3. kapitola o problému dvou těles

– **Newtonovy pohybové zákony:**

1. existují inerciální[1] vztažné soustavy, v nichž se volné[2] hmotné body pohybují rovnoměrně přímočaře nebo jsou v klidu;
2. o účinku síly: $\mathbf{F} = m_{\text{setrvačná}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$;
3. akce a reakce: $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$.

– **Gravitační zákon** (pro hmotné body):

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_{2\,\text{gravitační}}}{r^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r} \tag{1}$$

měření $G = 6{,}6726(5)\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{kg}^{-2}\cdot\mathrm{m}^2$ (viz Brož & Roskovec 1988):

Adjustace fyzikálních konstant není u G použitelná, neexistuje totiž vztah G a jiných konstant (patří tedy mezi málo přesné konstanty).[3]

homogenní pole:[4] $F = mg = G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus^2}$

gravitační pole *vně* homogenní sféry: jako u hmotného bodu![5]

OBR vektorů $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\boldsymbol{\Delta}$, koule a prstýnků

uvnitř: $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\varrho$, $F = G\frac{Mm}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\, G\varrho\, m\cdot r \Rightarrow$ lineární růst

---

[1] Tyto soustavy souvisí spolu *Galileiho transformací* souřadnic $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, kde $\mathbf{v}$ označuje jejich vzájemnou rychlost.

[2] Nepůsobí na ně jiné síly než gravitace vzdálených hmot.

[3] Bouguer (1738) — úchylka svislice u hory Chimborasso v Peru $7''$ (odhad m_{hory} z V a ϱ); Carlini (1824) — změna g při výstupu na horu (sestupu do dolu); Cavendish (1797) — laboratorní torzní váhy (výchylky v bodech obratu); Jolly (1879) — dvouramenné váhy (těleso nad/pod hmotnou koulí) $\sim 0{,}15\,\mathrm{mg}$; Boys (1895) — torzní kmity (nutno měřit rozměry a momenty setrvačnosti těles).

[4] Pád kuličky: $s = 1\,\mathrm{m}$, $t = 0{,}45\,\mathrm{s}$, $g = \frac{2s}{t^2} \doteq 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ a hmotnost Země $M_\oplus = \frac{gR_\oplus^2}{G} \doteq 6\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

[5] Což bychom ověřili integrací koule „přes prstýnky“ souosé s $\mathbf{r}$: $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\Delta^2 = r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2$ (kosínová věta). Jednodušší je použít skalární potenciál U místo vektorové síly $\mathbf{F} = \nabla U$:

$$U = \int_{\text{kouli}} -\frac{G\,\mathrm{d}m}{\Delta} = -G\int_V \frac{\varrho\,\mathrm{d}V}{\Delta} = -G\int_{r'=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{\varrho(r')}{\Delta}\overbrace{2\pi r'\sin\varphi}^{\text{obvod}}\;r'\mathrm{d}\varphi\;\mathrm{d}r'\,.$$

Trik: $\mathrm{d}\varphi$ vyjádřím z $\Delta = (r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{\frac{1}{2}}$ a zaměním integrační meze $(0,\pi)$ za $(r - r', r + r')$.

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{2}(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-\frac{1}{2}}(-2rr')(-\sin\varphi) = \frac{rr'\sin\varphi}{\Delta}\,,$$

OBR sféry a plochy uvnitř, $S \propto R^2$, $F \propto R^{-2} \Rightarrow F_1 = F_2$

OBR $|\mathbf{F}|(r)$ uvnitř a vně

– **Keplerovy zákony:**

1. elipsy, ohnisko $\odot$;
2. stejné plochy opsané průvodičem za stejnou dobu;
3. $\dfrac{a^3}{T^2}$ = konst. (ne zcela přesné!).

Jak se mění rychlost se vzdáleností? $v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi\sqrt{\text{konst.}}\frac{1}{\sqrt{r}}$

OBR srovnej s plochou rotační křivkou galaxie,
pozn. o temné hmotě v galaktickém halu

Pozorovat mohu spíše *synodickou* dobu oběhu, potřebují převod $t_{\text{syn}} \to t_{\text{siderická}}$:

$\omega_1 t_{\text{syn}} = 2\pi + \varphi$, $\omega_2 t_{\text{syn}} = \varphi$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{t_{\text{sid1}}}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{t_{\text{sid2}}} \Rightarrow$

$$\frac{1}{t_{\text{sid1}}} = \frac{1}{t_{\text{syn}}} + \frac{1}{t_{\text{sid2}}} \tag{2}$$

OBR kružnic a úhlových rychlostí

---

odkud $\mathrm{d}\varphi = \frac{\Delta}{rr'\sin\varphi}\mathrm{d}\Delta$ a

$$U = -G\int_0^R\int_{r-r'}^{r+r'}\frac{\varrho(r')}{\Delta}\,2\pi r'\sin\varphi\,\frac{\Delta}{rr'\sin\varphi}\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{d}r' = -\frac{2\pi G}{r}\int_0^R\int_{r-r'}^{r+r'}\varrho(r')r'\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{d}r'$$

$$= -\frac{2\pi G}{r}\int_0^R \varrho(r')r'2r'\mathrm{d}r' = -\frac{G}{r}\overbrace{\int_0^R 4\pi r'^2\varrho(r')\,\mathrm{d}r'}^{\text{celková hmotnost}} = -\frac{GM}{r}\,,$$

tj. přesně jako hmotný bod.

– **Problém dvou těles** (Murray & Dermott 1999):

inerciální soustava souřadnic, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, použití *všech* tří NZ:[6]

$$\mathbf{F}_1 = +G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1\,,$$
$$\mathbf{F}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} = m_2\ddot{\mathbf{r}}_2\,,$$

tzn. *celkem 12 neznámých skalárních fcí času*: $\mathbf{r}_1(t)$, $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$, $\dot{\mathbf{r}}_2(t)$.

Při řešení těchto diferenciálních rovnic použiji tři triky:

1. budu studovat *relativní* pohyb, nikoli přímo $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$;
2. nejprve najdu *tvar* trajektorie $r(\varphi)$, nikoli $\mathbf{r}(t)$;
3. použiji *substituce* za $\frac{1}{r}$.

– **integrály pohybu (3 pro těžiště a 3 pro hybnosti):**

snadno najdu prvních 6 integrálů (celkem jich je 10), které úlohu podstatně zjednoduší (hypoteticky, kdybych našel 12 *prvních* integrálů, tělesa by „trčela“ na místě nebo se pohybovala rovnoměrně přímočaře):

součet rovnic 0 a 0: $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}$,
první neurčitý integrál: $m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{a}$,
druhý: $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = \mathbf{a}\,t + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ jsou konstantní vektory (ony integrály pohybu; protože $\mathbf{b}$ je až *druhý* integrál, vyskytují se zde konstantní rychlosti, neboli lineární závislost souřadnic na čase).

$\Rightarrow$ těžiště $\mathbf{T} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$ je buď v klidu, nebo se rovnoměrně přímočaře pohybuje (a vůbec nezáleží na tom, že $F_\mathrm{G} \propto \frac{1}{r^2}$; stačí, že síly jsou stejně veliké a opačného směru).

---

[6] Poznámka o derivacích pro ty, kteří o nich ještě neslyšeli: sklon fce $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ popisuje „jak moc se fce mění“; *derivace* funkce $y(x)$ v bodě x_0 je definována jako limita:

$$y' \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}\,.$$

Příkladem první derivace souřadnic podle času je okamžitá rychlost ($\mathbf{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$, označuje se též $\dot{r}$); zrychlení je první derivace rychlosti nebo též druhá derivace souřadnic ($\mathbf{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{r}$). Uveďme derivace některých elementárních fcí: $C' = 0$, $x' = 1$, $ax' = a$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$. Derivace součtu $(f+g)' = f'+g'$, součinu $(f\cdot g)' = f'g + fg'$, složené fce $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$. Opačným úkolem k derivování je hledání *primitivní funkce* (neboli integrování).

OBR vektory $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}$

– **rovnice relativního pohybu (a 3 integrály momentu hybnosti):**

nyní vyšetříme relativní pohyb m_2 vzhledem k m_1 — odečteme 0 od 0 (přejdeme do *neinerciální* souřadnicové soustavy):

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\overbrace{G(m_1+m_2)}^{\mu}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \tag{3}$$

další integrály pohybu najdeme vektorovým násobením rce $\mathbf{r}$:

$$0 = \ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r} + \frac{\mu}{r^3}\overbrace{\mathbf{r}\times\mathbf{r}}^{\mathbf{0}} = \ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}\,,$$

protože vektorový součin rovnoběžných vektorů je vždy $\mathbf{0}$. Neurčitý integrál je

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} = \text{konst.} \tag{4}$$

neb $(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}-\mathbf{h})' = \overbrace{\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}}^{\mathbf{0}} + \mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{0} = \mathbf{0}$; $\mathbf{h}$ je „něco jako“ moment hybnosti[7] na jednotku hmotnosti μ.

$\Rightarrow$ pohyb probíhá *v rovině* a plošná rychlost se zachovává $\Rightarrow$ **II. KZ**
(opět nevyžaduje $F_{\mathrm{G}} \propto \frac{1}{r^2}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{G}}$ pouze musí směřovat podél spojnice těles)

OBR $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ a plošná rychlost

– **přechod do polárních souřadnic v rovině:**

souřadnou soustavu orientuji tak, že rovina xy je kolmá na $\mathbf{h}$ a dosadím[8] za $\mathbf{r} = r\hat{r}$, $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})\right]\hat{\varphi}$ do vektorové rce (3) $\Rightarrow$ skalární rce (příslušná složce $\hat{r}$):

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}\,, \tag{5}$$

---

[7] Rozhodně to *není* celkový moment hybnosti v inerciální soustavě $\mathbf{L} = \mathbf{r}_1\times m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2\times m_2\dot{\mathbf{r}}_2$; v $\mathbf{h}$ jsou přitom vektorové součiny „pomíchané“: $\mathbf{h} = (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times(\dot{\mathbf{r}}_2-\dot{\mathbf{r}}_1) = \mathbf{r}_1\times\dot{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{r}_1\times\dot{\mathbf{r}}_1 + \ldots$

[8] Ověření vztahu pro 2. derivaci v polárních souřadnicích: bázové vektory $\hat{r} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\hat{\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$; $\dot{\hat{r}} = (-\sin\varphi,\cos\varphi)\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\hat{\varphi}$, $\dot{\hat{\varphi}} = -\hat{r}\dot{\varphi}$; $\mathbf{r} = r\hat{r}$, $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$, $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + r\dot{\varphi}(-\hat{r}\dot{\varphi}) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\varphi} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})\right]\hat{\varphi}$.

Rovnice $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) = 0$ pro složku $\hat{\varphi}$ je naštěstí splněna automaticky, protože to je vlastně vyjádření integrálu $\mathbf{h}$ v polárních souřadnicích:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) = r^2\dot{\varphi}\hat{z} \tag{6}$$

a velikost tohoto vektoru je evidentně:

$$h = r^2\dot{\varphi} = \mathrm{konst.} \tag{7}$$

Jak řešit rovnici (5) pro *dvě* neznámé fce času $r(t)$, $\varphi(t)$?!

– **eliminace času pomocí substituce $u = \frac{1}{r}$ a integrálu h:**

Do rovnice (5) musím dosadit jednak za $r = \frac{1}{u}$, a jednak za druhou derivaci podle času $\ddot{r}$. Nejprve spočtu první:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\overbrace{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}^{\equiv\dot{\varphi}=\frac{h}{r^2}=hu^2} = h\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\,; \tag{8}$$

zde jsem elegantně derivoval složenou fci $u(\varphi(t))$ a využil integrál h (7). Druhá je

$$\ddot{r} = -h\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}\,\dot{\varphi} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}\,. \tag{9}$$

Vyjde $-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 = -\mu u^2$ a po krácení:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{\mu}{h^2}\,, \tag{10}$$

tj. obyčejná lineární diferenciální rovnice (ODE) 2. řádu pro funkci $u(\varphi)$. Její obecné řešení „uhádnu“:[9]

$$u = \frac{\mu}{h^2}[1 + e\cos(\varphi - \varpi)]\,, \tag{11}$$

kde mám dvě integrační konstanty: e, ϖ[10] (plus onen předchozí integrál h a hmotnost μ, které označím dohromady jako jeden parametr p:

$$p = \frac{h^2}{\mu}\,. \tag{12}$$

[9] Mohu se přesvědčit jeho derivováním $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{\mu}{h^2}e\sin(\varphi - \varpi)$, $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\frac{\mu}{h^2}e\cos(\varphi - \varpi)$, že rovnici (10) opravdu splňuje a bez důkazu „věřím“, že neexistuje nějaké jiné řešení.

[10] ϖ je zvláštní tvar řeckého písmene π, nikoli ω; v TEXu se píše `\varpi`.

– **řešení problému 2 těles — rovnice kuželosečky:**

zpětná substituce dává fci $r(\varphi)$:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varpi)}\,, \tag{13}$$

což je *obecná rce kuželosečky* s ohniskem v počátku (tělese 1; 2. ohnisko je prázdné) $\Rightarrow$ **I. KZ**

e ... excentricita, ϖ ... délka pericentra, p ... parametr.

Můžeme rozlišit 4 případy:

kružnice	$e = 0$	$p = a$
elipsa	$0 < e < 1$	$p = a\,(1 - e^2)$
parabola	$e = 1$	$p = 2q$
hyperbola	$e > 1$	$p = a\,(e^2 - 1)$

kde a označuje *velkou poloosu* a q vzdálenost pericentra.

OBR říznutého kužele a elipsy

Polární souřadnice φ je zvána *pravá délka* (měřená od osy x), často užíváme *pravou anomálii* f:

$$f = \varphi - \varpi\,, \tag{14}$$

měřenou od pericentra. Potom pro elipsu je

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos f} \tag{15}$$

a kdybychom měli osu x orientovanou přímo do pericentra, bylo by:

$$x = r\cos f\,, \quad y = r\sin f\,.$$

Užitečná je znalost vztahů pro vzdálenosti pericentra q a apocentra Q od ohniska:

$$q = a\,(1 - e)\,,$$
$$Q = a\,(1 + e)\,,$$

a také integrálu h vyjádřeného v orbitálních elementech:

$$h = \sqrt{p\mu} = \sqrt{a(1 - e^2)\mu}\,; \tag{16}$$

obojí plyne z geometrie elipsy.

– **Jaký je vztah mezi periodou oběhu a rozměrem dráhy?**

plocha A elipsy opsaná za celou orbitální periodu

$$A = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}T = h\,\frac{T}{2} = \sqrt{a(1-e^2)\mu}\,\frac{T}{2}\,,$$

odtud

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2} \tag{17}$$

$\Rightarrow$ **3. KZ**

Kepler ho neznal přesně (zanedbal $m_2 \ll m_1$)

další užitečné tvary 3. KZ:

$$n^2a^3 = \mu\,, \tag{18}$$

kde $n = \frac{2\pi}{T}$ je *střední pohyb*; nebo

$$\frac{[a]^3_{\mathrm{AU}}}{[T]^2_{\mathrm{yr}}} = [M]_{M_\odot} = 1\,, \tag{19}$$

kterážto jednička platí v naší sluneční soustavě.

– **měření hmotnosti planet(k)y se satelitem:**

$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_\odot+m_{\mathrm{planety}})}{4\pi^2}$ (ve sluneční soustavě)

$\frac{a'^3}{T'^2} = \frac{G(m_{\mathrm{planety}}+m_{\mathrm{satelitu}})}{4\pi^2}$ (systém se satelitem)

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^3\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{m_\odot+m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{s}}} \simeq \frac{m_\odot}{m_{\mathrm{p}}} \tag{20}$$

zanedbání planety vůči Slunci a satelitu vůči planetě

pro některé velké planetky je možné měřit m přímo z perturbací, které působí na planety (Standish & Hellings 1989)

Ida a Dactyl z Galilea (Belton aj. 1995): $\varrho = (2{,}6 \pm 0{,}5)\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

pozn. o nejednoznačně určené trajektorii Dactylu
a pravděpodobně vysokých porozitách asteroidů

– **Jaká je rychlost v dráze? (1 integrál energie)**

Ještě existuje desátý integrál pohybu, který nám umožní snadno určovat velikost rychlosti v dráze (zatím znám jen $r(\varphi)$ a II. KZ). Rci relativního pohybu (3) $\ddot{\mathbf{r}} + \mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0}$ násobím skalárně rychlostí $\dot{\mathbf{r}}$:[11]

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mu\frac{\dot{r}}{r^2} = \mathbf{0}\,,$$

první neurčitý integrál je:[12]

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = C\,, \tag{21}$$

kde C je integrační konstanta; tj. integrál „živé síly“ (ZZE na jednotku hmotnosti).

Kolik je přesně C? Do výrazu pro v^2 v polárních souřadnicích dosadíme z polární rce elipsy a použijeme ještě integrál momentu hybnosti h a III. KZ (vlastně to odvodíme znovu jinak):

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \cdot \dot{r} + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{f})^2\,, \tag{22}$$

protože $\varphi = f + \varpi$, $\varpi =$ konst. a $\dot{\varphi} = \dot{f}$. Jenže tam se kromě r vyskytuje ještě $\dot{r}$ a $\dot{f}$. Proto ze známé rovnice elipsy (15) $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f(t)}$ vypočítáme derivaci $\dot{r}$:

$$\dot{r} = -\frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)^2} \cdot e(-\sin f)\dot{f}\,,$$

přičemž $\dot{f}$ vyjádříme z integrálu h (16):

$$\dot{f} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}$$

a vyjde:

$$\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\,e\sin f\,,$$

$$r\dot{f} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos f)\,.$$

[11] Protože $\mathbf{r} = r\hat{r}$, $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ a $\hat{r}\cdot\hat{\varphi} = 0$, je $\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\dot{\mathbf{r}} = \frac{r\hat{r}\cdot\dot{r}\hat{r}}{r^3} + \frac{r\hat{r}\cdot r\dot{\varphi}\hat{\varphi}}{r^3} = \frac{\dot{r}}{r^2}$.

[12] Protože $v^2 = \dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ a $(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})' = 2\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}$.

Vše dosadíme do (21) a upravíme:

$$v^2 = \frac{n^2a^2}{1-e^2}\left(e^2\sin^2 f + 1 + 2e\cos f + e^2\cos^2 f\right) = \frac{n^2a^2}{1-e^2}\left(e^2 + 1 + 2e\overbrace{\cos f}^{=\left(\frac{a(1-e^2)}{r}-1\right)\frac{1}{e}}\right) =$$
$$= \frac{n^2a^2}{1-e^2}\left(\frac{2a(1-e^2)}{r} - (1-e^2)\right) = n^2a^3\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) = \mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

Vidíme, že integrační konstanta v (21) je $C = -\frac{\mu}{2a}$ a nezávisí na e; pro parabolickou dráhu $C = 0$, pro hyperbolickou $C = +\frac{\mu}{2a}$.

Maximální rychlost je v pericentru, kde $r = q = a(1-e)$:

$$v_{\mathrm{p}}^2 = \mu\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a}\frac{2-(1-e)}{1-e} = n^2a^2\frac{1+e}{1-e}\,,$$

$$v_{\mathrm{p}} = na\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,, \tag{23}$$

minimální v apocentru, při $r = Q = a(1+e)$:

$$v_{\mathrm{a}} = na\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,. \tag{24}$$

– **Jaký je vztah mezi f a t?**

Doposud jsme měli totiž pouze závislost $r(\varphi)$, nikoli $r(t)$. Zjistíme to oklikou:

1. najdeme vztah mezi *pravou* anomálií f a *excentrickou* anomálií E;

   OBR opsané kružnice, E, f

2. mezi E a *střední* anomálií $M = n(t-\tau)$;

   M *nemá* jednoduchou geometrickou reprezentaci!
   τ označuje okamžik průchodu pericentrem

Ad 1) Z geometrie elipsy hned vidíme, že kartézské souřadnice:

$$x = a\cos E - ae = r\cos f\,,$$
$$y = a\sqrt{1-e^2}\sin E = r\sin f\,,$$

pak

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2\cos^2 E - 2a^2e\cos E + a^2e^2 + a^2(1-e^2)\sin^2 E}$$
$$= a\sqrt{1 - 2e\cos E + e^2(1-\sin^2 E)} = a(1-e\cos E)$$

protože $\cos f = \frac{x}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} \Rightarrow$ [13]

$$\mathrm{tg}\,\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{E}{2}\,. \tag{25}$$

Ad 2) Napíšeme časové derivace souřadnic (x, y):

$$\dot{x} = -a\sin E\dot{E}$$
$$\dot{y} = a\sqrt{1-e^2}\cos E\dot{E}$$

a využijeme „asi posté“ integrálu h (7):

$$\begin{aligned} h = na^2\sqrt{1-e^2} &= |\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}| = |(x, y, 0)\times(\dot{x}, \dot{y}, 0)| = |(0, 0, y\dot{x} - x\dot{y})| \\ &= a^2\sqrt{1-e^2}\sin^2 E\dot{E} + a(\cos E - e)a\sqrt{1-e^2}\cos E\dot{E} \end{aligned}$$

odkud dostaneme diferenciální rovnici pro funkci $E(t)$:

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e\cos E}\,, \tag{26}$$

neboli

$$\mathrm{d}E\,(1 - e\cos E) = n\,\mathrm{d}t\,,$$

jejíž neurčitý integrál je:

$$E - e\sin E = nt + C\,.$$

Hraniční podmínka: pro $E = 0$ je $t = \tau \Rightarrow C = -n\tau$.

$$M = E - e\sin E \tag{27}$$

Keplerova rce $\leftarrow$ transcendentní :(neznáme algebraické vyjádření $E(M)$

– **Jak řešit Keplerovu rovnici?**

1. iterační metodou:

$$E_{i+1} = M + e\sin E_i\,, \quad E_0 = M \tag{28}$$

$E_1 = M + e\sin M$, $E_2 = M + e\sin E_1$, …, dokud $|E_{i+1} - E_i| > \epsilon$ malé.

[13] Využijeme vztahů pro poloviční úhel: $\sin^2\frac{f}{2} = \frac{1-\cos f}{2}$, $\cos^2\frac{f}{2} = \frac{1+\cos f}{2}$ a vypočtu si $1 - \cos f = \frac{1 - e\cos E - \cos E + e}{1 - e\cos E} = \frac{(1+e)(1-\cos E)}{1 - e\cos E}$, $1 + \cos f = \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1 - e\cos E}$.

lepší počáteční odhad $E_0 = M + \mathrm{sgn}(\sin M)\, ke$, kde $k \in (0,1]$, např. $k = 0{,}85$.

2. Newton–Raphsonovou metodou (obecná pro hledání kořenů fce $f(x) = 0$):

$$f(E) = E - e\sin E - M\,,$$

hledáme tedy $f(E) = 0$ postupnými iteracemi

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)}\,, \tag{29}$$

kde

$$f'(E) = 1 + e\cos E$$

je derivace $f(E)$ podle E.

OBR Newton–Raphsonovy metody

3. analyticky, Fourierovým rozvojem:

Vychází z 1. iterační metody a použije součtový vzorec $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ a Taylorovy rozvoje goniometrických funkcí $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^5)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$.

$$\begin{aligned}
E_1 &= M + e\sin M \\
E_2 &= M + e\sin(M + e\sin M) \\
&\simeq M + e\sin M \overbrace{\cos(e\sin M)}^{\doteq 1} + e\cos M \overbrace{\sin(e\sin M)}^{\doteq e\sin M} \\
&\simeq M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M \\
E_3 &= M + e\sin(M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M) \\
&\simeq M + \left(e - \frac{1}{8}e^3\right)\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + \frac{3}{8}e^3\sin 3M
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Fourierova řada

$$E - M = \sum_{s=1}^{\infty} b_s(e)\sin sM\,, \tag{30}$$

kde koeficienty

$$b_s(e) = \frac{2}{s}J_s(se)$$

jsou Besselovými funkcemi 1. druhu

$$J_s(se) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(sE - se\sin E)\mathrm{d}E\,.$$

Pozor! Řada konverguje pouze do určitého maximálního $e \doteq 0{,}66$.