3*j+1)-r(3*i+1))**2 +
     :        (r(3*j+2)-r(3*i+2))**2 +
     :        (r(3*j+3)-r(3*i+3))**2 )**1.5 ! tj. vyraz Gm/r^3
            do k = 1, 3
              a(3*i+k) = a(3*i+k) + Gm_r3 * (r(3*j+k)-r(3*i+k))
            enddo
          endif
        enddo
      enddo
```

Lokální chyba je řádu $(\Delta t)^5$, globální $(\Delta t)^4$. Rungova–Kuttova metoda je podstatně přesnější a ve výsledku efektivnější než Eulerova, i když trpí podobnými neduhy, například nereálným růstem energie sytému.

0.1.5 Symplektické integrátory

Vlastností symplektických integrátorů je, že zachovávají důležitou veličinu: *střední hodnotu energie* $\langle E\rangle$ systému, i když okamžitá hodnota E může v průběhu výpočtu oscilovat (obr. 2). Metoda se tedy nehodí pro výpočet přesných krátkodobých efemerid, ale pro simulace dlouhodobého vývoje je naprosto neocenitelná.

Systém popsaný zobecněnými souřadnicemi q^i a hybnostmi p_i se vyvíjí dle *Hamiltonových rovnic*:

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\,,$$

kde H označuje hamiltonián, neboli *celkovou energii* systému, která se zachovává. Jedná se vlastně o obdobu Newtonových pohybových rovnic, pouze vývoj nepopisujeme zrychlením, ale energií (skalárním potenciálem). Sympletické integrátory se zavádějí následujícím obecným způsobem: mějme určitou funkci $F(q,p)$ ve fázovém prostoru, například $F = q^i$ nebo $F = p_i$. Její časová změna působením hamiltoniánu je dána výrazem:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{F, H\} = \mathcal{L}F\,,$$

kde definujeme Poissonovy závorky $\{\}$ a příslušný operátor $\mathcal{L}$ jako:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\,.$$

(Pro jednoduchá $F = q^i$ nebo $F = p_i$ bych aplikací $\mathcal{L}$ obdržel zpátky Hamiltonovy rovnice.) Vzpomenu si, že obyčejná diferenciální rovnice $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = kF$ má řešení $F(t) = F(0)\exp(kt)$ a tedy formálně mohu psát řešení rovnice $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \mathcal{L}F$ s operátorem $\mathcal{L}$ jako:

$$F(\tau) = \exp(\tau\mathcal{L})F(0)\,.$$

Podle Taylorova rozvoje exponenciely je pak časový vývoj funkce $F(q(t), p(t))$ v jednom časovém kroku τ dán nekonečnou řadou:

$$F(\tau) = [1 + \tau\mathcal{L} + \frac{\tau^2}{2}\mathcal{L}^2 + \ldots]F(0)\,,$$

ale prakticky se rozvoj ukončí pro jisté τ^k, přičemž se dopustíme chyby řádu $\mathcal{O}(\tau^{k+1})$.

Je užitečné hamiltonián různými způsoby rozdělit na části, například:

1. $H = H_A + H_B$ (zapsáno obecně);
2. $H = T(p) + V(q)$ (na kinetickou a potenciální energii);
3. $H = H_{\mathrm{kepl}} + H_{\mathrm{int}}$ (na keplerovskou a interakční část).

V prvním případě lze zapsat integrátor jako:

$$F(\tau) = \exp(\tau(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B)) \simeq \exp(\tau\mathcal{L}_A)\exp(\tau\mathcal{L}_B)\,F(0)\,,$$

za přepokladu, že komutátor operátorů $[\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B]$ je nulový, jinak bychom rozdíl mezi pravou a levou stranou rovnice museli odvozovat z Bakerova–Campbellova–Hausdorffova (BCH) teorému.

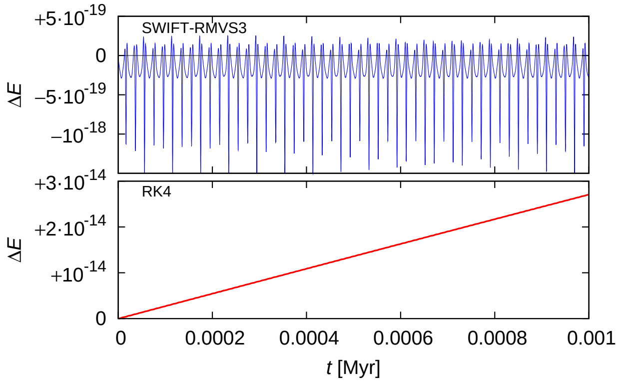
Ve druhém případě můžeme pro vývoj souřadnic a hybností psát (do prvního řádu v τ):

$$q(\tau) = q(0) + \tau\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{p=p(0)}\,, \quad p(\tau) = p(0) - \tau\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_{q=q(\tau)}\,,$$

přičemž pro problém dvou těles, kde je hamiltonián roven $H_{\mathrm{kepl}} = \frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{q}$, bychom za parciální derivace dosadili $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{p}{m}$ (tj. vlastně rychlost), $\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{GMm}{q^2}$ (tj. gravitační zrychlení). Tomuto integrátoru říkáme symplektický Euler.

Ve třetím případě je velkou výhodou, že pohyb pod vlivem samotného H_{kepl} (gravitace Slunce) je řešitelný analyticky a H_{int} (gravitace planet) je pouze malá perturbace. Pokud nás nezajímají rychlé oscilace, můžeme dokonce H_{int} vynásobit Diracovou δ-funkcí, jejíž norma je 1, čímž získáme symplektickou mapu umožňující interakce planet počítat diskrétně, s velkým časovým krokem.

Integrátory často využívají analytického řešení problému dvou těles, takže tělesa se pohybují vlivem Slunce přesně po elipsách (této fázi se říká drift), kdežto vzájemné interakce planet jsou reprezentované jako náhlé změny rychlostí, neboli „kopance“ (kick). Metoda dovoluje podstatně delší časový krok (zhruba desetkrát kratší než nejkratší perioda, tzn. $\Delta t \simeq 20$ až 40 dní pro hlavní pás).



Obr. 2 — Celková energie systému Slunce–Jupiter–Saturn počítaná symplektickou metodou (integrátorem SWIFT–RMVS3) a metodou RK4. Časový krok $\Delta t = 36$ dní byl v obou případech stejný. V případě integrátoru RK4 je patrný růst E navzdory tomu, že podle zákona zachování energie by měla zůstat konstatní.

Velmi používanou implementací symplektického integrátoru 2. řádu je balík SWIFT [73]. Obsahuje též klasický (pomalý nesymplektický) integrátor Bulirsch–Stoer. Existují i verze s implementovanými digitálními filtry a negravitačním Jarkovského zrychlením [16].

Vstupní soubory mají jednoduchý formát, jak je vidět na následující ukázce. Soubor `param.in` obsahuje počáteční a konečný čas, časový krok integrace (vše ve dnech), kroky pro datový výstup, volby pro blízká přiblížení a jméno výstupního souboru:

```
0.0d0 365.25d6 36.525d0
365.25d4 365.25d4
F T F F T F
4.68d-3 100. -1. 4.68d-3 F
bin.dat
unknown
```

V souboru `pl.in` jsou uvedeny hmotnosti, polohy a rychlosti planet (v jednotkách $\mathrm{AU}^3/\mathrm{den}^2$, AU, AU/den; zde pro $JD = 2454600{,}5$):

```
9
0.2959122082855911E-03
0.0000000000000000E+00 0.0000000000000000E+00 0.0000000000000000E+00
0.0000000000000000E+00 0.0000000000000000E+00 0.0000000000000000E+00
0.4912547451450812E-10
-.3864600354862669E+00 -.1602170074551660E-02 0.3533234140555620E-01
-.5735852025214805E-02 -.2692373120382385E-01 -.1673815587694525E-02
0.7243452486162703E-09
```



```
0.5808463336492261E+00 0.4308825792243013E+00 -.2761670784360751E-01
-.1211216653083715E-01 0.1615788478483312E-01 0.9205155120077254E-03
0.8997011346712499E-09
-.6017254236082077E+00 -.8120760800476735E+00 0.8869634100961842E-06
0.1354276671039820E-01 -.1030681208372443E-01 -.3099942997742874E-07
0.9549535105779258E-10
-.1527601760264695E+01 0.6626820858693659E+00 0.5141368234220209E-01
-.5045066867113694E-02 -.1164349173788776E-01 -.1202590667115000E-03
0.2825345909524226E-06
0.1138394516867886E+01 -.5072505282367437E+01 -.4513382047041035E-02
0.7276076137688305E-02 0.2011511879339103E-02 -.1711307188338216E-03
0.8459715185680659E-07
-.8611087404576072E+01 0.3506540061250040E+01 0.2817240414539856E+00
-.2397188427972001E-02 -.5178074648198954E-02 0.1855384702523543E-03
0.1292024916781969E-07
0.1974205995173121E+02 -.3751739674173609E+01 -.2697009416898897E+00
0.7111001543127974E-03 0.3681535338222283E-02 0.4507018387067335E-05
0.1524358900784276E-07
0.2372410144739705E+02 -.1842578182444977E+02 -.1676733867170805E+00
0.1910919299879698E-02 0.2498604368703240E-02 -.9539622669733138E-04
```

Nakonec v `tp.in` je třeba uvést polohy a rychlosti částic s nulovou hmotností (zde pro planektu Vesta):

```
1
0.2353673518920967E+01 -.2346117040731681E+00 -.2789258013430361E+00
0.2015053331692880E-02 0.1089808238709952E-01 -.5729083998342665E-03
0
0.0
```

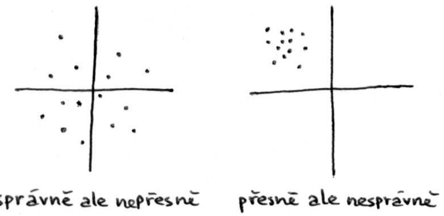
0.1.6 Přesnost versus správnost

Přesnost (angl. precision) výpočtu efemeridy můžeme posoudit například tak, že numerickou integraci několikrát zopakujeme s menším a s menším časovým krokem Δt. Obvykle řešení konvergují tak, že pro malá Δt se od sebe již neliší.

Samozřejme nelze volit Δt *infinetezimálně* malé! To by numerický výpočet trval nekonečně dlouho a také bychom tvrdě narazili na omezené přesnosti čísel, jak jsou reprezentované v počítači,[1] a na zaokrouhlovací chyby.

Pozor! *Správnost* (angl. accuracy) je něco úplně jiného! Natvrdo řečeno: jakkoli úžasná přesnost výpočtu nám ani v nejmenším nezaručuje jakoukoliv správnost. Když se dopustíme velké *systematické chyby* (mylné identifikace objektu při astrometrii, překlepu při zadávání počátečních podmínek nebo hloupé chyby v kódu programu), soulad s realitou nedosáhneme nikdy.

[1] V případě dvojité přesnosti (double precision, real 8) jde zhruba o 16 platných číslic; u jednoduché (single, real 4) pouze o 8.



Obr. 3 — Přesnost versus správnost při střelbě do terče. Ve fyzice je problém, že nevidíme onen kříž! Je pak těžké určit, zda je chyba systematická nebo náhodná.

0.1.7 Šíření chyb

Každá dráha je známá pouze s určitou *nenulovou chybou*. Aby naše výpočty měli vůbec nějaký smysl, musíme tuto chybu uvážit! Postupujeme třeba takto: (i) vytvoříme *mnoho* počátečních podmínek v rámci observační nejistoty a numerickou integraci $t_0 \to t$ provedeme mnohokrát. (To se snadno řekne, ale hůře provede.) (ii) v čase t posoudíme rozptyly $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$, což jsou vlastně chyby výsledku. Můžeme také sdružit podobné trajektorie do skupin a vypočítat *pravděpodobnosti* jednotlivých realizací jako $p_{\text{skupiny}} = \frac{N_{\text{ve skupině}}}{N_{\text{celkový}}}$.

Obzvláště v některých situacích je zřetelné, že sebemenší odchylka v počátečních podmínkách, třeba na poslední platné číslici, může vést k velmi odlišným výsledkům numerické integrace. Tato extrémní citlivost na počáteční podmínky je projevem *deterministického chaosu*. Skutečnost, že i tak jednoduchoučký systém, jako je osm planet řídících se gravitačním zákonem, může být chaotický, by někdo mohl pokládat za překvapivé.

0.1.8 Relativistická pohybová rovnice

Podle obecné teorie relativity neexistují inerciální vztažné soustavy ani nelze psát pohybové rovnice. Co však lze, je použít *parametrizovanou post-newtonovskou aproximaci* (PPN), která zohledňuje podstatné relativistické odchylky od newtonovského pohybu. Zrychlení pro hmotný bod je pak dosti komplikované [111]:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j\neq i} \frac{\mu_j(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{r_{ij}^3} \Bigg\{ & 1 - \frac{2(\beta+\gamma)}{c^2} \sum_{k\neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{(2\beta-1)}{c^2} \sum_{k\neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} \\
& + \gamma \left(\frac{v_i}{c}\right)^2 + (1+\gamma)\left(\frac{v_j}{c}\right)^2 - \frac{2(1+\gamma)}{c^2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_j \\
& - \frac{3}{2c^2}\left[\frac{(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)\cdot \dot{\boldsymbol{r}}_j}{r_{ij}}\right]^2 + \frac{1}{2c^2}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)\cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_j \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \frac{1}{c^2} \sum_{j\neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \left\{ [\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j] \cdot [(2+2\gamma)\dot{\boldsymbol{r}}_i - (1+2\gamma)\dot{\boldsymbol{r}}_j] \right\} (\dot{\boldsymbol{r}}_i - \dot{\boldsymbol{r}}_j) \\
& + \frac{3+4\gamma}{2c^2} \sum_{j\neq i} \frac{\mu_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j}{r_{ij}} + \sum_{m=1}^{5} \frac{\mu_m(\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_i)}{r_{im}^3} \,. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Pro obecnou relativitu jsou parametry $\beta = \gamma = 1$, $v_i = |\dot{\boldsymbol{r}}|$ označuje rychlost. Vektor $\ddot{\boldsymbol{r}}_j$ na pravé straně je klasické newtonovské zrychlení tělesa j působené ostatními tělesy. Suma přes m zohledňuje zrychlení od pěti nejdůležitějších asteroidů: Ceres, Pallas, Vesta, Iris a Bamberga. Tento dynamický model používá (mimo jiných) efemerida JPL DE405.

Literatura

Učebnice

[1] Beatty, J. K., Petersen, C. C., Chaikin, A.: *The New Solar System.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999. ISBN 0521369657.
[2] Bertotti, B., Farinella, P., Vokrouhlický, D.: *Physics of the Solar System.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 1402014287.
[3] de Pater, I., Lissauer, J. J.: *Planetary Sciences.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN 0521482194.

Reference

[4] Alvarez, L. W., Alvarez, W., Asaro, F., Michel, H. V.: *Extraterrestrial cause for the Cretaceous Tertiary extinction. Science*, **208**, s. 1095, 1980.
[5] Artemieva, N., Pierazzo, E., Stöeffler, D.: *Numerical modeling of tektite origin in oblique impacts: Impications to Ries-Moldavites strewn filed. Bull. of the Czech Geological Survey*, **77**, 4, s. 303–311, 2002.
[6] Bernard, J. H., Rost, R. aj.: *Encyklopedický přehled minerálů.* Praha: Academia, 1992.
[7] Boček, M.: *Petrologické složení povrchu a kůry Měsíce. Povětroň*, **14**, S1, 3, 2006.
[8] Bottke, W. F., Cellino, A., Paolicchi, P., Binzel, R. P. (editoři): *Asteroids III.* Tuscon: The University of Arizona Press, 2002. ISBN 0816522812.
[9] Bottke, W. F., Rubincam, D. P., Burns, J. A.: *Dynamical evolution of main belt meteoroids: Numerical simulations incorporating planetary perturbations and Yarkovsky thermal forces. Icarus*, **145**, s. 301–331, 2000.
[10] Bottke, W. F., Vokrouhlický, D., Nesvorný, D.: *An asteroid breakup 160 Myr ago as the probable source of the K/T impactor. Nature*, **449**, 7158, s. 48–53.
[11] Bottke, W. F. aj.: *Debiased orbital and absolute magnitude distribution of the near-Earth objects. Icarus*, **156**, 2, s. 399–433, 2002.
[12] Bowell, T.: *AstOrb* [online]. [cit. 2008-09-30]. ⟨`ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.html`⟩.
[13] Brož, M.: *Impaktní kráter Steinheim.* Povětroň S1/2003, s. 3–10.
[14] Brož, M.: *Impaktní krátery (2) — Ries.* Povětroň 5/2001, s. 6–13.
[15] Brož, M.: *Yarkovsky Effect and the Dynamics of the Solar System.* Dizertační práce, Karlova univerzita, Praha, 2006.
[16] Brož, M.: *Yarko-site* [online]. [cit. 2008-09-30]. ⟨`http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/yarko-site/`⟩.
[17] Brož, M. aj.: *Planetární stezka v Hradci Králové* [online]. [cit. 2008-12-10]. ⟨`http://www.astrohk.cz/planetarni_stezka/`⟩.
[18] Brož, M., Nosek, M., Trebichavský, J., Pecinová, D. Editoři : *Sluneční hodiny na pevných stanovištích. Čechy, Morava, Slezsko a Slovensko.* Praha: Academia, 2004. ISBN 8020012044.
[19] Bruns, H., *Acta Math.*, **11**, s. 25, 1887.
[20] Burbine, T. H. aj.: *Meteoritic parent bodies: their number and identification.* in *Asteroids III*, W. F. Bottke Jr., A. Cellino, P. Paolicchi, a R. P. Binzel (eds), Tuscon: University of Arizona Press, 2002, s. 653–667.

[21] Burns, J. A., Lamy, P. L., Soter, S.: *Radiation forces on small particles in the Solar System. Icarus*, **40**, s. 1–48, 1979.
[22] Burns, J. A., Safronov, V. S.: *Asteroid nutation angles. Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **165**, 403, 1973.
[23] Calligan, D. P., Baggaley, W. J.: *The radiant distribution of AMOR radar meteors. Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **359**, s. 551–560, 2005.
[24] Carrol, S. M.: *Lecture Notes on General Relativity* [online]. [cit. 2010-03-08]. ⟨`http://preposterousuniverse.com/grnotes/`⟩.
[25] Ceplecha, Z.: *Geometric, dynamic, orbital and photometric data on meteoroids from photographic fireball networks. Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **38**, s. 222–234, 1987.
[26] Ceplecha, Z. aj.: *Meteor phenomena and bolides. Space Science Reviews*, **84**, s. 327–471, 1998.
[27] *Cryovolcanism and Geologic Analogies* [online]. [cit. 2009-04-30]. ⟨`http://mivo-sys.tripod.com/cryo.html`⟩.
[28] Čapek, D., Vokrouhlický, D.: *The YORP effect with finite thermal conductivity. Icarus*, **172**, s. 526–536, 2004.
[29] *Earthquakes* [online]. [cit. 2010-03-01]. ⟨`http://pubs.usgs.gov/gip/earthq1/plate.html`⟩.
[30] Farinella, P., Vokrouhlický, D., Hartmann, W. K.: *Meteorite delivery via Yarkovsky orbital drift. Icarus*, **132**, s. 378–387, 1998.
[31] Fernández, J. A.: *Comets. Nature, dynamics, origin and their cosmogonical relevance.* Dordrecht: Springer, 2005.
[32] Festou, M. C., Keller, H. U., Weaver, H. A. (ed.): *Comets II.* Tuscon: The University of Arizona Press, 2004.
[33] Foukal, P. V.: *Solar Astrophysics.* Weinheim: Wiley-VCH, 2004. ISBN 3527403744.
[34] Frankel, C.: *Volcanoes of the Solar System.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. ISBN 0521477700.
[35] Gabzdyl, P.: *Prohlídka Měsíce* [online]. [cit. 2009-02-05]. ⟨`http://www.moon.astronomy.cz/`⟩.
[36] *Geologischer Wanderweg im Steinheimer Becken* [online]. [cit. 2003-1-1]. ⟨`http://www.pg.aa.bw.schule.de/aktiv/geoproj/sbecken/wanderfr.htm`⟩
[37] Grady, M. M.: *Catalogue of meteorites.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0521663032.
[38] *Gravity Probe B* [online]. [cit. 2010-04-01]. ⟨`http://einstein.stanford.edu/`⟩.
[39] Groschopf, P., Reiff, W.: *Der geologische Wanderweg im Steinheimer Becken.* Steinheim am Albuch, 1993.
[40] Güdel, M.: *The Sun in time: activity and environment* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **4**, 2007.
[41] Hacar, B.: *Mechanika sluneční soustavy.* Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948.
[42] *Hadley cell. Encyclopedia Britannica* [online]. [cit. 2010-02-24]. ⟨`http://www.britannica.com/EBchecked/topic/251175/Hadley-cell`⟩.
[43] Hagihara, Y.: *Celestial Mechanics I.* Cambridge: MIT Press, 1970.
[44] Haloda, J.: *Meteority a jejich význam pro studium procesů vzniku a vývoje těles sluneční soustavy* [online]. [cit. 2009-01-29]. ⟨`http://astro.mff.cuni.cz/vyuka/AST021/index.html`⟩.
[45] Hamilton, A.: *Falling into a black hole* [online]. [cit. 2010-03-17]. ⟨`http://casa.colorado.edu/ ajsh/schw.shtml`⟩.

[46] Harmanec, P., Brož, M.: *Stavba a vývoj hvězd* [online]. [cit. 2010-01-26]. ⟨`http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/astrofyzika2/`⟩, 2010.
[47] Hirayama, K: *Groups of asteroids probably of common origin. Astron. J.*, **31**, 743, s. 185–188, 1918.
[48] Holmes, N.: *'Shocking' gas-gun experiments* [online]. [cit. 2008-11-13]. ⟨`https://www.llnl.gov/str/Holmes.html`⟩.
[49] Holsapple, K. aj.: *Asteroid spin data: no evidence of rubble-pile structures.* 36th Lunar and Planetary Science Conference, League City, Texas, 2005.
[50] Horský, J., Novotný, J., Štefaník, M.: *Mechanika ve fyzice.* Praha: Academia, 2001. ISBN 8020002081.
[51] Howe, R.: *Solar internal rotation and its variation* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **6**, 2009.
[52] Hutchison, R.: *Meteorites: A Petrologic, Chemical and Isotopic Synthesis.* Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521035392.
[53] Chandrasekhar, S.: *The Mathematical Theory of Black Holes.* New York: Oxford University Press, 1998. ISBN 0198503709.
[54] Charbonneau, P.: *Dynamo models of the solar cycle* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **2**, 2005.
[55] Chesley, S. R., aj.: *Direct detection of the Yarkovsky effect by radar ranging to asteroid 6489 Golevka. Science*, **302**, s. 1739–1742, 2003.
[56] Chlupáč, I. aj.: *Geologická minulost České republiky.* Praha: Academia, 2002.
[57] Christensen-Dalsgaard, J.: *Stellar Oscilations* [online]. [cit. 2010-01-26]. ⟨`http://www.eneas.info/`⟩. 2003.
[58] *International Earth Rotation and Reference Systems Service* [online]. [cit. 2008-11-13]. ⟨`http://www.iers.org/`⟩.
[59] Ivezić, Ž. aj.: *Solar System objects observed in the Sloan Digital Sky Survey commissioning data. Astron. J.*, **122**, 5, s. 2749–2784, 2001.
[60] Jenniskens, P.: *Meteor showers and their parent comets.* Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521853491.
[61] Johansenn, A. aj.: *Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar disks. Nature*, **448**, 7157, s. 1022–1025, 2007.
[62] Johnson, C.: *Precession of a gyroscope and precession of the Earth's axis* [online]. [cit. 2008-09-10]. ⟨`http://www.mb-soft.com/public/precess.html`⟩.
[63] *JPL Horizons system* [online]. [cit. 2008-09-30]. ⟨`http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons`⟩.
[64] *JPL planetary and lunar ephemerides, DE405* [online]. [cit. 2008-09-30]. ⟨`ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/`⟩.
[65] Kaasalainen, M. aj.: *Acceleration of the rotation of asteroid 1862 Apollo by radiation torques. Nature*, **446**, 7134, s. 420–422, 2007.
[66] Kavasch, J.: *The Ries Meteorite Crater. A geological guide.* Donauwörth: Ludwig Auer GmbH, 1985.
[67] Kelley, M. S.: *Comet dust trails* [online]. [cit. 2009-01-31]. ⟨`http://www.physics.ucf.edu/~msk/projects/trails/`⟩.
[68] Kenkman, T. aj..: *Structure and formation of a central uplift: A case study at the Upheaval Dome impact crater, Utah.* in Large Meteorite Impacts III, s. 85, 2003. ISBN 0813723841. ⟨`http://books.google.com/`⟩.
[69] Kerr, R. P.: *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. Phys. Rev. Lett.*, **11**, s. 237–238, 1963.
[70] Kozai, Y.: *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. Astron. J.*, **67**, 9, 591, 1962.
[71] Kring, D. A., Bailey, J.: *Terrestrial impact craters* [online]. [cit. 2008-11-13]. ⟨`http://www.lpi.usra.edu/science/kring/epo_web/impact_cratering/World_Craters_web/intromap.html`⟩.
[72] Kronk, G.: *Cometography* [online]. [cit. 2009-01-20]. ⟨`http://cometography.com/`⟩.
[73] Levison, H., Duncan, M.: *Swift* [online]. [cit. 2008-09-30]. ⟨`http://www.boulder.swri.edu/ hal/swift.html`⟩.
[74] Mannings, V. aj. (Ed.): *Protostars and planets IV.* Tuscon: The University of Arizona Press, 2000. ISBN 0816520593.
[75] Marcan, S.: *Phase diagram explanation* [online]. [cit. 2009-01-20]. ⟨`http://bhs.smuhsd.org/science-dept/marcan/`⟩.
[76] McFadden, L.–A., Weissman, P. R., Johnson, T. V. (Ed.): *Encyclopedia of the Solar System.* San Diego: Academic Press, 2007. ISBN 012088589.
[77] McSween, H. Y.: *Meteorites and their parent planets.* Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
[78] *MIAC. Antarctic meteorites* [online]. [cit. 2009-01-28]. ⟨`http://miac.uqac.ca/MIAC/antarc.htm`⟩.
[79] Milani, A., Knežević, Z.: *Asteroid proper elements and the dynamical structure of the asteroid main belt. Icarus*, **107**, 2, s. 219–254, 1994.
[80] *Minor planet & comet ephemeris service* [online]. [cit. 2008-09-30] ⟨`http://www.cfa.harvard.edu/iau/MPEph/MPEph.html`⟩.
[81] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A: *Gravitation.* San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. ISBN 0716703440.
[82] Morbidelli, A., Crida, A., Masset, F., Nelson, R. P.: *Building giant-planet cores at a planet trap.* Astron. Astrophys., **478**, s. 929–937, 2008.
[83] Morbidelli, A., Levison, H.: *Scenarios for the origin of the orbits of the trans-neptunian objects 2000 CR_{105} and 2003 VB_{12} (Sedna). Astron. J.*, **128**, 2564, 2004.
[84] Morbidelli, A. aj.: *Source regions and timescales for the delivery of water to Earth. Meteoritics & Planetary Science*, **35**, 6, s. 1309–1320, 2000.
[85] Murray, C. D., Dermott, S. F.: *Solar System Dynamics.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
[86] *National Space Science Data Center* [online]. [cit. 2009-02-17]. ⟨`http://nssdc.gsfc.nasa.gov/`⟩.
[87] Nesvorný, D., Morbidelli, A.: *Three-body mean motion resonances and the chaotic structure of the asteroid belt. Astron. J.*, **116**, 3029, 1998.
[88] Nesvorný, D., Vokrouhlický, D.: *Analytic theory of the YORP effect for near-spherical objects. Astron. J.*, **134**, 5, s. 1750–1768, 2007.
[89] Nesvorný, D. aj.: *Evidence for asteroid space weathering from the Sloan Digital Sky Survey. Icarus*, **173**, 1, s. 132–152, 2005.
[90] Norton, O. R.: *The Cambridge Encyclopedia of Meteorites.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0521621437.
[91] Öpik, E. J.: *Collision probability with the planets and the distribution of planetary matter. Proc. R. Irish Acad.*, **54**, s. 165–199, 1951.
[92] Ostro, S.J. aj.: *Radar imaging of binary near-Earth asteroid (66391) 1999 KW_4. Science*, **314**, 5803, s. 1276–1280, 2006.
[93] Pecina, P., Ceplecha, Z.: *New aspects of in single-body meteor physics.. Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **34**, 102, 1983.
[94] Pecina, P., Nováková, D.: *Meteorický radar v Ondřejově. Povětroň*, **10**, 6, s. 4, 2002.

[95] Pechala, F., Bednář, J.: *Příručka dynamické meteorologie.* Praha: Academia, 1991. ISBN 8020001980.
[96] Peterson, C.: *A source mechanism for meteorites controlled by the Yarkovsky effect. Icarus*, **29**, s. 91–111, 1976.
[97] Pokorný, Z.: *Astronomické algoritmy pro kalkulátory.* Praha: Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, 1988.
[98] Pösges, G., Schieber, M.: *The Ries Crater – Museum Nördlingen.* München: Dr. Friedrich Pfeil, 1997.
[99] Pravec, P. aj.: *Two-period lightcurves of 1996 FG3, 1998 PG, and (5407) 1992 AX: One probable and two possible binary asteroids. Icarus*, **146**, 1, s. 190–203, 2000.
[100] Pravec, P. aj.: *Ondrejov Asteroid Photometry Project* [online]. [cit. 2008-09-09]. ⟨`http://www.asu.cas.cz/~ppravec/`⟩.
[101] Press, W. R., Teukolsky, S. A., Vetterling, W., Flannery, B.P.: *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
[102] Příhoda, P. aj.: *Hvězdářská ročenka 2008.* Praha: Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, 2007. ISBN 9788086017471.
[103] Quinn, T. R., Tremaine, S., Duncan, M.: *A three million year integration of the earth's orbit. Astron. J.*, **101**, s. 2287–2305, 1991.
[104] *Reduce* [online]. [cit. 2010-03-08]. ⟨`http://www.reduce-algebra.com/`⟩.
[105] *Rieskrater–Museum Nördlingen* [online]. [cit. 2001-1-1]. ⟨`http://www.iaag.geo.uni--muenchen.de/sammlung/Rieskrater/RieskraterMuseum.html`⟩.
[106] Robertson, H. P.: *Dynamical effects of radiation in the Solar System. Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **97**, 423, 1937.
[107] Rubin, A. E.: *Mineralogy of meteorite groups. Meteoritics and Planetary Science*, **32**, 231, 1997.
[108] Rubincam, D. P.: *Polar wander on Triton and Pluto due to volatile migration. Icarus*, **163**, 2, s 63–71, 2002.
[109] Russel, C. T. aj.: *Dawn mission and operations.* Asteroids, Comets, Meteors 2005, editoři Lazzaro, D., Ferraz-Mello, S., Fernandez, J. A., Cambridge: Cambridge University Press, 2006, s. 97–119.
[110] Sackmann, I. J., Boothroyd, A. I., Kraemer, K. E.: *Our Sun. III. Present and future. Astrophys. J.*, **418**, s. 457–468, 1993.
[111] Seidelman, P. K. (*editor*): *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac.* U. S. Naval Observatory, Washington, 1992.
[112] Sepkoski, J. J.: *Ten years in the library: New data confirm paleontological patterns. Paleobiology*, **19**, s. 43–51, 1993.
[113] Skála, L.: *Úvod do kvantové mechaniky.* Praha: Academia, 2005. ISBN 8020013164.
[114] Skála, R.: *Impact process: An important geological phenomenon. Acta Mus. Nat-Pragae*, Ser. B., Hist. Nat., **52**, s. 111–156, 1996.
[115] Spurný, P.: *Fotografické sledování bolidů ve střední Evropě. Corona Pragensis*, 2, 2001, ⟨`http://praha.astro.cz/crp/0101a.phtml`⟩.
[116] *Stardust, JPL, NASA* [online]. [cit. 2006-06-01]. ⟨`http://stardust.jpl.nasa.gov`⟩.
[117] Staudacher, T. aj.: $^{40}Ar/^{39}Ar$ *ages of rocks and glasses from the Noerdlinger Ries crater and the temperature history of impact breccias. J. of Geophysics*, **51**, 1, s. 1–11, 1982.
[118] Stix, M.: *The Sun. An Introduction.* Berlin: Springer-Verlag, 2002. ISBN 3540537961.
[119] Stuart, J. S.: *A Near-Earth asteroid population estimate from the LINEAR Survey. Science*, **294**, 5547, s. 1691–1693, 2001.

[120] Sundman, K. E.: *Memoire sur le probleme de trois corps. Acta Math.*, **36**, s. 105–179, 1912.
[121] Šedivý, P.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity.* Hradec Králové: MAFY, 2003. ISBN 8086148653.
[122] Šidlichovský, M., Nesvorný, D.: *Frequency modified Fourier transform and its applications to asteroids. Cel. Mech. Dyn. Astron.*, **65**, 1–2, s. 137–148, 1996.
[123] Tillotson, J. H.: *Metallic equations of state for hypervelocity impact.* General Atomic Report GA-3216, 1962.
[124] *The Ries/Steinheim impact crater field trip* [online]. [cit. 2001-1-1]. ⟨`http://www.-earthsciences.ucl.ac.uk/research/planetaryweb/field/knodle.htm`⟩
[125] *The STScI Digitized Sky Survey* [online]. [cit. 2010-02-15]. ⟨`http://archive.stsci.edu/cgi-bin/dss_form`⟩.
[126] Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., Levison, H. F.: *Origin of the orbital architecture of the giant planets of the solar system. Nature*, **435**, s 459, 2004.
[127] Tuček, K.: *Meteority a jejich výskyty v Československu.* Praha: Academia, 1981.
[128] Vernazza, J. E., Avrett, E. H., Loeser, R., *Astrophys. J. Suppl.*, **45**, 635, 1981.
[129] Vokrouhlický, D.: *A complete linear model for the Yarkovsky thermal force on spherical asteroid fragments. Astron. Astrophys.*, **344**, s. 362–366, 1999.
[130] Vokrouhlický, D., Farinella, P.: *Efficient delivery of meteorites to the Earth from a wide range of asteroid parent bodies. Nature*, **407**, 6804, 606, 2000.
[131] Vokrouhlický, D., Nesvorný, D.: *Pairs of asteroids probably of a common origin. Astron. J.*, **136**, 1, s. 280–290, 2008.
[132] Vokrouhlický, D., aj.: *Yarkovsky/YORP chronology of asteroid families. Icarus*, **182**, 1, s. 118–142, 2006.
[133] Weidenschilling, S. J.: *Formation of Planetesimals and Accretion of the Terrestrial Planets. Space Science Reviews*, **92**, 1/2, s. 295–310, 2000.
[134] *Wikipedia* [online]. [cit. 2008-04-10]. ⟨`http://www.wikipedia.org/`⟩.
[135] Whipple, F.: *A comet model. I. The acceleration of Comet Encke. Astrophys. J.*, **111**, s. 375–394, 1950.
[136] Wolf, M. aj.: *Astronomická příručka.* Praha: Academia, 1992. ISBN 802000467X.
[137] Zeĺdovitch, Ya. B. aj.: *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena.* 1966. ISBN 0486420027. ⟨`http://books.google.com`⟩.
[138] Zhong, S., Zuber, M. T.: *Degree-1 mantle convection and the crustal dichotomy on Mars. Earth and Planetary Science Letters*, **189**, s. 75–84, 2001.