0.1 Problém dvou těles

Oč nám jde v problému dvou těles? Vypočítat tři Keplerovy zákony pro pohyb planet ze čtyř Newtonových zákonů pro pohyb a gravitaci. Souvislost je sice všeobecně známá, ale skutečný výpočet není zcela přímočarý, zabere nám asi 10 stran. Nejprve si příslušné zákony připomeneme.

0.1.1 Newtonovy a Keplerovy zákony

Newtonovy *pohybové* zákony zní:

1. Existují inerciální[1] vztažné soustavy, v nichž se volné[2] hmotné body pohybují rovnoměrně přímočaře nebo jsou v klidu;
2. působím-li silou $\boldsymbol{F}$ na těleso o hmotnosti m, jeho zrychlení je:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m_{\text{setrvačná}}}; \tag{1}$$

3. když těleso 1 působí silou na těleso 2, pak 2 působí na 1 reakcí:

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}\,. \tag{2}$$

Podle Newtonova *gravitačního* zákona hmotný bod 1 působí na hmotný bod 2 gravitační silou:

$$\boldsymbol{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_{2\,\text{gravitační}}}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r}\,. \tag{3}$$

Měřením byla zjištěna gravitační konstanta $G = (6{,}6743 \pm 0{,}0007)\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{kg}^{-2}\cdot\mathrm{m}^2$ [134]. Pozoruhodné je, že v našem vesmíru platí rovnost $m_{\text{gravitační}} = m_{\text{setrvačná}}$, alespoň to potvrzují měření až do úrovně relativní chyby 10^{-9}.[3] V souvislosti se skoro kulatými planetami se nám také velmi hodí, že gravitační pole *vně homogenní koule* o hmotnosti M je stejné jako okolo hmotného bodu o hmotnosti M.

[1] Tyto soustavy souvisejí spolu *Galileiho transformací* souřadnic $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t$, kde $\boldsymbol{v}$ označuje jejich vzájemnou rychlost a t čas.

[2] Nepůsobí na ně jiné síly než gravitace vzdálených hmot.

[3] To je ostatně důvod, proč může být v obecné teorii relativity nahlížena gravitace jako *křivost prostoročasu* — zrychlení tělesa

$$\boldsymbol{a}_{12} = \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_1} = -G\frac{m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r}$$

totiž nezávisí na tělese samém (není tam m_1), ale na rozložení hmot okolo.

Toto bychom ověřili integrací příspěvků v objemu koule „přes prstýnky“ souosé s $\boldsymbol{r}$ (viz obr. 1): $\Delta = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$, $\Delta^2 = r^2 - 2rr'\cos\phi + r'^2$ (dle kosínové věty). Jednodušší je použít skalární potenciál U místo vektorové síly $\boldsymbol{F} = \nabla U$:

$$U = \int_{\text{kouli}} -\frac{G\,\mathrm{d}m}{\Delta} = -G\int_V \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{\Delta} = -G\int_{r'=0}^{R}\int_{\phi=0}^{\pi}\frac{\rho(r')}{\Delta}\overbrace{2\pi r'\sin\phi}^{\text{obvod}}\; r'\mathrm{d}\phi\;\mathrm{d}r'\,.$$

Trik: $\mathrm{d}\phi$ vyjádřím z $\Delta = (r^2 - 2rr'\cos\phi + r'^2)^{\frac{1}{2}}$ a zaměním integrační meze $(0,\pi)$ za $(r - r', r + r')$.

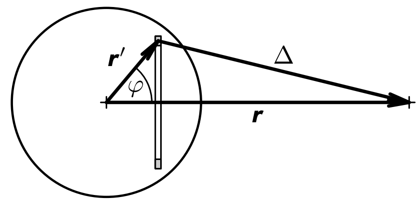
$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\phi} = \frac{1}{2}(r^2 - 2rr'\cos\phi + r'^2)^{-\frac{1}{2}}(-2rr')(-\sin\phi) = \frac{rr'\sin\phi}{\Delta}\,,$$

odkud $\mathrm{d}\phi = \frac{\Delta}{rr'\sin\phi}\mathrm{d}\Delta$ a:

$$U = -G\int_0^R\int_{r-r'}^{r+r'}\frac{\rho(r')}{\Delta}\,2\pi r'\sin\phi\,\frac{\Delta}{rr'\sin\phi}\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{d}r' = -\frac{2\pi G}{r}\int_0^R\int_{r-r'}^{r+r'}\rho(r')r'\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{d}r'$$

$$= -\frac{2\pi G}{r}\int_0^R \rho(r')r'2r'\mathrm{d}r' = -\frac{G}{r}\overbrace{\int_0^R 4\pi r'^2\rho(r')\,\mathrm{d}r'}^{\text{celková hmotnost}} = -\frac{GM}{r}\,,$$

tj. přesně jako hmotný bod.



Obr. 1 — Vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$, Δ, koule a prstýnky.

Nakonec uvedeme empirické *Keplerovy zákony*:

1. planety se pohybují po elipsách, přičemž všechy mají společné ohnisko ⊙;
2. planeta za stejnou dobu opíše průvodičem stejné plochy;
3. mezi velkými poloosami a a oběžnými periodami[4] T planet platí $\dfrac{a^3}{T^2} =$ společné konstantě (tento zákon ale neplatí zcela přesně).

[4] Pozorovat mohu spíše *synodickou* dobu oběhu, potřebuji převod $T_{\text{synodická}} \to T_{\text{siderická}}$. Mezi dvěma opozicemi, které se opakují po T_{syn}, urazí vnitřní planeta úhel $2\pi + \phi$ a vnější pouze ϕ (obr. 2). Pro jejich úhlové rychlosti platí $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_{\text{sid1}}}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_{\text{sid2}}}$, $\omega_1 T_{\text{syn}} = 2\pi + \phi$,

0.1.2 Problém dvou těles

Zavedeme inerciální soustavu souřadnic, vektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ (obr. 3), a napíšeme pohybové rovnice pro těleso 1 a 2, přičemž využijeme *všechny* Newtonovy zákony:[5]

$$\boldsymbol{F}_1 = +G\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r} = m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1\,, \tag{5}$$

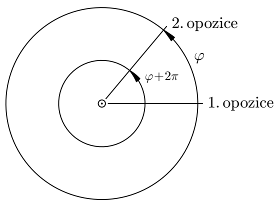
$$\boldsymbol{F}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r} = m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2\,. \tag{6}$$

Jedná se o soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Pokud se nám je podaří vyřešit, budeme znát polohy a rychlosti obou těles. Hledáme tedy *celkem 12 neznámých skalárních funkcí času* (neboli 4 vektorové): $\boldsymbol{r}_1(t)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_1(t)$, $\boldsymbol{r}_2(t)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_2(t)$. Při řešení použijeme tři triky [85]:

1. budeme studovat *relativní* pohyb, nikoli přímo $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$;
2. nejprve najdeme *tvar* trajektorie $r(\phi)$, nikoli $\boldsymbol{r}(t)$;

$\omega_2 T_{\mathrm{syn}} = \phi$; odtud:

$$\frac{1}{T_{\mathrm{sid1}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{syn}}} + \frac{1}{T_{\mathrm{sid2}}} \tag{4}.$$



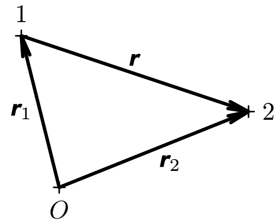
Obr. 2 — Dvě planety obíhající po kruhových drahách ve dvou po sobě následujících opozicích.

[5] Poznámka o derivacích pro ty, kteří o nich ještě neslyšeli: sklon tečny ke grafu funkce $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ popisuje „jak moc se funkce mění"; *derivace* funkce $y(x)$ v bodě x_0 je definována jako limita:

$$y' \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}\,.$$

Příkladem první derivace souřadnic podle času je okamžitá rychlost ($\boldsymbol{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, označuje se též $\dot{\boldsymbol{r}}$); zrychlení je první derivace rychlosti nebo též druhá derivace souřadnic ($\boldsymbol{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\boldsymbol{r}}$). Uveďme derivace některých elementárních funkcí: $C' = 0$, $x' = 1$, $ax' = a$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$. Derivace součtu $(f+g)' = f' + g'$, součinu $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, složené funkce $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$. Opačným úkolem k derivování je hledání *primitivní funkce* (neboli integrování).

3. použijeme přitom *substituci* za $\frac{1}{r}$.



Obr. 3 — Polohové vektory $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}$ pro tělesa 1 a 2.

0.1.3 Pohyb hmotného středu (prvních 6 integrálů)

Snadno najdu prvních 6 integrálů pohybu (celkem jich je 10), které úlohu podstatně zjednoduší (hypoteticky, kdybych našel 12 *prvních* integrálů, tělesa by „trčela" na místě nebo se pohybovala rovnoměrně přímočaře). Součet rovnic (5) a (6) je:

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{0}\,,$$

První neurčitý integrál:

$$m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{a}\,,$$

a druhý:

$$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a}\,t + \boldsymbol{b}\,, \tag{7}$$

kde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou konstantní vektory (ony integrály pohybu; protože $\boldsymbol{b}$ je až druhý integrál, vyskytují se zde konstantní rychlosti, neboli lineární závislost souřadnic na čase). To znamená, že *hmotný střed* $\boldsymbol{T} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$ soustavy je buď v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře.[6]

0.1.4 Rovnice relativního pohybu (3 integrály momentu hybnosti)

Nyní vyšetříme relativní pohyb m_2 vzhledem k m_1 — odečteme (6) od (5) (přejdeme do *neinerciální* souřadnicové soustavy):

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\overbrace{G(m_1 + m_2)}^{\mu}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0 \tag{8}$$

[6] A vůbec nezáleží na tom, že $F_{\mathrm{G}} \propto \frac{1}{r^2}$; stačí, že síly jsou stejně veliké a opačného směru.

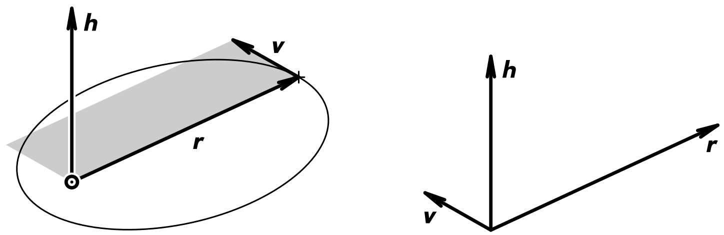
Další integrály pohybu najdeme vektorovým násobením této rovnice $\boldsymbol{r}$:

$$0 = \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r} + \frac{\mu}{r^3} \overbrace{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{0}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}\,,$$

protože vektorový součin rovnoběžných vektorů je vždy $\boldsymbol{0}$. Neurčitý integrál je:

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{h} = \text{konst.} \tag{9}$$

neb $(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{h})' = \overbrace{\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}}^{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{h}$ je „něco jako“ moment hybnosti[7] na jednotku hmotnosti μ. Jinými slovy to znamená, že pohyb probíhá *v rovině* a plošná rychlost se zachovává (obr. 4), což je přesně **2. Keplerův zákon**.[8]
□



Obr. 4 — Vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ (plošná rychlost).

Přechod do polárních souřadnic v rovině. Souřadnicovou soustavu přirozeně orientujeme tak, že rovina xy je kolmá na $\boldsymbol{h}$, dosadíme[9] za $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\,\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\phi})\right]\hat{\phi}$ do vektorové rovnice (8) a obdržíme *skalární* rovnici (příslušnou složce $\hat{r}$):

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}\,, \tag{10}$$

[7] Rozhodně to *není* celkový moment $\boldsymbol{L}$ hybnosti v inerciální soustavě, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_1 \times m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2$; v $\boldsymbol{h}$ jsou přitom vektorové součiny „pomíchané“: $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times (\dot{\boldsymbol{r}}_2 - \dot{\boldsymbol{r}}_1) = \boldsymbol{r}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 - \boldsymbol{r}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_1 + \ldots$

[8] Opět nevyžaduje $F_{\mathrm{G}} \propto \frac{1}{r^2}$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ pouze musí směřovat podél spojnice těles.

[9] Ověření vztahu pro 2. derivaci v polárních souřadnicích je snadné: bázové vektory $\hat{r} = (\cos\phi, \sin\phi)$, $\hat{\phi} = (-\sin\phi, \cos\phi)$; $\dot{\hat{r}} = (-\sin\phi, \cos\phi)\dot{\phi} = \dot{\phi}\hat{\phi}$, $\dot{\hat{\phi}} = -\hat{r}\dot{\phi}$; $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}(-\hat{r}\dot{\phi}) = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\phi})\right]\hat{\phi}$.

Rovnice $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\phi}) = 0$ pro složku $\hat{\phi}$ je naštěstí splněna automaticky, protože to je vlastně vyjádření integrálu $\boldsymbol{h}$ v polárních souřadnicích:

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) = r^2\dot{\phi}\hat{z} \tag{11}$$

a velikost tohoto vektoru je evidentně:

$$h = r^2\dot{\phi} = \text{konst.} \tag{12}$$

Jak ale řešit rovnici (10) pro *dvě* neznámé funkce času $r(t)$, $\phi(t)$?

0.1.5 Eliminace času a odvození tvaru trajektorie

Úplnou eliminaci času t zajistíme pomocí substituce $u = \frac{1}{r}$ a integrálu h. Do rovnice (10) musíme dosadit jednak za $r = \frac{1}{u}$, a jednak za druhou derivaci $\ddot{r}$ podle času. Nejprve spočteme první:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\overbrace{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}^{\equiv\,\dot{\phi} = \frac{h}{r^2} = hu^2} = h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\,; \tag{13}$$

zde jsme elegantně derivovali složenou funkci $u(\phi(t))$ a využili integrál h (12). Druhá je:

$$\ddot{r} = -h\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}\,\dot{\phi} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}\,. \tag{14}$$

Vyjde $-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 = -\mu u^2$ a po krácení:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2}\,, \tag{15}$$

tj. *obyčejná* lineární diferenciální rovnice 2. řádu pro funkci $u(\phi)$. Její obecné řešení „uhádneme“:[10]

$$u = \frac{\mu}{h^2}[1 + e\cos(\phi - \varpi)]\,, \tag{16}$$

kde máme dvě integrační konstanty: e, ϖ[11], plus onen předchozí integrál h a hmotnost μ, které dohromady definují jeden parametr p:

$$p = \frac{h^2}{\mu}\,. \tag{17}$$

[10] Můžeme se přesvědčit jeho derivováním $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{\mu}{h^2}e\sin(\phi - \varpi)$, $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} = -\frac{\mu}{h^2}e\cos(\phi - \varpi)$, že rovnici (15) opravdu splňuje, a bez důkazu „věříme“, že neexistuje nějaké jiné řešení.

[11] ϖ je zvláštní tvar řeckého písmene π, nikoli ω; v TEXu se píše `\varpi`.

0.1.6 Řešení — rovnice kuželosečky

Zpětná substituce dává funkci $r(\phi)$:

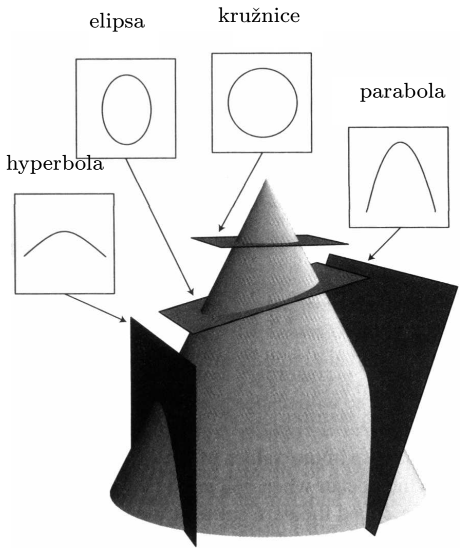
$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\phi - \varpi)}\,, \tag{18}$$

což je *obecná rovnice kuželosečky* s ohniskem v počátku (tělese 1; 2. ohnisko je prázdné), neboli **1. Keplerův zákon**. □

Konstanty nazvýváme e *excentricita*, ϖ délka pericentra, p parametr, protože mají přesně takový geometrický význam. Můžeme rozlišit čtyři případy (obr. 5):

kružnice	$e = 0$	$p = a$
elipsa	$0 < e < 1$	$p = a\,(1 - e^2)$
parabola	$e = 1$	$p = 2q$
hyperbola	$e > 1$	$p = a\,(e^2 - 1)$

kde a označuje *velkou poloosu* a q vzdálenost pericentra od ohniska.



Obr. 5 — Řezy kužele rovinami a příslušné kuželosečky. Převzato z [85].

Polární souřadnice ϕ je zvána *pravá délka* (měřená od osy x); často užíváme *pravou anomálii* f:

$$f = \phi - \varpi\,, \tag{19}$$

měřenou od pericentra. Potom pro elipsu je

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos f}\,. \tag{20}$$

Pro pravoúhlé souřadnice pak pochopitelně platí:

$$x = r\cos\phi\,, \quad y = r\sin\phi\,.$$

Užitečná je znalost vztahů pro vzdálenosti pericentra q a apocentra Q od ohniska:

$$q = a\,(1 - e)\,, \tag{21}$$

$$Q = a\,(1 + e)\,, \tag{22}$$

a také integrálu h vyjádřeného v orbitálních elementech:

$$h = \sqrt{p\mu} = \sqrt{a(1 - e^2)\mu}\,; \tag{23}$$

obojí plyne z geometrie elipsy.

0.1.7 Třetí Keplerův zákon

Jaký je vztah mezi periodou oběhu a rozměrem dráhy? Plocha A elipsy opsaná za celou orbitální periodu je:

$$A = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}T = h\,\frac{T}{2} = \sqrt{a(1 - e^2)\mu}\,\frac{T}{2}\,,$$

odtud:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}\,, \tag{24}$$

čili **3. Keplerův zákon** v přesném znění. □

Připomeňme, že Kepler ho neznal přesně (protože $m_2 \ll m_1$). Další užitečné tvary zákona mohou být:

$$n^2 a^3 = \mu\,, \tag{25}$$

kde $n = \frac{2\pi}{T}$ je *střední pohyb* (úhlová frekvence oběhu); nebo

$$\frac{[a]^3_{\mathrm{AU}}}{[T]^2_{\mathrm{rok}}} \doteq [M]_{M_\odot} = 1\,, \tag{26}$$

kteréžto jednička platí v naší sluneční soustavě.

Keplerovy zákony tedy máme odvozené. Na to, abychom znali závislosti souřadnic a rychlostí na čase, bychom ale museli ještě chvíli počítat…

0.1.8 Rychlost v dráze (1 integrál energie)

Ještě existuje desátý integrál pohybu, který nám umožní snadno určovat velikost rychlosti v dráze (zatím znám jen $r(\phi)$ a 2. KZ). Rovnici relativního pohybu (8) $\ddot{\boldsymbol{r}} + \mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \boldsymbol{0}$ násobíme skalárně rychlostí $\dot{\boldsymbol{r}}$:[12]

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \mu\frac{\dot{r}}{r^2} = \boldsymbol{0}\,,$$

první neurčitý integrál je:[13]

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = C\,, \tag{27}$$

kde C je integrační konstanta.

Kolik je C? Nahlédnout to lze snadno ze dvou limitních případů: pro kruhové dráhy, kdy $e \to 0$, $r \to a$, platí jednoduchoučký vztah pro rychlost $v^2 = \frac{\mu}{r}$. Zároveň ale musí být $v^2 = 2(C + \frac{\mu}{r})$, takže $C = -\frac{\mu}{2r}$ anebo $C = -\frac{\mu}{2a}$. Druhý limitní případ je volný pád, neboli $e \to 1$, elipsa je vlastně úsečkou, v apocentru je $r = 2a$ a dle 2. KZ $v = 0$, takže vychází:

$$C = -\frac{\mu}{2a}$$

a po dosazení:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\,. \tag{28}$$

Tomuto vztahu říkáme integrál „živé síly“ (ZZE na jednotku hmotnosti).

Maximální rychlost je v pericentru, kde $r = q = a(1-e)$:

$$v_\mathrm{p}^2 = \mu\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a}\frac{2-(1-e)}{1-e} = n^2a^2\frac{1+e}{1-e}\,,$$

$$v_\mathrm{p} = na\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,, \tag{29}$$

minimální v apocentru, při $r = Q = a(1+e)$:

$$v_\mathrm{a} = na\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,. \tag{30}$$

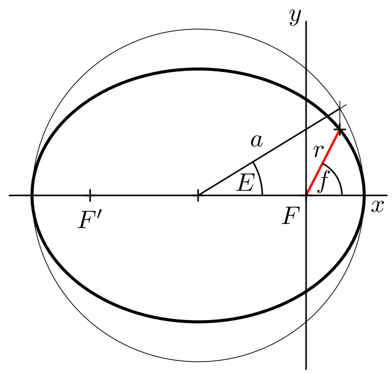
[12] Protože $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$ a $\hat{r}\cdot\hat{\phi} = 0$, je $\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{r\hat{r}\cdot\dot{r}\hat{r}}{r^3} + \frac{r\hat{r}\cdot r\dot{\phi}\hat{\phi}}{r^3} = \frac{\dot{r}}{r^2}$.

[13] Protože $v^2 = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$ a $(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})' = 2\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$.

0.1.9 Keplerova rovnice

Jaký je vztah mezi pravou anomálií f a časem t? Zjistíme to oklikou:

1. najdeme vztah mezi *pravou* anomálií f a *excentrickou* anomálií E (viz obr. 6);
2. najdeme vztah mezi E a *střední* anomálií $M = n(t-\tau)$, kde τ označuje okamžik průchodu pericentrem. Pozor! M *nemá* jednoduchou geometrickou reprezentaci (nelze ji nakreslit do obrázku).



Obr. 6 — Elipsa, opsaná kružnice, pravá anomálie f a excentrická anomálie E. Body F a F' označují ohniska elipsy.

Ad 1. Z geometrie elipsy (obr. 6) hned vidíme, že kartézské souřadnice:

$$x = a\cos E - ae = r\cos f\,, \tag{31}$$

$$y = a\sqrt{1-e^2}\sin E = r\sin f\,. \tag{32}$$

Pak:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2\cos^2 E - 2a^2e\cos E + a^2e^2 + a^2(1-e^2)\sin^2 E}$$
$$= a\sqrt{1 - 2e\cos E + e^2(1-\sin^2 E)} = a(1-e\cos E)\,. \tag{33}$$

Protože $\cos f = \frac{x}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$, plyne odtud:[14]

$$\mathrm{tg}\,\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{E}{2}\,. \tag{34}$$

[14] Využijeme vztahů pro poloviční úhel: $\sin^2\frac{f}{2} = \frac{1-\cos f}{2}$, $\cos^2\frac{f}{2} = \frac{1+\cos f}{2}$ a vypočteme $1-\cos f = \frac{1-e\cos E-\cos E+e}{1-e\cos E} = \frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e\cos E}$, $1+\cos f = \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E}$.

Ad 2. Napíšeme časové derivace souřadnic (x, y) (viz (31), (32)):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a \sin E\, \dot{E} \\ \dot{y} &= a\sqrt{1-e^2} \cos E\, \dot{E} \end{aligned}$$

a využijeme „asi posté“ integrálu h (12):

$$\begin{aligned} h = na^2\sqrt{1-e^2} &= |\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}| = |(x, y, 0) \times (\dot{x}, \dot{y}, 0)| = |(0, 0, x\dot{y} - y\dot{x})| \\ &= a(\cos E - e)a\sqrt{1-e^2}\cos E\, \dot{E} + a^2\sqrt{1-e^2}\sin^2 E\, \dot{E}\,, \end{aligned}$$

odkud dostaneme diferenciální rovnici pro funkci $E(t)$:

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e\cos E}\,, \tag{35}$$

neboli:

$$\mathrm{d}E\,(1 - e\cos E) = n\,\mathrm{d}t\,,$$

jejíž neurčitý integrál je:

$$E - e\sin E = nt + C\,.$$

Okrajová podmínka pro $E = 0$ je $t = \tau$, tudíž $C = -n\tau$ a

$$M = E - e\sin E\,, \tag{36}$$

což je *Keplerova rovnice*. Bohužel je *transcendentní* — neznáme algebraické vyjádření $E(M)$. Jak ji tedy vyřešit?! Pro výpočet E z M můžeme použít některý z následujících postupů:

1. numericky, iterační metodou:

$$E_{i+1} = M + e\sin E_i\,, \quad E_0 = M\,, \tag{37}$$

   $E_1 = M + e\sin M$, $E_2 = M + e\sin E_1$, …, dokud $|E_{i+1} - E_i| > $ nějaké malé ϵ. Lepší počáteční odhad může být $E_0 = M + \mathrm{sgn}(\sin M)\, ke$, kde $k \in (0, 1]$, např. $k = 0{,}85$.

2. Newtonovou–Raphsonovou metodou (tj. obecná numerická metoda pro hledání kořenů funkce $f(x) = 0$, viz obr. 7):

$$f(E) = E - e\sin E - M\,,$$

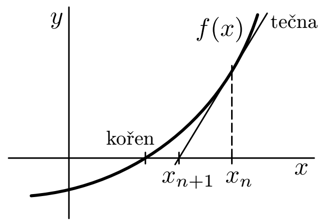
hledáme tedy $f(E) = 0$ postupnými iteracemi

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)}\,, \tag{38}$$

kde

$$f'(E) = 1 + e\cos E$$

je derivace $f(E)$ podle E.



Obr. 7 — Schéma jedné iterace Newtonovy–Raphsonovy metody.

3. analyticky, Fourierovým rozvojem.

Vyjdeme z 1. iterační metody a použijeme součtový vzorec $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ a Taylorovy rozvoje goniometrických funkcí $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^5)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$:

$$\begin{aligned} E_1 &= M + e\sin M\,, \\ E_2 &= M + e\sin(M + e\sin M) \\ &\simeq M + e\sin M \overbrace{\cos(e\sin M)}^{\doteq 1} + e\cos M \overbrace{\sin(e\sin M)}^{\doteq e\sin M} \\ &\simeq M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M\,, \\ E_3 &= M + e\sin(M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M) \\ &\simeq M + \left(e - \frac{1}{8}e^3\right)\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + \frac{3}{8}e^3\sin 3M\,. \end{aligned}$$

Podle prvních třech členů vidíme, že jde o nekonečnou Fourierovu řadu:

$$E - M = \sum_{s=1}^{\infty} b_s(e)\sin sM\,, \tag{39}$$

přičemž lze dokázat, že její koeficienty

$$b_s(e) = \frac{2}{s}J_s(se)$$

jsou Besselovými funkcemi 1. druhu:

$$J_s(se) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(sE - se\sin E)\,\mathrm{d}E\,.$$

Pozor! Řada konverguje pouze do určitého maximálního $e \doteq 0{,}66$. Obdobné řady, nazývané *eliptické rozvoje*, lze odvodit i pro jiné funkce, nejen $E-M$, ale i pro, $\sin f$, $\cos f$, $\frac{r}{a}$, … Mají spoustu aplikací zejména v poruchovém počtu (viz kap. ??).

0.1.10 Některé aplikace Keplerových zákonů

Třetí Keplerův zákon nám například umožňuje vypočítat *poměry vzdáleností* těles sluneční soustavy podle jejich snadno měřitelných oběžných dob:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \doteq \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 .$$

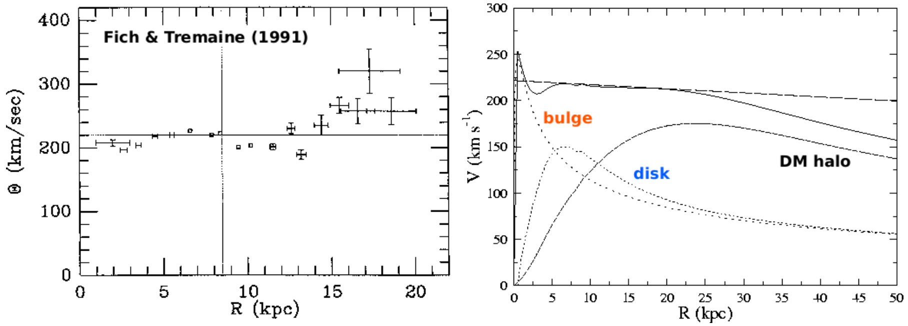
Samotný Keplerův zákon nám neumožňuje snadno určovat *hmotnosti planetek*, které jsou mnohem menší než hmotnost Slunce, ale pro planetku *s malým satelitem* můžeme napsat Keplerovy zákony dva:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_\odot + m_{\text{planetky}} + m_{\text{satelitu}})}{4\pi^2} \quad \text{(ve sluneční soustavě)}\,,$$
$$\frac{a'^3}{T'^2} = \frac{G(m_{\text{planetky}} + m_{\text{satelitu}})}{4\pi^2} \quad \text{(v systému planetka–satelit)}$$

a z nich při zanedbání planetky vůči Slunci a satelitu vůči planetce odvodit poměr:

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{m_\odot + m_\mathrm{p} + m_\mathrm{s}}{m_\mathrm{p} + m_\mathrm{s}} \simeq \frac{m_\odot}{m_\mathrm{p}}\,. \tag{40}$$

Vztah pro oběžnou kruhovou rychlost $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ jsme již zmiňovali. Porovnejme tuto závislost s *rotační křivkou* naší Galaxie, která je známá z měření dopplerovských posuvů rádiového záření na vlnové délce 21 cm a je *plochá* (obr. 8). Je evidentní, že hmota naší Galaxie není všechna soustředěná v centru (to by musela v klesat jako $\frac{1}{\sqrt{r}}$, nikoli být konstantní). Podle oběžných rychlostí oblaků na periferii Galaxie dokonce můžeme usuzovat na existenci temné hmoty, která se projevuje velkou gravitační přitažlivostí.



Obr. 8 — Měřená rotační křivka pro naši Galaxii. Vpravo je model rotační křivky, s rozlišením jednotlivých příspěvků od výdutě, disku a hala temné hmoty. Převzato z Fich a Tremaine (1991).

Hmotnost neznámého kompaktního objektu lze vypočítat, pokud okolo něj obíhá alespoň jedna hvězda, pro kterou změříme úhlový rozměr dráhy, oběžnou dobu a vzdálenost od Země. Například okolo *centrální černé díry* v naší Galaxii obíhá hvězdička S2: $\alpha = 0{,}12''$, $T = 15{,}2\,\text{roku}$, $r = 26\,000\,\text{sv.\,r.}$, tedy $a = r\,\mathrm{tg}\,\alpha \doteq 930\,\mathrm{AU}$. Hmotnost černé díry pak vychází:

$$[M_\mathrm{BH}]_{M_\odot} \doteq \frac{[a]^3_\mathrm{AU}}{[T]^2_\mathrm{rok}} \doteq \frac{930^3}{15{,}2^2} \doteq 3{,}5\cdot 10^6\,,$$

čili o šest řádů větší než hmotnost Slunce a o šest řádů menší než hmotnost celé Galaxie.

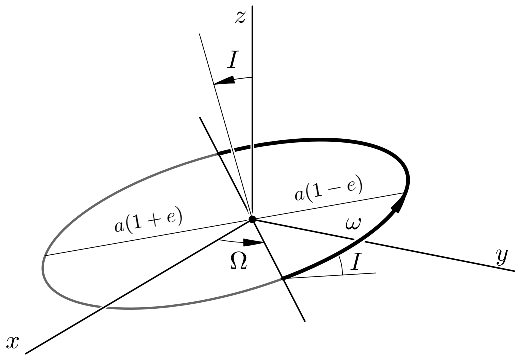
0.1.11 Výpočet efemeridy planetky

Vztahy, které jsme odvodili v problému dvou těles, lze použít pro výpočet přibližné krátkodobé efemeridy planetky, pro kterou známe orbitální elementy a, e, M. Stačí pro daný časový okamžik t vyřešit Keplerovu rovnici (zjistit E) a vypočítat kartézské souřadnice X, Y v rovině dráhy.

Abychom mohli vyjádřit polohu planetky i v libovolné jiné souřadnicové soustavě, zavádějí se následující úhly popisující *orientaci dráhy v prostoru* (heliocentrické ekliptikální soustavě): ω argument pericentra, I sklon dráhy a Ω délka[15] výstupného uzlu. Stačí aplikovat sérii matic rotace (obr. 9):

$$(x,y,z)_{\text{ekliptikální}} = \boldsymbol{R}_z(\Omega)\,\boldsymbol{R}_x(I)\,\boldsymbol{R}_z(\omega)\,(X,Y,0)_{\text{v dráze}}\,. \tag{41}$$

[15] Obecně se „délky“ (Ω, ϖ, ϕ) počítají od nějakého fixního směru v prostoru (např. jarního bodu), kdežto „anomálie“ (f, E) se počítají od pericentra.



Obr. 9 — Orientace eliptické dráhy v prostoru definovaná úhly ω, I, Ω.

Takovou efemeridu však nelze použít na delší časové škále, protože na planetku kromě Slunce působí i planety. Nicméně podle naprosto stejných vztahů lze z výsledků numerických N-částicových integrací (kartézských souřadnic a rychlostí) vypočítávat keplerovské *oskulační elementy* dráhy (a, e, i, ω, Ω, M), na které se jistě kouká lépe než na x, y, z, v_x, v_y, v_z.

Literatura

Učebnice

[1] Beatty, J. K., Petersen, C. C., Chaikin, A.: *The New Solar System.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999. ISBN 0521369657.
[2] Bertotti, B., Farinella, P., Vokrouhlický, D.: *Physics of the Solar System.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 1402014287.
[3] de Pater, I., Lissauer, J. J.: *Planetary Sciences.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN 0521482194.

Reference

[4] Alvarez, L. W., Alvarez, W., Asaro, F., Michel, H. V.: *Extraterrestrial cause for the Cretaceous Tertiary extinction. Science*, **208**, s. 1095, 1980.
[5] Artemieva, N., Pierazzo, E., Stöeffler, D.: *Numerical modeling of tektite origin in oblique impacts: Impications to Ries-Moldavites strewn filed. Bull. of the Czech Geological Survey*, **77**, 4, s. 303–311, 2002.
[6] Bernard, J. H., Rost, R. aj.: *Encyklopedický přehled minerálů.* Praha: Academia, 1992.
[7] Boček, M.: *Petrologické složení povrchu a kůry Měsíce. Povětroň*, **14**, S1, 3, 2006.
[8] Bottke, W. F., Cellino, A., Paolicchi, P., Binzel, R. P. (editoři): *Asteroids III.* Tuscon: The University of Arizona Press, 2002. ISBN 0816522812.
[9] Bottke, W. F., Rubincam, D. P., Burns, J. A.: *Dynamical evolution of main belt meteoroids: Numerical simulations incorporating planetary perturbations and Yarkovsky thermal forces. Icarus*, **145**, s. 301–331, 2000.
[10] Bottke, W. F., Vokrouhlický, D., Nesvorný, D.: *An asteroid breakup 160 Myr ago as the probable source of the K/T impactor. Nature*, **449**, 7158, s. 48–53.
[11] Bottke, W. F. aj.: *Debiased orbital and absolute magnitude distribution of the near-Earth objects. Icarus*, **156**, 2, s. 399–433, 2002.
[12] Bowell, T.: *AstOrb* [online]. [cit. 2008-09-30]. ⟨`ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.html`⟩.
[13] Brož, M.: *Impaktní kráter Steinheim.* Povětroň S1/2003, s. 3–10.
[14] Brož, M.: *Impaktní krátery (2) — Ries.* Povětroň 5/2001, s. 6–13.
[15] Brož, M.: *Yarkovsky Effect and the Dynamics of the Solar System.* Dizertační práce, Karlova univerzita, Praha, 2006.
[16] Brož, M.: *Yarko-site* [online]. [cit. 2008-09-30]. ⟨`http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/yarko-site/`⟩.
[17] Brož, M. aj.: *Planetární stezka v Hradci Králové* [online]. [cit. 2008-12-10]. ⟨`http://www.astrohk.cz/planetarni_stezka/`⟩.
[18] Brož, M., Nosek, M., Trebichavský, J., Pecinová, D. Editoři : *Sluneční hodiny na pevných stanovištích. Čechy, Morava, Slezsko a Slovensko.* Praha: Academia, 2004. ISBN 8020012044.
[19] Bruns, H., *Acta Math.*, **11**, s. 25, 1887.
[20] Burbine, T. H. aj.: *Meteoritic parent bodies: their number and identification.* in *Asteroids III*, W. F. Bottke Jr., A. Cellino, P. Paolicchi, a R. P. Binzel (eds), Tuscon: University of Arizona Press, 2002, s. 653–667.

[21] Burns, J. A., Lamy, P. L., Soter, S.: *Radiation forces on small particles in the Solar System. Icarus*, **40**, s. 1–48, 1979.
[22] Burns, J. A., Safronov, V. S.: *Asteroid nutation angles. Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **165**, 403, 1973.
[23] Calligan, D. P., Baggaley, W. J.: *The radiant distribution of AMOR radar meteors. Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **359**, s. 551–560, 2005.
[24] Carrol, S. M.: *Lecture Notes on General Relativity* [online]. [cit. 2010-03-08]. ⟨`http://preposterousuniverse.com/grnotes/`⟩.
[25] Ceplecha, Z.: *Geometric, dynamic, orbital and photometric data on meteoroids from photographic fireball networks. Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **38**, s. 222–234, 1987.
[26] Ceplecha, Z. aj.: *Meteor phenomena and bolides. Space Science Reviews*, **84**, s. 327–471, 1998.
[27] *Cryovolcanism and Geologic Analogies* [online]. [cit. 2009-04-30]. ⟨`http://mivo-sys.tripod.com/cryo.html`⟩.
[28] Čapek, D., Vokrouhlický, D.: *The YORP effect with finite thermal conductivity. Icarus*, **172**, s. 526–536, 2004.
[29] *Earthquakes* [online]. [cit. 2010-03-01]. ⟨`http://pubs.usgs.gov/gip/earthq1/plate.html`⟩.
[30] Farinella, P., Vokrouhlický, D., Hartmann, W. K.: *Meteorite delivery via Yarkovsky orbital drift. Icarus*, **132**, s. 378–387, 1998.
[31] Fernández, J. A.: *Comets. Nature, dynamics, origin and their cosmogonical relevance.* Dordrecht: Springer, 2005.
[32] Festou, M. C., Keller, H. U., Weaver, H. A. (ed.): *Comets II.* Tuscon: The University of Arizona Press, 2004.
[33] Foukal, P. V.: *Solar Astrophysics.* Weinheim: Wiley-VCH, 2004. ISBN 3527403744.
[34] Frankel, C.: *Volcanoes of the Solar System.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. ISBN 0521477700.
[35] Gabzdyl, P.: *Prohlídka Měsíce* [online]. [cit. 2009-02-05]. ⟨`http://www.moon.astronomy.cz/`⟩.
[36] *Geologischer Wanderweg im Steinheimer Becken* [online]. [cit. 2003-1-1]. ⟨`http://www.pg.aa.bw.schule.de/aktiv/geoproj/sbecken/wanderfr.htm`⟩
[37] Grady, M. M.: *Catalogue of meteorites.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0521663032.
[38] *Gravity Probe B* [online]. [cit. 2010-04-01]. ⟨`http://einstein.stanford.edu/`⟩.
[39] Groschopf, P., Reiff, W.: *Der geologische Wanderweg im Steinheimer Becken.* Steinheim am Albuch, 1993.
[40] Güdel, M.: *The Sun in time: activity and environment* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **4**, 2007.
[41] Hacar, B.: *Mechanika sluneční soustavy.* Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948.
[42] *Hadley cell. Encyclopedia Britannica* [online]. [cit. 2010-02-24]. ⟨`http://www.britannica.com/EBchecked/topic/251175/Hadley-cell`⟩.
[43] Hagihara, Y.: *Celestial Mechanics I.* Cambridge: MIT Press, 1970.
[44] Haloda, J.: *Meteority a jejich význam pro studium procesů vzniku a vývoje těles sluneční soustavy* [online]. [cit. 2009-01-29]. ⟨`http://astro.mff.cuni.cz/vyuka/AST021/index.html`⟩.
[45] Hamilton, A.: *Falling into a black hole* [online]. [cit. 2010-03-17]. ⟨`http://casa.colorado.edu/ ajsh/schw.shtml`⟩.

[46] Harmanec, P., Brož, M.: *Stavba a vývoj hvězd* [online]. [cit. 2010-01-26]. ⟨`http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/astrofyzika2/`⟩, 2010.
[47] Hirayama, K: *Groups of asteroids probably of common origin. Astron. J.*, **31**, 743, s. 185–188, 1918.
[48] Holmes, N.: *'Shocking' gas-gun experiments* [online]. [cit. 2008-11-13]. ⟨`https://www.llnl.gov/str/Holmes.html`⟩.
[49] Holsapple, K. aj.: *Asteroid spin data: no evidence of rubble-pile structures.* 36th Lunar and Planetary Science Conference, League City, Texas, 2005.
[50] Horský, J., Novotný, J., Štefaník, M.: *Mechanika ve fyzice.* Praha: Academia, 2001. ISBN 8020002081.
[51] Howe, R.: *Solar internal rotation and its variation* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **6**, 2009.
[52] Hutchison, R.: *Meteorites: A Petrologic, Chemical and Isotopic Synthesis.* Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521035392.
[53] Chandrasekhar, S.: *The Mathematical Theory of Black Holes.* New York: Oxford University Press, 1998. ISBN 0198503709.
[54] Charbonneau, P.: *Dynamo models of the solar cycle* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **2**, 2005.
[55] Chesley, S. R., aj.: *Direct detection of the Yarkovsky effect by radar ranging to asteroid 6489 Golevka. Science*, **302**, s. 1739–1742, 2003.
[56] Chlupáč, I. aj.: *Geologická minulost České republiky.* Praha: Academia, 2002.
[57] Christensen-Dalsgaard, J.: *Stellar Oscilations* [online]. [cit. 2010-01-26]. ⟨`http://www.eneas.info/`⟩. 2003.
[58] *International Earth Rotation and Reference Systems Service* [online]. [cit. 2008-11-13]. ⟨`http://www.iers.org/`⟩.
[59] Ivezić, Ž. aj.: *Solar System objects observed in the Sloan Digital Sky Survey commissioning data. Astron. J.*, **122**, 5, s. 2749–2784, 2001.
[60] Jenniskens, P.: *Meteor showers and their parent comets.* Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521853491.
[61] Johansenn, A. aj.: *Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar disks. Nature*, **448**, 7157, s. 1022–1025, 2007.
[62] Johnson, C.: *Precession of a gyroscope and precession of the Earth's axis* [online]. [cit. 2008-09-10]. ⟨`http://www.mb-soft.com/public/precess.html`⟩.
[63] *JPL Horizons system* [online]. [cit. 2008-09-30]. ⟨`http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons`⟩.
[64] *JPL planetary and lunar ephemerides, DE405* [online]. [cit. 2008-09-30]. ⟨`ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/`⟩.
[65] Kaasalainen, M. aj.: *Acceleration of the rotation of asteroid 1862 Apollo by radiation torques. Nature*, **446**, 7134, s. 420–422, 2007.
[66] Kavasch, J.: *The Ries Meteorite Crater. A geological guide.* Donauwörth: Ludwig Auer GmbH, 1985.
[67] Kelley, M. S.: *Comet dust trails* [online]. [cit. 2009-01-31]. ⟨`http://www.physics.ucf.edu/~msk/projects/trails/`⟩.
[68] Kenkman, T. aj..: *Structure and formation of a central uplift: A case study at the Upheaval Dome impact crater, Utah.* in Large Meteorite Impacts III, s. 85, 2003. ISBN 0813723841. ⟨`http://books.google.com/`⟩.
[69] Kerr, R. P.: *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. Phys. Rev. Lett.*, **11**, s. 237–238, 1963.

[70] Kozai, Y.: *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. Astron. J.*, **67**, 9, 591, 1962.
[71] Kring, D. A., Bailey, J.: *Terrestrial impact craters* [online]. [cit. 2008-11-13]. ⟨`http://www.lpi.usra.edu/science/kring/epo_web/impact_cratering/World_Craters_web/intromap.html`⟩.
[72] Kronk, G.: *Cometography* [online]. [cit. 2009-01-20]. ⟨`http://cometography.com/`⟩.
[73] Levison, H., Duncan, M.: *Swift* [online]. [cit. 2008-09-30]. ⟨`http://www.boulder.swri.edu/ hal/swift.html`⟩.
[74] Mannings, V. aj. (Ed.): *Protostars and planets IV.* Tuscon: The University of Arizona Press, 2000. ISBN 0816520593.
[75] Marcan, S.: *Phase diagram explanation* [online]. [cit. 2009-01-20]. ⟨`http://bhs.smuhsd.org/science-dept/marcan/`⟩.
[76] McFadden, L.–A., Weissman, P. R., Johnson, T. V. (Ed.): *Encyclopedia of the Solar System.* San Diego: Academic Press, 2007. ISBN 012088589.
[77] McSween, H. Y.: *Meteorites and their parent planets.* Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
[78] *MIAC. Antarctic meteorites* [online]. [cit. 2009-01-28]. ⟨`http://miac.uqac.ca/MIAC/antarc.htm`⟩.
[79] Milani, A., Kneževič, Z.: *Asteroid proper elements and the dynamical structure of the asteroid main belt. Icarus*, **107**, 2, s. 219–254, 1994.
[80] *Minor planet & comet ephemeris service* [online]. [cit. 2008-09-30] ⟨`http://www.cfa.harvard.edu/iau/MPEph/MPEph.html`⟩.
[81] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A: *Gravitation.* San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. ISBN 0716703440.
[82] Morbidelli, A., Crida, A., Masset, F., Nelson, R. P.: *Building giant-planet cores at a planet trap.* Astron. Astrophys., **478**, s. 929–937, 2008.
[83] Morbidelli, A., Levison, H.: *Scenarios for the origin of the orbits of the transneptunian objects 2000 CR_{105} and 2003 VB_{12} (Sedna). Astron. J.*, **128**, 2564, 2004.
[84] Morbidelli, A. aj.: *Source regions and timescales for the delivery of water to Earth. Meteoritics & Planetary Science*, **35**, 6, s. 1309–1320, 2000.
[85] Murray, C. D., Dermott, S. F.: *Solar System Dynamics.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
[86] *National Space Science Data Center* [online]. [cit. 2009-02-17]. ⟨`http://nssdc.gsfc.nasa.gov/`⟩.
[87] Nesvorný, D., Morbidelli, A.: *Three-body mean motion resonances and the chaotic structure of the asteroid belt. Astron. J.*, **116**, 3029, 1998.
[88] Nesvorný, D., Vokrouhlický, D.: *Analytic theory of the YORP effect for near-spherical objects. Astron. J.*, **134**, 5, s. 1750–1768, 2007.
[89] Nesvorný, D. aj.: *Evidence for asteroid space weathering from the Sloan Digital Sky Survey. Icarus*, **173**, 1, s. 132–152, 2005.
[90] Norton, O. R.: *The Cambridge Encyclopedia of Meteorites.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0521621437.
[91] Öpik, E. J.: *Collision probability with the planets and the distribution of planetary matter. Proc. R. Irish Acad.*, **54**, s. 165–199, 1951.
[92] Ostro, S.J. aj.: *Radar imaging of binary near-Earth asteroid (66391) 1999 KW_4. Science*, **314**, 5803, s. 1276–1280, 2006.
[93] Pecina, P., Ceplecha, Z.: *New aspects of in single-body meteor physics.. Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **34**, 102, 1983.
[94] Pecina, P., Nováková, D.: *Meteorický radar v Ondřejově. Povětroň*, **10**, 6, s. 4, 2002.

[95] Pechala, F., Bednář, J.: *Příručka dynamické meteorologie.* Praha: Academia, 1991. ISBN 8020001980.
[96] Peterson, C.: *A source mechanism for meteorites controlled by the Yarkovsky effect. Icarus*, **29**, s. 91–111, 1976.
[97] Pokorný, Z.: *Astronomické algoritmy pro kalkulátory.* Praha: Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, 1988.
[98] Pösges, G., Schieber, M.: *The Ries Crater – Museum Nördlingen.* München: Dr. Friedrich Pfeil, 1997.
[99] Pravec, P. aj.: *Two-period lightcurves of 1996 FG3, 1998 PG, and (5407) 1992 AX: One probable and two possible binary asteroids. Icarus*, **146**, 1, s. 190–203, 2000.
[100] Pravec, P. aj.: *Ondrejov Asteroid Photometry Project* [online]. [cit. 2008-09-09]. ⟨`http://www.asu.cas.cz/~ppravec/`⟩.
[101] Press, W. R., Teukolsky, S. A., Vetterling, W., Flannery, B.P.: *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
[102] Příhoda, P. aj.: *Hvězdářská ročenka 2008.* Praha: Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, 2007. ISBN 9788086017471.
[103] Quinn, T. R., Tremaine, S., Duncan, M.: *A three million year integration of the earth's orbit. Astron. J.*, **101**, s. 2287–2305, 1991.
[104] *Reduce* [online]. [cit. 2010-03-08]. ⟨`http://www.reduce-algebra.com/`⟩.
[105] *Rieskrater–Museum Nördlingen* [online]. [cit. 2001-1-1]. ⟨`http://www.iaag.geo.uni--muenchen.de/sammlung/Rieskrater/RieskraterMuseum.html`⟩.
[106] Robertson, H. P.: *Dynamical effects of radiation in the Solar System. Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **97**, 423, 1937.
[107] Rubin, A. E.: *Mineralogy of meteorite groups. Meteoritics and Planetary Science*, **32**, 231, 1997.
[108] Rubincam, D. P.: *Polar wander on Triton and Pluto due to volatile migration. Icarus*, **163**, 2, s 63–71, 2002.
[109] Russel, C. T. aj.: *Dawn mission and operations.* Asteroids, Comets, Meteors 2005, editoři Lazzaro, D., Ferraz-Mello, S., Fernandez, J. A., Cambridge: Cambridge University Press, 2006, s. 97–119.
[110] Sackmann, I. J., Boothroyd, A. I., Kraemer, K. E.: *Our Sun. III. Present and future. Astrophys. J.*, **418**, s. 457–468, 1993.
[111] Seidelman, P. K. (*editor*): *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac.* U. S. Naval Observatory, Washington, 1992.
[112] Sepkoski, J. J.: *Ten years in the library: New data confirm paleontological patterns. Paleobiology*, **19**, s. 43–51, 1993.
[113] Skála, L.: *Úvod do kvantové mechaniky.* Praha: Academia, 2005. ISBN 8020013164.
[114] Skála, R.: *Impact process: An important geological phenomenon. Acta Mus. Nat-Pragae*, Ser. B., Hist. Nat., **52**, s. 111–156, 1996.
[115] Spurný, P.: *Fotografické sledování bolidů ve střední Evropě. Corona Pragensis*, 2, 2001, ⟨`http://praha.astro.cz/crp/0101a.phtml`⟩.
[116] *Stardust, JPL, NASA* [online]. [cit. 2006-06-01]. ⟨`http://stardust.jpl.nasa.gov`⟩.
[117] Staudacher, T. aj.: *^{40}Ar/^{39}Ar ages of rocks and glasses from the Noerdlinger Ries crater and the temperature history of impact breccias. J. of Geophysics*, **51**, 1, s. 1–11, 1982.
[118] Stix, M.: *The Sun. An Introduction.* Berlin: Springer-Verlag, 2002. ISBN 3540537961.
[119] Stuart, J. S.: *A Near-Earth asteroid population estimate from the LINEAR Survey. Science*, **294**, 5547, s. 1691–1693, 2001.

[120] Sundman, K. E.: *Memoire sur le probleme de trois corps. Acta Math.*, **36**, s. 105–179, 1912.
[121] Šedivý, P.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity.* Hradec Králové: MAFY, 2003. ISBN 8086148653.
[122] Šidlichovský, M., Nesvorný, D.: *Frequency modified Fourier transform and its applications to asteroids. Cel. Mech. Dyn. Astron.*, **65**, 1–2, s. 137–148, 1996.
[123] Tillotson, J. H.: *Metallic equations of state for hypervelocity impact.* General Atomic Report GA-3216, 1962.
[124] *The Ries/Steinheim impact crater field trip* [online]. [cit. 2001-1-1]. ⟨`http://www.-earthsciences.ucl.ac.uk/research/planetaryweb/field/knodle.htm`⟩
[125] *The STScI Digitized Sky Survey* [online]. [cit. 2010-02-15]. ⟨`http://archive.stsci.edu/cgi-bin/dss_form`⟩.
[126] Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., Levison, H. F.: *Origin of the orbital architecture of the giant planets of the solar system. Nature*, **435**, s 459, 2004.
[127] Tuček, K.: *Meteority a jejich výskyty v Československu.* Praha: Academia, 1981.
[128] Vernazza, J. E., Avrett, E. H., Loeser, R., *Astrophys. J. Suppl.*, **45**, 635, 1981.
[129] Vokrouhlický, D.: *A complete linear model for the Yarkovsky thermal force on spherical asteroid fragments. Astron. Astrophys.*, **344**, s. 362–366, 1999.
[130] Vokrouhlický, D., Farinella, P.: *Efficient delivery of meteorites to the Earth from a wide range of asteroid parent bodies. Nature*, **407**, 6804, 606, 2000.
[131] Vokrouhlický, D., Nesvorný, D.: *Pairs of asteroids probably of a common origin. Astron. J.*, **136**, 1, s. 280–290, 2008.
[132] Vokrouhlický, D., aj.: *Yarkovsky/YORP chronology of asteroid families. Icarus*, **182**, 1, s. 118–142, 2006.
[133] Weidenschilling, S. J.: *Formation of Planetesimals and Accretion of the Terrestrial Planets. Space Science Reviews*, **92**, 1/2, s. 295–310, 2000.
[134] *Wikipedia* [online]. [cit. 2008-04-10]. ⟨`http://www.wikipedia.org/`⟩.
[135] Whipple, F.: *A comet model. I. The acceleration of Comet Encke. Astrophys. J.*, **111**, s. 375–394, 1950.
[136] Wolf, M. aj.: *Astronomická příručka.* Praha: Academia, 1992. ISBN 802000467X.
[137] Zeĺdovitch, Ya. B. aj.: *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena.* 1966. ISBN 0486420027. ⟨`http://books.google.com`⟩.
[138] Zhong, S., Zuber, M. T.: *Degree-1 mantle convection and the crustal dichotomy on Mars. Earth and Planetary Science Letters*, **189**, s. 75–84, 2001.