

0.1 Problém tří těles

Naším cílem je nahlédnout, jak se pohybují Slunce, Jupiter a kometa (tělesa 1, 2, 3). Abychom problém zjednodušili na únosnou úroveň, budeme předpokládat, že kometa má hmotnost $m_3 = 0$ a že Jupiter se okolo Slunce pohybuje nerušeně po kružnici (jako v problému dvou těles s excentricitou $e = 0$). Takovou úlohu nazýváme *kruhový omezený problém tří těles*. Omezený proto, že kometa nepůsobí gravitací na Jupiter a Slunce, pouze Slunce a Jupiter působí na kometu a na sebe navzájem. Beztak by kometa neměla šanci obíhání Jupitera ovlivnit.

Pro Slunce a pro Jupiter ani nemusíme psát pohybové rovnice, protože jejich řešení známe — v inerciální soustavě s počátkem v hmotném středu jsou to rovnice kružnic:

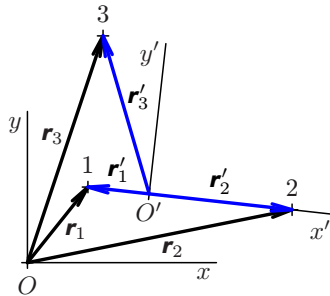
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \left(-a_J \overbrace{\frac{m_2}{m_1+m_2}}^{\bar{\mu}} \cos nt, -a_J \frac{m_2}{m_1+m_2} \sin nt, 0 \right), \\ \mathbf{r}_2 &= \left(a_J \overbrace{\frac{m_1}{m_1+m_2}}^{1-\bar{\mu}} \cos nt, a_J \frac{m_1}{m_1+m_2} \sin nt, 0 \right), \end{aligned}$$

kde $a_J \doteq 5,2 \text{ AU}$ je vzdálenost Slunce–Jupiter, $n = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a_J^3}} \doteq 0,00145 \frac{\text{rad}}{\text{den}}$ jeho střední pohyb (neboli úhlová frekvence vzájemného obíhání) a $\bar{\mu}$ poměr hmotnosti Jupiteru k celkové hmotnosti soustavy.

Pro kometu platí pohybová rovnice (odvozená z Newtonových zákonů):

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2). \quad (1)$$

Bohužel, v těchto třech diferenciálních rovnicích 2. řádu vystupují explicitní funkce času $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ a jejich průběh neznáme. Naštěstí se ale můžeme t zbavit...



Obrázek 1: Nákres tří těles v inerciální vztažné soustavě O_{xyz} s počátkem ve hmotném středu a definice vektorů \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 , \mathbf{r}'_1 , \mathbf{r}'_2 , \mathbf{r}'_3 . Naznačena je též otočená souřadnicová soustava $O'_{x'y'z'}$.

0.1.1 Otáčející se soustava. Coriolisovo a odstředivé zrychlení

Otočíme-li souřadnicovou soustavu okolo osy z o úhel $\varphi = nt$, Slunce a Jupiter se v nových čárkovaných souřadnicích nehnou z místa:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_1 &= (-\bar{\mu}a_J, 0, 0), \\ \mathbf{r}'_2 &= ((1-\bar{\mu})a_J, 0, 0).\end{aligned}$$

Tuto transformaci souřadnic můžeme zapsat maticově jako $\mathbf{r}' = \mathbf{R}_z(\varphi) \mathbf{r}$, respektive $\mathbf{r} = \mathbf{R}_z(-\varphi) \mathbf{r}'$, čili ve složkách:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos nt - y' \sin nt \\ x' \sin nt + y' \cos nt \\ z' \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Pro dosažení do pohybové rovnice (1) budeme ovšem potřebovat také druhé derivace souřadnic podle času, které teď musíme vypočítat. Nejprve rychlosti:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{x}' \cos nt - x' n \sin nt - \dot{y}' \sin nt - y' n \cos nt \\ \dot{x}' \sin nt + x' n \cos nt + \dot{y}' \cos nt - y' n \sin nt \\ \dot{z}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\dot{x}' - ny') \cos nt - (\dot{y}' + nx') \sin nt \\ (\dot{y}' + nx') \cos nt + (\dot{x}' - ny') \sin nt \\ \dot{z}' \end{pmatrix}, \quad (3)\end{aligned}$$

poté zrychlení:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\ddot{x}' - n\dot{y}') \cos nt - (\dot{x}' - ny') n \sin nt - (\dot{y}' + nx') \sin nt - (\dot{y}' + nx') n \cos nt \\ (\dot{y}' + nx') \cos nt - (\dot{y}' + nx') n \sin nt + (\ddot{x}' - n\dot{y}') \sin nt + (\dot{x}' - ny') n \cos nt \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underbrace{(\ddot{x}' - 2n\dot{y}' - n^2x')}_{\mathbf{a}_{\text{Coriolisovo}}} \cos nt - \underbrace{(\dot{y}' + 2nx' - n^2y')}_{\mathbf{a}_{\text{odstředivé}}} \sin nt \\ (\dot{y}' + 2nx' - n^2y') \cos nt + (\ddot{x}' - 2n\dot{y}' - n^2x') \sin nt \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}. \quad (4)\end{aligned}$$

Vidíme, jak se nám zde „z ničeho nic“ objevila dvě nová zrychlení: *Coriolisovo* a *odstředivé*; první závisí na rychlosti jako $-2\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ (zde je vektorový součin) a druhé na souřadnicích jako $n^2 \mathbf{r}_\perp$ od osy otáčení — přesně jak jsme u odstředivé síly zvyklí. Jejich podstatou není nějaké fyzikální působení (jako je třeba gravitace), ale objevují se pouze z důvodu transformace souřadnic do neinerciálního systému. Proto jim ostatně říkáme zrychlení *zdánlivá*.

Dosažení provedeme nejprve pro složku x (vzdálenosti se při otáčení zachovávají, tudíž jsme je ve jmenovatelích napsali rovnou v nových souřadnicích):

$$\begin{aligned}(\ddot{x}'_3 - 2n\dot{y}'_3 - n^2x'_3) \cos nt - (\dot{y}'_3 + 2nx'_3 - n^2y'_3) \sin nt &= \\ = -\frac{Gm_1}{[(x'_3 + \bar{\mu}a_J)^2 + y_3'^2 + z_3'^2]^{3/2}} \cdot [(x'_3 + \bar{\mu}a_J) \cos nt - y'_3 \sin nt] - \\ -\frac{Gm_2}{[(x'_3 - (1-\bar{\mu})a_J)^2 + y_3'^2 + z_3'^2]^{3/2}} \cdot [(x'_3 - (1-\bar{\mu})a_J) \cos nt - y'_3 \sin nt].\end{aligned}$$

Použijeme teď dva triky:

1. sdružíme členy s $\cos nt$ a členy se $\sin nt$ a uvědomíme si, že mají-li rovnice platit pro *libovolné* t , musejí se rovnat koeficienty u těch sínů a kosínů;
2. vynecháme čárky a index 3, abychom se z nich nezbláznili (beztak tam nic jiného než x'_3 , y'_3 a z'_3 nevystupuje).

Výsledkem jsou tyto *pohybové rovnice pro kometu v korotujícím systému*:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -G \left[m_1 \frac{x + \bar{\mu}a_J}{R_1^3} + m_2 \frac{x - (1-\bar{\mu})a_J}{R_2^3} \right], \quad (5)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} \right] y, \quad (6)$$

$$\ddot{z} = -G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} \right] z, \quad (7)$$

kde relativní vzdálenosti jsou:

$$R_1 = [(x + \bar{\mu}a_J)^2 + y^2 + z^2]^{1/2},$$

$$R_2 = [(x - (1-\bar{\mu})a_J)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$$

a $\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ (tj. malý parametr řádu 10^{-3} pro Jupiter a Slunce). Žel, ani tyto rovnice neumíme obecně analyticky vyřešit (tzn. najít 6 skalárních funkcí $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ a $\dot{z}(t)$). Zdálo by se, že jsme si otáčením příliš nepomohli, nicméně...

0.1.2 Jacobiho integrál

Alespoň můžeme najít jeden velmi užitečný integrál pohybu: rovnice (5), (6), (7) vynásobíme po řadě \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , sečteme:

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} - n^2(x\dot{x} + y\dot{y}) &= -G \left[m_1 \frac{x + \bar{\mu}a_J}{R_1^3} + m_2 \frac{x - (1-\bar{\mu})a_J}{R_2^3} \right] \dot{x} - \\ &- G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} \right] (y\dot{y} + z\dot{z}) \end{aligned}$$

a jednou integrujeme podle času:¹

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) = G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right] + C,$$

kde C je integrační konstanta. Nakonec násobíme dvěma a značíme $-2C = C_J$ jako *Jacobiho integrál*:

$$C_J = \overbrace{n^2(x^2 + y^2) + 2G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right]}^{2U} - \overbrace{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}^{v^2}, \quad (8)$$

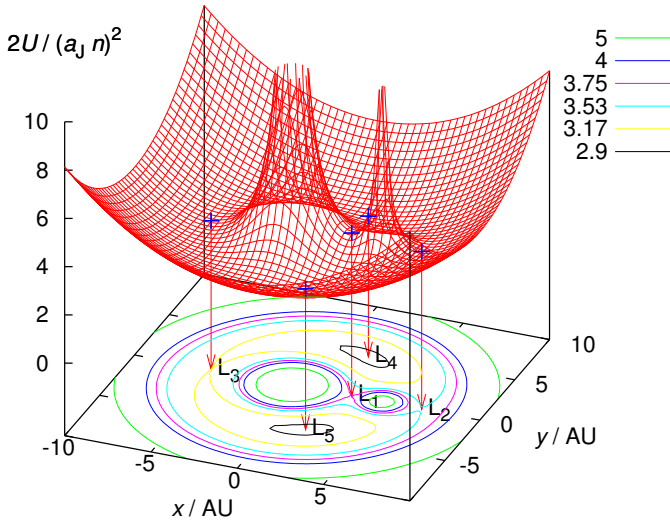
¹ S vědomím, že derivace výrazu $\frac{1}{R_1} = [(x + \bar{\mu}a_J)^2 + y^2 + z^2]^{-1/2}$ je rovna $-\frac{1}{2}[(x + \bar{\mu}a_J)^2 + y^2 + z^2]^{-3/2} \cdot [2(x + \bar{\mu}a_J)\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}]$ a podobně pro $\frac{1}{R_2}$.

kde $U(x, y, z)$ označuje efektivní potenciál (funkci souřadnic) a v rychlost komety vzhledem k neinerciální rotující soustavě (v níž jsou Slunce a Jupiter v klidu). Hodnotu C_J pro danou kometu můžeme vypočítat z počátečních podmínek (souřadnic a rychlostí) komety prostým dosazením do (8).

Užitečnost Jacobiho integrálu spočívá v tomto: v^2 je pochopitelně nezáporné, čili musí vždy platit:

$$v^2 = 2U - C_J > 0.$$

To ale znamená *omezení pro pohyb komety* — když si nakreslíme „vrstevnice“ funkce U (obr. 2), tak pouze v místech, kde $2U > C_J$, je pohyb dovolen!

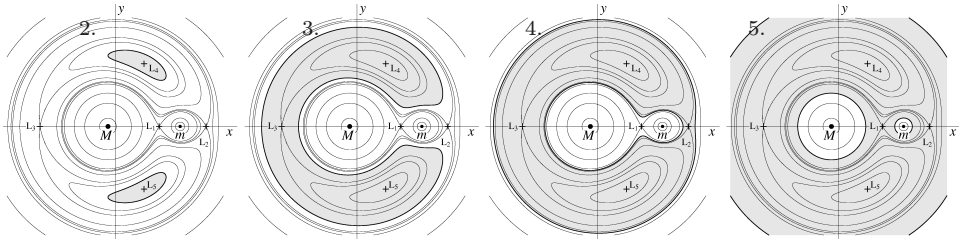


Obrázek 2: Graf efektivního potenciálu $2U(x, y, 0)$ a příslušné izočáry; pro systém s poměrem hmotností $\bar{\mu} = 0,2$. Hodnoty $2U$ jsou uváděny v jednotkách $(a_J n)^2$.

Pro určitou dráhu komety, tedy určité C_J , lze nakreslit *křivku nulové rychlosti*. Když se bude kometa přibližovat k příslušné křivce, můžeme si být jisti, že ji nepřekročí, ale kolmo se od ní „odrazí“.

Všimněme si vzhledu grafu funkce $2U$ z hlediska topologického: je na něm pět inflexních nebo extrémních bodů, označených L_1 až L_5 . Podle hodnoty C_J můžeme rozlišit pět případů, jak vypadají dovolené a zakázané oblasti (obr. 3):

1. $C_J < \text{potenciál } 2U(\text{v bodě } L_4) = 2U(L_5)$: pohyb je dovolen v celé rovině x, y . To je ostatně přirozené — když kometě udělím obrovskou rychlost (a C_J pak vychází malé), doletí kamkoliv.
2. $2U(L_4) = 2U(L_5) < C_J < 2U(L_3)$: dvě zakázané oblasti jsou v okolí bodů L_4 a L_5 , jinde je pohyb dovolen.
3. $2U(L_3) < C_J < 2U(L_2)$: zakázané oblasti obepínají body L_3, L_4 a L_5 ve tvaru podkovy; kometa může letět pryč od Slunce pouze kolem Jupitera.



Obrázek 3: Tvary dovolených (bílých) a zakázaných (šedých) oblastí v problému tří těles. Obrázky odpovídají případům 2., 3., 4. a 5. diskutovaným v textu. Porovnejme též s obr. 2. Převzato z [2].

4. $2U(L_2) < C_J < 2U(L_1)$: kometa může létat v blízkosti Slunce i Jupitera, ale nemůže se odtud dostat za bod L_2 . Také se zpoza bodu L_2 nemůže dostat dovnitř.
5. $C_J > 2U(L_1)$: kometa může buď obíhat Slunce, nebo Jupiter, anebo obíhá tuto dvojici ve velké vzdálenosti, nemůže však mezi orbitami přecházet.

Dva zvláštní tvary drah dostaly svoje názvy: pokud se těleso pohybuje pouze v okolí bodu L_4 (nebo L_5), jedná se o orbitu typu „pulec“ (angl. tadpole); například Trojané mají takové dráhy. Obíhá-li těleso body L_4 , L_3 a L_5 tam a zpět, jde o typ „podkova“ (horseshoe); pěknými komplikovanými příklady ze sluneční soustavy mohou být asteroid (3753) Cruithne v rezonanci 1/1 se Zemí nebo koorbitální satelity Saturnu Janus a Epimetheus.

0.1.3 Lagrangeovy librační body

Librační body jsou místa, kde se kometa nepohybuje (mysleno samozřejmě v koroťující soustavě, tzn. vzhledem ke Slunci a k Jupiteru; kdyby se nepohybovala v nekoroťující, spadne na Slunce). To znamená, že všechny derivace jsou nulové:

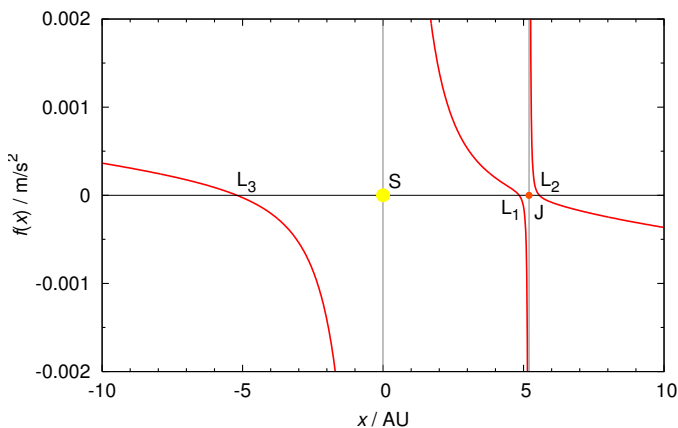
$$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0. \tag{9}$$

Dosazením této podmínky do pohybových rovnic (5) až (7) obdržíme:

$$\begin{aligned} -n^2x &= -G \left[m_1 \frac{x + \bar{\mu}a_J}{R_1^3} + m_2 \frac{x - (1-\bar{\mu})a_J}{R_2^3} \right], \\ -n^2y &= -G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} \right] y, \\ 0 &= -G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} \right] z. \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice okamžitě plyne, že $z = 0$, tedy všechny librační body nutně leží v rovině Jupiterovy dráhy kolem Slunce. Jedním z řešení druhé rovnice je $y = 0$, pak ovšem podle první rovnice:

$$f(x) \equiv -n^2x + G \left[m_1 \frac{\text{sgn}(x + \bar{\mu}a_J)}{(x + \bar{\mu}a_J)^2} + m_2 \frac{\text{sgn}(x - (1-\bar{\mu})a_J)}{(x - (1-\bar{\mu})a_J)^2} \right] = 0. \tag{10}$$



Obrázek 4: Průběh funkce $f(x)$ a odpovídající polohy kolineárních Lagrangeových bodů L_1 , L_2 a L_3 pro soustavu Slunce–Jupiter.

Kořeny této funkce $f(x)$ jsou polohami libračních bodů (její průběh je obr. 4).

V případě nekolineárních bodů, když je $y \neq 0$, musí zřejmě platit soustava dvou nelineárních rovnic:

$$G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} - \frac{n^2}{G} \right] x + G \left[\frac{m_1 \bar{\mu} a_J}{R_1^3} - \frac{m_2 (1 - \bar{\mu}) a_J}{R_2^3} \right] = 0,$$

$$G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} - \frac{n^2}{G} \right] y = 0.$$

Její řešení je možné zajistit tak, že výrazy v hranatých závorkách položíme identicky rovny nule, čímž obdržíme jednodušší soustavu, pouze pro R_1 a R_2 (navíc dosadíme za $n^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a_J^3}$, $\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ a $(1-\bar{\mu}) = \frac{m_1}{m_1+m_2}$):

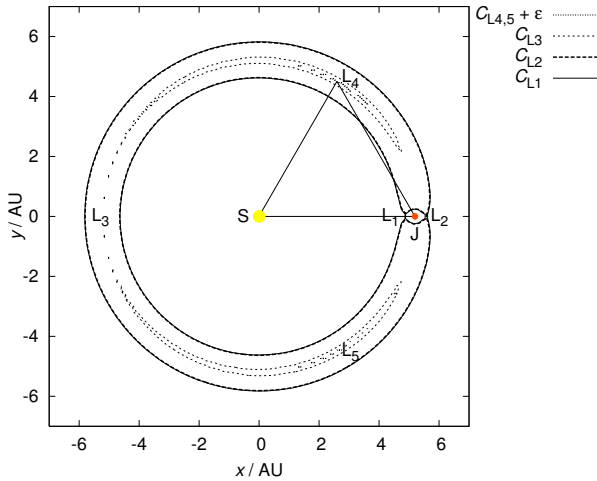
$$\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} - \frac{m_1 + m_2}{a_J^3} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{m_1 m_2 a_J}{R_1^3} - \frac{m_2 m_1 a_J}{R_2^3} = 0. \quad (12)$$

Řešení je evidentní: $R_1 = R_2 = a_J$, což znamená dva librační body L_4 a L_5 ve vrcholech *rovnoramenných trojúhelníků* Slunce–Jupiter–librační bod (viz obr. 5).

Bez odvození uvádíme přibližné vztahy pro výpočet poloh Lagrangeových bodů a příslušné hodnoty C_J v případě malých poměrů hmot (viz [7], $\alpha \equiv (\frac{m_2}{3m_1})^{\frac{1}{3}}$):

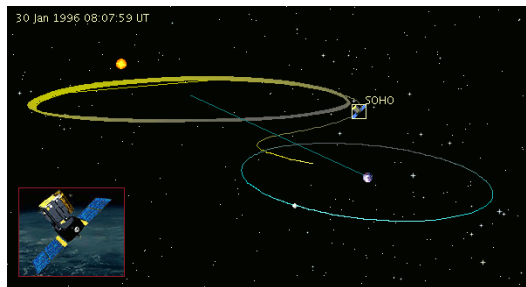
bod	x/a_J	y/a_J	$C_J/(a_J n)^2$
L_1	$(1-\bar{\mu}) - \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{9}\alpha^3 + \frac{23}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5)$	0	$3 + 3^{\frac{4}{3}}\bar{\mu}^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}\bar{\mu} + \mathcal{O}(\bar{\mu}^2)$
L_2	$(1-\bar{\mu}) + \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5)$	0	$3 + 3^{\frac{4}{3}}\bar{\mu}^{\frac{2}{3}} - \frac{14}{3}\bar{\mu} + \mathcal{O}(\bar{\mu}^2)$
L_3	$-\bar{\mu} - 1 + \frac{7}{12}\frac{m_2}{m_1} - \frac{7}{12}(\frac{m_2}{m_1})^2 + \frac{13223}{20736}(\frac{m_2}{m_1})^3 + \mathcal{O}(\frac{m_2}{m_1})^4$	0	$3 + \bar{\mu} + \mathcal{O}(\bar{\mu}^2)$
L_4	$\frac{1}{2} - \bar{\mu}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3 - \bar{\mu} + \mathcal{O}(\bar{\mu}^2)$
L_5	$\frac{1}{2} - \bar{\mu}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3 - \bar{\mu} + \mathcal{O}(\bar{\mu}^2)$



Obrázek 5: Polohy Lagrangeových libračních bodů L_1 až L_5 v soustavě Slunce–Jupiter (s poměrem hmotností $\bar{\mu} \doteq 10^{-3}$). „Kostrbatost“ izochar potenciálu $2U$ je jen numerickým artefaktem.

Stabilita libračních bodů. Podrobnější analýza ukazuje, že body L_4 a L_5 jsou lineárně stabilní, je-li $\bar{\mu} \lesssim 0,0385$, což je pro Slunce–Jupiter splněno.² Znamená to, že těleso může okolí těchto bodů setrvat velmi dlouhou dobu. Ostatně v Lagrangeových bodech příslušejících Jupiteru pozorujeme početnou populaci Trojanů a Řeků, čítající více než 10^3 členů. Jednotlivé Trojany známe i u jiných planet: čtyři u Marsu a pět u Neptunu.

Body L_1 , L_2 a L_3 jsou naproti tomu exponenciálně nestabilní. Nestabilita ale není „hrozivá“ — pro systém Slunce–Země může těleso zůstat v jejich okolí řádově měsíc. Poblíž L_1 a L_2 jsou například umístěny kosmické sondy SOHO (obr. 6) nebo WMAP; jejich dráha se musí jen několikrát ročně korigovat raketovými motory, aby neodlétly pryč.



Obrázek 6: Trajektorie sondy SOHO a její poloha 30. 1. 1996 při transferu od Země k bodu L_1 , okolo kterého dnes sonda obíhá. Pro názornost jsou zakresleny také Slunce, Země a oběžná dráha Měsíce. Převezato z <http://orbits.esa.int/>.

² Toto platí při současné konfiguraci planet. Pokud se ale Jupiter a Saturn nacházely poblíž rezonance středních pohybů 1:2, byla oblast okolo L_4 a L_5 v tu dobu zcela nestabilní.

0.1.4 Tisserandův parametr

Při obíhání samotné komety okolo Slunce (v problému dvou těles) by byly keplerovské orbitální elementy (a, e, I, ϖ, Ω) konstantami. Při blízkém přiblížení komety k Jupiteru (v problému tří těles), ale evidentně konstantní nebudou — Jupiter může zcela změnit velkou poloosu, excentricitu i sklon její dráhy (viz obr. 9).

I při výrazně odlišné dráze před přiblížením a po přiblížení však můžeme poznat, že se vlastně jedná o tutéž kometu, a to s využitím Jacobiho integrálu, který se v problému tří těles zachovává vždy, i při blízkých přiblíženích. Potřebujeme pouze vyjádřit C_J v inerciálních (nečárkovaných) souřadnicích a pak jako funkci a, e, I .

Nejprve opišme Jacobiho integrál v neinerciálních (čárkovaných) souřadnicích:

$$C_J = n^2(x'^2 + y'^2) + 2G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right] - (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2).$$

Provedme zpětnou transformaci souřadnic (v (3) stačí zaměnit n za $-n$):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{(\dot{x} + ny)}^a \cos nt + (\dot{y} - nx) \sin nt \\ \underbrace{(\dot{y} - nx)}_b \cos nt - \underbrace{(\dot{x} + ny)}_{\dot{z}'} \sin nt \\ \dot{z}' \end{pmatrix}.$$

První dva členy C_J jsou vůči rotaci invariantní, pouze u třetího musíme počítat:

$$\begin{aligned} \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 &= a^2 \cos^2 nt + 2ab \sin nt \cos nt + b^2 \sin^2 nt + \\ &+ b^2 \cos^2 nt - 2ab \sin nt \cos nt + a^2 \sin^2 nt + \dot{z}'^2 \\ &= a^2 + b^2 + \dot{z}'^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}ny + n^2y^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{y}nx + n^2x^2 + \dot{z}^2 \end{aligned}$$

Jacobiho integrál v inerciálních souřadnicích je tedy:

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right] - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2n(xy - yx) - n^2(x^2 + y^2).$$

Nyní využijeme dva známé vztahy z problému dvou těles — integrál „živé síly“ a integrál momentu hybnosti (představujeme si přitom, že daleko od Jupitera bude pohyb komety dobře aproximovaný keplerovskou elipsou; zde $\mu = G(m_1 + m_2)$):

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

$$h = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = |(0, 0, x\dot{y} - y\dot{x})| = \sqrt{a(1 - e^2)}\mu.$$

Vzhledem k tomu, že dráha komety může být skloněná k dráze Jupitera o úhel I , musíme pro naše souřadnice vzít:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = h \cos I.$$

Po dosažení je:

$$C_J = 2G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right] - Gm_1 \left[\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a} \right] + 2n\sqrt{a(1-e^2)Gm_1} \cos I.$$

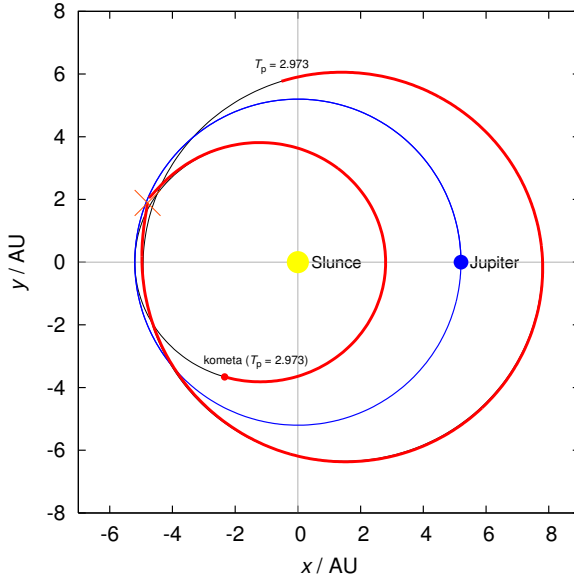
Budeme-li ještě předpokládat, že $m_2 \ll m_1$ (to je pro Jupiter–Slunce dobře splněno) a zároveň $R_2 \neq 0$ (tzn. že C_J pro kometu počítáme, když jsme daleko od Jupitera), platí přibližně:

$$C_J \doteq \frac{Gm_1}{a} + 2n\sqrt{a(1-e^2)Gm_1} \cos I,$$

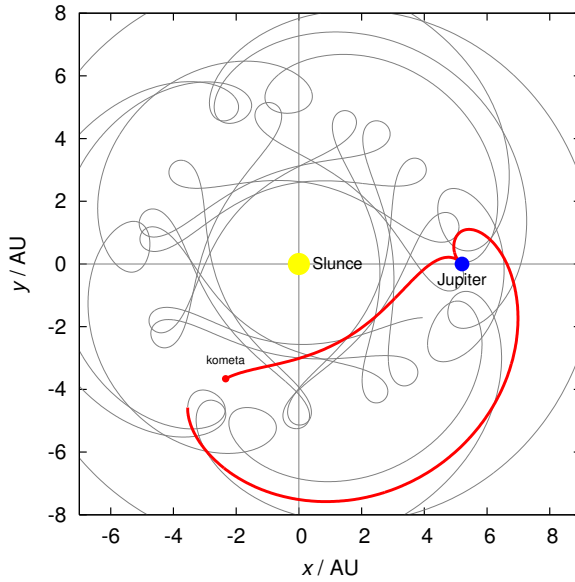
Nakonec dosadíme za $n \doteq \sqrt{\frac{Gm_1}{a^3}}$ a označíme $T_p = C_J \frac{a_J}{Gm_1}$ jako *Tisserandův parametr*:

$$T_p = \frac{a_J}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{a_J}(1-e^2)} \cos I \doteq \text{konst.} \quad (13)$$

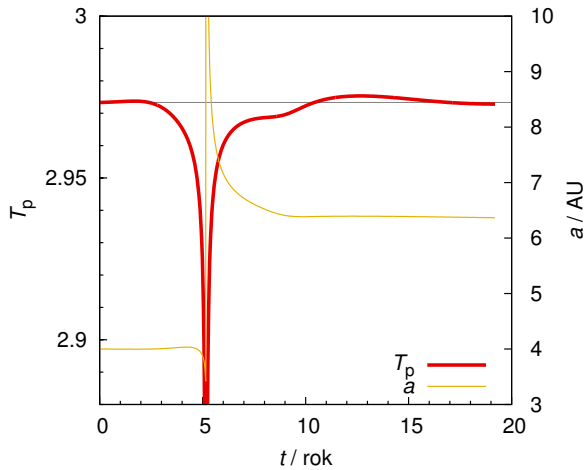
Ať už kometu prodělá přiblížení k Jupiteru kolik chce, hodnota $T_p(a, e, I)$ se pro její dráhu (přibližně) zachovává (viz příklady na obr. 7 až 9 a v tab. 1).



Obrázek 7: Orbita komety před přiblížením k Jupiteru a po něm, přičemž Tisserandův parametr je pro obě dráhy přibližně stejný. Tenkou čarou jsou naznačeny také oskulační elipsy platné pro začátek a konec skutečné trajektorie; mimo blízké přiblížení k Jupiteru jsou velmi dobrou aproximací pohybu. Oskulační sklon je po celou dobu roven nule (tedy $z = 0$). Výpočet numerickým integrátorem `swift_bs`.



Obrázek 8: Tatáž trajektorie jako na obr. 7, ale v korotujícím systému. Tenkou čarou je znázorněný další vývoj po dobu 300 let; namísto elips v inerciálním systému jsou patrné typické „kličky“ v korotujícím. (Slunce a Jupiter stále zůstávají v téže poloze, v jaké je vidíme na obrázku.)



Obrázek 9: Tisserandův parametr T_p a velká poloosa a v závislosti na čase t pro dráhu komety zobrazenou na obr. 7. S výjimkou blízkého přiblížení (kdy neplatí použité aproximace) je Tisserandův parametr (alias Jacobiho integrál) prakticky konstantní, i když u velké poloosy (alias celkové energie) je evidentní skok.

datum	q/AU	e	$I/^\circ$	T_J
31. 12. 1918	5,789	0,160	3,08	3,024
16. 7. 1950	3,405	0,143	3,98	3,035
18. 6. 1983	5,471	0,243	1,95	3,005

Tabulka 1: Vzdálenost pericentra $q = a(1 - e)$, excentricita, sklon a Tisserandův parametr pro kometu 39P/Oterma. Přestože kometa během 20. století prodělala dvě těsná přiblížení k Jupiteru, 27. října 1937 na 0,165 AU a 12. dubna 1963 na 0,095 AU, zůstává její T_J přibližně zachováno.

0.1.5 Komety Jupiterovy rodiny

Velmi pěknou aplikací problému tří těles je vysvětlení původu komet Jupiterovy rodiny (JFC), tj. komet, které mají afélium (nebo perihélium) v blízkosti Jupitera. Původem se totiž jedná o tělesa Kuiperova pásu (KBO), která se díky blízkým přiblížením k velkým planetám přesouvají z vnější do vnitřní části sluneční soustavy. Právě popis tohoto mechanismu nyní provedeme.

Zvolme počáteční elementy komety v Kuiperově pásu: $a = 39,5 \text{ AU}$, $I = 0^\circ$ a excentricitu takovou, aby se kometa v periheliu přibližovala k Neptunu, tzn. $q = a(1 - e) = a_{\text{Neptunu}} = 30,1 \text{ AU} \Rightarrow e \doteq 0,24$. Co se bude dít při blízkém přiblížení komety k Neptunu? Jak se dráha komety může změnit? Především, podle *principu kauzality*, musí i „rozptýlená“ trajektorie stále procházet v blízkosti Neptunu! (Nemůže příliš „odskočit“; představíme-li si pohyb komety v minulosti, nikdy by Neptun nepotkala.) V nejpříznivějším případě bude pozměněný afel komety u Neptunu:

$$Q' = a'(1 + e') = a_N. \quad (14)$$

Zároveň ovšem musí zůstat zachována hodnota Tisserandova parametru *vzhledem k Neptunu*:

$$T_N = T'_N = \frac{a_N}{a'} + 2 \overbrace{\cos I'}^{\simeq 1} \sqrt{\frac{a'}{a_N} (1 - e'^2)}, \quad (15)$$

kteřou spočteme z počátečních elementů a , e komety ($T_N \doteq 2,99$). Vztahy (14) a (15) tvoří soustavu dvou nelineárních rovnic pro proměnné a' , e' . Když vyjádříme z první rovnice $\frac{a_N}{a'}$ a dosadíme do druhé, obdržíme kvadratickou rovnici pro e' :

$$e'^2 + (-2T_N + 6)e' + (T_N^2 - 2T_N - 3) = 0,$$

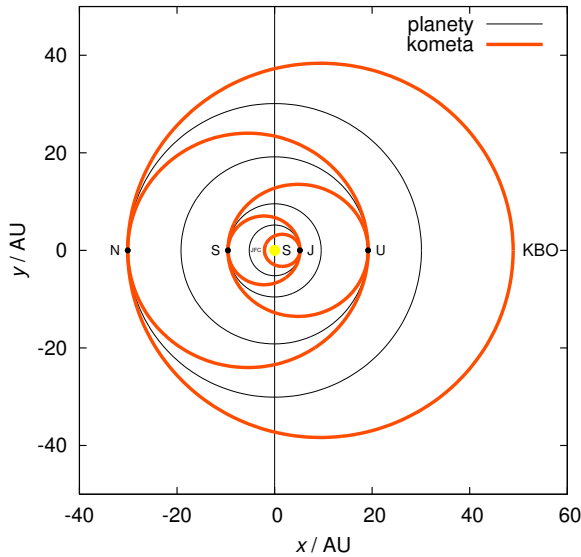
jejímž řešením v oboru kladných reálných čísel je:

$$e' = T_N - 3 + 2\sqrt{3 - T_N} \doteq 0,21. \quad (16)$$

Snadno pak dopočteme, že $a' = \frac{a_N}{(1+e')} \doteq 24,8 \text{ AU}$ a perihélium $q' = a'(1 - e') \doteq 19,5 \text{ AU}$. Vidíme, že Neptun je schopen rozptýlit kometu *nanejvýš k Uranu* (s $a_U = 19,2 \text{ AU}$), nikoli k Saturnu ($a_S = 9,6 \text{ AU}$), natož rovnou k Jupiteru ($a_J = 5,2 \text{ AU}$).

Co se bude dít dál? Jakmile se dráha komety začne přibližovat Uranu, může ji Uran začít rozptylovat stejným mechanismem. Jako počáteční a , e pro výpočet

rozptylu Uranem *nevezmeme* konečná a' , e' po rozptylu Neptunem, ale taková, že $q = a_U$ a $Q = a_N$, konkrétně $a = 24,6$ AU a $e = 0,22$. Stejně jako předtím spočteme Tisserandův parametr, ale tentokrát vzhledem k Uranu ($T_U = 2,99$), a z rovnice (16) zjistíme, že $e' = 0,20$, $a' = 16,0$ AU, $q' = 12,8$ AU. Dráha se již přibližuje Saturnu dosti těsně.



Obrázek 10: Dráhy čtyřech velkých planet a komety postupně „poskakující“ z Kuiperova pásu mezi komety Jupiterovy rodiny.

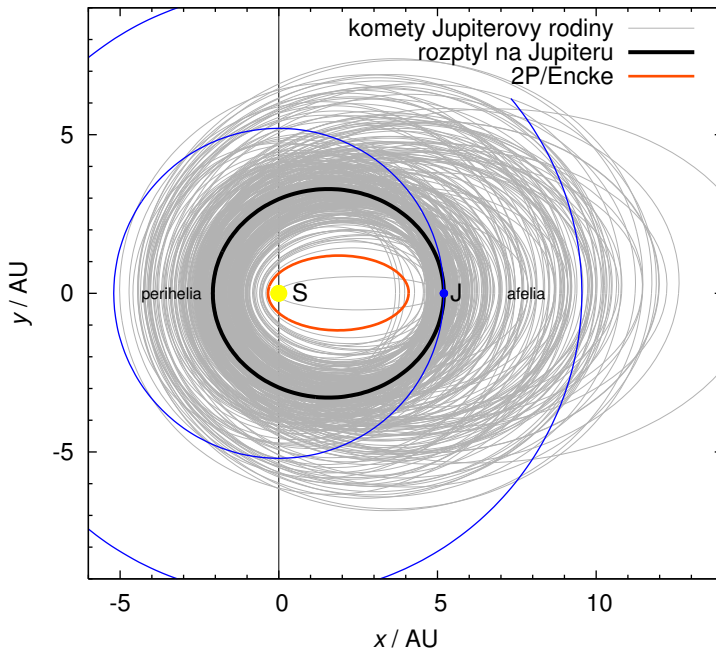
Asi je zřejmé, jak bychom pokračovali: stejně bychom popsali rozptylování na Saturnu a na Jupiteru. Konečná trajektorie komety, po rozptýlení na Jupiteru, vypadá takto:

$$e' = 0,27, \quad a' = 4,14 \text{ AU}, \quad q' = 3,07 \text{ AU}.$$

Podle obr. 11 vidíme, že se jedná o dráhu komety Jupiterovy rodiny.

Tělesa Kuiperova pásu tedy „poskakují“ od Neptunu k Uranu, od Uranu k Saturnu, od Saturnu k Jupiteru³, kde skončí, protože žádná velká planeta uvnitř dráhy Jupitera není. Komety pak mohou po tisíce oběhů vykazovat aktivitu — tvořit komu a ohon v menších vzdálenostech od Slunce. Neaktivní komety se nám jeví jako asteroidy (na typicky kometárních dráhách).

³ Kentauri, tj. pozorované asteroidy křížící dráhy velkých planet, jsou zřejmě právě taková tělesa „na cestě“.



Obrázek 11: Orbity komet Jupiterovy rodiny (skloněné do roviny dráhy Jupitera a otočené tak, že všechna perihélia jsou vlevo a afélia vpravo) v porovnání s typickou dráhou rozptýlenou na Jupiteru (odvozenou z problému tří těles). Záhadou je původ *aktivní* komety 2P/Encke, která má orbitu od Jupitera oddělenou. Vývoj na takovou dráhu přitom trvá miliony let, během kterých by se měla kometa dávno vyčerpat.

Literatura

Učebnice

- [1] BEATTY, J. K., PETERSEN, C. C., CHAIKIN, A.: *The New Solar System*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. ISBN 0521369657.
- [2] BERTOTTI, B., FARINELLA, P., VOKROUHLICKÝ, D.: *Physics of the Solar System*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 1402014287.
- [3] BOTTKÉ, W. F., CELLINO, A., PAOLICCHI, P., BINZEL, R. P. (editoři): *Asteroids III*. Tuscon: The University of Arizona Press, 2002. ISBN 0816522812.
- [4] CANUP, R. M., RIGHTER, K. (editoři): *Origin of the Earth and Moon*. Tuscon: The University of Arizona Press, 2000. ISBN 0816520739.
- [5] FERNÁNDEZ, J. A.: *Comets. Nature, dynamics, origin and their cosmogonical relevance*. Dordrecht: Springer, 2005. ISBN 1402034903.
- [6] FESTOU, M. C., KELLER, H. U., WEAVER, H. A. (editoři): *Comets II*. Tuscon: The University of Arizona Press, 2004. ISBN 0816524505.
- [7] MURRAY, C. D., DERMOTT, S. F.: *Solar System Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. ISBN 0521575974.
- [8] DE PATER, I., LISSAUER, J. J.: *Planetary Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN 0521853710.
- [9] SEIDELMAN, P. K. (editor): *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. Washington: U. S. Naval Observatory, 2005. ISBN 1891389459.

Reference

- [10] ALVAREZ, L. W., ALVAREZ, W., ASARO, F., MICHEL, H. V.: *Extraterrestrial cause for the Cretaceous Tertiary extinction*. *Science*, **208**, s. 1095, 1980.
- [11] ARTEMIEVA, N., PIERAZZO, E., STÖEFFLER, D.: *Numerical modeling of tektite origin in oblique impacts: Implications to Ries-Moldavites strewn field*. *Bull. of the Czech Geological Survey*, **77**, 4, s. 303–311, 2002.
- [12] ASAY, J. R., SHAHINPOOR, M. (editoři): *High-pressure shock compression of solids*. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [13] BARUCCI, M. A., BOEHNHARDT, H., CRUIKSHANK, D. P., MORBIDELLI, A. (editoři): *The Solar System beyond Neptune*. Tuscon: The University of Arizona Press, 2008. ISBN 978-0816527557.
- [14] BEAULIEU, J.-P. aj.: *Discovery of a cool planet of 5.5 Earth masses through gravitational microlensing*. *Nature*, **439**, 437, 2006.
- [15] BERNARD, J. H., ROST, R. aj.: *Encyklopedický přehled minerálů*. Praha: Academia, 1992.
- [16] BOČEK, M.: *Petrologické složení povrchu a kůry Měsíce*. *Povětroň*, **14**, S1, 3, 2006.
- [17] BOTTKÉ, W. F., LEVISON, H. F., NESVORNÝ, D., DONES, L.: *Can planetesimals left over from terrestrial planet formation produce the lunar Late Heavy Bombardment?*. *Icarus*, **190**, s. 203, 2007.
- [18] BOTTKÉ, W. F., RUBINCAM, D. P., BURNS, J. A.: *Dynamical evolution of main belt meteoroids: Numerical simulations incorporating planetary perturbations and Yarkovsky thermal forces*. *Icarus*, **145**, s. 301–331, 2000.
- [19] BOTTKÉ, W. F., VOKROUHLICKÝ, D., NESVORNÝ, D.: *An asteroid breakup 160 Myr ago as the probable source of the K/T impactor*. *Nature*, **449**, 7158, s. 48–53.

- [20] BOTTKÉ, W. F. aj.: *Debiased orbital and absolute magnitude distribution of the near-Earth objects. Icarus*, **156**, 2, s. 399–433, 2002.
- [21] BOTTKÉ, W. F. aj.: *The E-Belt: A possible missing link in the Late Heavy Bombardment. LPI Cont.*, **41**, s. 1269, 2010.
- [22] BOWELL, T.: *AstOrb* [online]. [cit. 2008-09-30].
(<ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.html>).
- [23] BOWELL, E. aj.: *Application of photometric models to asteroids.* in *Asteroids II*, R. Binzel, T. Gehlers, M. S. Matthews (eds), Tuscon: University of Arizona Press, 1989, s. 524–556.
- [24] BRASSER, R., MORBIDELLI, A., GOMES, R., TSIGANIS, K., LEVISON, H. F.: *Constructing the secular architecture of the solar system II: the terrestrial planets. Astron. Astrophys.*, **507**, s. 1053–1065, 2010.
- [25] BROŽ, M.: *Yarkovsky Effect and the Dynamics of the Solar System*. Dizertační práce, Karlova univerzita, Praha, 2006.
- [26] BROŽ, M.: *Yarko-site* [online]. [cit. 2008-09-30].
(<http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/mp/>).
- [27] BROŽ, M. aj.: *Planetární stezka v Hradci Králové* [online]. [cit. 2008-12-10].
(http://www.astrohk.cz/planetarni_stezka/).
- [28] BROŽ, M., NOSEK, M., TREBICHAŤSKÝ, J., PECINOVÁ, D. (editoři): *Sluneční hodiny na pevných stanovištích. Čechy, Morava, Slezsko a Slovensko*. Praha: Academia, 2004. ISBN 8020012044.
- [29] BROŽ, M., VOKROUHLICKÝ, D.: *Asteroid families in the first-order resonances with Jupiter. Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **390**, s. 715, 2008.
- [30] BRUNS, H., *Acta Math.*, **11**, s. 25, 1887.
- [31] BURBINE, T. H. aj.: *Meteoritic parent bodies: their number and identification.* in *Asteroids III*, W. F. Bottke Jr., A. Cellino, P. Paolicchi, a R. P. Binzel (eds), Tuscon: University of Arizona Press, 2002, s. 653–667.
- [32] BURNS, J. A., LAMY, P. L., SOTER, S.: *Radiation forces on small particles in the Solar System. Icarus*, **40**, s. 1–48, 1979.
- [33] BURNS, J. A., SAFRONOV, V. S.: *Asteroid nutation angles. Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **165**, 403, 1973.
- [34] CALLIGAN, D. P., BAGGALEY, W. J.: *The radiant distribution of AMOR radar meteors. Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **359**, s. 551–560, 2005.
- [35] CANUP, R. M.: *Origin of Saturn's rings and inner moons by mass removal from a lost Titan-sized satellite. Nature*, **468**, s. 943, 2010.
- [36] CAPITAINE, N. aj.: *Proceedings of the IERS Workshop on the Implementation of the New IAU Resolutions*. IERS Technical Note No. 29. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2002.
- [37] CARROL, S. M.: *Lecture Notes on General Relativity* [online]. [cit. 2010-03-08].
(<http://preposterousuniverse.com/grnotes/>).
- [38] CELLINO, A. aj.: *Polarimetric observations of small asteroids: Preliminary results. Icarus*, **138**, s. 129–140, 1999.
- [39] ČEPLCHA, Z.: *Geometric, dynamic, orbital and photometric data on meteoroids from photographic fireball networks. Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **38**, s. 222–234, 1987.
- [40] ČEPLCHA, Z. aj.: *Meteor phenomena and bolides. Space Science Reviews*, **84**, s. 327–471, 1998.
- [41] *Cryovolcanism and Geologic Analogies* [online]. [cit. 2009-04-30].
(<http://mivo-sys.tripod.com/cryo.html>).
- [42] ČAPEK, D., VOKROUHLICKÝ, D.: *The YORP effect with finite thermal conductivity. Icarus*, **172**, s. 526–536, 2004.
- [43] DELBÒ, M.: *The nature of near-Earth asteroids from the study of their thermal infrared emission*. Ph.D. thesis, Freie Univ. Berlin, 2004.

- [44] DONES, L., WEISSMAN, P. R., LEVISON, H. F., DUNCAN, M. J.: *Oort cloud formation and dynamics*. in Comets II, M. C. Festou, H. U. Keller, H. A. Weaver (eds.), University of Arizona Press, Tucson, s. 153–174, 2004.
- [45] *Earthquakes* [online]. [cit. 2010-03-01].
(<http://pubs.usgs.gov/gip/earthq1/plate.html>).
- [46] *Encyclopedia Britannica. Hadley cell* [online]. [cit. 2010-02-24].
(<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/251175/Hadley-cell>).
- [47] *Encyclopedia Britannica. Navigation* [online]. [cit. 2011-05-29].
(<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/407011/navigation>).
- [48] ESPOSITO, L. W.: *Planetary rings. Reports on Progress in Physics*, **65**, s. 1741–1783, 2002.
- [49] FAIRBAIRN, M. B.: *Principles of planetary photometry* [online]. [cit. 2012-06-05].
(<http://orca.phys.uvic.ca/~tatum/plphot.html>), 2004.
- [50] FARINELLA, P., VOKROUHLICKÝ, D., HARTMANN, W. K.: *Meteorite delivery via Yarkovsky orbital drift. Icarus*, **132**, s. 378–387, 1998.
- [51] FOUCHARD, M. aj.: *The key role of massive stars in Oort cloud comets dynamics. Icarus*, **214**, s. 334–347, 2011.
- [52] FOUKAL, P. V.: *Solar Astrophysics*. Weinheim: Wiley-VCH, 2004. ISBN 3527403744.
- [53] FRANKEL, C.: *Volcanoes of the Solar System*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. ISBN 0521477700.
- [54] GABZDYL, P.: *Prohlídka Měsíce* [online]. [cit. 2009-02-05].
(<http://www.moon.astronomy.cz/>).
- [55] *Geologischer Wanderweg im Steinheimer Becken* [online]. [cit. 2003-1-1].
(<http://www.pg.aa.bw.schule.de/aktiv/geoproj/sbecken/wanderfr.htm>).
- [56] GOMES, R., LEVISON, H. F., TSGANIS, K., MORBIDELLI, A.: *Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets. Nature*, **435**, s. 466, 2005.
- [57] *GPS SPS Signal Specification* [online]. [cit. 2011-05-25].
(<http://www.navcen.uscg.gov/pubs/gps/sigspec/gpssps1.pdf>).
- [58] GRADY, M. M.: *Catalogue of meteorites*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0521663032.
- [59] *Gravity Probe B* [online]. [cit. 2010-04-01]. (<http://einstein.stanford.edu/>).
- [60] GROSCHOFF, P., REIFF, W.: *Der geologische Wanderweg im Steinheimer Becken*. Steinheim am Albuch, 1993.
- [61] GÜDEL, M.: *The Sun in time: activity and environment* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **4**, 2007.
- [62] HACAR, B.: *Mechanika sluneční soustavy*. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948.
- [63] HAGIHARA, Y.: *Celestial Mechanics I*. Cambridge: MIT Press, 1970.
- [64] HALODA, J.: *Meteority a jejich význam pro studium procesů vzniku a vývoje těles sluneční soustavy* [online]. [cit. 2009-01-29].
(<http://astro.mff.cuni.cz/vyuka/AST021/index.html>).
- [65] HAMILTON, A.: *Falling into a black hole* [online]. [cit. 2010-03-17].
(<http://casa.colorado.edu/~ajsh/schw.shtml>).
- [66] HAPKE, B.: *Bidirectional reflectance spectroscopy. 5. The coherent backscatter opposition effect and anisotropic scattering. Icarus*, **157**, s. 523–534, 2002.
- [67] HARMANEC, P., BROŽ, M.: *Stavba a vývoj hvězd*. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 9788073781651.
- [68] HARTOGH, P. aj.: *Ocean-like water in the Jupiter-family comet 103P/Hartley 2. Nature*, **478**, s. 218–220, 2011.
- [69] HIRAYAMA, K.: *Groups of asteroids probably of common origin. Astron. J.*, **31**, 743, s. 185–188, 1918.
- [70] HOLMES, N.: *‘Shocking’ gas-gun experiments* [online]. [cit. 2008-11-13].
(<https://www.llnl.gov/str/Holmes.html>).

- [71] HOLSAPPLE, K. aj.: *Asteroid spin data: no evidence of rubble-pile structures*. 36th Lunar and Planetary Science Conference, League City, Texas, 2005.
- [72] HORSKÝ, J., NOVOTNÝ, J., ŠTEFANÍK, M.: *Mechanika ve fyzice*. Praha: Academia, 2001. ISBN 8020002081.
- [73] HOWE, R.: *Solar internal rotation and its variation* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **6**, 2009.
- [74] HUTCHISON, R.: *Meteorites: A Petrologic, Chemical and Isotopic Synthesis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521035392.
- [75] CHAMBERS, J. E.: *Planetary Migration: What Does It Mean for Planet Formation?*. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **37**, s. 321–344, 2009.
- [76] CHANDRASEKHAR, S.: *The Mathematical Theory of Black Holes*. New York: Oxford University Press, 1998. ISBN 0198503709.
- [77] CHARBONNEAU, D. aj.: *Detection of Planetary Transits Across a Sun-like Star*. *Astrophys. J. Let.*, **529**, 1, s. L45–L48, 2000.
- [78] CHARBONNEAU, P.: *Dynamo models of the solar cycle* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **2**, 2005.
- [79] CHARNOZ, S., MORBIDELLI, A., DONES, L., SALMON, J.: *Did Saturn's rings form during the Late Heavy Bombardment?*. *Icarus*, **199**, s. 413, 2009.
- [80] CHESLEY, S. R., aj.: *Direct detection of the Yarkovsky effect by radar ranging to asteroid 6489 Golevka*. *Science*, **302**, s. 1739–1742, 2003.
- [81] CHLUPÁČ, I. aj.: *Geologická minulost České republiky*. Praha: Academia, 2002.
- [82] CHRISTENSEN-DALSGAARD, J.: *Stellar Oscillations* [online]. [cit. 2010-01-26]. (<http://www.eneas.info/>). 2003.
- [83] *IAU Standards of Fundamental Astronomy* [online]. [cit. 2011-05-25]. (<http://www.iausofa.org/>).
- [84] *International Earth Rotation and Reference Systems Service* [online]. [cit. 2008-11-13]. (<http://www.iers.org/>).
- [85] *IERS Rapid Service* [online]. [cit. 2011-05-25]. (<http://maia.usno.navy.mil/>).
- [86] IVEZIĆ, Ž. aj.: *Solar System objects observed in the Sloan Digital Sky Survey commissioning data*. *Astron. J.*, **122**, 5, s. 2749–2784, 2001.
- [87] JENNISKENS, P.: *Meteor showers and their parent comets*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521853491.
- [88] JOHANNSEN, A. aj.: *Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar disks*. *Nature*, **448**, 7157, s. 1022–1025, 2007.
- [89] JOHNSON, C.: *Precession of a gyroscope and precession of the Earth's axis* [online]. [cit. 2008-09-10]. (<http://www.mb-soft.com/public/precess.html>).
- [90] *JPL Horizons system* [online]. [cit. 2008-09-30]. (<http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>).
- [91] *JPL planetary and lunar ephemerides, DE405* [online]. [cit. 2008-09-30]. (<ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/>).
- [92] KAASALAINEN, M., LAMBERG, L., LUMME, K., BOWELL, E.: *Interpretation of lightcurves of atmosphereless bodies. I. General theory and new inversion schemes*. *Astron. Astrophys.*, **259**, s. 318–332, 1992.
- [93] KAASALAINEN, M. aj.: *Acceleration of the rotation of asteroid 1862 Apollo by radiation torques*. *Nature*, **446**, 7134, s. 420–422, 2007.
- [94] KALAS, P. aj.: *Optical Images of an Exosolar Planet 25 Light-Years from Earth*. *Science*, **322**, 5906, 1345, 2008.
- [95] KAVASCH, J.: *The Ries Meteorite Crater. A geological guide*. Donauwörth: Ludwig Auer GmbH, 1985.
- [96] KELLEY, M. S.: *Comet dust trails* [online]. [cit. 2009-01-31]. (<http://www.physics.ucf.edu/~msk/projects/trails/>).

- [97] KENKMAN, T. aj.: *Structure and formation of a central uplift: A case study at the Upheaval Dome impact crater, Utah*. in Large Meteorite Impacts III, s. 85, 2003. ISBN 0813723841.
- [98] KERR, R. P.: *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*. *Phys. Rev. Lett.*, **11**, s. 237–238, 1963.
- [99] KNUXTSON, H. aj.: *A map of the day–night contrast of the extrasolar planet HD 189733b*. *Nature*, **447**, 7141, s. 183–186, 2007.
- [100] KOKUBO, E., IDA, S.: *Formation of protoplanets from planetesimals in the solar nebula*. *Icarus*, **143**, s. 15–27, 2000.
- [101] KOKUBO, E., IDA, S., MAKINO, J.: *Evolution of a circumterrestrial disk and formation of a single Moon*. *Icarus*, **148**, 2, s. 419–436, 2000.
- [102] KOZAI, Y.: *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity*. *Astron. J.*, **67**, 9, 591, 1962.
- [103] KRING, D. A., BAILEY, J.: *Terrestrial impact craters* [online]. [cit. 2008-11-13]. (http://www.lpi.usra.edu/science/kring/epo_web/impact_cratering/World_Craters_web/intromap.html).
- [104] KRONK, G.: *Cometography* [online]. [cit. 2009-01-20]. (<http://cometography.com/>).
- [105] LANDI DEGL'INNOCENTI, E., LANDOLFI, M.: *Polarization in spectral lines*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. ISBN 1402024142.
- [106] LAURETTA, D. S., MCSWEEN, H. Y. (editoři): *Meteorites and the early Solar System II*. Tuscon: The University of Arizona Press, 2006. ISBN 0816525625.
- [107] LEBOWSKY, L. A., SPENCER, J. R.: *Radiometry and thermal modeling of asteroids*. in *Asteroids II*, R. Binzel, T. Gehlers, M. S. Matthews (eds), Tuscon: University of Arizona Press, 1989, s. 128–147.
- [108] LEINHARDT, Z. M., MARCUS, R. A., STEWART, S. T.: *The Formation of the Collisional Family Around the Dwarf Planet Haumea*. *Astrophys. J.*, **714**, s. 1789, 2010.
- [109] LESTER, T. P., MCCALL, M. L., TATUM, J. B.: *Theory of planetary photometry*. *J. Royal Astron. Soc. Canada*, **73**, 5, s. 233–257, 1979.
- [110] LEVISON, H. F.: *Hal's talks* [online]. [cit. 2011-05-03]. (<http://www.boulder.swri.edu/~hal/talks.html>), 2006.
- [111] LEVISON, H. F., DUNCAN, M.: *Swift* [online]. [cit. 2008-09-30]. (<http://www.boulder.swri.edu/hal/swift.html>).
- [112] LEVISON, H. F., MORBIDELLI, A., VANLAERHOVEN, C., GOMES, R., TSIGANIS, K.: *Origin of the structure of the Kuiper belt during a dynamical instability in the orbits of Uranus and Neptune*. *Icarus*, **196**, s. 258, 2008.
- [113] LUMME, K., BOWELL, E.: *Radiative transfer in the surfaces of atmosphereless bodies. I. Theory*. *Astron. J.*, **86**, 11, s. 1695–1704, 1981.
- [114] LYOT, B.: *Etude des Surfaces Planetaires par la Polarisation*. *L'Astronomie*, **38**, s. 102–104, 1924.
- [115] MALHOTRA, R.: *The origin of Pluto's orbit: implications for the Solar System beyond Neptune*. *Astron. J.*, **110**, s. 420–429, 1995.
- [116] MANNINGS, V., BOSS, A. P., RUSSELL, S. S. (editoři): *Protostars and planets IV*. Tuscon: The University of Arizona Press, 2000. ISBN 0816520593.
- [117] MARCAN, S.: *Phase diagram explanation* [online]. [cit. 2009-01-20]. (<http://bhs.smuhsd.org/science-dept/marcan/>).
- [118] MARCY, G. aj.: *Observed Properties of Exoplanets*. *Progress on Theoretical Physics Supplement*, **158**, s. 24–42, 2005.
- [119] MAROIS, C. aj.: *Direct Imaging of Multiple Planets Orbiting the Star HR 8799*. *Science*, **322**, 5906, 1348, 2008.
- [120] MAYOR, M., QUELOZ, D.: *A Jupiter-mass companion to a solar-type star*. *Nature*, **378**, 6555, s. 355–359, 1995.

- [121] MCARTHUR, B. E. aj.: *New Observational Constraints on the ν Andromedae System with Data from the Hubble Space Telescope and Hobby–Eberly Telescope*. *Astrophys. J.*, **715**, 2, s. 1203, 2010.
- [122] MCFADDEN, L.–A., WEISSMAN, P. R., JOHNSON, T. V. (editoři): *Encyclopedia of the Solar System*. San Diego: Academic Press, 2007. ISBN 012088589.
- [123] MCSWEEN, H. Y.: *Meteorites and their parent planets*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [124] MELOSH, H. J.: *Impact cratering. A geologic process*. New York: Oxford University Press, 1989.
- [125] MELOSH, H. J., BEYER, R. A.: *Crater* [online]. [cit. 2012-02-15]. (<http://www.lpl.arizona.edu/tekton/crater.html>).
- [126] MIAC. *Antarctic meteorites* [online]. [cit. 2009-01-28]. (<http://miac.uqac.ca/MIAC/antarct.htm>).
- [127] MILANI, A., KNEŽEVIĆ, Z.: *Asteroid proper elements and the dynamical structure of the asteroid main belt. Icarus*, **107**, 2, s. 219–254, 1994.
- [128] *Minor planet & comet ephemeris service* [online]. [cit. 2008-09-30]. (<http://www.cfa.harvard.edu/iau/MPEph/MPEph.html>).
- [129] MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A.: *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. ISBN 0716703440.
- [130] MORBIDELLI, A., BRASSER, R., GOMES, R., LEVISON, H. F., TSIGANIS, K.: *Evidence from the asteroid belt for a violent past evolution of Jupiter’s orbit*. *Astron. J.*, **149**, s. 1391–1401, 2010.
- [131] MORBIDELLI, A., BRASSER, R., TSIGANIS, K., GOMES, R., LEVISON, H. F.: *Constructing the secular architecture of the solar system I. The giant planets*. *Astron. Astrophys.*, **507**, s. 1041–1052, 2009.
- [132] MORBIDELLI, A., CRIDA, A.: *The dynamics of Jupiter and Saturn in the gaseous protoplanetary disk*. *Icarus*, **191**, s. 158–171, 2007.
- [133] MORBIDELLI, A., CRIDA, A., MASSET, F., NELSON, R. P.: *Building giant-planet cores at a planet trap*. *Astron. Astrophys.*, **478**, s. 929–937, 2008.
- [134] MORBIDELLI, A., LEVISON, H. F.: *Scenarios for the origin of the orbits of the trans-neptunian objects 2000 CR₁₀₅ and 2003 VB₁₂ (Sedna)*. *Astron. J.*, **128**, 2564, 2004.
- [135] MORBIDELLI, A., LEVISON, H. F., TSIGANIS, K., GOMES, R.: *The chaotic capture of Jovian Trojan asteroids during the early dynamical evolution of the Solar System*. *Nature*, **435**, s. 462, 2005.
- [136] MORBIDELLI, A., TSIGANIS, K., CRIDA, A., LEVISON, H. F., GOMES, R.: *Dynamics of the giant planets of the Solar System in the gaseous protoplanetary disk and their relationship to the current orbital architecture*. *Astron. J.*, **134**, s. 1790–1798, 2007.
- [137] MORBIDELLI, A. aj.: *Source regions and timescales for the delivery of water to Earth*. *Meteoritics & Planetary Science*, **35**, 6, s. 1309–1320, 2000.
- [138] NAMOUNI, F., PORCO, C.: *The confinement of Neptune’s ring arcs by the moon Galatea*. *Nature*, **417**, 6884, s. 45, 2002.
- [139] *National Space Science Data Center* [online]. [cit. 2009-02-17]. (<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/>).
- [140] NESVORNÝ, D., MORBIDELLI, A.: *Three-body mean motion resonances and the chaotic structure of the asteroid belt*. *Astron. J.*, **116**, 3029, 1998.
- [141] NESVORNÝ, D., VOKROUHLICKÝ, D.: *Analytic theory of the YORP effect for near-spherical objects*. *Astron. J.*, **134**, 5, s. 1750–1768, 2007.
- [142] NESVORNÝ, D., VOKROUHLICKÝ, D., BOTTKE, W. F.: *The breakup of a Main-Belt asteroid 450 thousand years ago*. *Science*, **312**, s. 1490, 2006.
- [143] NESVORNÝ, D., VOKROUHLICKÝ, D., MORBIDELLI, A.: *Capture of Irregular Satellites during Planetary Encounters*. *Astron. J.*, **133**, s. 1962, 2007.

- [144] NESVORNÝ, D. aj.: *Evidence for asteroid space weathering from the Sloan Digital Sky Survey. Icarus*, **173**, 1, s. 132–152, 2005.
- [145] NESVORNÝ, D. aj.: *Dynamical model for the zodiacal cloud and sporadic meteors. Astron. J.*, **743**, s. 129–145, 2011.
- [146] NESVORNÝ, D. aj.: *Dynamics of dust particles released from Oort cloud comets and their contribution to radar meteors. Astron. J.*, **743**, s. 37–49, 2011.
- [147] NEUKUM, G., IVANOV, B. A., HARTMANN, W. K.: *Cratering records in the inner Solar System in relation to the lunar reference system. Space Sci. Rev.*, **96**, s. 55–86, 2001.
- [148] NORTON, O. R.: *The Cambridge Encyclopedia of Meteorites*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0521621437.
- [149] O'BRIEN, D. P., MORBIDELLI, A., BOTTKE, W. F.: *The primordial excitation and clearing of the asteroid belt — Revisited. Icarus*, **191**, s. 434, 2007.
- [150] ÓPIK, E. J.: *Collision probability with the planets and the distribution of planetary matter. Proc. R. Irish Acad.*, **54**, s. 165–199, 1951.
- [151] OSTRO, S.J. aj.: *Radar imaging of binary near-Earth asteroid (66391) 1999 KW₄. Science*, **314**, 5803, s. 1276–1280, 2006.
- [152] PECINA, P., CEPLECHA, Z.: *New aspects of in single-body meteor physics.. Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **34**, 102, 1983.
- [153] PECINA, P., NOVÁKOVÁ, D.: *Meteorický radar v Ondřejově. Povětroň*, **10**, 6, s. 4, 2002.
- [154] PECHALA, F., BEDNÁŘ, J.: *Průručka dynamické meteorologie*. Praha: Academia, 1991. ISBN 8020001980.
- [155] PETERSON, C.: *A source mechanism for meteorites controlled by the Yarkovsky effect. Icarus*, **29**, s. 91–111, 1976.
- [156] POLLACK, J. B. aj.: *Formation of the giant planets by concurrent accretion of solids and gas. Icarus*, **124**, 1, s. 62–85, 1996.
- [157] POKORNÝ, Z.: *Astronomické algoritmy pro kalkulátory*. Praha: Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, 1988.
- [158] PÖSGES, G., SCHIEBER, M.: *The Ries Crater – Museum Nördlingen*. München: Dr. Friedrich Pfeil, 1997.
- [159] PRAVEC, P. aj.: *Two-period lightcurves of 1996 FG₃, 1998 PG, and (5407) 1992 AX: One probable and two possible binary asteroids. Icarus*, **146**, 1, s. 190–203, 2000.
- [160] PRAVEC, P. aj.: *Ondřejov Asteroid Photometry Project* [online]. [cit. 2008-09-09]. (<http://www.asu.cas.cz/~ppravec/>).
- [161] PRESS, W. R., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W., FLANNERY, B.P.: *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [162] PRÍHODA, P. aj.: *Hvězdářská ročenka 2008*. Praha: Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, 2007. ISBN 9788086017471.
- [163] QUINN, T. R., TREMAINE, S., DUNCAN, M.: *A three million year integration of the earth's orbit. Astron. J.*, **101**, s. 2287–2305, 1991.
- [164] *Reduce* [online]. [cit. 2010-03-08]. (<http://www.reduce-algebra.com/>).
- [165] *Rieskrater-Museum Nördlingen* [online]. [cit. 2001-1-1]. (<http://www.iaag.geo.uni-muenchen.de/sammlung/Rieskrater/RieskraterMuseum.html>).
- [166] RIVERA, E. J. aj.: *The Lick-Carnegie Exoplanet Survey: a Uranus-Mass Fourth Planet for GJ 876 in an Extrasolar Laplace Configuration. Astrophys. J.*, **719**, s. 890, 2010.
- [167] ROBERTSON, H. P.: *Dynamical effects of radiation in the Solar System. Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **97**, 423, 1937.
- [168] ROSENBLATT, P.: *The origin of the Martian moons revisited. Astron. Astrophys. Rev.*, **19**, s. 44, 2011.
- [169] RUBIN, A. E.: *Mineralogy of meteorite groups. Meteoritics and Planetary Science*, **32**, 231, 1997.
- [170] RUBINCAM, D. P.: *Polar wander on Triton and Pluto due to volatile migration. Icarus*, **163**, 2, s. 63–71, 2002.

- [171] RUSSEL, C. T. aj.: *Dawn mission and operations*. Asteroids, Comets, Meteors 2005, editoři Lazzaro, D., Ferraz-Mello, S., Fernandez, J. A., Cambridge: Cambridge University Press, 2006, s. 97–119.
- [172] SACKMANN, I. J., BOOTHROYD, A. I., KRAEMER, K. E.: *Our Sun. III. Present and future*. *Astrophys. J.*, **418**, s. 457–468, 1993.
- [173] SEPKOSKI, J. J.: *Ten years in the library: New data confirm paleontological patterns*. *Paleobiology*, **19**, s. 43–51, 1993.
- [174] SCHNEIDER, J. aj.: *The Extrasolar Planets Encyclopaedia* [online]. [cit. 2011-06-01]. (<http://exoplanet.eu/>).
- [175] SIMPSON, E. K. aj.: *The spin-orbit angles of the transiting exoplanets WASP-1b, WASP-2/b, WASP-38b and HAT-P-8b from Rossiter–McLaughlin observations*. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **414**, 4, s. 3023–3035, 2011.
- [176] SKÁLA, L.: *Úvod do kvantové mechaniky*. Praha: Academia, 2005. ISBN 8020013164.
- [177] SKÁLA, R.: *Impact process: An important geological phenomenon*. *Acta Mus. Nat-Pragae*, Ser. B., Hist. Nat., **52**, s. 111–156, 1996.
- [178] SLIVAN, S. M. aj.: *Spin vectors in the Koronis family: comprehensive results from two independent analyses of 213 rotation lightcurves*. *Icarus*, **162**, s. 285, 2003.
- [179] SPJUTH, S.: *Disk-resolved photometry of small bodies*. Ph.D. thesis, Carolo–Wilhelmina Univ., 2009.
- [180] SPURNÝ, P.: *Fotografické sledování bolidů ve střední Evropě*. *Corona Pragensis*, 2, 2001, (<http://praha.astro.cz/crp/0101a.phtml>).
- [181] *Stardust, JPL, NASA* [online]. [cit. 2006-06-01]. (<http://stardust.jpl.nasa.gov>).
- [182] STAUDACHER, T. aj.: $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ ages of rocks and glasses from the Noerdlinger Ries crater and the temperature history of impact breccias. *J. of Geophysics*, **51**, 1, s. 1–11, 1982.
- [183] STIX, M.: *The Sun. An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag, 2002. ISBN 3540537961.
- [184] STUART, J. S.: *A Near-Earth asteroid population estimate from the LINEAR Survey*. *Science*, **294**, 5547, s. 1691–1693, 2001.
- [185] SUNDMAN, K. E.: *Memoire sur le problème de trois corps*. *Acta Math.*, **36**, s. 105–179, 1912.
- [186] ŠEDIVÝ, P.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity*. Hradec Králové: MAFY, 2003. ISBN 8086148653.
- [187] ŠIDLICHOVSKÝ, M., NESVORNÝ, D.: *Frequency modified Fourier transform and its applications to asteroids*. *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, **65**, 1–2, s. 137–148, 1996.
- [188] TILLOTSON, J. H.: *Metallic equations of state for hypervelocity impact*. General Atomic Report GA-3216, 1962.
- [189] *The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty* [online]. [cit. 2011-05-31]. (<http://physics.nist.gov/constants>).
- [190] *The Ries/Steinheim impact crater field trip* [online]. [cit. 2001-1-1]. (<http://www.-earthsciences.ucl.ac.uk/research/planetaryweb/field/knodle.htm>).
- [191] *The STScI Digitized Sky Survey* [online]. [cit. 2010-02-15]. (http://archive.stsci.edu/cgi-bin/dss_form).
- [192] TSGANIS, K., GOMES, R., MORBIDELLI, A., LEVISON, H. F.: *Origin of the orbital architecture of the giant planets of the solar system*. *Nature*, **435**, s. 459, 2005.
- [193] TUČEK, K.: *Meteority a jejich výskyty v Československu*. Praha: Academia, 1981.
- [194] UDRY S., SANTOS, N. C.: *Statistical Properties of Exoplanets*. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **45**, s. 397–439, 2007.
- [195] VERNAZZA, J. E., AVRETT, E. H., LOESER, R.: *Structure of the solar chromosphere. III — Models of the EUV brightness components of the quiet-sun*. *Astrophys. J. Suppl.*, **45**, s. 635, 1981.
- [196] VOKROUHLICKÝ, D.: *A complete linear model for the Yarkovsky thermal force on spherical asteroid fragments*. *Astron. Astrophys.*, **344**, s. 362–366, 1999.
- [197] VOKROUHLICKÝ, D., FARINELLA, P.: *Efficient delivery of meteorites to the Earth from a wide range of asteroid parent bodies*. *Nature*, **407**, 6804, s. 606–608, 2000.

- [198] VOKROUHLICKÝ, D., NESVORNÝ, D.: *Pairs of asteroids probably of a common origin*. *Astron. J.*, **136**, 1, s. 280–290, 2008.
- [199] VOKROUHLICKÝ, D., NESVORNÝ, D., BOTTKÉ, W. F.: *The vector alignments of asteroid spins by thermal torques*. *Nature*, **425**, s. 147, 2003.
- [200] VOKROUHLICKÝ, D., aj.: *Yarkovsky/YORP chronology of asteroid families*. *Icarus*, **182**, 1, s. 118–142, 2006.
- [201] WALSH, K., MORBIDELLI, A., RAYMOND, S. N., O'BRIEN, D. P., MANDELL, A. M.: *The Low Mass of Mars: First Evidence of Early Gas-Driven Migration by Jupiter*. American Geophysical Union Meeting, abstrakt V53A-2233, 2010.
- [202] WANG, Z., CHAKRABARTY, D., KAPLAN, D. L.: *A debris disk around an isolated young neutron star*. *Nature*, **440**, s. 772, 2006.
- [203] WEIDENSCHILLING, S. J.: *Formation of Planetesimals and Accretion of the Terrestrial Planets*. *Space Science Reviews*, **92**, 1/2, s. 295–310, 2000.
- [204] *Wikipedia*. *Chondrite* [online]. [cit. 2012-05-25]. (<http://en.wikipedia.org/wiki/Chondrite>).
- [205] *Wikipedia*. *Mass spectrometry* [online]. [cit. 2012-05-25]. (http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_spectrometry).
- [206] *Wikipedia*. *Pole star* [online]. [cit. 2012-05-25]. (http://en.wikipedia.org/wiki/Pole_star).
- [207] *Wikipedia*. *Radiometric dating* [online]. [cit. 2012-05-25]. (http://en.wikipedia.org/wiki/Radiometric_dating).
- [208] *Wikipedia*. *Rings of Uranus* [online]. [cit. 2012-05-25]. (http://en.wikipedia.org/wiki/Rings_of_Uranus).
- [209] *Wikipedia*. *Stress–energy tensor* [online]. [cit. 2012-05-25]. (http://en.wikipedia.org/wiki/Stress-energy_tensor).
- [210] WHIPPLE, F.: *A comet model. I. The acceleration of Comet Encke*. *Astrophys. J.*, **111**, s. 375–394, 1950.
- [211] WOLF, M. aj.: *Astronomická příručka*. Praha: Academia, 1992. ISBN 802000467X.
- [212] WOLSZCZAN, A., FRAIL, D. A.: *A planetary system around the millisecond pulsar PSR 1257+12*. *Nature*, **355**, 6356, s. 145–147, 1992.
- [213] WRIGHT, A. W.: *On the polarization of the zodiacal light*. *Memorie della Societa Degli Spettroscopisti Italiani*, **3**, s. 54–55, 1874.
- [214] YODER, C. F.: *Tidal rigidity of Phobos*. *Icarus*, **49**, s. 327–346, 1982.
- [215] ZANHLE, K., SCHENK, P., LEVISON H., DONES, L.: *Cratering rates in the outer Solar System*. *Icarus*, **163**, s. 263–289, 2003.
- [216] ZEĽDOVITCH, Ya. B., Raizer, Yu. P.: *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. Mineola: Dover Publications, 2002. ISBN 0486420027.
- [217] ZHONG, S., ZUBER, M. T.: *Degree-1 mantle convection and the crustal dichotomy on Mars*. *Earth and Planetary Science Letters*, **189**, s. 75–84, 2001.