

Petr Harmanec, Miroslav Brož

STAVBA A VÝVOJ HVĚZD

VYDAL MATFYZPRESS

PRAHA 2010

Obsah

Proč studovat hvězdy?	7
1 Úvod	9
1.1 Vznik teorie	9
1.2 Model našeho Slunce	13
2 Záření a spektrum	19
2.1 Elektromagnetické záření	19
2.1.1 Intenzita	21
2.1.2 Tok	24
2.1.3 Hustota zářivé energie	26
2.1.4 Tlak záření	27
2.1.5 Koeficient opacity a optická tloušťka	28
2.1.6 Mechanická síla na vrstvu plynu	29
2.1.7 Emisní koeficient	30
2.1.8 Rovnice přenosu záření	30
2.1.9 Termodynamická rovnováha	31
2.1.10 Spojité záření absolutně černého tělesa	31
2.1.11 Sahova ionizační rovnice	36
2.2 Spektra hvězd	39
2.2.1 Přechody v atomech, spojitá a diskrétní spektra	39
2.2.2 Rozšíření spektrálních čar	43
2.2.3 Spektrální klasifikace	47
3 Stavová rovnice	53
3.1 Střední molekulová hmotnost	53
3.2 Ideální plyn.	55
3.3 Tlak záření	58
3.4 Elektronová degenerace	59
3.5 Částečná ionizace v povrchových vrstvách	63
4 Základní rovnice stavby hvězd	67
4.1 Rovnice zachování hmoty	67
4.2 Pohybová rovnice a rovnice hydrostatické rovnováhy	68
4.3 Rovnice tepelné rovnováhy	69

4.3.1	Proton–protonový řetězec	69
4.3.2	CNO cyklus	73
4.3.3	Přeměna hélia na uhlík a další reakce	74
4.3.4	Tepelná rovnováha a změny entropie	76
4.4	Rovnice přenosu energie	78
4.4.1	Rovnice zářivého přenosu energie	78
4.4.2	Rovnice konvektivního přenosu energie	88
5	Matematická struktura rovnic hvězdného nitra	95
5.1	Stacionární model	95
5.2	Vývojový model	96
5.3	Dynamický model	97
6	Počáteční a okrajové podmínky	99
6.1	Počáteční podmínky	100
6.2	Okrajové podmínky v centru	100
6.3	Okrajové podmínky na povrchu	101
6.3.1	Fotosféra	102
6.3.2	Podfotosférické vrstvy	103
7	Henyeova numerická metoda integrace vnitřních částí hvězdy	105
7.1	Metoda úplné linearizace	105
7.2	Meze linearizace	108
8	Vývoj osamocené hvězdy	111
8.1	Ilustrativní příklad: vývoj hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$	111
8.2	Odlišnosti hvězdného vývoje v závislosti na hmotnosti hvězdy	118
9	Srovnání předpovědí teorie hvězdného vývoje s pozorováním	129
9.1	Jak získávat pozorovací data?	129
9.2	Vysvětlení hlavních rysů Hertzsprungova–Russellova diagramu	132
9.3	Projevy vývoje ve hvězdokupách	134
9.4	Projevy vývoje ve dvojhvězdách	136
9.5	Změny chemického složení pozorované ve spektrech	136
9.6	Test vnitřní struktury hvězd pomocí apsidálního pohybu	140
9.6.1	Apsidální pohyb v klasické mechanice	140
9.6.2	Relativistický apsidální pohyb	141
9.6.3	Celkový apsidální pohyb	142
9.7	Projevy vývoje za dobu lidské historie	142
10	Jednoduché analytické modely a odhady	145
10.1	Polytropní děj	145
10.2	Laneova–Emdenova diferenciální rovnice	149
10.3	Polytropní modely hvězd	151

11 Hvězdný vítr a ztráta hmoty z hvězd	157
11.1 Observační fakta	157
11.2 Parkerova teorie větru u chladných hvězd	161
11.3 CAK teorie hvězdného větru řízeného zářením	164
11.4 Vliv hvězdného větru na vývoj hvězd	168
12 Vliv rotace	171
12.1 Rocheův model a jednoduché odhady	171
12.2 Modely hvězdného vývoje se započtením rotace	175
12.3 Některé výsledky vývoje rotujících hvězd	178
13 Vývoj dvojhvězd	185
13.1 Rocheův model a jednoduché odhady	185
13.2 Výpočet hvězdného vývoje ve stadiu výměny hmoty	189
13.3 Některé výsledky modelování vývoje dvojhvězd	194
13.4 Modely vývoje dvojhvězd versus pozorování	201
14 Pulsace hvězd	203
14.1 Radiální pulsace sférických hvězd	203
14.1.1 Podmínka pro vznik pulsací	203
14.1.2 Opacitní mechanismus pulsací	205
14.1.3 Hrubý odhad periody radiálních pulsací	206
14.1.4 Vztahy perioda – zářivý výkon – barva	209
14.2 Kinematika neradiálních pulsací	210
14.2.1 Sektorální pulsace rotujících hvězd	212
14.3 Hydrodynamika pro jednoduché vlnění	217
14.3.1 Akustické vlny v homogenním prostředí (p-módy)	219
14.3.2 Vnitřní gravitační vlny (g-módy)	220
14.3.3 Povrchové gravitační vlny (f-módy)	221
15 Gravitační kolaps protohvězd	225
15.1 Způsoby ochlazování	225
15.2 Vývoj před hlavní posloupností, Hayashiho linie	226
15.3 Minimální Jeansova hmotnost	230
15.4 Eddingtonova mez	232
16 Explosivní stadia ve vývoji hvězd	235
16.1 Supernovy vznikající kolapsem jádra	235
16.1.1 Mechanismus neutrinové bomby	237
16.1.2 Záblesky záření gama (GRB)	238
16.1.3 Nukleosyntéza r-procesem	239
16.1.4 Dosvit a zbytky po supernovách	241
16.2 Supernovy vznikající explozí bílého trpaslíka	241
16.2.1 Laminární rychlost deflagrace	243

16.2.2	Chapmanova–Jouguetova rychlost detonace	244
16.2.3	Rayleighova–Taylorova nestabilita	247
17	Typy pozorovaných hvězd a jejich vývojová stadia	251
17.1	Horké hvězdy spektrálního typu O a Wolfovy–Rayetovy hvězdy	251
17.2	Hvězdy spektrálního typu B	253
17.2.1	Chemicky pekuliární Bp hvězdy	253
17.2.2	Pulsující β Cep hvězdy	254
17.2.3	Pomalů pulsující B hvězdy (SPB)	254
17.2.4	Hvězdy se závojem (Be stars)	256
17.2.5	Svítivé modré proměnné (LBV)	264
17.3	Hvězdy spektrálních typů A a F	265
17.3.1	Chemicky pekuliární Am hvězdy	266
17.3.2	Magnetické Ap hvězdy	267
17.3.3	Pulsující δ Scuti hvězdy	268
17.3.4	SX Phe hvězdy	269
17.3.5	γ Dor hvězdy	270
17.3.6	Lithium a berylium u F a G hvězd	270
17.4	Chladné G, K a M hvězdy	272
17.4.1	Chromosféricky aktivní hvězdy: UV Cet, BY Dra, aj.	272
17.4.2	Pulsující hvězdy: Cefeidy, Miry, R CrB a AGB hvězdy	277
17.5	Hvězdy v raných vývojových stádiích	280
17.5.1	T Tauri hvězdy	280
17.5.2	FU Ori hvězdy	281
17.6	Hvězdy v pozdních vývojových stádiích	281
17.6.1	Bílí trpaslíci a ZZ Ceti hvězdy	281
17.6.2	Novy, kataklyzmatické proměnné a polary	283
17.6.3	Supernovy	284
A	Jednotky a veličiny používané v astronomii	289
A.1	Soustavy fyzikálních jednotek	289
A.2	Astronomické jednotky času	290
A.3	Astronomické jednotky vzdálenosti	291
A.4	Hmotnosti a rozměry hvězd	292
	Rejstřík	293
	Literatura	301

Proč studovat hvězdy?

O vesmíru, jehož jsme součástí a který nás obklopuje, přemýšleli lidé od pradávna. Viděli východy a západy Slunce, změnu fází Měsíce, sluneční a měsíční zatmění, planety, které měnily svou polohu na nebi, ale také oblohu plnou hvězd. Zjednodušeně lze říci, že v 19. století bylo hlavní úsilí astronomů soustředěno na poznávání sluneční soustavy a našeho postavení v ní, zvláště pak na určování vzdáleností kosmických těles. Ve 20. století byla pozornost soustředěna na hvězdy. V nynějším století je velké úsilí vynakládáno na studium vzdálených galaxií a velkoškálové struktury pozorovatelné části vesmíru.

Proč je tedy i nyní důležité studovat hvězdy a jejich vývoj? Obecně platí, že hledáme-li příčiny jakéhokoliv vývoje, musíme se vždy zajímat o změny energie. K velkým změnám energie dochází právě v nitrech hvězd. Kromě toho hvězdy představují základní stavební jednotky všech vyšších soustav. Díky zlepšující se pozorovací technice je můžeme pozorovat i ve stále větším počtu cizích galaxií a pomocí nich zpřesňovat škálu vzdáleností. Vzhledem k tomu, že hvězdy na konci svého vývoje mohou explodovat a rozptýlit materiál, ze kterého jsou složeny a který nukleárními přeměnami pozměnily, je znalost vlastností hvězd nezbytná i pro studium vlastností mezihvězdné látky.

Musíme připustit, že obecně přijatá definice pojmu *hvězda* neexistuje. V tomto textu budeme za hvězdy považovat tělesa, která září aspoň zčásti na úkor vlastní vnitřní energie, ne pouze odraženým světlem. Zároveň musí být alespoň někdy během jejich vývoje zdrojem energie jaderná syntéza prvků.

Patří k samotné povaze astronomie a astrofyziky, že naprostou většinu informací o kosmických objektech nám zprostředkovává od nich přicházející elektromagnetické záření, ať už jimi vyzařované nebo pouze odražené. Se základními pojmy, které se záření a spektroskopie týkají, se budeme opakovaně setkávat a je důležité se s nimi důkladně obeznámit, což můžeme učinit v kapitole 2.

V úvodní kapitole 1 stručně diskutujeme zdroje energie hvězd a standardní model Slunce. Těžištěm těchto skript je výklad rovnic hvězdné stavby a numerických metod jejich řešení v kapitolách 3 až 7. Příklady vývoje hvězdy a porovnání s pozorováním probíráme v kap. 8 a 9; přibližné analytické metody zmiňujeme v kap. 10.

Pokročilejší partie astrofyziky, jako je vliv hvězdného větru, rotace, dvojhvězd nebo pulsací diskutujeme v kap. 11 až 14. Raná a pozdní stádia vývoje hvězd, specifická svou krátkou časovou škálou, jsou předmětem kapitol 15 a 16. Jako poslední kap. 17 je zařazeno obsáhlé pojednání o různých typech hvězd a jejich proměnnosti.

Skriptu vznikla na základě přednášky Astrofyzika II, konané v letech 2004 až 2010 na Astronomickém ústavu MFF UK. Za velmi užitečné připomínky k předchozím verzím tohoto textu děkujeme Dr. Ivanovi Hubenému. Naše poděkování patří rovněž studentům slečnám Marii Hrudkové a Ivaně Stoklasové a pánům Janovi Libichovi, Tomášovi Proseckému, Stanislavu Poddanému, Lukášovi Shrbenému a Vojtěchovi Sidorínovi za jejich cenné připomínky a za nalezení chyb a překleptů.

Tento učební text vzniknul za podpory grantu MŠMT 34/2003.

Petr Harmanec a Miroslav Brož

Praha, srpen 2010

1 Úvod

1.1 Vznik teorie

Po dlouhou dobu zůstávala otázka fyziků a astrofyziků, proč hvězdy vydrží bez viditelné změny zářit tak dlouho, nezodpovězena. Zkusme nejprve různé zdroje energie posoudit jednoduchými energetickými úvahami a všimněme si přitom, že zdrojů energie hvězd je ve skutečnosti vícero.

Anaxagorás v 5. st. př. n. l. tvrdil, že hvězda, respektive Slunce, je rozžhavená masa železa. Kdyby tomu tak bylo, celkovou tepelnou energii obsaženou v železe bychom mohli odhadnout jako

$$Q \simeq M_{\odot} c \Delta T \doteq 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 450 \text{ J/K/kg} \cdot 6\,000 \text{ K} \doteq 5,4 \cdot 10^{36} \text{ J}, \quad (1.1)$$

kde M_{\odot} je hmotnost Slunce, c měrná tepelná kapacita a ΔT změna teploty.¹ To se může zdát hodně, ale při současném zářivém výkonu Slunce $L_{\odot} = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$ to znamená, že by Slunce vydrželo zářit po dobu

$$\tau \simeq \frac{Q}{L_{\odot}} \doteq \frac{5,4 \cdot 10^{36} \text{ J}}{3,8 \cdot 10^{26} \text{ J/s}} \doteq 1,4 \cdot 10^{10} \text{ s} \doteq 460 \text{ roků}, \quad (1.2)$$

což je evidentně velmi málo. Nicméně takové jednoduché chladnutí (jen s větším ΔT a menším L) probíhá u bílých trpaslíků v pozdních fázích hvězdného vývoje nebo u hnědých trpaslíků.

Ještě v 19. století existovaly úvahy o tom, zda je možné, aby Slunce získávalo svou zářivou energii chemickými reakcemi, tedy spalováním tuhých či tekutých látek. Názor, že to není pravděpodobné, vyslovil již John Herschel. Ostatně pro oxidaci vodíku $2^1\text{H}_2 + ^{16}\text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$, která má velkou výhřevnost $H \doteq 100 \text{ MJ/kg}$, je

$$Q \simeq M_{\text{vodíku}} H \doteq \frac{2 \cdot 10^{30}}{9} \cdot 10^8 \text{ J} \doteq 2,5 \cdot 10^{37} \text{ J} \quad (1.3)$$

a použijeme-li stejný trik se zářivým výkonem, vyjde charakteristická doba $\tau = Q/L_{\odot} \doteq 2\,000$ roků.

¹Řeční filosofové samozřejmě neoperovali s pojmy teplo, měrná tepelná kapacita, neznali zákon zachování energie ani nezměřili hmotnost a teplotu Slunce. V tomto kontextu se na odhad musíme dívat.

Lékař J. R. Mayer uvažoval roku 1846 o tom, že by Slunce mohlo získávat energii dopady meteoritů. Každou sekundu by se ovšem na záření musela přeměňovat kinetická energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2 \simeq L_\odot \cdot 1 \text{ s}$, což by při rychlostech dopadu $v \simeq 100 \text{ km/s}$ znamenalo tok hmoty

$$\frac{dm}{dt} \simeq \frac{2L_\odot}{v^2} \doteq \frac{2 \cdot 3,8 \cdot 10^{26}}{(10^5)^2} \text{ kg/s} \doteq 7,6 \cdot 10^{16} \text{ kg/s} \doteq 1,2 \cdot 10^{-6} M_\odot/\text{rok}, \quad (1.4)$$

čili $\tau \simeq M_\odot/(dm/dt) \simeq 10^6$ roků. Navíc by se přírůstek hmotnosti musel měřitelně projevit na změně drah planet.² Pro Slunce tedy tento zdroj nepřipadá v úvahu, ale taková akrece planetesimál byla hlavním zdrojem tepelné energie planet.

H. von Helmholtz roku 1854 přišel místo toho s hypotézou, že Slunce září díky uvolňování energie gravitačním smršťováním. Gravitační potenciální energie koule o konstantní hustotě je rovna $E_G = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$. Podle viriálového teorému platí pro gravitačně vázané systémy $\langle E_K \rangle = -\frac{1}{2}\langle E_G \rangle$, tudíž celková mechanická energie hvězdy je $E(R) = E_K + E_G = \frac{1}{2}E_G$. V nekonečnu byla pochopitelně energie $E(\infty) = 0$; při kolapsu se tedy uvolní jejich rozdíl³

$$\Delta E = E(\infty) - E(R) = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R} \doteq 0,3 \cdot \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} \text{ J} \doteq 1,1 \cdot 10^{41} \text{ J}. \quad (1.5)$$

Odpovídající doba zářivé stability

$$\tau_{\text{KH}} \simeq \frac{\Delta E}{L_\odot} \simeq 10^7 \text{ roků} \quad (1.6)$$

se nazývá *Kelvinova–Helmholtzova škála*. Zlepšující se odhady stáří Země ale vyloučily i tuto možnost, třebaže, jak uvidíme, se gravitační kontrakce v určitých stádiích hvězdného vývoje skutečně významně uplatňuje (například při přechodu od hlavní posloupnosti do stadia červeného obra, ve fázi T Tauri nebo při výbuchu supernovy).

Více než 97 % látky v nitru Slunce je plně ionizováno, přičemž na každý atom připadá řádově $E_{\text{ion}} \simeq 13,9 \text{ eV}$ a celkem by se při rekombinaci uvolnilo

$$E \simeq \frac{M_\odot}{m_{\text{H}}} E_{\text{ion}} \doteq \frac{2 \cdot 10^{30}}{1,7 \cdot 10^{-27}} 13,9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \doteq 2,7 \cdot 10^{39} \text{ J}; \quad (1.7)$$

doba $\tau \simeq 200\,000$ roků. Stupeň ionizace ve Slunci se v současnosti prakticky nemění, ale třeba při gravitačním kolapsu mezihvězdného mračna se právě na ionizaci neutrálních atomů spotřebovává nezanedbatelné množství tepelné energie, čímž klesne teplota oblaku a podpoří se další smršťování protohvězdy.

²Podle 3. Keplerova zákona je $a^3/P^2 \propto M$, po diferencování (při $a = \text{konst.}$) $dM = -2\frac{a^3}{P^3}dP$ a $\frac{dP}{P} = -\frac{1}{2}\frac{dM}{M} \simeq 10^{-6} \simeq 30 \text{ s}$ za rok, což se ovšem nepozoruje.

³Jinými slovy: v nekonečnu jsou celková, gravitační potenciální i kinetická energie rovné nule. Hmotný element při volném pádu z nekonečna prolétává ve vzdálenosti R od centra parabolickou rychlostí $v_p = \sqrt{2GM/R}$. Aby neodletěl po parabole znovu do nekonečna, ale usadil se na kruhové dráze o poloměru R , musel by být zbrzděn nějakou srážkou na kruhovou (keplerovskou) rychlost $v_k = \sqrt{GM/R}$. Rozdíl odpovídajících kinetických energií se disipuje na teplo.

Po objevu radioaktivity (Becquerel 1896) bylo evidentní, že se jedná o velmi vydatný zdroj. Při postupném rozpadu jediného atomu uranu ^{235}U se uvolní $E_{\text{U}} \doteq 200 \text{ MeV}$; celková energie by tedy mohla být až

$$E \simeq \frac{M_{\odot}}{m_{\text{U}}} E_{\text{U}} \doteq \frac{2 \cdot 10^{30}}{235 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27}} \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \doteq 1,6 \cdot 10^{44} \text{ J} \quad (1.8)$$

a odpovídající $\tau \simeq 14$ miliard let. Na hvězdách nicméně prvky těžší než železo ve velkém množství nepozorujeme.

Teprve koncem třicátých let dvacátého století byl nalezen skutečný zdroj stabilního záření hvězd: *jaderná syntéza prvků*, zejména slučování jader vodíku na jádra helia — viz např. Weizsäcker (1937), Bethe a Critchfield (1938) a Bethe (1939). Když se při jedné přeměně „ $4\text{p} \rightarrow \alpha$ “ uvolní energie $E_{\text{H}} \doteq 28 \text{ MeV}$, vychází řádový odhad celkové energie

$$E_{\text{nuk}} \simeq \frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{M_{\text{jádra}\odot}}{m_{\text{H}}} E_{\text{H}} \doteq 0,19 \cdot \frac{5 \cdot 10^{29}}{1,7 \cdot 10^{-27}} \cdot 28 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \doteq 2,5 \cdot 10^{44} \text{ J} \quad (1.9)$$

a *nukleární časová škála*

$$\tau_{\text{nuk}} \simeq \frac{E_{\text{nuk}}}{L_{\odot}} \simeq 2 \cdot 10^{10} \text{ roků.} \quad (1.10)$$

Tím byla otevřena cesta ke konstrukci realistických modelů stavby a vývoje hvězd.

Je třeba si uvědomit, že téměř celá dosavadní teorie stavby a vývoje hvězd je vybudována a propočtena za pomoci *jednorozměrných modelů sféricky symetrických hvězd*. Diferenciální rovnice popisující stavbu vypadají takto (jejich odvozováním se zabýváme v kapitole 4; jedná se o rovnice zachování hmoty, hydrostatické rovnováhy, tepelné rovnováhy a přenosu energie)⁴

$$\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}, \quad (1.11)$$

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4}, \quad (1.12)$$

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuk}}(\rho, T, X, Y, Z), \quad (1.13)$$

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{GT M_R}{4\pi P R^4} \nabla, \quad (1.14)$$

⁴Označení je následující: R poloměr, M_R hmotnost obsažená v kouli o poloměru R , ρ hustota, P tlak, L_R zářivý výkon vycházející z koule o poloměru R , ϵ_{nukl} měrný výkon jaderných reakcí, T teplota, X, Y a Z abundance vodíku, helia a kovů, κ opacita, c_P tepelná kapacita při konstantním tlaku, λ koeficient vyjadřující příspěvek nerelativistické degenerace elektronového plynu, μ střední molekulová hmotnost.

kde gradient $\nabla = \min(\nabla_{\text{rad}}, \nabla_{\text{ad}})$, $\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa(\rho, T, X, Y, Z)PL_R}{16\pi acGM_RT^4}$, $\nabla_{\text{ad}} = \frac{\delta P}{c_P \rho T}$, $\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P$, a soustavu uzavírá stavová rovnice hvězdné látky

$$P = \frac{\rho}{\mu} \Re T \lambda(\rho, T) + \frac{a}{3} T^4, \quad (1.15)$$

kde $\mu^{-1} \doteq \frac{3}{2}X + \frac{1}{4}Y + 0,5$. Toto zjednodušení má své oprávnění — ukazuje se totiž, že hmota hvězd má vysoký stupeň koncentrace směrem ke středu. Všechny stavové veličiny lze proto pro daný model hvězdy považovat za funkce jediné proměnné, např. $R(M_R)$, $\rho(M_R)$, $P(M_R)$, $L_R(M_R)$, $T(M_R)$, kde M_R označuje hmotnost obsaženou v kouli o poloměru R .⁵

Přesto je dobře si uvědomit, jaká další zjednodušení jsou činěna:

- Zanedbává se *rotace* hvězd (odstředivá síla, změna tvaru hvězdy, diferenciální rotace). Modely, které berou rotaci hvězd v potaz a opouštějí předpoklad sférické symetrie, existují zatím jen ve velmi zjednodušené formě, jak o tom bude řeč později.
- Zanedbávají se možná *magnetická pole* a jejich vliv na stavbu hvězdy.
- V podpovrchových vrstvách se používá nedokonalá *teorie konvekce*, která empiricky volí poměr $\alpha = l/H_P$ mezi střední volnou dráhou l konvektivního elementu a tlakovou škálou $H_P = -(d \ln P/dR)^{-1} = -P/(dP/dR)$ (angl. pressure scale height). Předpokládá se, že termodynamické procesy v nitru hvězdy probíhají adiabaticky, což je ale dobrá aproximace. U hmotnějších hvězd zůstává zdrojem nejistoty i jev, kterému se říká *konvektivní přestřelování* (angl. convective overshooting), totiž možnost, že konvekce díky setrvačnosti konvektivních elementů zasáhne i do vrstev nad konvektivní zónou.
- Přetrvává určitá nepřesnost v hodnotách extinkčních (neboli opacitních) koeficientů $\kappa(\rho, T, X, Y, Z)$ hvězdné látky (i když se situace v posledních letech hodně zlepšila) a tyto koeficienty se pro výpočty hvězdných niter používají středované přes celé elektromagnetické spektrum.
- Přetrvává i nejistota v určení účinných průřezů jaderných reakcí, což vede obecně k větším chybám v časové škále, než v povrchových charakteristikách modelových hvězd. Podle nejnovějších studií se nejistoty v určení účinných průřezů reakcí pohybují v rozmezí 5 až 40 %.
- Pro velmi chladné hvězdy a pro velmi husté hvězdy přetrvávají určité nejistoty ve stavové rovnici.

⁵ Použití M_R jako nezávislé proměnné je výhodnější než použití R , zejména z důvodů numerických. V řídkých podpovrchových vrstvách se dokonce jako nezávislá proměnná používá tlak P .

- Pro některé hvězdy jsou atmosféry nestabilní a dochází z nich ke ztrátě hmoty formou *hvězdného větru*. To se při modelování buď zcela zanedbává, nebo je použit jednoduchý parametrický popis ztráty hmoty hvězdným větrem dM/dt .
- Problémem z hlediska modelování zůstávají i ta stadia vývoje, kdy dochází k dramatickým změnám na dynamické škále, které nelze korektně popsat stacionárními modely.

1.2 Model našeho Slunce

Ještě předtím, než se začneme teorii stavby a vývoje hvězd věnovat soustavně, může být užitečné ilustrovat míru její úspěšnosti na příkladu modelování našeho Slunce v jeho současném vývojovém stadiu.

Je dobré si uvědomit, že i současné počítání modelu Slunce představuje svého druhu magii. Obvykle se začíná s homogenním modelem, kontrahujícím k hlavní posloupnosti nulového věku, který je ještě ve stavu před započítáním slučování deuteria. Zkusmo se volí:

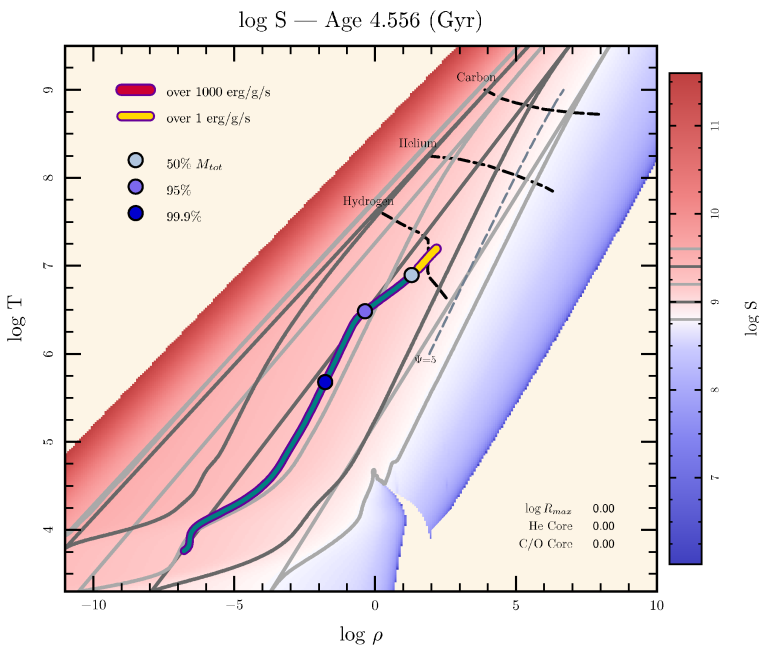
1. poměr $\alpha = l/H_P$ mezi střední volnou dráhou a tlakovou škálou;
2. počáteční hmotnostní procento vodíku X ;
3. počáteční hmotový poměr obsahu těžkých prvků vůči vodíku Z/X ,

a to tak, aby výpočet pro vývojový model o hmotě Slunce v čase 4,56 miliardy let od hlavní posloupnosti nulového věku správně reprodukoval: (i) současný pozorovaný poloměr R_\odot ; (ii) jeho zářivý výkon L_\odot ; (iii) poměr Z/X ve fotosféře. Za hlavní posloupnost nulového věku se přijímá okamžik, kdy nukleární reakce přispívají více než 50 % k zářivému výkonu Slunce. Většina novějších modelů vede na poměr $\alpha \simeq 2$.

Lithiový problém. Morel a spol. (1999) publikovali podrobnou studii slunečních modelů počítaných pro tři různé kompilace účinných průřezů a energetické vydatnosti jaderných reakcí (tab. 1.1). Ukazuje se, že makroskopické veličiny jsou poměrně necitlivé k přetrvávajícím nejistotám v nukleárních reakcích, snad s výjimkou obsahu lithia ${}^7\text{Li}$, který modely předpovídají asi dvakrát vyšší, než jaký se pozoruje. Tyto modely uspokojivě předpovídají i základní vlastnosti slunečních oscilací, které jsou velmi citlivým indikátorem vnitřní struktury.

Tabulka 1.1: Porovnání tří modelů Slunce, vypočítaných pro tři sady účinných průřezů (Angulo a spol. 1999, Adelberger a spol. 1998, Caughlan a Fowler 1988), kde Y_i , Z_i označují *počáteční* hodnoty hmotnostních podílů hélia a kovů, α parametr semiempirické teorie konvekce, ${}^7\text{Li}_{\text{si}}$ ochuzení abundance lithia na povrchu, na hlavní posloupnosti nulového věku (v jednotkách dex $\equiv \log(w_X/w_H) + 12$). Ostatní parametry odrážejí stav v současnosti: R_{CZ} je poloměr hranice konvektivní zóny, T_c , ρ_c , Y_c , Z_c teplota, hustota a abundance v centru, $\delta\nu_{02}$, $\delta\nu_{13}$ rozdíly frekvencí radiálních p-módů stupně $l = 0-2$ a $l = 1-3$, P_0 je charakteristický rozdíl mezi periodami g-módů. Modelové hodnoty se navzájem se odlišují nejvýš o 2%. Vpravo jsou pozorované hodnoty obsahu prvků ve sluneční atmosféře a měřené frekvence slunečních oscilací. Jsou téměř všechny v souladu se standardním modelem Slunce, až na obsah lithia ${}^7\text{Li}$. Podle Morela a spol. (1999).

	An99	Ad98	CF88	pozorované hodnoty
Y_i	0,2723	0,2726	0,2729	
Z_i	0,0197	0,0197	0,0196	
α	1,924	1,931	1,941	
${}^7\text{Li}_{\text{si}}/\text{dex}$	2,26	2,38	2,37	
${}^9\text{Be}_{\text{si}}/\text{dex}$	1,42	1,42	1,42	
Y_s	0,2436	0,2442	0,2447	0,232 až 0,249
Z_s	0,0181	0,0181	0,0181	
${}^7\text{Li}_s/\text{dex}$	2,18	2,30	2,29	$1,10 \pm 0,10 \leftarrow$ problém!
${}^9\text{Be}_s/\text{dex}$	1,35	1,35	1,353	$1,40 \pm 0,09$
$({}^3\text{He}/{}^4\text{He})_s \cdot 10^{-4}$	4,34	4,32	4,32	$4,40 \pm 0,4$
R_{CZ}/R_\odot	0,7138	0,7132	0,7124	$0,713 \pm 0,001$
$T_c/10^7 \text{K}$	1,573	1,578	1,566	
$\rho_c/\text{g cm}^{-3}$	153,8	153,0	151,9	
Y_c	0,6418	0,6420	0,6409	
Z_c	0,0210	0,0210	0,0210	
$\delta\nu_{02}/\mu\text{Hz}$	9,21	9,18	9,16	9,002 až 9,014
$\delta\nu_{13}/\mu\text{Hz}$	16,10	16,06	16,03	15,884 až 15,711
P_0/min	35,13	35,23	35,42	



Obrázek 1.1: Profil hustoty ρ a teploty T v nitru Slunce. Výpočet byl proveden numerickým integrátorem hvězdného nitra a vývoje, programem EZ (Evolve ZAMS) od Billa Paxtona (<http://theory.kitp.ucsb.edu/~paxton/EZ-intro.html>), respektive jeho mírně upravenou variantou EZ2 (http://hilda.troja.mff.cuni.cz/~mira/EZ2/EZ2_form.php).

Neutrinový problém. Do nedávna ale přetrvávala neshoda v předpovědi toku neutrin ze Slunce. Pro tři existující experimenty se pozorovalo výrazně méně neutrin, než kolik předpovídají modely, konkrétně: 0,60 krát méně pro galiová měření, 0,30 krát méně pro chlorová měření, a 0,47 krát méně pro experiment Kamiokande, přičemž modelové předpovědi se vzájemně lišily o méně než 10 %.

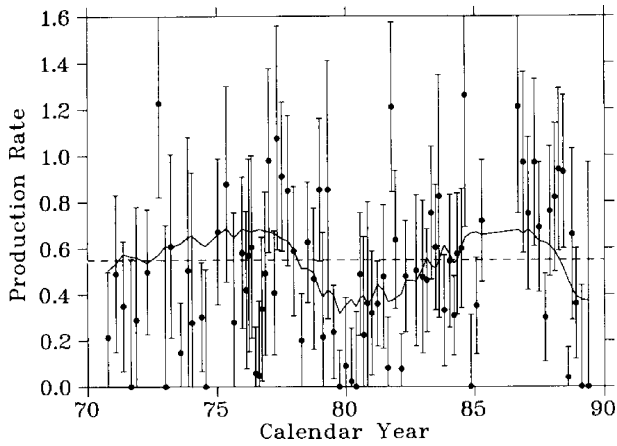
V roce 2001 došlo v celé věci k výraznému pokroku. Již roku 1969 publikovali Gribov a Pontecorvo (1969) domněnku, že elektronová neutrina ν_e vznikající při slučování vodíku v jádru Slunce se cestou k Zemi mohou měnit částečně v neutrina mionová ν_μ či τ -neutrino ν_τ , která se mnohem hůře detekují, a že tím by mohl rozpor teorie a pozorování vznikat. Ve spolupráci americko-japonské byl uveden do provozu nový detektor Super-Kamiokande v Japonsku a kanadsko-americko-britský tým publikoval první měření ze Sudbury Neutrino Observatory (SNO). SNO je laboratoř umístěná v aktivním dole na měď a nikl v Kanadě, která je v hloubce odpovídající 6 km vodního sloupce, takže je dobře chráněna proti účinkům kosmického záření. Vlastní detektor je sférická nádoba o průměru 12 m obsahující 1000 tun těžké vody, umístěná ve 30-m dutině naplněné velmi čistou normální vodou. Jedna z reakcí, při níž se elektronové neutrino při interakci s deuteronem mění na dva protony a urychlený elektron, je citlivá pouze na elektronová neutrino, zatímco rozptyly zaznamenané v čereňkovském detektoru Super-Kamiokande (používajícím čistou vodu) měří všechny typy neutrin. Bylo proto jasné, že pokud oba detektory naměří stejný tok neutrin, znamená to, že všechna neutrino přicházející ze Slunce jsou typu ν_e . Ve skutečnosti měření SNO získávaná od listopadu 1999 do ledna 2001 jasně prokázala, že detektor SNO detekuje méně neutrin než detektor Super-Kamiokande. Podrobnější vyhodnocení ukázalo, že alespoň neutrino s vyšší energií, vznikající během předposlední reakce proton–protonového řetězce, rozpadu boru na berylium, jsou detekována ve shodě se současnými modely Slunce. Měřený tok neutrin byl určen na (Fukuda a spol. 1998)

$$F_\nu = (5,44 \pm 0,99) \cdot 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad (1.16)$$

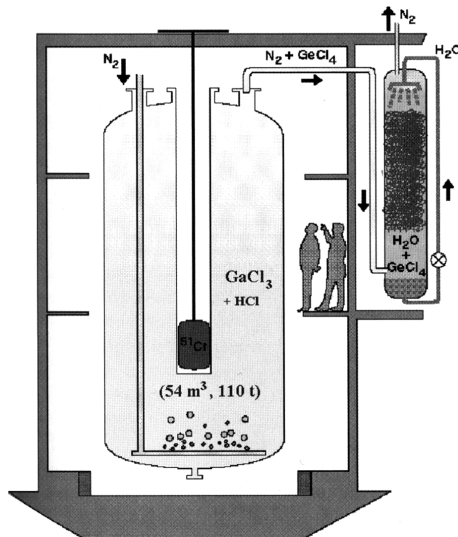
zatímco sluneční model předpovídá

$$F'_\nu = (5,05 \pm 0,20) \cdot 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (1.17)$$

Zdá se tedy, že přes šedesát let stará teorie stavby a vývoje hvězd do důchodu jít nemusí a že její testování naopak přineslo podnět pro rozvoj fyziky, neboť přeměna neutrin vede k závěru, že neutrino musejí mít nenulovou klidovou hmotnost.



Obrázek 1.2: Tok slunečních neutrin měřený galiovým detektorem, v jednotkách počet zachycení neutrina za 1 den. Převzato z Filippone a Vogel (1990).



Obrázek 1.3: Schéma galiového detektoru neutrin a jeho kalibrace radioaktivním zdrojem ^{51}Cr . Slabá interakce $\nu + {}^{71}\text{Ga} \leftrightarrow {}^{71}\text{Ge} + e^-$ vyžaduje minimální hodnotu energie neutrina $E_\nu = 233 \text{ keV}$. Převzato ze Stix (2002).

2 Záření a spektrum

2.1 Elektromagnetické záření

Jak je známo z fyziky, má elektromagnetické záření duální povahu: má současně charakter vlnění a částicovou povahu. Jako vlnění se může šířit i prázdňným prostorem a lze jej charakterizovat vlnovou délkou (tedy délkou jedné vlny) λ nebo frekvencí ν (počtem kmitů na jednotku délky). Obě tyto veličiny spolu souvisí známým vztahem

$$\nu = \frac{c_n}{\lambda}, \quad (2.1)$$

kde c_n je rychlost, jakou se elektromagnetické záření šíří v uvažovaném prostředí. V prázdňném kosmickém prostoru se elektromagnetické záření šíří konstantní rychlostí c , které se nejčastěji říká rychlost světla a která je významnou fyzikální konstantou. Protože právě o záření šířící se kosmickým prostorem se budeme zajímat nejvíce, budeme vztah mezi frekvencí a vlnovou délkou uvažovat obvykle ve tvaru

$$\nu = \frac{c}{\lambda}. \quad (2.2)$$

Z fyziky dále víme, že jedno kvantum elektromagnetického záření o frekvenci ν , tedy foton záření, nese energii

$$E_\nu = h\nu, \quad (2.3)$$

kde $h = 6,62606876 \cdot 10^{-34}$ Js je *Planckova konstanta*. Podle slavné Einsteinovy rovnice

$$E = mc^2 \quad (2.4)$$

lze pak ovšem pohybujícímu se fotonu přiřadit i hmotnost m_ν a tedy hybnost $p_\nu = m_\nu c$. Je zřejmé, že energie fotonu je přímo úměrná jeho frekvenci a nepřímo úměrná jeho vlnové délce. Jinak řečeno, kvantum krátkovlnného záření odpovídá vyšší energii než kvantum záření dlouhovlnného. To není ani intuitivně tak překvapivé, neboť jaksi cítíme, že na to, aby se na dané délce záření zavlino vícekrát, je třeba, aby mělo větší energii. Také si můžeme uvědomit, že částicová povaha světla se bude více uplatňovat na krátkovlnném konci elektromagnetického záření, zatímco jeho vlnová povaha na dlouhém.

Dopplerův jev. Je-li rychlost světla ve vakuu nepřekročitelnou mezí, pak se rychlost elektromagnetického záření vysílaného i rychle se pohybujícím zdrojem již nemůže zvýšit. Co se ale změní, je energie fotonů. Pokud se zdroj pohybuje ve směru k pozorovateli, energie fotonu se zvýší o přidanou kinetickou energii a světlo se posune k vyšším frekvencím, tedy do fialova. Naopak u zdroje letícího směrem od pozorovatele se energie fotonu sníží a světlo se posune směrem do červena. Tento jev se nazývá *Dopplerovým jevem* a pro elektromagnetické záření jej lze v klasické fyzice (tj. pro vzájemnou rychlost zdroje a pozorovatele, která je mnohem menší, než rychlost světla ve vakuu) popsat vztahem

$$RV = \frac{c}{\lambda_{\text{lab}}} (\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{lab}}), \quad (2.5)$$

kde RV označuje radiální rychlost zdroje vůči pozorovateli, tedy rychlost ve směru zorného paprsku (zpravidla se bere kladně při vzdalování zdroje), λ_{obs} je pozorovaná vlnová délka, λ_{lab} je laboratorní klidová vlnová délka a c je opět rychlost světla ve vakuu.

Elektromagnetické záření můžeme vnímat buď globálně nebo podle jednotlivých vlnových délek. Často se používá termín *spektrum* elektromagnetického záření, čímž se rozumí funkce vyzařování nějakého zdroje v závislosti na vlnové délce či frekvenci. Reálné zdroje elektromagnetického záření totiž obvykle nejsou monochromatické, ale vyzařují přes velký rozsah vlnových délek, ač pro různé vlnové délky s různou vydatností.

Jednotky. Vlnová délka elektromagnetického záření se měří ve zlomcích, případně násobcích základní jednotky SI jednoho metru. Frekvence se v zásadě měří v jednotkách odvozené jednotky SI zvané Hertz (zkratka Hz) a příslušných násobcích:

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (2.6)$$

Vzhledem k obrovskému rozpětí mnoha řádů se v různých oblastech elektromagnetického záření vlnová délka a frekvence udávají z praktických důvodů v různých tradičně zaváděných jednotkách. V oblasti záření γ se většinou vůbec nepoužívá vlnová délka ani frekvence, ale jednotky energie odpovídající kvantu záření o dané frekvenci, nejčastěji udávané v *elektronvoltech* (zkratka eV)

$$1 \text{ eV} = (1,602\,176\,462 \pm 0,000\,000\,063) \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (2.7)$$

V ultrafialovém oboru a v optickém oboru se nejčastěji používá vlnová délka, udaná v nm nebo v Å. V infračerveném oboru se nejčastěji udává vlnová délka v $\mu\text{m} \equiv 10^{-6} \text{ m}$. Konečně pro rádiové vlny se udává jejich vlnová délka v m, případně frekvence v kHz či MHz.

Příklad: Spočítejte, jakou frekvenci a jakou vlnovou délku má foton o energii 1 eV.

Řešení: Podle vztahu (2.3) je

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{1,602176462 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,62606876 \cdot 10^{-34} \text{ J s}} = 2,41798949 \cdot 10^{14} \text{ Hz}. \quad (2.8)$$

Podle vztahu (2.2) je odpovídající vlnová délka

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{2,41798949 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 1,23984186 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,23984186 \text{ } \mu\text{m}. \quad (2.9)$$

2.1.1 Intenzita

Monochromatická intenzita I_ν je množství zářivé energie procházející v daném místě prostoru v daném směru kolmo jednotkovou ploškou do jednotkového prostorového úhlu v jednotkovém intervalu frekvencí za jednotku času. Množství zářivé energie dE_ν vycházející z plošky ds pod úhlem ϑ vůči normále k plošce do prostorového úhlu $d\omega$ ve frekvenčním intervalu $(\nu, \nu+d\nu)$ za čas dt je pak dáno vztahem (obr. 2.1)

$$dE_\nu = I_\nu(x, y, z, \varphi, \vartheta, t) d\nu ds \cos \vartheta d\omega dt. \quad (2.10)$$

Úhel ϑ měříme od osy z v intervalu od nuly do π , úhel φ od osy x v rozsahu od 0 do 2π . Rozměr intenzity na jednotku frekvence je zpravidla $\text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$, abychom zdůraznili, jak je intenzita vyjádřena, i když je zřejmé, že např. $1 \text{ Hz} = \text{s}^{-1}$. Daleko častěji se však v astronomické literatuře dosud setkáme s rozměrem v soustavě cgs: $\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. Platí zřejmě, že

$$I_\nu \text{ (v cgs)} = 10^{-3} I_\nu \text{ (v SI)}. \quad (2.11)$$

Intenzitu lze ovšem udávat i na jednotku vlnové délky, označovat ji jako I_λ a vztah (2.10) psát ve tvaru

$$dE_\lambda = I_\lambda(x, y, z, \varphi, \vartheta, t) d\lambda ds \cos \vartheta d\omega dt. \quad (2.12)$$

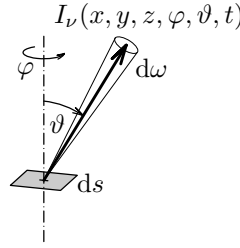
Mají-li výrazy dE_ν a dE_λ v rovnicích (2.10) a (2.12) vyjadřovat stejné množství energie, musí platit

$$I_\lambda d\lambda = I_\nu d\nu \quad (2.13)$$

a po diferencování rovnice (2.2) $d\nu = -c/\lambda^2 d\lambda$ dostáváme zřejmé vztahy mezi oběma veličinami

$$I_\lambda = \frac{\nu^2}{c} I_\nu \quad \text{a} \quad I_\nu = \frac{\lambda^2}{c} I_\lambda. \quad (2.14)$$

Záporné znaménko z diferencování se „ztratí“ v opačné orientaci kladných diferenciálů $d\nu$ a $d\lambda$.



Obrázek 2.1: Definice intenzity $I_\nu(x, y, z, \varphi, \vartheta, t)$.

Uvažme situaci, kdy záření v prázdném prostoru prochází v daném směru postupně dvěma elementárními ploškami ds_1 a ds_2 , jejichž normály svírají se směrem záření dva různé úhly ϑ_1 a ϑ_2 , přičemž r je vzdálenost mezi středy obou složek — viz obr. 2.2. energii záření jdoucího z místa plošky ds_1 ve směru plošky ds_2 , které právě prochází ploškou ds_2 , je

$$dE_\nu = I_\nu d\nu ds_1 \cos \vartheta_1 d\omega_1 dt, \quad (2.15)$$

kde pro úhel $d\omega_1$ zjevně platí

$$d\omega_1 = \frac{ds_2 \cos \vartheta_2}{r^2}. \quad (2.16)$$

Rovnici (2.15) lze proto přepsat do tvaru

$$dE_\nu = I_\nu d\nu ds_1 \cos \vartheta_1 \frac{ds_2 \cos \vartheta_2}{r^2} dt. \quad (2.17)$$

Ploška ds_1 je vidět z plošky ds_2 pod úhlem $d\omega_2$, pro který analogicky platí

$$d\omega_2 = \frac{ds_1 \cos \vartheta_1}{r^2} \Rightarrow ds_1 \cos \vartheta_1 = r^2 d\omega_2, \quad (2.18)$$

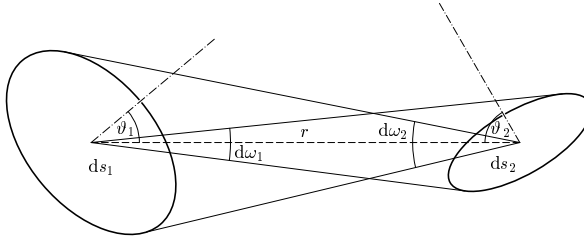
takže rovnici (2.17) lze upravit do tvaru

$$dE_\nu = I_\nu d\nu ds_2 \cos \vartheta_2 d\omega_2 dt. \quad (2.19)$$

Intenzita I_ν je ovšem stejné množství energie v místě plošky ds_1 , jak v rovnici (2.15), tak v rovnici (2.19), takže je zřejmé, že pokud v prostředí mezi oběma ploškami nedochází ani k pohlcování ani k uvolňování zářivé energie, nezávisí intenzita na místě, kde ji měříme.

Intenzita je tedy obecně funkcí frekvence, místa a směru. Nezávisí však na tom, kde ji registrujeme. Někdy se místo a směr záření popisují vektorově; poloha vektorem

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (2.20)$$



Obrázek 2.2: Intenzita záření v různých místech prázdného prostoru.

a směr jednotkovým vektorem \mathbf{n} , který s kolmicí na plošku ds svírá úhel ϑ . Rovnici (2.10) lze pak psát ve tvaru

$$dE_\nu = I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) d\nu \mathbf{n} \cdot \mathbf{ds} d\omega dt, \quad (2.21)$$

kde skalární součin $\mathbf{n} \cdot \mathbf{ds} = ds \cos \vartheta$.

Často se používá *střední intenzita záření* J_ν , tj. intenzita středovaná přes celý prostorový úhel ω , mnohdy též nazývaná *nultý moment intenzity*

$$J_\nu \equiv \frac{\int_0^{4\pi} I_\nu d\omega}{\int_0^{4\pi} d\omega} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_\nu d\omega. \quad (2.22)$$

V řadě případů — např. v normálních hvězdných atmosférách — lze předpokládat *osovou symetrii*, tedy to, že intenzita záření nezávisí na úhlu φ . Označme ji pro odlišení symbolem I_ν^s . S uvážením toho, že diferenciál prostorového úhlu je roven (viz obr. 2.3)

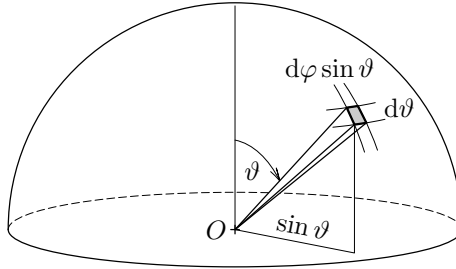
$$d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (2.23)$$

lze po integraci přes úhel φ psát

$$J_\nu^s = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu^s \sin \vartheta d\vartheta. \quad (2.24)$$

Někdy je užitečné používat celkovou, bolometrickou či *integrální intenzitu* I záření získanou integrací přes celé elektromagnetické spektrum

$$I \equiv \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda. \quad (2.25)$$



Obrázek 2.3: Diferenciál prostorového úhlu $d\omega$ vyjádřený pomocí diferenciálů úhlových souřadnic $d\vartheta$ a $d\varphi$.

2.1.2 Tok

Celkové množství záření procházející ploškou ds za čas dt ve frekvenčním rozsahu $(\nu, \nu + d\nu)$ ze všech směrů je

$$dE_\nu = \mathcal{F}_\nu d\nu ds dt. \quad (2.26)$$

kde funkci $\mathcal{F}_\nu(x, y, z, t)$ nazýváme *monochromatický tok záření* plochou a jak ihned vyplýne z dalšího výkladu, je to jedna z nejdůležitějších v astrofyzice používaných veličin, na kterou je třeba si dávat zvláště velký pozor, neboť ji různí autoři používají různě. Je zřejmé

$$\mathcal{F}_\nu = \int_0^{4\pi} I_\nu \cos\vartheta d\omega. \quad (2.27)$$

Rozměr toku je $\text{W m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ (nebo $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$).

Stejně jako intenzitu lze i tok alternativně udávat na jednotku vlnové délky, s převodními vztahy analogickými rovnicí (2.14)

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{\nu^2}{c} \mathcal{F}_\nu \quad \text{a} \quad \mathcal{F}_\nu = \frac{\lambda^2}{c} \mathcal{F}_\lambda. \quad (2.28)$$

V teorii hvězdných atmosfér se velmi často používá transformace $\mu \equiv \cos\vartheta$; příslušné integrace přes interval $(0, \pi)$ v úhlu ϑ se pak změní v integrace přes interval $(-1, 1)$ v proměnné μ . Zde se však pro názornost přidržíme explicitního zápisu.

Pokud budeme opět předpokládat, že intenzita záření *nezávisí na úhlu* φ a připomeneme si vztah (2.23), dostáváme pro tok výraz

$$\mathcal{F}_\nu^s = 2\pi \int_0^\pi I_\nu^s \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta. \quad (2.29)$$

Pokud je intenzita záření do všech směrů stejná, tj. pokud nezávisí v daném místě ani na úhlu ϑ , hovoříme o *isotropním* záření s intenzitou I_ν^i . Je zřejmé, že pro isotropní záření je celkový tok plochou *nulový*, neboť

$$\mathcal{F}_\nu^i = 2\pi I_\nu^i \int_0^\pi \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \pi I_\nu^i [\sin^2 \vartheta]_{\vartheta=0}^\pi = 0. \quad (2.30)$$

Naproti tomu tok isotropního záření I_ν do *poloprostoru*

$$\mathcal{F}_\nu^i = 2\pi I_\nu^i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \pi I_\nu^i [\sin^2 \vartheta]_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi I_\nu^i \neq 0. \quad (2.31)$$

Množství energie procházející celým povrchem sférické hvězdy o poloměru R v daném frekvenčním intervalu $d\nu$ je zřejmě dáno součinem plochy povrchu hvězdy a toku v uvažovaném intervalu frekvencí, tedy výrazem $4\pi R^2 \mathcal{F}_\nu d\nu$. Je-li uvažovaná hvězda ve vzdálenosti d od nás a označíme-li tok z hvězdy *registrovaný na Zemi* symbolem f_ν , pak pro energii procházející sférou o poloměru d musí analogicky platit výraz $4\pi d^2 f_\nu d\nu$. Porovnáním dostaneme vztah

$$f_\nu = \left(\frac{R}{d}\right)^2 \mathcal{F}_\nu. \quad (2.32)$$

Vidíme, že *tok ubývá se čtvercem vzdálenosti od zdroje*.

V řadě publikací se lze setkat s tím, že tok do celého prostoru je označován výrazem πF_ν , kde F_ν je *astrofyzikální tok*, související se zde zavedeným tokem vztahem

$$\pi F_\nu \equiv \mathcal{F}_\nu. \quad (2.33)$$

Astrofyzikální tok F_λ je tabelován např. ve velmi často užívaných Kuruczových modelech atmosfér hvězd (Kurucz, 1979).

V teoretických modelech se nejčastěji používá *Eddingtonův tok*, neboli *první moment intenzity*

$$H_\nu \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_\nu \cos \vartheta d\omega, \quad (2.34)$$

který souvisí s tokem zde zavedeným vztahem

$$H_\nu = \frac{1}{4\pi} \mathcal{F}_\nu. \quad (2.35)$$

Vzhledem k tomu, že v klasických modelech atmosfér hvězd se uvažují homogenní, ploché rovinné atmosféry, kde intenzita nezávisí na úhlu φ , je vystupující tok dobře popsán rovnicí (2.29). Eddingtonův tok lze pak psát ve tvaru

$$H_\nu = \frac{1}{4\pi} \mathcal{F}_\nu^s = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu^s \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta. \quad (2.36)$$

Je přirozeně možné zvést i celkový, bolometrický neboli *integrální tok*

$$\mathcal{F} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu = \int_0^\infty \mathcal{F}_\lambda d\lambda = \int_0^{4\pi} I \cos \vartheta d\omega. \quad (2.37)$$

Při praktických numerických výpočtech je tedy třeba dávat velmi dobrý pozor, jaký tok záření a v jakých jednotkách autor používá!

Příklad: Hayes a Latham (1975) publikovali absolutní kalibraci toku jasné hvězdy Vega (α Lyr). Pro vlnovou délku 550 nm udávají tok $F_\lambda = 3,39 \cdot 10^{-9} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$. Vypočtěte odpovídající frekvenci tohoto záření a odpovídající tok na jednotku frekvence udaný v soustavě SI.

Řešení: Frekvence záření o vlnové délce 550 nm je podle vztahu (2.2) rovna

$$\nu = \frac{2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{550 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 5,45077196 \cdot 10^{14} \text{ Hz}. \quad (2.38)$$

Tok F_λ v soustavě SI je $3,39 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-7} \text{ J} \cdot 10^4 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot 10 \text{ nm}^{-1} = 3,39 \cdot 10^{-11} \text{ W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$. Protože tok na jednotku frekvence musí označovat stejné množství zářivé energie za jednotku času jako tok na jednotku vlnové délky, platí zřejmě

$$F_\nu d\nu = F_\lambda d\lambda = F_\lambda \frac{c}{\nu^2} d\nu, \quad (2.39)$$

a tedy

$$\begin{aligned} F_\nu &= \frac{c}{\nu^2} F_\lambda = \frac{2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{5,45077196^2 \cdot 10^{28} \text{ Hz}^2} \cdot 3,39 \cdot 10^{-11} \text{ W m}^{-2} \cdot 10^9 \text{ m}^{-1} = \\ &= 3,42 \cdot 10^{-23} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.1.3 Hustota zářivé energie

Hustotou zářivé energie rozumíme množství zářivé energie nacházející se v daném místě a čase v objemové jednotce. Množství zářivé energie dE_ν procházející ploškou ds ze směru svírajícího s kolmicí na plošku úhel ϑ za čas dt bude dle definice

$$dE_\nu = I_\nu d\nu ds \cos \vartheta d\omega dt. \quad (2.41)$$

Protože se toto záření pohybuje rychlostí světla ve vakuu¹, naplní za čas dt objem $dV = c dt ds \cos \vartheta$. Hustota záření přicházejícího z daného směru bude tedy

$$\frac{dE_\nu}{dV} = \frac{1}{c} I_\nu d\nu d\omega. \quad (2.42)$$

Integrací přes celý prostorový úhel pak dostaneme hustotu záření v daném intervalu frekvencí $(\nu, \nu + d\nu)$

$$u_\nu d\nu = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I_\nu d\omega d\nu = \frac{1}{c} 4\pi J_\nu d\nu, \quad (2.43)$$

kde J_ν označuje střední intenzitu (2.22). Integrací přes celé spektrum obdržíme celkovou hustotu záření

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{1}{c} \int_0^\infty I d\omega = \frac{4\pi}{c} J. \quad (2.44)$$

2.1.4 Tlak záření

Označme hybnost záření v dané frekvenci, které přichází z určitého směru, symbolem dp_ν . Je-li hmotnost tohoto záření dm_ν , lze pro jeho hybnost psát $dp_\nu = dm_\nu c$. S použitím Einsteinovy rovnice (2.4)

$$dE_\nu = dm_\nu c^2 \quad (2.45)$$

je tedy výraz pro hybnost záření

$$dp_\nu = \frac{dE_\nu}{c}. \quad (2.46)$$

Síla působící na plošku ds je podle druhého Newtonova zákona dána časovou změnou hybnosti, což po dosazení ze vztahu (2.41) dává

$$df = \frac{dp_\nu}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dE_\nu}{dt} = \frac{1}{c} I_\nu d\nu ds \cos \vartheta d\omega. \quad (2.47)$$

Složka síly působící *kolmo* na uvažovanou plošku bude ovšem $df_\perp = df \cos \vartheta$. Složky působící tečně nás nezajímají, neboť jejich součet je při axiálně symetrické intenzitě beztak nulový. Tlak je roven síle působící na jednotkovou plochu, integrované přes všechny směry

$$P_{r,\nu} d\nu = \frac{1}{ds} \int_{\omega=0}^{4\pi} \Delta f_\perp = \frac{d\nu}{c} \int_0^{4\pi} I_\nu \cos^2 \vartheta d\omega. \quad (2.48)$$

¹Fázová rychlost elektromagnetických vln v plazmatu je dokonce větší než c , ale grupová rychlost, která určuje rychlost šíření informace, je samozřejmě omezena c .

Zavedeme-li ještě *druhý moment intenzity* K_ν vztahem

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_\nu \cos^2 \vartheta d\omega, \quad (2.49)$$

můžeme pro monochromatický tlak záření psát

$$P_{r,\nu} = \frac{4\pi}{c} K_\nu. \quad (2.50)$$

Pro tlak záření všech frekvencí přirozeně platí

$$P_r = \int_0^\infty P_{r,\nu} d\nu = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I \cos^2 \vartheta d\omega. \quad (2.51)$$

2.1.5 Koeficient opacity a optická tloušťka

Uvažme situaci, kdy záření o intenzitě I_ν prochází vrstvou plynu. V důsledku různých atomárních procesů se energie záření může zčásti pohltit a zčásti rozptýlit do jiných směrů. K popisu toho, kolik energie se na dráze paprsku pohltí, se zavádí *lineární koeficient opacity* ξ_ν (zvaný též absorpční koeficient), představující *relativní úbytek intenzity* poté, co paprsek urazí v prostředí jednotkovou vzdálenost. Jinak řečeno, prochází-li záření hmotným prostředím, pak při průchodu o vzdálenost dz dojde k úbytku intenzity dI_ν , pro nějž platí

$$I_\nu(z + dz) - I_\nu(z) \equiv dI_\nu = -\xi_\nu I_\nu dz. \quad (2.52)$$

Obvykle se zavádí koeficient opacity *na jednotku hustoty* (též hmotnostní absorpční koeficient), daný vztahem

$$\kappa_\nu = \frac{\xi_\nu}{\rho}, \quad (2.53)$$

kde ρ označuje hustotu v uvažovaném prostředí. Lineární koeficient opacity má rozměr $[\xi_\nu] = \text{m}^{-1}$, zatímco rozměr hustotního koeficientu opacity je

$$[\kappa_\nu] = \frac{1}{\text{m}} \frac{1}{\text{kg m}^{-3}} = \text{m}^2 \text{kg}^{-1}. \quad (2.54)$$

Uvažujme nyní úbytek záření po průchodu vrstvou plynu o tloušťce dx . Předpokládáme, že jde o záření, vstupující do vrstvy ploškou ds pod úhlem ϑ . Při průchodu vrstvou o tloušťce dx urazí toto záření zřejmě dráhu $dz = \frac{dx}{\cos \vartheta}$ a pro energii pohlceného záření tedy můžeme psát

$$dE_\nu = \overbrace{\xi_\nu I_\nu}^{dI_\nu} \frac{dx}{\cos \vartheta} ds \cos \vartheta d\omega dt = \kappa_\nu \rho I_\nu dx dv ds d\omega dt. \quad (2.55)$$

V teorii hvězdných atmosfér se používá bezrozměrná veličina *optická tloušťka* τ_ν , zavedená jako

$$d\tau_\nu \equiv \kappa_\nu \rho dz \quad (2.56)$$

nebo integrálním vztahem

$$\tau_\nu = \int_0^z \kappa_\nu \rho dz, \quad (2.57)$$

kde z označuje celkovou tloušťku vrstvy plynu podél zorného paprsku. Rovnici (2.52) pro změnu intenzity pak lze psát v jednodušším tvaru

$$dI_\nu = -I_\nu d\tau_\nu. \quad (2.58)$$

2.1.6 Mechanická síla na vrstvu plynu

Uvažme nyní, jakou mechanickou silou působí záření o intenzitě I_ν na tenkou vrstvu plynu o tloušťce dx , na kterou dopadá pod úhlem ϑ z prostorového úhlu $d\omega$ (obr. 2.4). Jak víme již z rovnice (2.46), bude příspěvek hybnosti dán výrazem $dp_\nu = dE_\nu/c$, přičemž množství energie dE_ν pohlcené v uvažované tenké vrstvě je dáno rovnicí (2.55).

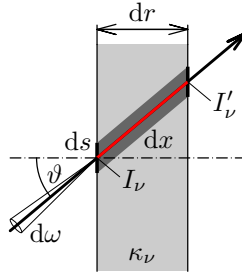
Příspěvek mechanické síly působící *kolmo* na uvažovanou tenkou vrstvu bude tedy $df_{r,\nu} = \frac{dp_\nu}{dt} \cos \vartheta$. Celkovou mechanickou sílu záření $f_{r,\nu}$ působící kolmo na plochu ds uvažované vrstvy získáme integrací přes prostorový úhel

$$\begin{aligned} f_{r,\nu} &= \int_{\omega=0}^{4\pi} df_{r,\nu} = \int_0^{4\pi} \frac{1}{c} \frac{dE_\nu}{dt} \cos \vartheta = \frac{\overbrace{\kappa_\nu \rho dx d\nu ds dt}^{d\tau_\nu}}{c \cancel{dt}} \overbrace{\int_0^{4\pi} I_\nu \cos \vartheta d\omega}^{\mathcal{F}_\nu} = \\ &= \frac{\kappa_\nu \rho dx d\nu ds}{c} \mathcal{F}_\nu = \frac{d\tau_\nu d\nu ds}{c} \mathcal{F}_\nu, \end{aligned} \quad (2.59)$$

kde \mathcal{F}_ν označuje monochromatický tok záření v daném místě. Celková mechanická síla působená zářením všech vlnových délek pak bude

$$f_r = \int_{\nu=0}^{\infty} f_{r,\nu} = \frac{\rho dx ds}{c} \int_0^{\infty} \kappa_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu. \quad (2.60)$$

Uvědomme si nakonec, že mechanická síla na absorbující vrstvu (charakterizovanou dx a κ_ν) je něco jiného než tlak záření (působící na plošku ds)!



Obrázek 2.4: Vrstva plynu o tloušťce dr a opacitě κ_ν , do které vstupuje záření o intenzitě I_ν a vystupuje z ní záření o intenzitě I'_ν .

2.1.7 Emisní koeficient

Emisní koeficient je množství zářivé energie emitované *jednotkovou hmotou* v intervalu frekvencí $(\nu, \nu + d\nu)$ do jednotkového prostorového úhlu za jednotku času. Množství zářivé energie vyslané z elementárního válečku o podstavě ds a výšce dx , tedy z objemu $dV = dxds$, o hustotě prostředí ρ , do prostorového úhlu $d\omega$ za čas dt je pak

$$E_\nu = j_\nu \overbrace{\rho dxds}^{dm} d\nu d\omega dt, \quad (2.61)$$

kde j_ν je emisní koeficient na jednotku hmoty. Pro změnu intenzity záření v důsledku emise podél zorného paprsku můžeme tedy psát

$$dI_\nu = +j_\nu \rho dx. \quad (2.62)$$

Rozměr emisního koeficientu je $[j_\nu] = \text{W kg}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$.

2.1.8 Rovnice přenosu záření

Uvažujme o energetické bilanci infinitesimálního válečku s podstavou ds a výškou dx . Za čas dt vstoupí do válečku z prostorového úhlu $d\omega$ ve frekvenčním rozsahu $d\nu$ záření s energií $I_\nu d\nu ds d\omega dt$. Na druhém konci bude z válečku vystupovat energie $(I_\nu + dI_\nu) d\nu ds d\omega dt$. Ve válečku se přitom pohltí energie $\kappa_\nu \rho I_\nu dx ds d\omega dt d\nu$ a váleček sám bude do daného směru vyzařovat energii $j_\nu \rho dx ds d\omega dt d\nu$. Má-li být zachována energetická rovnováha, musí platit

$$(I_\nu + dI_\nu) ds d\omega dt d\nu = I_\nu ds d\omega dt d\nu + \underbrace{j_\nu \rho dx ds d\omega dt d\nu}_{\text{emise}} - \underbrace{\kappa_\nu \rho I_\nu dx ds d\omega dt d\nu}_{\text{absorbce}}. \quad (2.63)$$

Po úpravě dostáváme obecnou rovnici přenosu záření v jednorozměrném případě

$$\frac{dI_\nu}{dx} = j_\nu \rho - \kappa_\nu \rho I_\nu. \quad (2.64)$$

2.1.9 Termodynamická rovnováha

Termodynamický systém je ve stavu rovnováhy, jestliže

1. všechny veličiny, které jej charakterizují, jsou nezávislé na místě a čase, a
2. jeho stav by se nezměnil, kdybychom jej dokonale isolovali od okolí.

V takovém případě závisí intenzita záření pouze na teplotě a frekvenci a od místa k místu se nemění. Jestliže tuto intenzitu označíme $B_\nu(T)$ a uvažíme-li, že v rovnováze musí být výraz $\frac{dI_\nu}{dx}$ nulový, dostáváme z rovnice přenosu (2.64) *Kirchhoffův zákon*

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = I_\nu \equiv B_\nu(T). \quad (2.65)$$

Lokální termodynamická rovnováha. Hvězdná látka zcela zřejmě ve stavu dokonalé termodynamické rovnováhy být nemůže, neboť existuje tok záření z nitra směrem k povrchu a z povrchu do okolního prostoru. S výjimkou vnější atmosféry hvězdy můžeme však s velkou přesností předpokládat, že hvězdná látka je ve stavu termodynamické rovnováhy *lokálně*, tzn., že v daném místě lze pole záření charakterizovat funkcí $B_\nu(T)$ odpovídající nějaké lokální (od místa k místu jiné) lokální teplotě. Lokálně platí také Kirchhoffův zákon (2.65).

2.1.10 Spojité záření absolutně černého tělesa

Absolutně černé těleso je takové těleso, které veškeré dopadající záření pohlcuje, žádné nepropouští ani neodráží. Z aplikace Boseho–Einsteinovy statistiky na fotonový plyn plyne pro monochromatickou intenzitu absolutně černého tělesa výraz nazývaný *Planckova funkce* (obr. 2.5)

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (2.66)$$

kde

$$h = (6,6260693 \pm 0,0000011) \cdot 10^{-34} \text{ J s}, \quad (2.67)$$

$$k = (1,3806505 \pm 0,0000024) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}, \quad (2.68)$$

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (2.69)$$

jsou Planckova konstanta, Boltzmannova konstanta a rychlost světla ve vakuu. V astrofyzice jde o nesmírně důležitou teorii, protože **pozorované spojité záření hvězd se velmi podobá spektru absolutně černého tělesa!**

Podle Boseho–Einsteinova rozdělení připadá na elementární objem fázového prostoru $d\Gamma \equiv d\mathbf{x} d\mathbf{p}/h^3$ následující počet částic (bosonů)

$$N_i = \frac{g_i}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} - 1}. \quad (2.70)$$

Integrací rozdělovací funkce bychom mohli zjistit celkovou energii systému

$$E = \int_{\Gamma} N_i E_i d\Gamma = \frac{1}{h^3} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{p}} N_i E_i d\mathbf{x} d\mathbf{p}. \quad (2.71)$$

Pro fotony platí, že chemický potenciál $\mu = 0$, energie $E = pc = h\nu$ (neexistují žádné vyšší stavy, pouze kinetický člen), stupeň degenerace $g = 2$ (kvůli dvěma polarizacím). My však provedeme pouze integraci přes souřadnice, čímž získáme objem

$$E = \frac{1}{h^3} \overbrace{\int_{\mathbf{x}} d\mathbf{x}}^V \int_{p=0}^{\infty} \frac{2}{e^{\frac{pc}{kT}} - 1} pc 4\pi p^2 dp. \quad (2.72)$$

Ihned vidíme, že $u = \frac{E}{V}$ je hustota energie a že zbývající integrand reprezentuje monochromatickou hustotu energie u_ν v závislosti na frekvenci $\nu = \frac{c}{h} p$

$$u_\nu d\nu = \frac{1}{h^3} \frac{2}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} h\nu 4\pi \left(\frac{h}{c}\nu\right)^2 \frac{h}{c} d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu. \quad (2.73)$$

Dle rovnice (2.43) je střední intenzita $J_\nu = \frac{c}{4\pi} u = B_\nu(T)$.

Integrací Planckovy funkce (2.66) přes celé elektromagnetické spektrum dostáváme integrální intenzitu záření černého tělesa

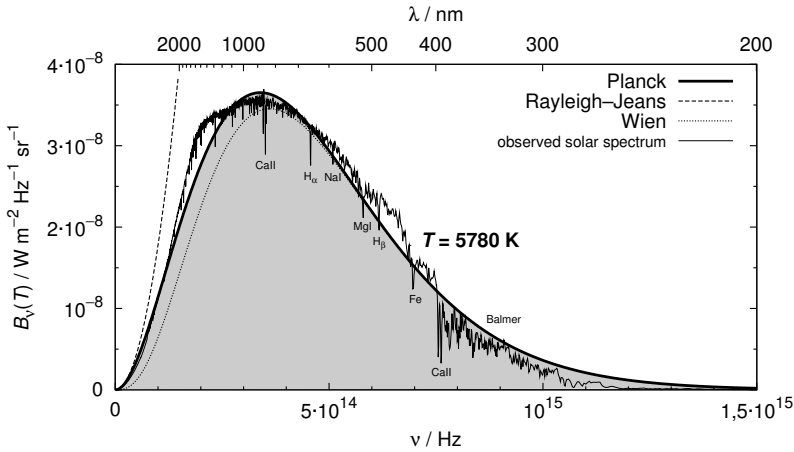
$$\begin{aligned} B(T) &= \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \\ &= \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T^4. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Integrace uvedeného vztahu není triviální. Platí

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty (e^{-x} x^3 + e^{-2x} x^3 + \dots) dx = \\ &= 6 \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) = \frac{6\pi^4}{90}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

protože

$$\int_0^\infty e^{-jx} x^3 dx = \frac{6}{j^4}. \quad (2.76)$$



Obrázek 2.5: Planckova funkce $B_\nu(T)$ pro teplotu $T = 5780 \text{ K}$, odpovídající efektivní teplotě Slunce. V grafu jsou naznačené i Wienova a Rayleighova–Jeansova aproximace. Tenkou čarou je pro porovnání vyneseno pozorované spektrum Slunce, které se od planckovského liší zejména přítomností spektrálních čar.

V aplikaci na rovnici (2.74) je

$$x = \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow \nu = \frac{kT}{h} x, \quad (2.77)$$

a tedy

$$\nu^3 d\nu = \left(\frac{kT}{h}\right)^4 x^3 dx. \quad (2.78)$$

Jelikož záření černého tělesa je isotropní, nezávisí jeho intenzita na směru a namísto integrálu hustoty energie dostáváme pro integrální hustotu záření černého tělesa rovnou

$$u(T) = \frac{4\pi}{c} B(T) = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} T^4 = aT^4, \quad (2.79)$$

kde a je konstanta hustoty záření daná následujícím vztahem

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} = 7,56577 \cdot 10^{-16} \text{ Jm}^{-3} \text{K}^{-4}. \quad (2.80)$$

Zavedeme-li ještě Stefanovu–Boltzmannovu konstantu σ vztahem

$$\sigma = \frac{ac}{4} = (5,670400 \pm 0,000040) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-4}, \quad (2.81)$$

dostáváme pro integrál Planckovy funkce výraz

$$B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4. \quad (2.82)$$

Jak jsme si již řekli v úvodu, v optickém a v dlouhovlnějších oborech spektra se většinou nepoužívá frekvence, ale vlnová délka záření. Je proto užitečné znát i výraz pro Planckovu funkci vyjádřený pomocí vlnové délky λ

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}, \quad (2.83)$$

který plyne z Planckovy funkce zapsané pomocí frekvence ν (2.66), s využitím vztahů (2.2) a (2.14).

Můžeme se také zajímat, u které vlnové délky dosahuje funkce $B_\lambda(T)$ maxima pro danou teplotu. Jestliže výraz (2.83) přepíšeme do tvaru

$$B_\lambda(T) = \frac{k_1}{\lambda^5} \left(e^{\frac{k_2}{T\lambda}} - 1 \right)^{-1}, \quad (2.84)$$

kde

$$k_1 = 2hc^2 \quad \text{a} \quad k_2 = \frac{hc}{k} \quad (2.85)$$

jsou konstanty, lze podmínku maxima funkce psát jako

$$\frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} = -5 \frac{k_1}{\lambda^6} \left(e^{\frac{k_2}{T\lambda}} - 1 \right)^{-1} + \frac{k_1}{\lambda^5} \left(e^{\frac{k_2}{T\lambda}} - 1 \right)^{-2} e^{\frac{k_2}{T\lambda}} \frac{k_2}{T\lambda^2} = 0. \quad (2.86)$$

Zavedeme-li novou proměnnou $x = \frac{k_2}{T\lambda}$, lze tuto podmínku přepsat do tvaru

$$-5 + x e^x (e^x - 1)^{-1} = 0, \quad (2.87)$$

což vede na rovnici

$$x = 5 - 5 e^{-x}. \quad (2.88)$$

Její iterační řešení vede k hodnotě $x \doteq 4,96511$, což s přihlédnutím k definici proměnné x a hodnoty k_2 vede konečně na podmínku pro maximum

$$[\lambda]_{\text{nm}}[T]_{\text{K}} \doteq 2897768,6, \quad (2.89)$$

kde vlnová délka λ je udána v nm a teplota v K. Vztah, který jsme si právě odvodili, se nazývá *Wienovým posunovacím zákonem* a plyne z něj, že maximum vyzařování absolutně černého tělesa se s rostoucí teplotou posouvá ke kratším vlnovým délkám, což odpovídá i běžné lidské zkušenosti: barva zahřívajícího tělesa se mění od červené

k bílé až namodralé, jak roste jeho teplota. A jak uvidíme, červené hvězdy jsou skutečně chladnější, než hvězdy bílé či namodralé.

Příklad: Spočítejte, u kterých vlnových délek dosahuje Planckova funkce maximum pro absolutně černá tělesa s teplotami 3 000 K, 6 000 K, 10 000 K a 30 000 K.

Řešení: Jednoduchým dosazením do Wienova zákona (2.89) dostáváme vlnové délky 965,9 nm, 483,0 nm, 289,8 nm a 96,59 nm. Vidíme, že vyzařovací maximum se pro tento rozsah teplot posouvá od infračervené do ultrafialové oblasti spektra.

Pozor! Planckova funkce $B_\nu(T)$ pro frekvenci dosahuje maxima úplně jinde než funkce $B_\lambda(T)$ pro vlnovou délku. Pokud budeme funkci $B_\nu(T)$ vyšetřovat jako funkci vlnové délky, odvodíme pro její maximum podmínku

$$[\lambda]_{\text{nm}}[T]_{\text{K}} \doteq 5099437,0. \quad (2.90)$$

Pro teplotu 6 000 K dosahuje tedy tato funkce maxima až u vlnové délky 849,9 nm. Vidíme tedy, že funkce $B_\nu(T)$ a $B_\lambda(T)$ vyšetřované obě současně pro danou teplotu buď jako funkce vlnové délky, nebo frekvence záření jsou *dvě různé funkce s různým průběhem*.

V krátkovlnné oblasti spektra je $e^{\frac{hc}{kT\lambda}} \gg 1$, takže lze Planckovu funkci $B_\lambda(T)$ aproximovat vztahem

$$B_\lambda(T) \doteq \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{kT\lambda}}. \quad (2.91)$$

To se obvykle nazývá *Wienovou aproximací*.

Naopak v dlouhovlnné oblasti spektra je $\frac{hc}{kT\lambda} \ll 1$ a můžeme tedy exponenciálu nahradit rozvojem se zanedbáním vyšších členů

$$e^{\frac{hc}{kT\lambda}} \doteq 1 + \frac{hc}{kT\lambda}, \quad (2.92)$$

tudíž dostáváme pro Planckovu funkci přibližný výraz

$$B_\lambda(T) \doteq \frac{2kcT}{\lambda^4}. \quad (2.93)$$

Tomuto vztahu se říká *Rayleighův-Jeansův zákon*. Protože se týká dlouhovlnné oblasti spektra, můžeme jej numericky pro vlnové délky udané v metrech zapsat ve tvaru

$$[B_\lambda(T)]_{\text{W m}^{-2} \text{ m}^{-1} \text{ sr}^{-1}} \doteq 8,27817 \cdot 10^{-15} \frac{[T]_{\text{K}}}{[\lambda]_{\text{m}}^4}. \quad (2.94)$$

Příklad: Radioteleskop změřil na vlnové délce $\lambda = 1$ m intenzitu tepelného rádiového zdroje na jednotku *frekvence* $I_\nu = 10^{-22} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. Odhadněte teplotu

zdroje za předpokladu, že záření zdroje v této oblasti dobře odpovídá záření černého tělesa.

Řešení: Intenzita záření na jednotku vlnové délky I_λ bude podle vztahu (2.14)

$$I_\lambda = \frac{\nu^2}{c} I_\nu = \frac{c}{\lambda^2} I_\nu = 2,99792458 \cdot 10^{-14} \text{ W m}^{-2} \text{ m}^{-1} \text{ sr}^{-1}. \quad (2.95)$$

Pokud platí, že $I_\lambda \doteq B_\lambda$, dostáváme z rovnice (2.94) teplotu zdroje $T \doteq 3,62 \text{ K}$.

Protože v radioastronomii se často používá frekvence záření, je užitečné uvést si Rayleighův–Jeansův zákon i pro funkci $B_\nu(T)$. Obdobná aproximace jako (2.92) vede na vztah

$$B_\nu(T) \doteq \frac{2k}{c^2} \nu^2 T. \quad (2.96)$$

Je dobře si uvědomit, že ať už v dlouhovlnné oblasti uvažujeme frekvence nebo vlnové délky, je závislost toku záření tepelného zdroje na vlnové délce či frekvenci prostou mocninou vlnové délky nebo frekvence. Pokud tedy budeme v dlouhovlnné oblasti studovat spektrum nějakého zdroje, projeví se tepelný zdroj tím, že logaritmus toku záření z něj bude lineární funkcí vlnové délky či frekvence.

Efektivní teplota hvězdy. Z rovnic (2.31) a (2.82) plyne pro tok záření absolutně černého tělesa *do poloprostoru* vztah

$$\pi B(T) = \sigma T^4. \quad (2.97)$$

Absolutní měření rozložení energie elektromagnetického záření v závislosti na vlnové délce ve spektrech hvězd vedlo ke zjištění, že záření hvězd se v hrubém přiblížení svým průběhem podobá záření absolutně černého tělesa. Vzhledem k tomu je pro mnohé úvahy užitečné zavést parametr, kterým lze popisovat celkový (bolometrický) zářivý výkon hvězdy L , tj. celkový tok záření z povrchu hvězdy do okolního prostoru. Za tento parametr byla zvolena *efektivní teplota hvězdy*, definovaná rovnicí

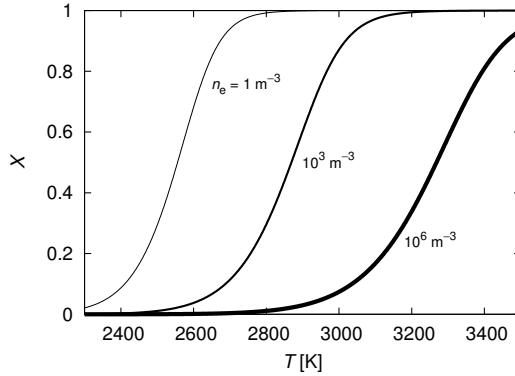
$$L = 4\pi R^2 \pi B(T_{\text{eff}}) = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4, \quad (2.98)$$

kde R označuje poloměr hvězdy. Efektivní teplota je rovna teplotě absolutně černého tělesa o stejném rozměru jako uvažovaná hvězda a vysílajícím do vnějšího prostoru stejný integrální tok záření jako dotyčná hvězda.

2.1.11 Sahova ionizační rovnice

Pro vysvětlení vzhledu spekter hvězd je zcela zásadní znalost *Sahovy rovnice*, popisující stupeň ionizace $X \equiv \frac{n_e}{n}$ látky, v závislosti na teplotě T , koncentraci elektronů n_e a ionizační energii χ atomu

$$\frac{X^2}{1-X} n_e = \left(\frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi}{kT}}. \quad (2.99)$$



Obrázek 2.6: Závislost ionizačního stupně X na teplotě T , vypočítaná se Sahovy rovnice pro vodíkový plyn ($E_i = -13,6 \text{ eV}$) o koncentraci $n_e = 1, 10^3$ a 10^6 elektronů/ m^3 . Je patrné, že přechod z neutrálního ($X \doteq 0$) do plně ionizovaného stavu ($X \doteq 1$) nastává v poměrně úzkém rozpětí teplot.

Jiný používaný tvar téže rovnice je

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{Z_{r+1}}{Z_r} e^{-\frac{x_i}{kT}}, \quad (2.100)$$

kde n_{r+1} a n_r označuje koncentrace atomů v $(r+1)$ a r stupni ionizace a Z_{r+1} , Z_r partiční funkce, $Z \equiv \sum_i g_i \exp(-\frac{E_i}{kT})$, přičemž suma je přes všechny dovolené hladiny energie E_i a g_i jsou faktory degenerace.

Přítomnost nebo nepřítomnost spektrálních čar je určena zejména stupněm ionizace; chemické složení hvězd je v tomto ohledu až druhořadé! Podstatné totiž je, zda jsou v atmosféře hvězdy přítomné částice a fotony s energií dostatečnou na to, aby excitovaly atomy s danými diskretními hladinami energie. Nejvýraznější bývají spektrální čáry daného atomu pouze v omezeném rozsahu teplot, když je zhruba *polovina* atomů v ionizovaném stavu ($X \simeq 0,5$). Zároveň stupeň ionizace plazmatu přímo ovlivňuje stavovou rovnici, potažmo vnitřní stavbu hvězd, jak uvidíme v kap. 3.5.

Pozor! Při zvyšování koncentrace n plynu stupeň ionizace klesá (viz obr. 2.6). Zářivá ionizace sice stoupá úměrně n , ale srážková rekombinace, zahrnující dvě částice, závisí na n^2 . (Spolu s látkou se vždy vyskytuje i záření.)

Při odvození vyjdeme z předpokladu lokální termodynamické rovnováhy a *Boltzmannova rovnovážného rozdělení* pro obsazení hladin (Miller 2010)

$$N_i = g_i e^{-\frac{E_i - \mu}{kT}}, \quad (2.101)$$

kde N_i označuje počet atomů ve stavu i , nacházejících se v elementárním objemu fázového prostoru $d\Gamma = dx d\mathbf{p}/h^3$, E_i příslušnou energii stavu, k Boltzmannovu konstantu,

T termodynamickou teplotu, g_i statistické váhy neboli degenerace stavu² a μ chemický potenciál, neboli přírůstek vnitřní energie při změně počtu částic, definovaný jako

$$\mu \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V} . \quad (2.102)$$

Boltzmanův vztah platí zcela obecně v termodynamické rovnováze (pokud jsou kvantové jevy zanedbatelné, tzn. velké T , malé ρ): četnost obsazení stavů je určena rozdílem jejich energií.³ Ekvivalentně bychom vztah (2.101) mohli zapsat jako (s uvážením $N = \sum_i N_i$)⁴

$$\frac{N_i}{N} = \frac{g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}} , \quad (2.103)$$

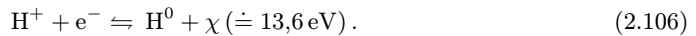
nebo

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} . \quad (2.104)$$

Integrace distribuční funkce přes fázový prostor Γ dává

$$\begin{aligned} N &= \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{p}} \sum_i g_i e^{-\frac{E_i + E_k - \mu}{kT}} \frac{d\mathbf{x} d\mathbf{p}}{h^3} = \\ &= \frac{1}{h^3} \overbrace{\int_{\mathbf{x}} d\mathbf{x}}^V \int_{p=0}^{\infty} \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{kT}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} e^{\frac{\mu}{kT}} 4\pi p^2 dp = \\ &= \frac{4\pi V}{h^3} \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{kT}} e^{\frac{\mu}{kT}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} p^2 dp = \\ &= \dots \int_0^{\infty} (2mkT)^{\frac{3}{2}} e^{-y^2} y^2 dy = \\ &= \dots (2mkT)^{\frac{3}{2}} \left\{ \overbrace{\left[-\frac{1}{2} e^{-y^2} \right]_0^{\infty}}^{=0} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{2} \overbrace{e^{-y^2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} dy \right\} = \\ &= \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{kT}} e^{\frac{\mu}{kT}} . \end{aligned} \quad (2.105)$$

V našem případě studujeme ionizaci a rekombinaci, čili reakce



²Například pro vodík s hlavním kvantovým číslem n je $g_n = 2n^2$.

³Mimo jiné to platí pro vertikální profil tlaku $P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$ atmosféry v homogenním gravitačním poli, odvozený z rovnice hydrostatické rovnováhy $dP/dz = -\rho dz$, kde v exponenciále vystupuje gravitační potenciální energie $E_G = mgz$.

⁴Jmenovatel zlomku, neboli partiční suma $Z \equiv \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$ se nemusí vždy sčítat až do ∞ , neboť přítomnost okolních atomů přirozeně omezuje maximální možný rozměr atomu, potažmo jeho energii.

Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze *dvouhladinový* atom (beztak je ze druhé hladiny $E_2 \doteq -3,4 \text{ eV}$ k ionizaci blízko). Chemické potenciály musí v rovnováze splňovat podmínku

$$\mu^+ + \mu^- = \mu^0 + \overbrace{\mu^\gamma}^{=0}. \quad (2.107)$$

Pro tři typy částic — volné ionty a elektrony a vázané neutrální atomy — můžeme napsat tři rovnice popisující jejich koncentrace $n = \frac{N}{V}$

$$n^+ = \frac{1}{h^3} (2\pi m_p kT)^{\frac{3}{2}} 2 e^{\frac{\mu^+}{kT}}, \quad (2.108)$$

$$n^- = \frac{1}{h^3} (2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}} 2 e^{\frac{\mu^-}{kT}}, \quad (2.109)$$

$$n^0 = \frac{1}{h^3} [2\pi(m_p + m_e)kT]^{\frac{3}{2}} 4 e^{\frac{-E_i}{kT}} e^{\frac{\mu^0}{kT}}. \quad (2.110)$$

Sestavíme zlomek

$$\frac{n^+ n^-}{n^0} = \frac{1}{h^3} (2\pi kT)^{\frac{3}{2}} \left(\overbrace{\frac{m_e m_p}{m_p + m_e}}^{\doteq m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2 \cdot 2}{4} e^{\overbrace{\mu^+ + \mu^- - \mu^0}^{=0}} e^{\overbrace{\frac{E_i}{kT}}^{=-\chi}}, \quad (2.111)$$

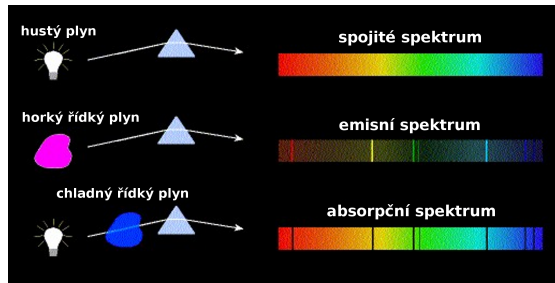
zohledníme vztahy $n^+ = n^-$ (celkovou neutralitu), $n = n^0 + n^+$, zavedeme $X \equiv \frac{n^-}{n}$, čímž obdržíme výslednou Sahovu rovnici

$$\frac{X^2}{1-X} n^- = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi}{kT}}. \quad (2.112)$$

2.2 Spektra hvězd

2.2.1 Přechody v atomech, spojitá a diskrétní spektra

V zásadě existují tři druhy spekter: i) spojitě, ii) emisní, iii) absorpční. Základní mechanismy jejich vzniku naznačuje obrázek 2.7: Spektrum *spojité* vzniká v pevné látce, kapalině a hustém plynu nebo plazmatu, kde se atomy vzájemně elektromagneticky ovlivňují. Naopak řídký průhledný plyn, z něhož unikají fotony přímo od jednotlivých atomů s *diskrétními* hladinami energie, vydává spektrum *emisní*. Pokud se však nachází poloprůhledný chladný řídký plyn nad spojitě zářícím hustým horkým plynem, vidíme spektrum *absorpční*.



Obrázek 2.7: Tři základní druhy spekter a mechanismy jejich vzniku.

V atomech lze rozlišit šest druhů energetických přechodů, jež přehledně shrnuje tabulka 2.1. Všimněme si především, že ne všechny přechody jsou zářivé a že pouze vázané–vázané přechody jsou *kvantované*!

Jak přesně vzniká absorpční spektrální čára? Existují dvě možnosti: i) atom pohltí foton a potom se deexcituje „superpružnou“ *srážkou*, což se označuje jako *pravá absorpce*, při níž se foton efektivně „ztratí“ a plyn se tím ohřeje. ii) foton přilétající z jednoho směru je absorbován atomem, ale opětovná emise záření je ve směru náhodném („do strany“), čímž dojde k *nepravé* absorpci. Záření nevhodných frekvencí oslabeno není, což znamená, že i tento proces je selektivní!

Ovšem pozor, *přímý rozptyl na elektronech* (třeba i vázaných v atomech nebo volných, ale v blízkosti iontu), při kterém foton vůbec *není pohlcen, je spojité!* Podle rostoucí energie fotonu rozlišujeme tři typy rozptylu: i) *Rayleighův* (zde se žádná vlnová délka nemění, pouze účinnost rozptylu závisí na λ ; funguje např. v zemské atmosféře), ii) *Thomsonův*, iii) *Comptonův* (zde se výrazně mění vlnová délka rozptýleného fotonu). Na větších částicích, např. kapičkách oblaků, dochází k *Mieho rozptylu*, který nemění λ , ani účinnost není příliš závislá na λ .

Pravá absorpce fotonu při *ionizaci* atomů (uvolnění e^- do volného stavu) je také spojité. Probíhá nejpravděpodobněji za hranami spektrálních sérií, čímž vzniká *absorpční kontinuum* (např. Balmerovo kontinuum).

V extrémně řídkém prostředí, např. v planetárních mlhovinách, může docházet k málo pravděpodobným přechodům z *metastabilních hladin*, s životní dobou mnohem větší než obvyklých 10^{-9} s. Hovoříme pak o *zakázaných čarách*, neboť v hustém prostředí dochází *před* vyzářením fotonu ke srážkové deexcitaci. Zakázané čáry se označují hranatou závorkou, např. [OIII].

Pokud prostředí není v termodynamické rovnováze, nelze samozřejmě čekat, že by spojité záření mělo planckovské spektrum. Hovoříme potom o *netepelném záření*. Může se jednat například o *brzdné záření* (bremsstrahlung), přičemž rozlišujeme i) cyklotronové (generuje se pohybem elektronu v magnetickém poli při $v \ll c$); ii) synchrotronové (když $v \simeq c$, je směrované a spojité). Nerovnovážné je i záření Slunce v UV a RTG oboru, kde se zároveň pozoruje velká časová proměnnost, což jen potvrzuje onu nerovnováhu.

Tabulka 2.1: Šest druhů přechodů v atomech.

přechod	co se děje s e^-	název	popis
zvýšení energie:			
vázaně-vázaný (b-b)	zůstává v atomu	excitace srážková excitace zářivá	nepružná srážka atomu s jinou částicí absorpce fotonu, <i>kvantovaná</i> energie
vázaně-volný (b-f)	opustí atom	ionizace srážková fotoionizace	nepružná srážka absorpce fotonu, nekvantovaná
volně-volný (f-f)	zůstává volný	spojitá opacita	absorpce fotonu elektronem, v blízkosti iontu přeměna na kinetickou energii, nekvantovaná
snížení energie:			
vázaně-vázaný (b-b)	zůstává v atomu	deexcitace srážková deexcitace zářivá	„superpružná“ srážka atomu s jinou částicí emise fotonu, <i>kvantovaná</i>
volně-vázaný (f-b)	zachycen iontem	rekombinace 3-částicová rekombinace zářivá	srážka iontu, elektronu a další částice emise fotonu, nekvantovaná
volně-volný (f-f)	zůstává volný	brzdění záření (neboli bremsstrahlung)	emise fotonu, nekvantovaná

Spektrální série. Kvantování energie v jednoduchých atomech vede ke vzniku sérií spektrálních čar. Pro vodík s hlavním kvantovým číslem n totiž platí

$$E_n = \frac{m_e q_e^4}{8h^2 \varepsilon_0} \frac{1}{n^2} \doteq -13,6 \text{ eV} \frac{1}{n^2}, \quad (2.113)$$

čili zářivý přechod mezi hladinami n_1 a n_2 vede k emisi fotonu o vlnové délce λ , splňující

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{|E_1|}{hc} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (2.114)$$

Vidíme, že vyšší energetické hladiny se k sobě přibližují.⁵ To je důvod proč se při přechodech na hladiny $n_2 \rightarrow \infty$ čáry skoro překrývají, a vytvářejí tak *hranu* série. Některé série a čáry dostaly zvláštní označení:

n_1	n_2	série (čáry)	hrana
1	2, 3, ..., ∞	Lymanova (L_α, L_β, \dots)	91 nm
2	3, ...	Balmerova (H_α, H_β, \dots)	365 nm
3	4, ...	Paschenova	821 nm

Existují však i další dovolené hladiny energie, např. *hyperjemné rozštěpení*, odpovídající přechodu mezi paralelními a antiparalelními spiny elektronu a jádra. Týká se i základního stavu a vzniká tímto přechodem rádiová čára s $\lambda = 21$ cm.

Myšlenkový experiment s oblakem vodíku. Abychom vznik spektra lépe pochopili, provedeme následující myšlenkový experiment s oblakem postupně zahřívávaného a zhušťovaného plynu (Mikulášek, 2000). Začneme s vodíkovým plynem, majícím téměř nulovou hustotu ($\rho \doteq 0$) a teplotu ($T \doteq 0$). Pro přehlednost popíšeme experiment heslovitě:

1. zvyšujeme T při $\rho \doteq 0$:

\xrightarrow{T} zpočátku oblak nezáří (energie srážek nestačí ani na excitaci do 2. hladiny)

\xrightarrow{T} nastanou excitace a zároveň nějaké ionizace, zářivé deexcitace a rekombinace
 \Rightarrow *emise v čarách* (fotony volně unikají), za hranami sérií malá kontinua
 rekombinace iontu $H^- \Rightarrow$ slabé kontinuum

\xrightarrow{T} při asi $\frac{1}{2}$ atomů ionizovaných dosahují intenzity čar maxima

\xrightarrow{T} *úplná ionizace*, zmizí $H^- \Rightarrow$ záření v čarách i v kontinuu slábně!

2. zvyšujeme ρ (anebo ekvivalentně objem V) při $T > 0$:

⁵Nicméně „velikost“ atomu (rozumějme rozměr vlnové funkce pro elektron) s energií *roste* — blízko ionizace je atom doslova makroskopicky velký!

\xrightarrow{p} pouze roste intenzita záření (je tam více atomů)

\xrightarrow{p} absorpce, rozptyl (volná dráha fotonů je malá)

atomy neúčinněji pohlcují fotony *právě v čarách* a po *srážkové deexcitaci* již nemusí být vyzařeny \Rightarrow růst emisních čar se zastaví!

\xrightarrow{p} kontinuum roste až se „srovná“ s emisními čarami, čáry zmizí
 \Rightarrow *absolutně černé těleso*, planckovské spektrum (2.66)

kdyby měl plyn chladnější průhlednou obálku (atmosféru) \Rightarrow *absorpční čáry*.

Poznamenejme nakonec, že různé energetické hladiny atomu mají různé pravděpodobnosti emise (a tedy i absorpce). Některé spektrální čáry tak mohou být za dané teploty *opticky tenké* a vykazovat emisi, kdežto jiné *opticky tlusté*, a tudíž se projeví samoabsorpce.⁶

2.2.2 Rozšíření spektrálních čar

Každá spektrální čára má určitý *profil*, který má velkou vypovídací hodnotu. Základní informaci poskytují centrální intenzita (číslo od 0 do 1, měřené relativně vzhledem k okolnímu kontinuu) a šířka čáry v poloviční hloubce (FWHM, full width at half maximum). Na profilu často rozlišujeme jádro a křídla čáry (obr. 2.8), protože každá část bývá ovlivněna jinými efekty.

Jaké jevy se podílejí na *rozšíření* spektrálních čar? Jinými slovy: jaké různé energie může atom vyzařovat nebo pohlcovat? Obecně můžeme rozlišovat jevy lokální (mikroskopické) a rozlehlé (vznikající teprve v makroskopickém prostředí):

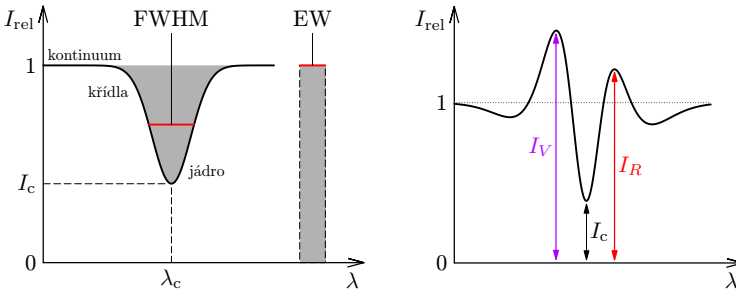
- lokální jevy:

L – *přirozená šířka*, jež plyne z Heisenbergova principu neurčitosti $\langle \Delta v \rangle \langle \Delta x \rangle = h$, což je ekvivalentní s $\langle \Delta E \rangle \langle \tau \rangle = h$, kde $\langle \Delta E \rangle$ je neurčitost energie hladin a τ životní doba přechodu. Vztah platí jen pro excitované stavy, neboť v základním stavu může být $\tau = \infty$ a $\langle \Delta E \rangle = 0$. Výsledkem je *lorentzovský profil*

$$L(\nu; \gamma) \equiv \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2}, \quad (2.115)$$

s pološířkou řádu $\Delta\lambda_{1/2} = \frac{\lambda^2}{\pi c} \frac{1}{\tau} \simeq 10^{-5}$ nm.

⁶Názorným příkladem takové situace jsou žluté vysokotlaké sodíkové výbojky, což jsou nejobvyklejší zdroje používané ve veřejném osvětlení. Pokud si prohlédneme jejich mřížkové spektrum (např. v odrazu od disku CD-ROM), spatříme asi desítku emisních čar, přičemž ta nejširší, sodíkový dublet na 589 nm, vykazuje evidentní absorpci a okolo slabé kontinuum.



Obrázek 2.8: Schematické znázornění profilu spektrální čáry s vyznačením centrální intenzity (I_c), šířky čáry v poloviční hloubce (FWHM) a také ekvivalentní šířky (EW, equivalent width), která je určena jako šířka obdélníku se stejnou plochou, jakou má profil čáry (vyznačen šedě). Měření je v jednotkách vlnové délky. Na obrázku vpravo je komplikovaný profil čáry, na kterém lze rozlišit absorpce a dvojitou emisi. Relativní intenzity emisních komponent označujeme I_V (posunutou do fialova) a I_R (do červenava).

L – *tlakové rozšíření*, čili vzájemné elektromagnetické působení částic při srážkách/přiblíženích, nebo působení celého pole okolních atomů (jež posouvá energetické hladiny atomu), příp. van der Waalsových sil. Charakteristický profil čáry je také *lorentzovský*.

Má-li hvězda velké *tíhové zrychlení* na povrchu $g = \frac{GM}{R^2}$, lze podle řešení rovnice hydrostatické rovnováhy $p(z) = p(0) \exp[-\mu m_H g z / (kT)]$ očekávat velké tlak v atmosféře, čili široké čáry (viz obr. 2.13).

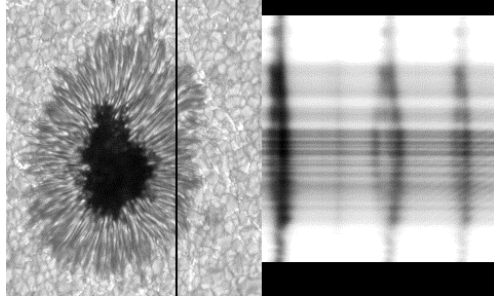
G – *Dopplerův jev*, konkrétně *termální dopplerovské rozšíření*, vzniká tak, že v klidové soustavě atomu se fotony jeví dopplerovsky posunutě. I když energie fotonu v klidové soustavě vnějšího pozorovatele neodpovídá rozdílu hladin v atomu, tak v klidové soustavě atomu už ano, čili může být pohlcen při vázané–vázaném přechodu. Při termálním pohybu jsou rychlosti maxwellovské, tudíž Dopplerův posun jimi způsobený vede na *gaussovský profil* čáry

$$G(\nu; \sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.116)$$

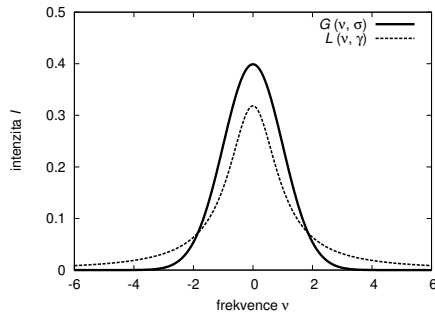
- *Starkův jev* (Stark, 1913) je vliv *elektrického pole*, buď nějakého vnějšího, nebo vznikajícího přiblížením iontů při srážkách a zvláště vysokém tlaku.
- *Zeemanův jev* (Zeeman, 1897), tj. rozštěpení čar a změna polarizace vlivem *magnetického pole* (obr. 2.9).

• rozlehlé jevy:

- *rotace hvězdy, orbitální pohyb, oscilace atmosféry, turbulence, erupce* aj.
- všechny mohou způsobovat Dopplerův posun, případně rozšíření,



Obrázek 2.9: Rozšíření čáry Zeemanovým jevem patrné na spektru sluneční skvrny. Vlevo je vidět část Slunce a černá štěrbina spektrografu, vpravo spektrum příslušné oblasti „rozmetené“ do strany. Převzato z http://eo.nso.edu/rasl/user_area/rasl_teachguide.html.



Obrázek 2.10: Gaussův a Lorentzův profil pro hodnoty parametrů $\sigma = 1$ a $\gamma = 1$.

pohybuje-li se látka různými radiálními rychlostmi vzhledem k pozorovateli;

- *opacita*, jež funguje tak, že atomy emitují v čarách, ale při vysokém ρ (nebo velkém V) jsou opětovně absorbované *jinými* atomy na *týchž* čarách; rozšíření vzniká proto, že v křídlech je menší pravděpodobnost reabsorpce než v jádru čáry.

Gaussův profil (např. Dopplerovým posunem) a Lorentzův profil (působený tlakem) se pochopitelně skládají a jejich *konvolucí* vzniká celkový *Voigtův profil*

$$V(\nu; \sigma, \gamma) = G(\nu; \sigma) \otimes L(\nu; \gamma) = \int_{\nu'=-\infty}^{\infty} G(\nu'; \sigma) L(\nu - \nu'; \gamma) d\nu'. \quad (2.117)$$

Je dobré si pamatovat, že Gauss ovlivňuje zejména jádro čáry, kdežto Lorentz křídla (viz obr. 2.10).

Odvození Gaussova profilu pro termální dopplerovské rozšíření je jednoduché. Předpokládejme Dopplerův posun úměrný složce rychlosti v_x (ve směru zorného paprsku)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v_x}{c} \quad (2.118)$$

a jednorozměrné Maxwelllovo rozdělení rychlostí částic

$$\frac{dN(v_x)}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_T} \exp\left(-\frac{v_x^2}{v_T^2}\right) dv_x, \quad (2.119)$$

kde termální rychlost

$$v_T = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (2.120)$$

Dosažení za v_x z (2.118) dává ($dv_x = \frac{c}{\nu_0} d\nu$)

$$\frac{dN(\nu)}{N} = \frac{c}{\sqrt{\pi} \nu_0 v_T} \exp\left[-\left(\frac{c\Delta\nu}{\nu_0 v_T}\right)^2\right] d\nu. \quad (2.121)$$

Protože intenzita $I_\nu d\nu$ je úměrná $dN(\nu)$, profil spektrální čáry $G(\nu; \sigma)$ bude prostě roven pravé straně, kde $\sqrt{2}\sigma \equiv \nu_0 v_T / c$. Pro vodíkovou atmosféru s teplotou $T = 6\,000\text{ K}$ lze ve viditelném oboru očekávat rozšíření řádu $\Delta\lambda = 10^{-2}\text{ nm}$.

Odvození Lorentzova profilu pro tlakové rozšíření je komplikovanější (Emerson 1996, Thorne a spol. 1999). Představujeme si, že atom vysílá monochromatickou vlnu na *neporušené* frekvenci ν_0 , ale pouze od času $t = 0$ do $t = \tau$, kdy je přerušena kolizí s jiným atomem. Amplituda je pak popsána funkcí

$$a(t) = \begin{cases} a(0) \exp(-2\pi i \nu_0 t) & \text{pro } t \in (0, \tau) \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}. \quad (2.122)$$

Takový vlnový balík lze popsat ve frekvenčním prostoru jako superpozici nekonečného množství nekonečných vln, jejichž amplitudy $A(\nu)$ spočteme Fourierovou transformací $a(t)$

$$\begin{aligned} A(\nu) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} a(t) \exp(2\pi i \nu t) dt = \int_0^{\tau} a(0) \exp(2\pi i (\nu - \nu_0) t) dt = \\ &= a(0) \left[\frac{\exp(2\pi i (\nu - \nu_0) t)}{2\pi i (\nu - \nu_0)} \right]_0^{\tau} = a(0) \frac{\exp(2\pi i (\nu - \nu_0) \tau) - 1}{2\pi i (\nu - \nu_0)}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Intenzita je úměrná čtverci amplitudy, respektive v komplexní notaci

$$I(\nu) \propto A(\nu) A^*(\nu) = a(0)^2 \frac{2 - \exp(2\pi i (\nu - \nu_0) \tau) - \exp(-2\pi i (\nu - \nu_0) \tau)}{4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2}. \quad (2.124)$$

Podstatné však je, že doba τ není pro všechny atomy stejná! Pokud je střední doba mezi kolizemi τ_0 , pak pravděpodobnost kolize během doby dt je rovna $\frac{dt}{\tau_0}$ a počet kolizí

$N(t) \frac{dt}{\tau_0}$. Počet nezasažených atomů tedy klesá podle diferenciálního zákona (obdobně jako při radioaktivním rozpadu)

$$dN = -N(t) \frac{dt}{\tau_0}, \quad (2.125)$$

což po integraci dává počet atomů v závislosti na čase

$$N(t) = N(0) \exp\left(-\frac{dt}{\tau_0}\right). \quad (2.126)$$

Pravděpodobnost, že kolize nastane právě v časovém intervalu $(t, t + dt)$ pak lze spočítat jako

$$\frac{|dN|}{N(0)} = \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) \frac{dt}{\tau_0}. \quad (2.127)$$

Totéž lze napsat i pro interval $(\tau, \tau + d\tau)$ a tímto výrazem váhovat intenzitu (2.124)

$$\begin{aligned} \bar{I}(\nu) &\propto \int_{\tau=0}^{\infty} a(0)^2 \frac{2 - \exp(2\pi i(\nu - \nu_0)\tau) - \exp(-2\pi i(\nu - \nu_0)\tau)}{4\pi^2(\nu - \nu_0)^2} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) \frac{d\tau}{\tau_0} = \\ &= \frac{a(0)^2}{4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 \tau_0} \int_0^{\infty} \left\{ 2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) - \exp\left[\left(2\pi i(\nu - \nu_0) - \frac{1}{\tau_0}\right)\tau\right] - \right. \\ &\quad \left. - \exp\left[\left(-2\pi i(\nu - \nu_0) - \frac{1}{\tau_0}\right)\tau\right] \right\} d\tau = \\ &= \dots \left[-2\tau_0 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) - \frac{1}{(\dots)} \exp[(\dots)\tau] - \frac{1}{(\dots)} \exp[(\dots)\tau] \right]_0^{\infty} = \\ &= \dots \left[2\tau_0 + \frac{1}{2\pi i(\nu - \nu_0) - \frac{1}{\tau_0}} + \frac{1}{-2\pi i(\nu - \nu_0) - \frac{1}{\tau_0}} \right] = \\ &= \frac{a(0)^2}{4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 \tau_0} \frac{2\tau_0 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2}{4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 + \frac{1}{\tau_0^2}} = a(0)^2 \frac{2}{4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 + \frac{1}{\tau_0^2}}, \end{aligned} \quad (2.128)$$

což je (po normalizaci) Lorentzův profil $L(\nu; \gamma)$ s $\gamma = \frac{1}{2\pi\tau_0}$.

Střední dobu τ_0 mezi kolizemi nebo související impaktní parametr d_0 , definovaný vztahem $\pi d_0^2 \nu \tau n = 1$, kde n je koncentrace částic, bychom museli vypočítat ze složitější teorie. Jako možné mechanismy se uvažují lineární Starkův jev, rezonanční rozšíření, kvadratický Starkův jev nebo van der Waalsova interakce. Kromě rozšíření se navíc objevuje i určitý posun frekvence ν_0 . Podrobnosti je možno najít například v učebnici Mihalase (1970).

2.2.3 Spektrální klasifikace

Jak jsme si vysvětlili v kap. 2.1.10 a 2.1.11 o Planckově funkci a Sahově rovnici, vzhled spektra určuje zejména efektivní teplota a stupeň ionizace prvků (nikoli chemické složení). Nejpoužívanější *harvardská spektrální klasifikace* je proto založena

na identifikaci význačných čar ve spektru, přičemž sekvence OBAFGKMLT tvoří souvislou teplotní škálu (viz tab. 2.2). Spektrální třídy L a T byly zavedeny teprve nedávno v pracích Kirkpaticka a kol. (1999) a Burgassera a kol. (1999) v souvislosti s hledáním hnědých trpaslíků. Každá spektrální třída se ještě dělí podrobněji číslicemi od 0 do 9, přičemž O9 navazuje na B0, atd. Z historických důvodů se typy OBAF odpovídající vyšším efektivním teplotám nazývají „rané“ a naopak chladnější GKM „pozdní“.

Vzhled spektra je ovšem ovlivněn i dalšími vlivy, například celkovou svítivostí hvězdy. To je důvodem pro zavedení *luminozitivních tříd* neboli *Morganovy–Keenenovy klasifikace* (tab. 2.3, Morgan a Keenan 1973). Pro zařazení je kromě zdánlivé jasnosti třeba změřit vzdálenost, případně lze využít tlakového rozšíření spektrálních čar (trpaslíci mají v atmosféře větší tíhové zrychlení a tlak než obři). MK klasifikace tvoří společně s harvardskou dvourozměrný systém. Úplné označení hvězdy je pak například G2V, F7II. V případě, že se ve spektru nacházejí emisní čáry, doplňujeme ještě malé písmeno e, např. B6Ve.

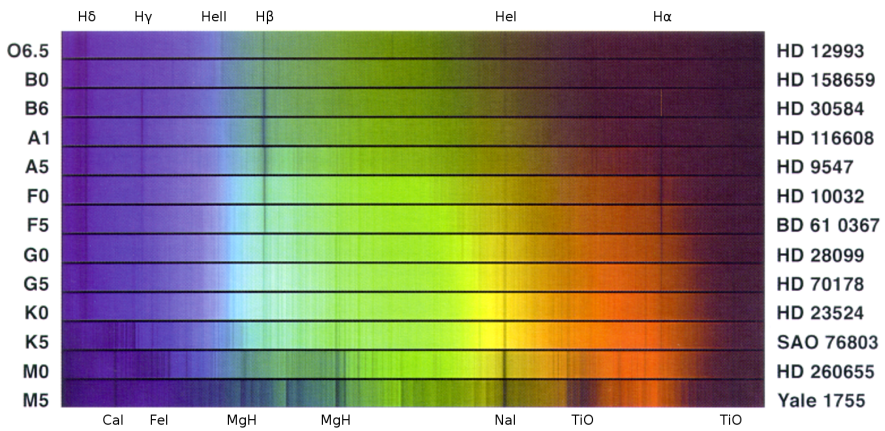
Příklady, jak se mění vzhled spektra jednotlivých tříd a intenzity čar, jsou uvedeny na obr. 2.11, 2.12 a 2.13.

Tabulka 2.2: Harvardská klasifikace hvězdných spekter.

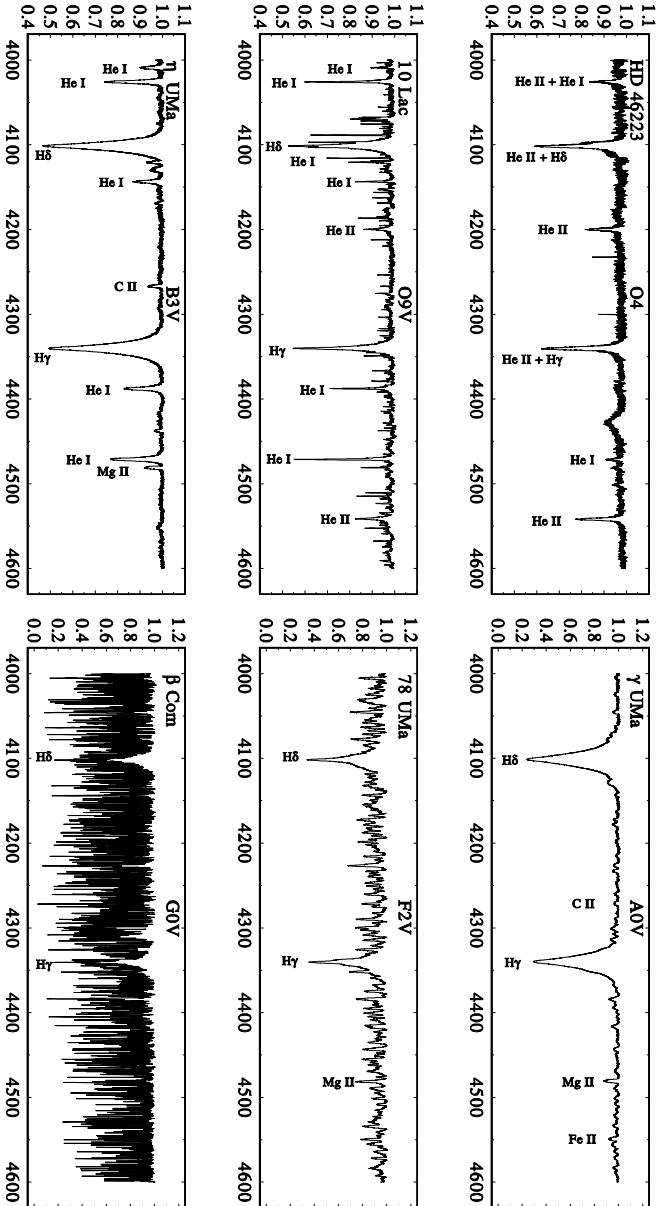
O	přítomny čáry HeII, HeI, HI, OIII, CIII, NIII
B	dominují HeI, HI, přítomny OII, CII, NII, FeIII, MgII
A	chybí HeI, dominují HI, přítomny OII, CII, NII, FeIII, MgII
F	slabší dominantní HI, čáry kovů
G	dominují CaII, objevují se první molekulární pásy
K	bohaté na neutrální kovy
M	převládají molekulární pásy TiO, VO
L	čáry KI, RbI, CsI, CrH
T	pásy CH ₄ , H ₂ O

Tabulka 2.3: Morganova–Keenenova klasifikace dle luminozitivních tříd.

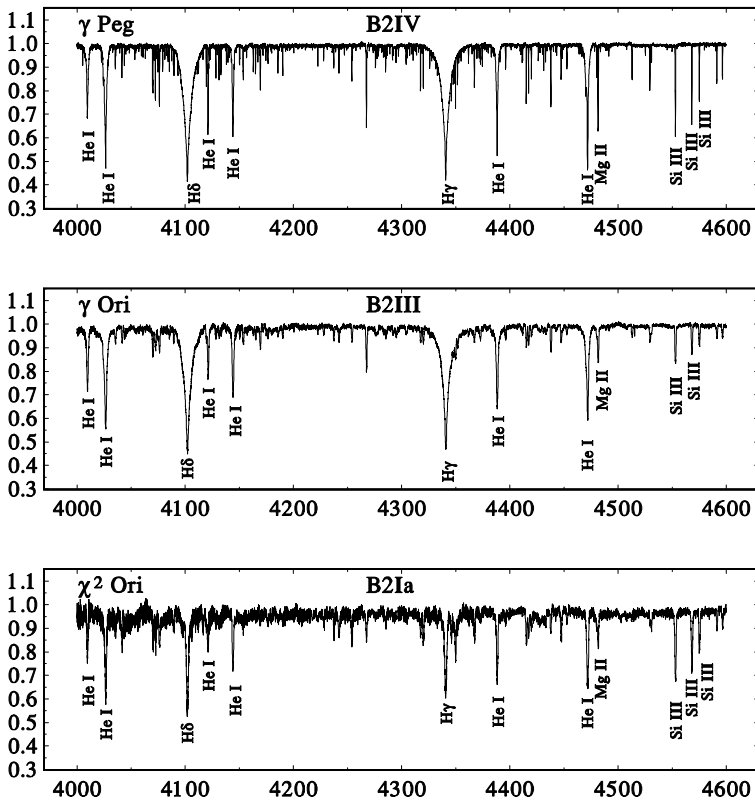
Ia	nadobři	IV	nadtrpaslíci
Ib	jasní obři	V	hvězdy hlavní posloupnosti (trpaslíci)
II	obři	VI	podtrpaslíci
III	podobři	VII	bílí trpaslíci



Obrázek 2.11: Vzhled spekter hvězd různých tříd. Vyznačeny jsou nejnápadnější spektrální čáry, i když klasifikace může být založena na slabších čarách. V kontinuu je naznačen posun maxima vyzařování odpovídající Wienovu zákonu. Převzato z práce Kleczka (2002).



Obrázek 2.12: Závislost vzhledu spektra na efektivní teplotě (spektrálním typu) pro hvězdy hlavní posloupnosti (luminozitní třídy V), ale různých typů O4 až G0. Zřetelné jsou změny centrálních intenzit spektrálních čar a zejména zvětšující se počet čar pro hvězdy pozdních (chladnějších) spektrálních typů. Zobrazena spektra pocházejí z veřejné přístupného archivu elektronických spekter získaných spektrográmem Elodie na observatoři Haute Provence ve Francii (viz Moutaka a kol. 2004).



Obrázek 2.13: Závislost vzhledu spektra na tíhovém zrychlení (luminozitní třídě) pro hvězdy jednoho typu (B2), ale různých luminozitních tříd (IV až Ia). Patrné je zužování čar pro hvězdy obří, mající malé tíhové zrychlení na povrchu. Spektra jsou převzata z archivu observatoře Haute Provence ve Francii (viz Moultaqa a kol. 2004).

3 Stavová rovnice

Stavovou rovnicí se nazývá funkční závislost mezi stavovými veličinami popisujícími vlastnosti nějaké směsi plynu, plazmatu či záření, tedy vztah $P(\rho, T)$ mezi tlakem, hustotou (či objemem) a teplotou.

Pro hvězdnou látku musíme ovšem uvážit nejen (i) tlak ideálního plynu, ale také (ii) tlak záření, (iii) tlak degenerovaného plynu a (iv) vliv částečné ionizace v povrchových vrstvách. Výklad stavové rovnice však začneme zavedením důležitého pojmu střední molekulové hmotnosti.

3.1 Střední molekulová hmotnost

Atomová hmotnost. Relativní hmotnosti atomů jednotlivých chemických prvků se nazývají *atomovými hmotnostmi* $A = m/m_u$. Za jednotku atomové hmotnosti m_u byla v minulosti přijímána $\frac{1}{16}$ hmotnosti atomu kyslíku. V současnosti ale platí jiná definice: jednotkou relativní atomové hmotnosti je $\frac{1}{12}$ klidové hmotnosti nuklidu uhlíku $^{12}_6\text{C}$. Skutečná hmotnost jednotky atomové hmotnosti činí

$$m_u = (1,66053873 \pm 0,00000013) \cdot 10^{-24} \text{g}. \quad (3.1)$$

Atomová hmotnost atomu vodíku činí $A_H = (1,00782504679 \pm 0,0000000013)$ a obdobně se uvádějí hmotnosti atomů, nuklidů, molekul, elektronů, fotonů i jiných částic.

Látkové množství, gramatom, grammolekula. Látkové množství $N_{\text{mol}} = N/N_A$ vyjadřuje množství látky, respektive počet částic. Jeho jednotkou je mol, přičemž 1 mol látky obsahuje $N_A \cdot 1$ mol částic, kde

$$N_A = (6,02214179 \pm 0,00000030) \cdot 10^{23} \text{ částic} \cdot \text{mol}^{-1}. \quad (3.2)$$

Avogadrovo číslo (konstanta). Ve starší literatuře se často používá pojmů gramatom nebo grammolekula, což je takové množství chemického prvku, molekuly či částice, jehož hmotnost v gramech je číselně rovna atomové hmotnosti; 1 gramatom je tedy prostě roven 1 molu.

Molární hmotnost, molekulová hmotnost. Molární hmotnost $M_{\text{mol}} = m/N_{\text{mol}}$ je hmotnost 1 molu látky. Udává se v jednotkách kg/mol nebo g/mol. Ve starší literatuře se tato veličina nazývá molekulovou váhou (angl. molecular weight) a obvykle se označuje symbolem μ . Zde budeme mluvit o *molekulové hmotnosti*¹ a budeme ji používat jako *bezrozměrnou veličinu*, $\mu = [M_{\text{mol}}]_{\text{g/mol}}$. Platí tedy, že molekulová hmotnost vodíku je

$$\mu_{\text{H}} = 1,00782504679 \pm 0,00000000013. \quad (3.3)$$

Skutečná hmotnost jednoho gramatomu látky o molekulové hmotnosti μ činí $\mu \cdot 1 \text{ g}$. Platí také, že objem gramatomu je

$$V = \frac{\mu \cdot 1 \text{ g}}{\rho}. \quad (3.4)$$

Střední molekulová hmotnost. Mějme směs plynu o hmotnosti $m = 1 \text{ kg}$, který obsahuje různé prvky, přičemž prvek E má hmotnostní podíl w_E . Střední molární hmotnost M_{mol} určíme jednoduše jako podíl hmotnosti a počtu molů, respektive sečteme počty částic jednotlivých prvků

$$M_{\text{mol}} = \frac{m}{N_{\text{mol}}} = \frac{m}{N/N_{\text{A}}} = \frac{m N_{\text{A}}}{\sum_E \frac{w_E m_{\text{u}}}{A_E m_{\text{u}}}} = \frac{N_{\text{A}} m_{\text{u}}}{\sum_E \frac{w_E}{A_E}}. \quad (3.5)$$

Střední molekulová hmotnost je číselná hodnota téhož v g/mol, neboli

$$\mu_i = \frac{1}{\sum_E \frac{w_E}{A_E}}. \quad (3.6)$$

Tento výraz platí pro *neutrální* nebo čistě *iontový* plyn ve stavu úplné ionizace (elektrony k hmotnostem nepřispívají).

Je-li Z_E náboj elementu E , pak při úplné ionizaci vznikne z 1 atomu Z_E elektronů. Pro *elektronový plyn* při úplné ionizaci tedy zavedeme

$$\mu_e = \frac{1}{\sum_E \frac{w_E}{A_E} Z_E} \quad (3.7)$$

a celkově pro směs iontů a volných elektronů

$$\mu = \frac{1}{\sum_E \frac{w_E}{A_E} (1 + Z_E)}. \quad (3.8)$$

V některých současných vývojevých modelech hvězd je studován detailně vývoj jednotlivých chemických prvků či dokonce nuklidů. V tom případě musí být stejně

¹S tím, že se tento pojem může vztahovat jak na plyn složený z molekul, tak na plyn atomový či na plazma složené z iontů a volných elektronů.

detailně uvažována i střední molekulová hmotnost. Obvykle se ale uvažují jen nejpočetnější prvky. To je přípustné, protože při úplné ionizaci pro všechny stabilní těžší prvky s mnoha elektrony platí velmi přibližně, že

$$1 + Z_E \simeq Z_E \simeq 0,5A_E. \quad (3.9)$$

Označme relativní hmotnostní obsah vodíku w_H symbolem X , helia w_{He} symbolem Y a w všech těžších prvků symbolem Z , takže

$$Z = 1 - X - Y. \quad (3.10)$$

Budeme-li ještě (z důvodů, které se vyjasní později) uvažovat i relativní zastoupení dusíku X_N , lze podle (3.8) pro střední molekulovou hmotnost směsi iontů a volných elektronů přibližně psát

$$\begin{aligned} \mu^{-1} &\doteq 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{8}{14}X_N + 0,5(1 - X - Y - X_N) \\ &= 1,5X + 0,25Y + \frac{1}{14}X_N + 0,5. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Analogicky podle vztahu (3.7) dostáváme molekulovou hmotnost elektronového plynu ve stavu úplné ionizace hvězdné látky

$$\begin{aligned} \mu_e^{-1} &\doteq X + 0,5Y + 0,5X_N + 0,5(1 - X - Y - X_N) \\ &= 0,5(1 + X). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vidíme tedy, že molekulová hmotnost volných elektronů závisí při úplné ionizaci pouze na relativním hmotnostním obsahu vodíku.

Stejná aproximace vede i na přibližný výraz pro střední molekulovou hmotnost samotného iontového plynu ve stavu úplné ionizace

$$\mu_i^{-1} \doteq X + 0,25Y + \frac{1}{14}X_N. \quad (3.13)$$

3.2 Ideální plyn.

Ideálním plynem se nazývá soubor dokonale elastických, hladkých a sférických částic, splňujících následující tři podmínky:

1. Rozměry částic jsou mnohem menší než jejich střední volná dráha mezi srážkami, takže je lze považovat za hmotné body.

2. Trvání srážky je mnohem kratší než doba volného pohybu mezi srážkami.
3. Částice na sebe navzájem mimo srážky nepůsobí žádnými přitažlivými či odpudivými silami, to znamená, že mimo srážky se pohybují konstantní rychlostí a po přímce, jejich energie je výlučně kinetická, nikoli potenciální. Mají tedy pouze tři stupně volnosti.

Ideální plyn se používá jako dobrá aproximace reálného *řídkeho nebo horkého plynu*.

Stavovou rovnici můžeme odvodit z termodynamiky. Protože tlak P v látce závisí pouze na jejím vnitřním stavu, nikoliv na tvaru, který zaujímá, či na její celkové hmotě M , závisí tlak zřejmě na teplotě t a hustotě ρ či specifickém objemu $v = 1/\rho$, t.j. objemu, který zaujímá jednotková hmota. Je tedy

$$P = f(v, t). \quad (3.14)$$

Podle empiricky zjištěného *Boyleova–Mariottova zákona* je součin tlaku a specifického objemu plynu při konstantní teplotě rovněž konstantní, což znamená, že stavová rovnice musí mít tvar

$$Pv = h(t), \quad (3.15)$$

kde $h(t)$ je nějaká funkce teploty.

Podle *Gayova–Lussacova zákona* zvětší *všechny* plyny při zahřátí z 0°C na 1°C svůj objem o α a platí pro ně vztahy:

$$v(t) = v(0)(1 + \alpha t) \quad \text{při } P = \text{konst.}, \quad (3.16)$$

$$P(t) = P(0)(1 + \alpha t) \quad \text{při } v = \text{konst.}, \quad (3.17)$$

přičemž $v(0)$, $P(0)$ opět označují hodnoty veličin při 0°C a konstanta α má pro všechny plyny stejnou hodnotu (3.19). Gayův–Lussacův zákon platí pro reálné plyny pouze přibližně, ale platí přesně pro ideální plyn.

Již roku 1877 bylo dohodnuto, že *teplotní škála* bude zavedena jako lineární závislost na tlaku vodíku při konstantním objemu, přičemž se použije bod tání ledu (0°C) a bod varu vody (100°C) ke kalibraci. Platí tedy

$$P(t) = P(0)(1 + \alpha t) \quad \text{při } v = \text{konst.}, \quad (3.18)$$

kde $P(0)$ je tlak při teplotě 0°C a hodnota konstanty α je při zvolené kalibraci teplotní škály

$$\alpha = 273,16^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}. \quad (3.19)$$

Je výhodné zavést také škálu *absolutní teploty* T (s jednotkou Kelvin) následovně

$$[T]_K = [t]_{^\circ\text{C}} + 273,16. \quad (3.20)$$

Po dosazení do rovnic (3.16) a (3.17) totiž dostáváme

$$v(T) = v(0)\alpha T \quad \text{při } P = \text{konst.} \quad (3.21)$$

$$P(T) = P(0)\alpha T \quad \text{při } v = \text{konst.} \quad (3.22)$$

Nyní tedy můžeme přistoupit k nalezení stavové rovnice pro ideální plyn, tedy konkrétní funkční závislosti v rovnici (3.15). Předpokládejme, že stav plynu se změní z výchozích hodnot P_1 , v_1 a T_1 na nové hodnoty P_2 , v_2 a T_2 , a to ve dvou krocích: (i) nejprve plyn zahřejeme na teplotu T_2 při konstantním tlaku; (ii) isotermicky změníme jeho tlak na hodnotu P_2 . Podle vztahu (3.21) se objem plynu změní na hodnotu

$$v(T_2) = v_1 \frac{T_2}{T_1}. \quad (3.23)$$

Poté podle Boyleova–Marriotova zákona (3.15)

$$P_1 v(T_2) = P_2 v_2, \quad (3.24)$$

což lze s využitím vztahu (3.23) ještě upravit na

$$\frac{P_1 v_1}{T_1} = \frac{P_2 v_2}{T_2} = c, \quad (3.25)$$

kde c je pro daný plyn konstanta.

Jestliže místo specifického objemu v budeme uvažovat objem V 1 gramatomu (= 1 molu), který pro všechny plyny obsahuje stejný počet částic, bude ve stavové rovnici místo konstanty c konstanta

$$\mathfrak{R} = (8,314472 \pm 0,000015) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad (3.26)$$

stejná pro všechny ideální plyny, které se obvykle říká *universální plynová konstanta*. Stavová rovnice ideálního plynu pak nabude obvyklý tvar

$$P = \frac{\mathfrak{R}T}{V} = \frac{\rho}{\mu} \mathfrak{R}T. \quad (3.27)$$

Stavovou rovnici lze rovněž odvodit ze statistické fyziky pro klasické Maxwellovo rozdělení rychlostí částic

$$P = \frac{N_V}{V} kT, \quad (3.28)$$

kde N_V je počet částic v objemu V a

$$k = (1,3806505 \pm 0,0000024) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \quad (3.29)$$

Boltzmannova konstanta. Pokud zvolíme za objem V objem jednoho gramatomu, bude $N_V = N_A$ a podle (3.4) můžeme stavovou rovnici zapsat ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu} N_A kT. \quad (3.30)$$

Mezi použitými konstantami platí zřejmě vztah

$$\mathfrak{R} = kN_A. \quad (3.31)$$

Někdy se lze setkat i se zápisem stavové rovnice ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu} \frac{\mu_H}{m_H} kT, \quad (3.32)$$

kde bylo Avogadrovo číslo eliminováno pomocí vztahu $N_A = \mu_H/m_H$. Někteří autoři dokonce místo přesné molekulové hmotnosti vodíku berou $\mu_H \doteq 1$ a zapisují stavovou rovnici ve tvaru

$$P \doteq \frac{\rho}{\mu} \frac{1}{m_H} kT, \quad (3.33)$$

jako např. Aller (1953, 1963).

3.3 Tlak záření

Zajímáme-li se o stavovou rovnici hvězdné látky, můžeme uvažovat jednotlivě tlak iontů P_i , tlak volných elektronů P_e a tlak záření P_r . Podle *Daltonova zákona* bude totiž výsledný tlak aritmetickým součtem jednotlivých příspěvků, tedy

$$P = P_i + P_e + P_r. \quad (3.34)$$

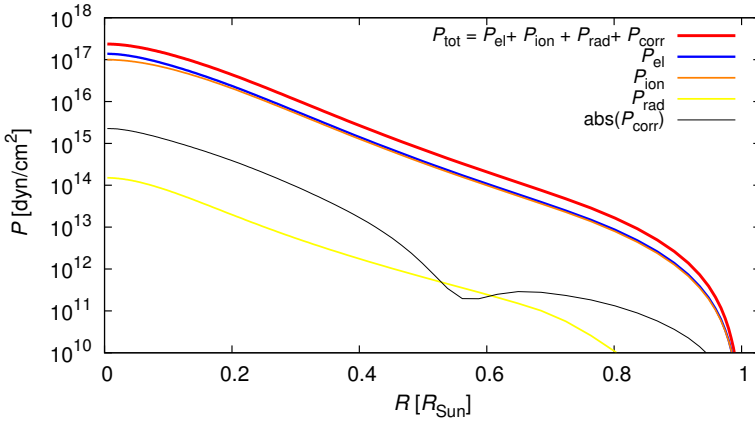
Jak si ukážeme v dalším výkladu, lze s vysokou přesností považovat nitro hvězdy za absolutně černé těleso a pro tlak záření tedy platí vztah

$$P_r = \frac{a}{3} T^4, \quad (3.35)$$

kde $a = 7,56577 \cdot 10^{-16} \text{ W m}^{-3} \text{ K}^{-4}$ je konstanta hustoty záření.

Bývá zvykem označovat poměr tlaku plynu P_g , kde

$$P_g = P_i + P_e, \quad (3.36)$$



Obrázek 3.1: Tlak P v nitru Slunce, rozdělený na tlak elektronového plynu P_e , iontového plynu P_i a tlak záření P_r . Vynesena je také korekce tlaku $|P_{\text{corr}}|$ zohledňující odchylky od stavové rovnice ideálního plynu. Výpočet programem EZ.

k celkovému tlaku P symbolem β , takže lze dále psát

$$\beta P = P_g = P - P_r, \quad (3.37)$$

a podle výrazu pro tlak záření také

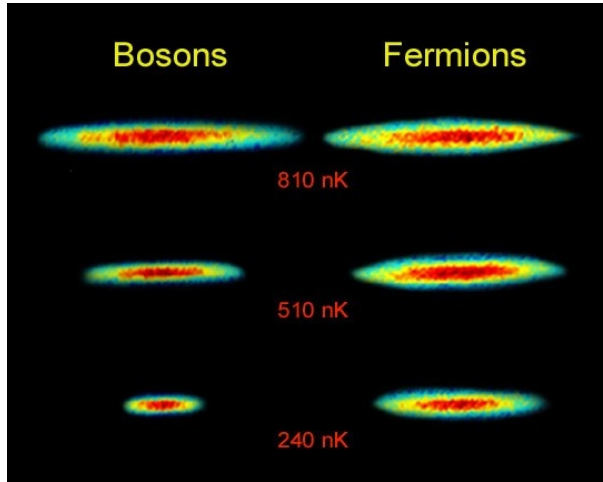
$$\beta = 1 - \frac{aT^4}{3P}. \quad (3.38)$$

Vzhledem k tomu, co jsme si řekli dříve o stavové rovnici ideálního plynu, víme, že v nedegenerovaných oblastech hvězdy můžeme tlak plynu popsat pomocí střední molekulové hmotnosti směsi iontů a elektronů, a stavová rovnice hvězdné látky bude mít tvar

$$P = \frac{\rho}{\mu} \mathcal{R}T + \frac{a}{3} T^4. \quad (3.39)$$

3.4 Elektronová degenerace

U méně hmotných hvězd je v centrálních částech tak vysoká koncentrace hmoty, že tam dochází ke stavu *degenerace*. Za této situace se u fermionů uplatňuje *Pauliho vylučovací princip*, který brání obsazení daného kvantového stavu (energetické



Obrázek 3.2: Obláček bosonů (lithia-7) a fermionů (lithia-6) při nízkých teplotách řádu 10^{-7} K, kdy se již výrazně projevuje Pauliho vylučovací princip, který platí pro fermiony, ale nikoli pro bosony. Plyn lithia-6 proto zaujímá při dané teplotě větší objem, neboť v něm navíc působí degenerovaný tlak. Převzato z Truscott a spol. (2001).

hladiny) více než jedním fermionem (obr. 3.2). Při hustotách nad asi 10^9 kg m^{-3} , nabývá tato degenerace dokonce relativistický charakter. To nastává až v nitrech bílých trpaslíků.

Podle *Heisenbergova principu neurčitosti* (Shu 1982)

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.40)$$

platí, že čím více jsou částice stlačovány k sobě (mají malé Δx), tím rychleji se musejí pohybovat (mají velké Δp). Při koncentraci n je typické $\Delta x \simeq n^{-\frac{1}{3}}$, a tedy $p \simeq \Delta p \simeq \frac{\hbar}{2} n^{\frac{1}{3}}$. V nerelativistickém případě platí pro hybnost $p = mv$, kde m je hmotnost částice a v rychlost. Z kinetické teorie plynů přitom víme, že tlak je roven²

$$P = \frac{1}{3} n v p \simeq \frac{1}{3} n \frac{(\Delta p)^2}{m} = \frac{\hbar^2}{12} \frac{1}{m} n^{\frac{5}{3}}. \quad (3.41)$$

Podle závislosti $P \propto \frac{1}{m}$ ihned vidíme, že při stejné koncentraci iontů a elektronů $n_i \simeq n_e$ je tlak způsobovaný hmotnými ionty mnohem *menší* než tlak elektronů! Ukazuje se, že alespoň v oblastech nerelativistické degenerace lze ionty považovat za nedegenerované, chovající se jako částice ideálního plynu. Iontová degenerace nastupuje až při hustotách nad $10^{12} \text{ kg m}^{-3}$.

²V relativistickém případě dosahuje rychlost částic limitně $v \rightarrow c$, tudíž pro tlak vychází jiná úměra: $P = \frac{1}{3} n v p \simeq \frac{1}{3} n c \Delta p \simeq \frac{\hbar}{6} c n^{\frac{4}{3}}$.

V oblastech elektronové degenerace tedy musíme uvažovat ionty a elektrony zvlášť. Můžeme ovšem předpokládat, že elektronová degenerace se uplatňuje pouze v situacích, kdy je plyn již plně ionizován, takže vzhledem k dříve řečenému můžeme pro molekulovou hmotnost iontů μ_i a volných elektronů μ_e , resp. pro převrácené hodnoty, psát

$$\mu_i^{-1} = \sum_E \frac{w_E}{A_E}, \quad \mu_e^{-1} = \sum_E \frac{w_E}{A_E} Z_E. \quad (3.42)$$

Pro střední molekulovou hmotnost plazmatu tedy zřejmě platí

$$\mu^{-1} = \mu_i^{-1} + \mu_e^{-1}. \quad (3.43)$$

Pro počty iontů a elektronů v objemové jednotce můžeme tak psát

$$N_i = \rho \frac{N_A}{\mu_i}, \quad N_e = \rho \frac{N_A}{\mu_e}. \quad (3.44)$$

Jak již bylo řečeno, zůstávají ionty i za velmi extrémních podmínek prakticky nede degenerované, takže stavová rovnice iontového plynu zůstává ve tvaru

$$P_i = \frac{\rho}{\mu_i} N_A k T. \quad (3.45)$$

Pro degenerovaný elektronový plyn je ovšem třeba použít kvantovou statistiku, která pro nerelativistickou degeneraci vede na následující vztahy pro počet elektronů v objemové jednotce a pro elektronový tlak

$$N_e = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e k T)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\psi) \quad (3.46)$$

a

$$P_e = \frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} N_e k T \quad (3.47)$$

kde h je Planckova konstanta, m_e hmotnost elektronu, ψ označuje *parametr degenerace* (čím vyšší hodnota, tím vyšší stupeň degenerace) a

$$F_k(\psi) = \int_0^{\infty} \frac{u^k du}{e^{u-\psi} + 1} \quad (3.48)$$

jsou *Fermiho–Diracovy funkce*. S využitím vztahu (3.44) dostaneme

$$\rho = \frac{4\pi}{N_0 h^3} (2m_e k)^{\frac{3}{2}} \mu_e T^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\psi) \quad (3.49)$$

a

$$P_e = \frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} \frac{\rho}{\mu_e} \Re T. \quad (3.50)$$

To jsou však parametrické rovnice a počítat parametr $\psi(\rho, T)$ přímo z rovnice (3.49) by nebylo snadné. Naštěstí existuje několik velmi dobrých aproximací. Zde se přidržíme aproximačního vzorce z práce Larson a Demarque (1964), který pro $\psi < 30$ dává chybu menší než 0,02 %:

$$\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi) = F_{\frac{1}{2}}(\psi) \frac{(1 + 0,1938F_{\frac{1}{2}}(\psi))^{\frac{5}{3}}}{1 + 0,12398F_{\frac{1}{2}}(\psi)}. \quad (3.51)$$

Pro tlak plynu P_g můžeme pak psát s použitím vztahu (3.43)

$$\begin{aligned} P_g &= \beta P = P_i + P_e = \frac{\rho}{\mu_i} \Re T + \frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} \frac{\rho}{\mu_e} \Re T = \\ &= \frac{\rho}{\mu} \Re T \left(\frac{\mu}{\mu_i} + \frac{\mu}{\mu_e} \frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} \right) = \\ &= \frac{\rho}{\mu} \Re T \left[\mu \left(\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e} \right) + \frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{\rho}{\mu} \Re T \left[1 + \frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Označíme-li

$$\lambda(\rho, T) = 1 + \frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} - 1 \right), \quad (3.53)$$

můžeme zapsat stavovou rovnici platnou pro oblasti úplné ionizace včetně oblastí nerelativistické degenerace ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu} \Re T \lambda(\rho, T) + \frac{a}{3} T^4. \quad (3.54)$$

Povšimněme si ještě, že parametr $\lambda(\rho, T)$ můžeme z hustoty a teploty vypočítat tak, že (i) z hustoty (3.49) vypočítáme $F_{\frac{1}{2}}(\psi)$ a (ii) z aproximace (3.51) obdržíme $F_{\frac{3}{2}}(\psi)$.

Úplná degenerace. Poznamenejme závěrem, že pro limitní stav úplné elektronové degenerace plyne z Fermiho–Diracova rozdělení stavová rovnice ve tvaru

$$P_e = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (3.55)$$

kde

$$K_1 = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m_e m_p^{\frac{5}{3}}}, \quad (3.56)$$

m_e je hmotnost elektronu, m_p hmotnost protonu a $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s je Planckova konstanta.³ Elektronová degenerace nastává ve chvíli, kdy elektronový tlak počítaný podle vztahu (3.55) převýší tlak plynu počítaný z rovnice ideálního plynu (3.27).

Pro zvláště vysoké hustoty se uplatní relativistické Fermiho–Diracovo rozdělení a limitně platí stavová rovnice ve tvaru

$$P_e = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad (3.57)$$

kde

$$K_2 = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{8m_p^{\frac{4}{3}}}. \quad (3.58)$$

3.5 Částečná ionizace v povrchových vrstvách

Zcela ionizovaná látka tvoří obvykle zhruba 95 % celkové hmotnosti hvězdy. Vrstvy v blízkosti povrchu hvězdy jsou však ve stavu neúplné ionizace, což je složitější situace.

S pomocí vztahů (3.43) a (3.44) můžeme pro molekulovou hmotnost psát

$$\mu = \frac{\mu_i \mu_e}{\mu_i + \mu_e} = \frac{\mu_i}{1 + \frac{\mu_i}{\mu_e}} = \frac{\mu_i}{1 + \frac{N_e}{N_i}} = \frac{\mu_i}{1 + Q}, \quad (3.59)$$

kde veličina $Q = N_e/N_i$ je průměrný počet elektronů připadajících na jeden atom směsi, který ovšem musíme vypočítat. Označme x_j^r relativní počet atomů typu j

³Všimněme si, že při zde zavedené bezrozměrné molekulové hmotnosti rozměrová analýza vztahů (3.55) a (3.56) souhlasí: $(J^2 s^2 kg^{-1} kg^{-\frac{5}{3}})(kg m^{-3})^{\frac{5}{3}} = kg m^{-1} s^{-2}$ ($J = kg m^2 s^{-2}$).

v r -tém stupni ionizace, ν_j relativní počet atomů typu j , M_j počet elektronů atomu typu j a N počet druhů atomů ve směsi. Pro hledanou veličinu Q lze pak psát

$$Q = \sum_{j=1}^N \nu_j \sum_{r=0}^{M_j} r x_j^r. \quad (3.60)$$

Veličiny x_j^r a Q jsou kromě rovnice (3.60) navzájem spojeny ještě vztahy plynoucími přímo ze *Sahovy rovnice* ((2.100), obr. 2.6) ve tvaru⁴

$$\frac{x_j^{r+1}}{x_j^r} P_e = K_j^r, \quad (3.61)$$

kde

$$K_j^r = \frac{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} \frac{Z_j^{r+1}(T)}{Z_j^r(T)} e^{-\frac{\chi_j^r}{kT}}, \quad (3.62)$$

m_e označuje hmotnost elektronu, χ_j^r energii potřebnou ke zvýšení ionizace z r -tého na $(r+1)$ -ní stupeň a $Z_j^r(T)$ partiční funkci r -krát ionizovaného atomu typu j . Pro poměr tlaku plynu P_g k elektronovému tlaku P_e zřejmě platí

$$\frac{P_g}{P_e} = \frac{N_i + N_e}{N_e} = \frac{1}{Q} + 1 = \frac{1+Q}{Q}, \quad (3.63)$$

takže vztahy mezi námi uvažovanými veličinami lze zapsat ve tvaru

$$\frac{x_j^{r+1}}{x_j^r} P_g \frac{Q}{1+Q} = K_j^r, \quad (3.64)$$

To představuje $\sum_{j=1}^N (M_j - 1)$ rovnic. Počet neznámých x_j^r je zde ale větší, $\sum_{j=1}^N M_j$. Z definice veličin x_j^r ovšem plyne, že jsou svázány také podmínkou

$$\sum_{r=0}^{M_j} x_j^r = 1, \quad (3.65)$$

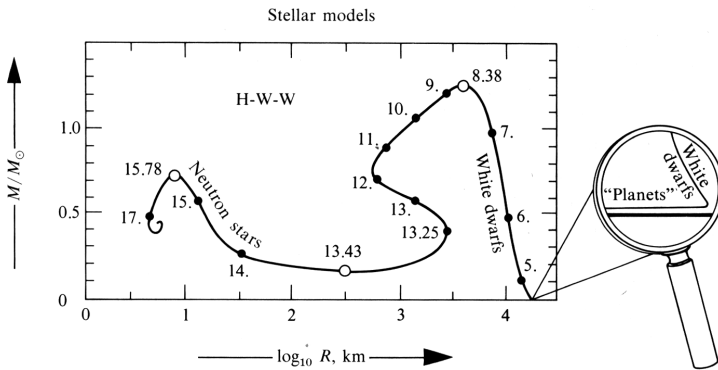
což představuje dodatečných N rovnic, které celou soustavu uzavírají.

Iterační řešení. Při konkrétní aplikaci je třeba se rozhodnout pro to, jaký soubor atomů bude detailně uvažován, a soustava rovnic (3.64) a (3.65) se řeší iteračně: (i) zvolíme nějakou počáteční hodnotu Q (s uvážením, že dominantní jsou vodík a helium, např. $Q = 2$); (ii) spočteme molekulovou hmotnost μ z rovnice (3.59); (iii) ze stavové rovnice

$$P_g = \frac{\rho}{\mu} \mathfrak{R}T \quad (3.66)$$

spočteme tlak plynu P_g ; (iv) řešením rovnic (3.64) a (3.65) získáme hodnoty všech uvažovaných veličin x_j^r ; (v) pomocí nich a rovnice (3.60) dostaneme zpřesněnou hodnotu Q (tj. počtu elektronů připadajících na jeden atom směsi). Celý postup opakujeme až do dosažení požadované přesnosti.

⁴Mocnina $(kT)^{5/2}$ je zde proto, že na levé straně máme tlak P_e , nikoli n_e .



Obrázek 3.3: Závislost hmotnosti M na poloměru R pro stabilní kulové hvězdy tvořené hustou látkou. Křivka je parametrizovaná hodnotou tlaku $\log_{10}[p/c^2]_{\text{g/cm}^3}$. První vrchol odpovídá bílým trpaslíkům, které stabilizuje zejména gradient tlaku degenerovaného elektronového plynu, druhý charakterizuje neutronové hvězdy, tedy látku, u které je rozhodující tlak degenerovaného neutronového plynu. Převzato z Misner a spol. (1973).

Složitější stavové rovnice. Závěrem dodejme, že při moderních výpočtech se používají ještě složitější stavové rovnice, než jaké jsme si zde popsali. Například Rogers, Swenson a Iglesias (1996) spočítali tlak a další stavové veličiny a jejich derivace jako funkce hustoty, tlaku a chemického složení pro celou síť možných kombinací se zahrnutím neúplné ionizace a dalších fyzikálních jevů souvisejících s odchylkami od stavové rovnice ideálního plynu a dávají k dispozici i program pro interpolaci v jejich tabulkách. Smyslem je dosáhnout při výpočtech hvězdných modelů vysoké přesnosti, např. s ohledem na modely Slunce, bez nutnosti vlastní výpočty hvězdných modelů neúměrně prodloužit. Podobný postup se používá i pro koeficienty opacity hvězdné látky, jak o tom bude řeč později.

Kompaktní objekty. Pro přesné určení hmotnosti neutronových hvězd a černých děr se zase uvažují komplikovanější stavové rovnice husté hvězdné látky (obr. 3.3). Dobrý přehled o této problematice poskytuje např. článek Kapera a kol. (2006), ve kterém je probráno i srovnání teorie s pozorováními kompaktních objektů.

Navíc je třeba použít místo rovnice hydrostatické rovnováhy (1.12) její *relativistickou* verzi (nazývanou též Tolmannova–Oppenheimerova–Volkoffova rovnice, TOV)

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{G}{R^2} \left[\rho + \frac{P}{c^2} \right] \left[M_R + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM_R}{c^2 R} \right]^{-1}. \quad (3.67)$$

4 Základní rovnice stavby hvězd

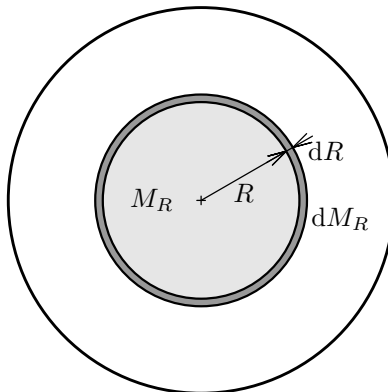
4.1 Rovnice zachování hmoty

Budiž M_R hmota obsažená v kouli o poloměru R a $\rho(R)$ hustota hvězdné látky ve vzdálenosti R od středu hvězdy. Hmotnost dM_R infinitezimální kulové vrstvy o vnitřním poloměru R a vnějším poloměru $R + dR$ (obr. 4.1) je

$$dM_R = \frac{4}{3}\pi [(R + dR)^3 - R^3] \rho \doteq 4\pi R^2 \rho dR, \quad (4.1)$$

kde jsme pochopitelně zanedbali vyšší mocniny diferenciálu dR . Odtud přímo plyne diferenciální rovnice zachování hmoty

$$\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}. \quad (4.2)$$



Obrázek 4.1: Kulová vrstva o hmotnosti dM_R a tloušťce dR v nitru hvězdy.

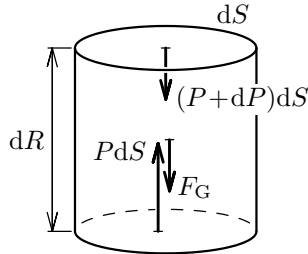
4.2 Pohybová rovnice a její limitní případ: rovnice hydrostatické rovnováhy

Na kulovou vrstvu v nitru hvězdy působí především síla gravitační a elektromagnetická, kterou modelujeme jako dvojici tlakových sil (obr. 4.2). Pohyb infintezimálně tenké kulové vrstvy o hmotnosti dM_R a tloušťce dR a je pak popsán pohybovou rovnicí (dle 2. Newtonova zákona $ma = F$)

$$dM_R \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM_R dM_R}{R^2} + 4\pi R^2 P - 4\pi R^2 (P + dP), \quad (4.3)$$

kde síly na pravé straně jsou: (i) gravitace vnitřní koule o hmotnosti M_R a poloměru R — má záporné znaménko, neboť poloměr měříme od centra k povrchu, kdežto síla směřuje do centra, čili opačně (gravitace tlusté vnější kulové vrstvy je podle Newtonova teorému nulová); (ii) tlaková síla na vnitřní plochu vrstvičky, směřující ven; (iii) tlaková síla na vnější plochu, směřující opět dovnitř. Po jednoduché úpravě dostáváme *pohybovou rovnici* v obvyklém tvaru

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM_R}{R^2} - 4\pi R^2 \frac{dP}{dM_R}. \quad (4.4)$$



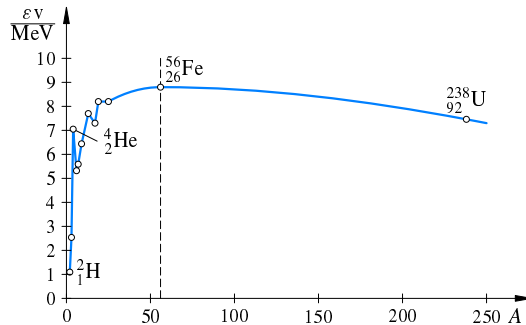
Obrázek 4.2: Infintezimální váleček v nitru hvězdy, na který působí gravitační síla a dvojice tlakových sil.

Pro dynamicky stabilní hvězdy lze zanedbat člen na levé straně, popisující zrychlení, a uvažovat pouze *rovnici hydrostatické rovnováhy*, t.j. situaci, kdy změna tlaku od místa k místu právě vyrovnává gravitační sílu

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4}. \quad (4.5)$$

Pozor! Je třeba vždy mít na paměti, že je to gradient tlaku, nikoliv tlak sám, co působí proti gravitační přitažlivosti. Chybná tvrzení na toto téma se občas objevují i u renomovaných autorů.

Existují samozřejmě i případy, kdy setrvačný člen $\frac{d^2 R}{dt^2}$ zanedbat nelze, například při rychlých pulzacích Cefeid, s periodou jen několik dní. Na druhou stranu si můžeme představit situaci v řídkém mezihvězdném oblaku, kdy $dP \doteq 0$, a protohvězda podle pohybové rovnice (4.4) nutně musí kolabovat.



Obrázek 4.3: Vazebná energie E_v na jeden nukleon, pro jádra s různými atomovými čísly A .

4.3 Rovnice tepelné rovnováhy

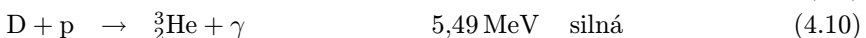
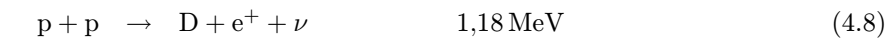
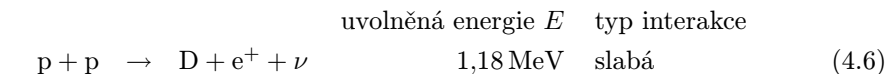
Proberme nyní, jak a jakým způsobem hvězda získává a přeměňuje svou tepelnou energii. Zmínili jsme v úvodu, že koncem třicátých let 20. století se podařilo dokázat, že hlavním dlouhodobým zdrojem zářivé energie hvězd jsou syntetické jaderné reakce, tedy spojování dvou či více jader lehkých prvků na těžší, při kterém se uvolňuje velké množství energie ve formě záření, kinetické energie produktů a neutrin.

Energeticky zdaleka nejvydatnější slučovací jadernou reakcí je přeměna vodíku na helium. To je způsobenou velkou vazebnou energií, kterou se vyznačuje helium a také další magická jádra jako uhlík $^{12}_6\text{C}$ nebo kyslík $^{16}_8\text{O}$ (obr. 4.3).

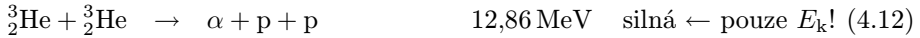
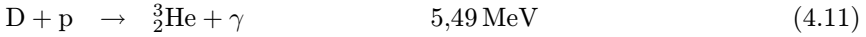
Známy jsou dva způsoby této přeměny: (i) proton–protonový řetězec a (ii) CNO cyklus, každý v několika variantách.

4.3.1 Proton–protonový řetězec

Reakce první varianty proton–protonového řetězce (p-p I) lze zapsat následovně¹



¹Můžeme se také setkat se zápisem $p(p, e^+\nu)D$, kde čárka znamená šipku, před levou závorkou je terč, za ní nálétávající projektil a vpravo příslušné produkty odletující z místa interakce nebo zůstávající v terči.



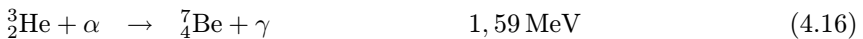
$$\sum E = 26,20 \text{ MeV}$$

kde $p \equiv {}^1_1\text{H}$ označuje proton, $D \equiv {}^2_1\text{H}$ deuteron, $\alpha \equiv {}^4_2\text{He}$ jádro hélia, γ foton, e^+ positron, ν elektronové neutrino. Kdybychom reakce jaksi sečetli, obdržíme „ $4p + 2e^- \rightarrow \alpha + 6\gamma + 2\nu$ “, přičemž je zachován náboj ($2 = 2$) i baryonové číslo ($4 = 4$). **Pozor! Kromě 4 protonů se spotřebovávají i 2 elektrony**, jinak by v nitru Slunce neplatil zákon zachování náboje.

Celková energetická bilance je $+26,74 \text{ MeV}$, ale z toho pouze $26,20 \text{ MeV}$ je energie *využitelná* pro ohřev Slunce, neboť je ve formě kvant záření gama nebo *kinetické energie produktů*. (Viz poslední vydatnou reakci (4.12), kde se uvolňuje pouze E_k a žádná γ .) Energii $0,54 \text{ MeV}$ odnášejí neutrino, která s okolním plazmatem interagují jen slabě ($\sigma_\nu \simeq 10^{-48} \text{ m}^2$) a prakticky všechna odletí z jádra rovnou do mezihvězdného prostoru.²

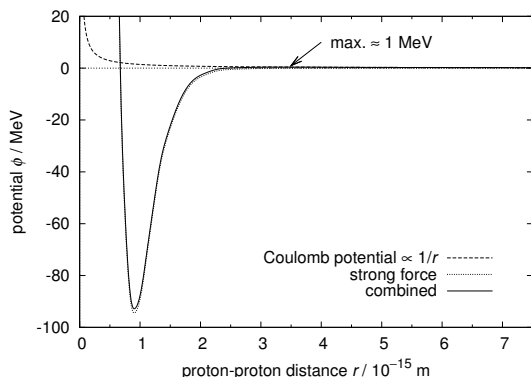
Všimněme si, že se zde uplatňují slabé i silné interakce. Zvláště slabé interakce probíhají velmi pomalu (trvají 10^{-8} s), mají malé účinné průřezy a jsou tedy málo pravděpodobné. (Daný proton v jádru Slunce interaguje s jiným protonem podle (4.6) typicky jednou za 10^{10} yr — našťástí je tam protonů mnoho.) Kladně nabitá jádra musí překonat *coulombovskou bariéru*, tj. odpudivou elektromagnetickou sílu, neboť silná síla působí pouze na krátké vzdálenosti. Na obrázku 4.4 to vidíme jako vrchol potenciální energie, řádově 1 MeV , který nalétávající částice musí překonat. To však není snadné, neboť při teplotě $T \simeq 15 \cdot 10^6 \text{ K}$ mají protony kinetickou energii typicky řádu $E_k \simeq kT \simeq 1 \text{ keV}$, tedy o tři řády menší. Zásadní roli zde sehrává kvantověmechanický *tunelový jev*, čili skutečnost, že vlnová funkce pro částice s nízkou energií má nenulovou amplitudu (a tedy i pravděpodobnost výskytu částice) i za zmiňovanou bariérou. Protože podle Maxwellova rozdělení rychlostí je částic s vysokou kinetickou energií málo, ale na druhou stranu právě tyto částice mají větší pravděpodobnost překonání bariéry, vykazuje závislost účinnosti reakcí na energii částic charakteristický *Gamowův vrchol* (obr. 4.5).

Druhá varianta p-p II nastává ve 31 % případů. Její počáteční reakce jsou stejné jako u p-p I

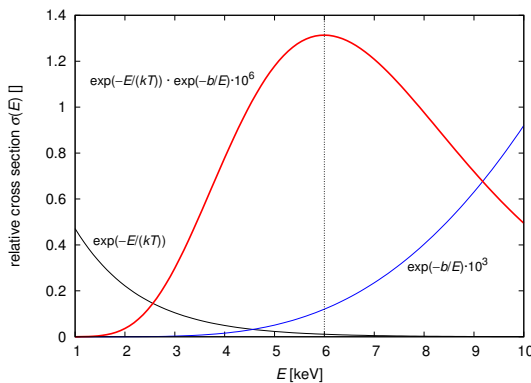


$$\sum E = 25,66 \text{ MeV} \quad 1,09 \text{ MeV}$$

²Výjimečná je situace při výbuchu supernovy, kdy je látka v nitru kolabující hvězdy velmi hustá a neutrin je produkováno obrovské množství, takže jejich interakce s látkou započítat musíme.

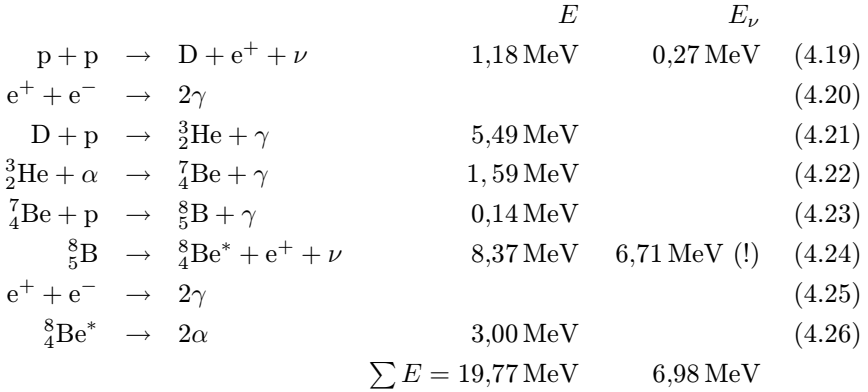


Obrázek 4.4: Potenciál coulombický, silné síly a jejich součet pro dva protony. V klasické mechanice je pohyb částice dovolen pouze v oblastech, kde je energie částice větší než potenciál, čili proton s energií 1 keV nalétávající zprava se od křivky potenciálu „odrazí“ a odletí zpět do nekonečna. V kvantové mechanice se však uplatňuje tunelový jev.



Obrázek 4.5: Gamowův vrchol účinnosti termionukleárních reakcí, vznikající kombinací vlivu Maxwellova rozdělení rychlostí a pravděpodobnosti překonání coulombovské bariéry tunelovým jevem. Podle Carrol a Ostlie (2007).

Třetí varianta p-p III je vzácnější, neboť nastává s pravděpodobností jen 0,3%. Je nicméně velmi důležitá, protože se při ní produkuje vysokoenergetické neutrino (4.24), což se využívá při měření toku neutronů ze Slunce (hvězdička u berylia ${}^8_4\text{Be}^*$ označuje energeticky vyšší, excitovaný stav, vedoucí k rychlému rozpadu jádra)



Předpovězena je i čtvrtá varianta proton–protonového řetězce (p-p IV), ale ta je tak nepravděpodobná ($3 \cdot 10^{-7}$), že se s ní v rovnicích hvězdné stavby ani nepočítá.

Konkrétní průběh reakcí nás však vlastně nezajímá, nám jde především o *měrný výkon* ϵ_{pp} [$\text{erg s}^{-1} \text{g}^{-1}$], tj. množství energie, které se uvolní všemi variantami p-p řetězce v 1 g hvězdné látky za 1 s. Lze jej spočítat podle následujících vztahů; vypadají sice složitě, ale jde prostě o zadané nelineární funkce $\epsilon(\rho, T, X, Y, Z)$, které jsou výsledkem experimentální jaderné fyziky

$$\epsilon_{pp} = \epsilon_{pp1} + \epsilon_{pp2} + \epsilon_{pp3}, \quad (4.27)$$

$$\epsilon_{pp1} = (1 - \gamma) \epsilon, \quad (4.28)$$

$$\epsilon_{pp2} = \frac{1,96 \gamma}{1 + W} \epsilon, \quad (4.29)$$

$$\epsilon_{pp3} = \frac{1,47 \gamma W}{1 + W} \epsilon, \quad (4.30)$$

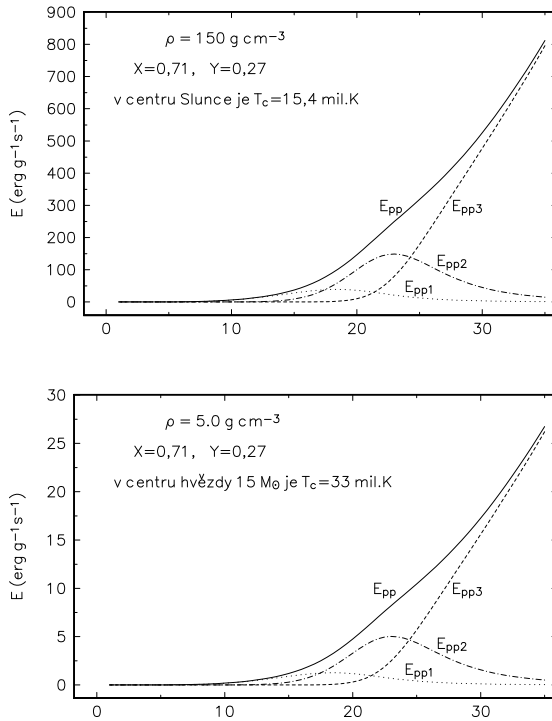
$$\epsilon = 2,06 \cdot 10^6 f_{1,1} g_{1,1} \rho T_6^{-\frac{2}{3}} X^2 e^{-33,804 T_6^{-\frac{1}{3}}}, \quad (4.31)$$

$$\gamma = \alpha \left[\left(1 + \frac{2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right], \quad (4.32)$$

$$\alpha = 5,48 \cdot 10^{17} \left(\frac{Y}{4X} \right)^2 e^{-100 T_6^{-\frac{1}{3}}}, \quad (4.33)$$

$$W = 1,22 \cdot 10^{16} f_{7,1} g_{7,1} e^{-102,6 T_6^{-\frac{1}{3}}} \frac{X}{1 + X} T_6^{-\frac{1}{6}}, \quad (4.34)$$

$$f_{1,1} = 1 + 0,25 \rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}}, \quad (4.35)$$



Obrázek 4.6: Energetická vydatnost jednotlivých variant p-p řetězce jaderné přeměny a jejich součtu v závislosti na teplotě a pro dvě různé hustoty, odpovídající nitru Slunce a nitru hvězdy o hmotnosti $15 M_\odot$ na začátku nukleárního vývoje.

$$f_{7,1} = 1 + \rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}}, \quad (4.36)$$

$$g_{1,1} = 1 + 0,012 T_6^{\frac{1}{3}} + 0,0078 T_6^{\frac{2}{3}} + 0,00065 T_6, \quad (4.37)$$

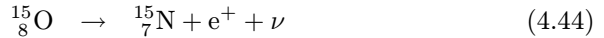
$$g_{7,1} = 1 + 0,004 T_6^{\frac{1}{3}}, \quad (4.38)$$

kde teplota $T_6 = 10^{-6}[T]_{\text{K}}$ a hustota ρ se udává v g/cm^3 . Na obrázku 4.6 je znázorněno, jak se energeticky uplatňují jednotlivé varianty p-p řetězce v závislosti na teplotě a hustotě.

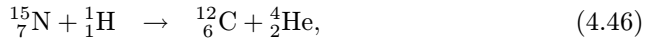
4.3.2 CNO cyklus

Jiný způsob jaderné přeměny vodíku na helium, který se významně uplatňuje pro vyšší teploty než p-p cykly, je *CNO cyklus*. Do něj v roli jakéhosi katalyzátoru vstupují nuklidy dusíku nebo uhlíku. Proto by tato reakce ve hvězdě složené pouze

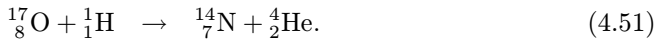
z vodíku a helia nemohla nastávat. Schematicky lze reakce CNO cyklu popsat takto:



Poté může reakce pokračovat dvojným způsobem. Buď vznikne přímo heliové jádro a uhlík, který vstoupil do reakce, se opět vyloučí, tedy



nebo proběhne několik dalších reakcí a dojde k vyloučení nuklidu dusíku:



Měrný výkon (energie z 1 g látky za 1 s) této série reakcí lze spočítat ze vztahů

$$\epsilon_{\text{CNO}} = 7,94 \cdot 10^{27} f_{14,1} g_{14,1} \rho X X_N T_6^{-\frac{2}{3}} e^{-152,313 T_6^{-\frac{1}{3}}}, \quad (4.52)$$

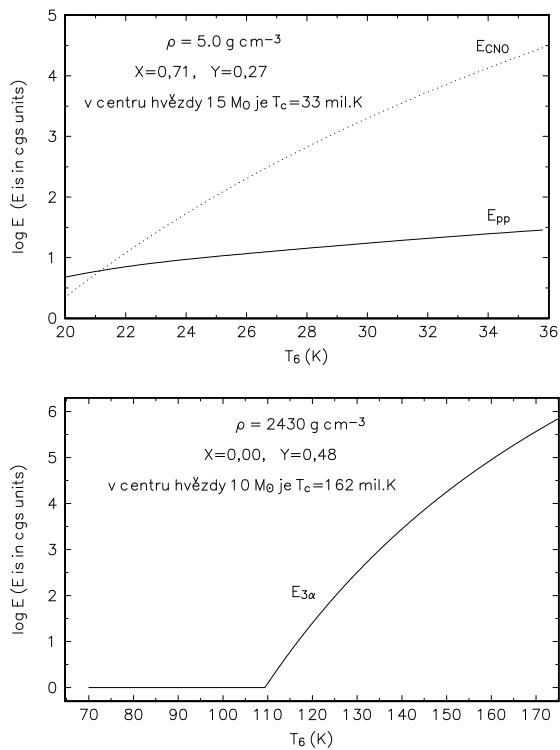
$$f_{14,1} = 1 + 1,75 \rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}}, \quad (4.53)$$

$$g_{14,1} = 1 + 0,0027 T_6^{\frac{1}{3}} - 0,0037 T_6^{\frac{2}{3}} - 0,00007 T_6. \quad (4.54)$$

Průběh této syntézy závisí kriticky na reakci (4.43), která je „nejpomalejší“, t.j. nastává velmi nesnadno. Proto je ve vztahu (4.52) veličina X_N označující relativní obsah dusíku. Obvykle stačí přijmout empiricky závěr z modelů niter počítaných s detailním chemickým složením a brát jednoduše $X_N \doteq Z/3$. Horní panel obrázku 4.7 ukazuje závislost produkce energie CNO cyklem v závislosti na teplotě a porovnání s p-p cyklem pro hvězdu o hmotnosti $15 M_{\odot}$.

4.3.3 Přeměna hélia na uhlík a další reakce

Při teplotě vyšší než 10^8 K dochází v oblastech s vyšším obsahem helia k další významné slučovací reakci, nazývané 3α nebo *Salpeterova reakce*. Při ní se postupně



Obrázek 4.7: *Horní panel* Energetická vydatnost CNO cyklu jaderné přeměny v závislosti na teplotě (udané v milionech K) a pro hustotu v nitru hvězdy o hmotnosti $15 M_{\odot}$ na začátku nukleárního vývoje. Kvůli přehlednosti je energetická vydatnost znázorněna v logaritmické škále. *Dolní panel:* Energetická vydatnost 3α reakce jaderné přeměny helia na uhlík v závislosti na teplotě a pro hustotu v nitru hvězdy o hmotnosti $10 M_{\odot}$ ve stadiu spalování helia v jádru. I zde byla použita logaritmická škála pro znázornění závislosti energetické vydatnosti na teplotě (udané v milionech K).

tři heliová jádra přemění na jádro uhlíku



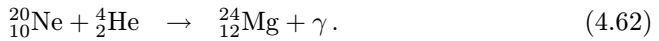
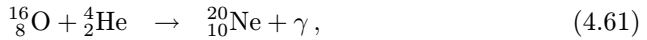
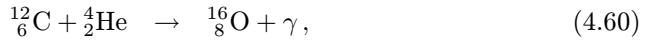
Príslušná produkce energie $[\text{erg s}^{-1} \text{g}^{-1}]$ přeměny helia na uhlík je dána vztahy

$$\epsilon_{3\alpha} = 3,46 \cdot 10^{17} \rho^2 Y^3 T_6^{-3} f_{3\alpha} e^{-4352 T_6^{-1}}, \quad (4.58)$$

$$f_{3\alpha} = 1 + 2,4 \rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.59)$$

Dolní panel obrázku 4.7 ukazuje závislost produkce energie 3α reakcí v závislosti na teplotě pro hvězdu o hmotnosti $10 M_\odot$ ve stádiu spalování helia.

Další heliová jádra se poté řetězovitě slučují na těžší prvky, například



Při ještě vyšších teplotách nad $6 \cdot 10^8 \text{ K}$ dochází k řadě dalších, ale energeticky stále méně významných reakcí (např. přeměně uhlíku na hořčík) až dojde ke vzniku stabilních nuklidů skupiny železa.

4.3.4 Tepelná rovnováha a změny entropie

Kromě jaderných reakcí a časových změn ionizace v podpovrchových vrstvách nemá hvězda žádné další aktivní zdroje energie a lze ji považovat za izolovaný termodynamický systém. Označíme-li L_R výkon procházející povrchem koule o poloměru R od centra směrem k povrchu a budou-li dL_R a dM_R označovat změnu tohoto výkonu a přírůstek hmoty mezi koulemi o poloměrech R a $R + dR$, pak ve *stacionárním případě* (když se ionizace nijak nemění v čase) můžeme psát jednoduše

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuk}}, \quad (4.63)$$

kde $\epsilon_{\text{nuk}}(\rho, T)$ měrný výkon jaderných reakcí v daném místě.

V obecnějším *nestacionárním* případě musíme uvážit i časové změny tepelné energie Q v 1 g hvězdné látky, tedy

$$dQ = T dS = \left(\epsilon_{\text{nuk}} - \frac{dL_R}{dM_R} \right) dt, \quad (4.64)$$

kde dS je změna entropie. Po úpravě

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuk}} - T \frac{dS}{dt}. \quad (4.65)$$

To je rovnice tepelné rovnováhy v základním tvaru. Při skutečném výpočtu je ovšem třeba specifikovat časové změny entropie konkrétně. Zahrnují totiž změny potenciální i vnitřní energie, včetně změn ionizace v podvrchových vrstvách. Tento postup si zde alespoň naznačíme. Podle 1. věty termodynamické lze psát (s uvážením že objem 1 g látky $V = \frac{1}{\rho}$)

$$TdS = dU + PdV = dU - \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (4.66)$$

Veličina U označuje vnitřní energii, která je obecně funkcí stavových veličin ρ , T a střední molekulové hmotnosti μ , takže její změnu lze rozkládat do tvaru

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu. \quad (4.67)$$

Je ovšem důležité si uvědomit, že diferenciál $d\mu$ v rovnici (4.67) představuje takto samostatně pouze změny způsobené změnami chemického složení (buď v důsledku nukleární přeměny elementů nebo vlivem konvekce zasahující hluboko do oblastí s gradientem chemického složení, který vznikl v důsledku nukleárních změn během předchozího vývoje hvězdy). Nejde naopak o změny vyvolané ionizací ve vrstvách blíže k povrchu hvězdy. Ty jsou totiž — jak jsme viděli — funkcí teploty a nejsou proto nezávislé.

Je třeba si ještě uvést konkrétní výrazy pro vnitřní energii U 1 g hvězdné látky. Statistická fyzika a teorie záření dávají pro jednotlivé složky tyto výrazy:

$$U_i = \frac{3}{2} n_i kT, \quad (4.68)$$

$$U_e = \frac{3}{2} n_e kT \frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}}{F_{\frac{1}{2}}}, \quad (4.69)$$

$$U_r = \frac{aT^4}{\rho}, \quad (4.70)$$

kde n_i a n_e představují počet iontů a počet elektronů v 1 g hvězdné látky. Ty lze vyjádřit pomocí Avogadrova čísla a střední molekulové hmotnosti a pro celkovou vnitřní energii plazmatu pak psát

$$U_i + U_e = \frac{3}{2} N_A kT \left(\frac{1}{\mu_e} \frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}}{F_{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\mu_i} \right) = \quad (4.71)$$

$$= \frac{3}{2} \mathcal{R}T \left[\mu_i^{-1} + \mu_e^{-1} + \mu_e^{-1} \left(\frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}}{F_{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \right], \quad (4.72)$$

takže při použití vztahů (3.35) a (3.54) dostáváme

$$U_i + U_e = \frac{3}{2} \frac{\Re}{\mu} T \lambda = \frac{3}{2} \beta \frac{P}{\rho}, \quad (4.73)$$

$$U_r = 3(1 - \beta) \frac{P}{\rho}, \quad (4.74)$$

$$U = U_i + U_e + U_r = \frac{3}{2} \beta \frac{P}{\rho} + 3(1 - \beta) \frac{P}{\rho} = \frac{3}{2} (2 - \beta) \frac{P}{\rho}. \quad (4.75)$$

V podpovrchových vrstvách je třeba navíc uvažovat i příspěvek ionizační energie. Označíme-li χ_j^r ionizační potenciál j -tého prvku pro r -tý stupeň ionizace, pak lze při stejné notaci jako jsme použili u stavové rovnice v podpovrchových vrstvách psát

$$U_{\text{ion}} = \frac{N_A}{\mu_i} \sum_{j=1}^N \nu_j \sum_{r=0}^{M_j} x_j^r \sum_{s=0}^{r-1} \chi_j^s. \quad (4.76)$$

4.4 Rovnice přenosu energie

Změna teploty od místa k místu je ve hvězdném nitru určována způsobem přenosu energie ve hvězdě. V principu existují tři způsoby přenosu energie:

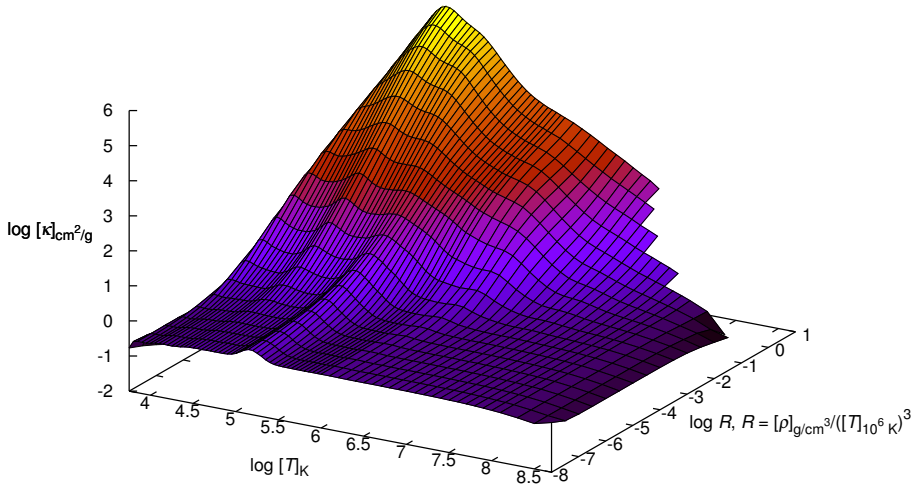
1. vedením tepla (částicovou difusí);
2. zářením (zářivou difusí);
3. konvekci.

První dva způsoby jsou mikroskopické, poslední je makroskopický. Tepelná vodivost hvězdného materiálu je ve většině případů zanedbatelná, roli hraje pouze v podmínkách extrémních hustot (v bílých trpaslicích, neutronových hvězdách), kde se uplatňuje elektronová degenerace. Formálně lze ovšem záření a vedení popisovat velmi podobně.

4.4.1 Rovnice zářivého přenosu energie

Příčin difuze je mnoho, od absorpce na negativních iontech vodíku³, absorpce (a emise) na jiných atomech, až po rozptyl na volných elektronech. Míra neprůhlednosti hvězdného materiálu, *opacita* $\kappa_\nu(\rho, T, X, Y, Z)$ látky, je velmi složitou funkcí

³Negativní iont vodíku, zvaný též hydrid vodíku H^- , je málo stabilní částice sestávající z 1 protonu a dvou elektronů.



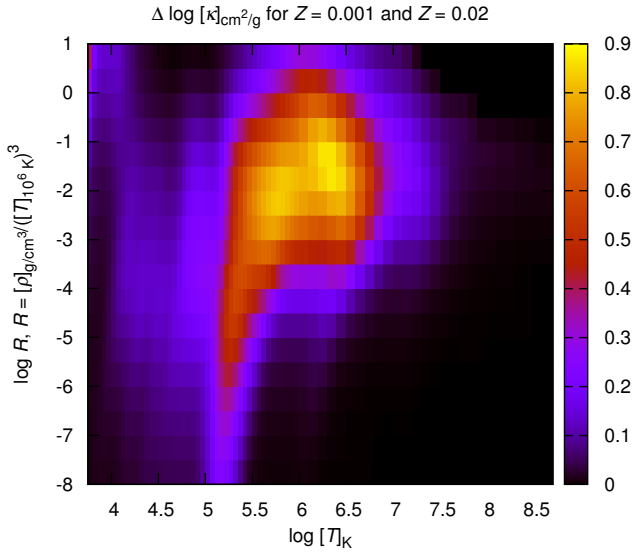
Obrázek 4.8: Hodnoty opacitního koeficientu κ v závislosti na teplotě T a parametru R , pro látku s $X = 0,70$, $Y = 0,28$, $Z = 0,02$. Podle Rogers a Iglesias (1996).

hustoty ρ , teploty T , chemického složení a také vlnové délky, resp. frekvence ν . Numericky koeficient opacity udává *relativní* úbytek zářivé energie na jednotkové vzdálenosti při jednotkové hustotě dané látky.

Výpočet opacitního koeficientu představuje samostatný a náročný úkol. Pro nitra hvězd, kde se zvažuje jen celková energetická bilance, se používají koeficienty opacity $\kappa(\rho, T, X, Y, Z)$, středované přes všechny vlnové délky. Tyto koeficienty bývají v samostatných studiích obvykle tabelovány a při výpočtech modelů hvězdných niter se v takových tabulkách *numericky interpoluje*. Obvyklou jednotkou opacity je $[\kappa] = \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$. Po řadu let byly používány tabulky Coxovy (Cox a spol. 1965), ale od poloviny devadesátých let jsou k dispozici tabulky nové, které m.j. umožnily nalézt příčinu pulsační nestability hvězd typu β Cep (Rogers a Iglesias 1992, obr. 4.8, 4.9).

Rovnici zářivého přenosu energie odvodíme v následujících krocích:

1. napíšeme rovnici přenosu záření pro intenzitu I ;
2. zavedeme integrální veličiny hustotu u , tok H a tlak P ;
3. zintegrujeme rovnici přenosu přes prostorový úhel ω ;
4. vynásobíme ji $\cos \vartheta$ a zintegrujeme znovu;
5. rozvineme skoro izotropní intenzitu v řadu;
6. elegantně se zbavíme emise j pomocí Kirchhoffova zákona.

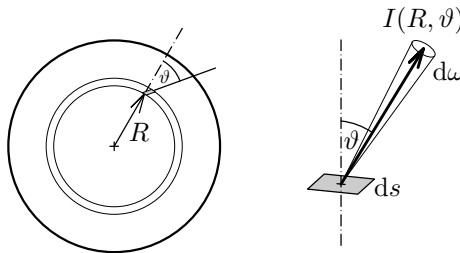


Obrázek 4.9: Rozdíly opacitních koeficientů $\Delta \log \kappa$ pro různé hodnoty metalicity $Z = 0,02$ a $0,001$. Je patrné, že v rozmezí teplot 10^5 až 10^7 K se opacita liší skoro o řád. Podle Rogers a Iglesias (1996).

Připomeňme definici intenzity (integrované přes celý rozsah vlnových délek)

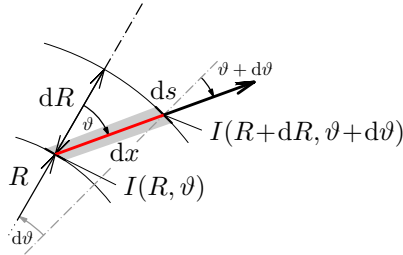
$$dE = I(x, y, z, \vartheta, \varphi, t) dt ds \cos \vartheta d\omega, \quad (4.77)$$

jakožto energie procházející za jednotku času dt jednotkovou plochou ds (pod úhlem θ) do jednotkového prostorového úhlu $d\omega$. V našem případě bude intenzita pouze funkcí $I(R, \vartheta)$, kde R je vzdálenost od centra hvězdy a směr ϑ měříme od spojnice s centrem (obr. 4.10). Jinak předpokládáme osovou symetrii, tudíž zde nevystupuje úhel φ .



Obrázek 4.10: Definice intenzity $I(R, \vartheta)$ v nitru sféricky symetrické hvězdy.

Rovnice přenosu záření ve sférické symetrii. Uvažujme o energetické bilanci infinitesimálního komolého válečku, který je „vměstnán“ mezi dvě kulové slupky o poloměrech R a $R + dR$ a který s radiusvektorem svírá úhel ϑ , má výšku dx a plochu podstavy ds (obr. 4.11).



Obrázek 4.11: Infinitesimální váleček v nitru hvězdy, s vyznačenými veličinami dx , ds , dR , ϑ , $d\vartheta$.

Podle zákona zachování energie musí platit

$$\underbrace{I(R + dR, \vartheta + d\vartheta) dt ds \cos \vartheta d\omega}_{\text{záření z válečku vystupující}} = \underbrace{I(R, \vartheta) dt ds \cos \vartheta d\omega}_{\text{vstupující}} + \underbrace{j \rho dx dt ds \cos \vartheta d\omega}_{\text{emise}} - \underbrace{\kappa \rho I(R, \vartheta) dx dt ds \cos \vartheta d\omega}_{\text{absorpce}}, \quad (4.78)$$

kde j označuje koeficient emise a κ koeficient opacity. Použijeme-li rozvoj intenzity

$$I(R + dR, \vartheta + d\vartheta) = I(R, \vartheta) + \frac{\partial I}{\partial R} dR + \frac{\partial I}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (4.79)$$

a geometrické vztahy

$$dR = dx \cos \vartheta, \quad d\vartheta = -\frac{dx \sin \vartheta}{R}, \quad (4.80)$$

lze rovnici přenosu záření zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial I}{\partial R} \cos \vartheta - \frac{1}{R} \sin \vartheta \frac{\partial I}{\partial \vartheta} + \kappa \rho I - j \rho = 0. \quad (4.81)$$

Integrální veličiny. V této chvíli je užitečné připomenout některé integrální veličiny, které jsme definovali v kap. 2.1 — hustotu zářivé energie u (2.44), tok záření H (2.37) a tlak záření P_{rad} (2.51)

$$u = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I d\omega, \quad (4.82)$$

$$H = \int_0^{4\pi} I \cos \vartheta d\omega, \quad (4.83)$$

$$P_r = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I \cos^2 \vartheta d\omega. \quad (4.84)$$

Uvědomme si také, že integrálem přes prostorový úhel ω rozumíme dvojitou integraci přes úhlové souřadnice φ, ϑ

$$\int_{\omega=0}^{4\pi} d\omega \equiv \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} d\vartheta d\varphi \sin \vartheta, \quad (4.85)$$

a takto budeme integrál prakticky počítat.

1. integrál rovnice přenosu. Nyní se můžeme vrátit k rovnici přenosu (4.81) a integrovat ji přes celý prostorový úhel

$$\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial R} \overbrace{I \cos \vartheta d\omega}^H - \frac{1}{R} \int_{\omega} \overbrace{\frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\omega}^{\text{„problém“}} + \kappa \rho \int_{\omega} \overbrace{I d\omega}^{uc} - j\rho \int_{\omega} \overbrace{d\omega}^{4\pi} = 0. \quad (4.86)$$

Vidíme, že snadno zavedeme některé integrální veličiny, ale problematický je druhý integrál, protože neznáme konkrétní tvar $I(\vartheta)$ a pak je těžko derivovat a integrovat. Pomůžeme si však integrováním per partes⁴

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\omega &= \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \overbrace{\frac{\partial I}{\partial \vartheta}}^{f'} \overbrace{\sin \vartheta \sin \vartheta}^{g = \sin^2 \vartheta} d\vartheta d\varphi = \\ &= \int_{\varphi} \underbrace{[I \sin^2 \vartheta]_0^{\pi}}_{=0} d\varphi - \underbrace{\int_{\varphi} \int_{\vartheta} I 2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi}_{2H} = -2H \end{aligned} \quad (4.87)$$

a 1. integrál pak můžeme upravit do konečného tvaru

$$\frac{dH}{dR} + \frac{2H}{R} + \kappa \rho c u - 4\pi j\rho = 0. \quad (4.88)$$

2. integrál rovnice přenosu. Analogicky můžeme integrovat rovnici přenosu (4.81) násobenou faktorem $\cos \vartheta$

$$\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial R} \overbrace{I \cos^2 \vartheta d\omega}^{cP_r} - \frac{1}{R} \int_{\omega} \overbrace{\frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta d\omega}^{\text{„problém“}} + \kappa \rho \int_{\omega} \overbrace{I \cos \vartheta d\omega}^H - j\rho \int_{\omega} \overbrace{\cos \vartheta d\omega}^{=0} = 0. \quad (4.89)$$

⁴ $\int f'g = [fg] - \int fg'$

Nejprve ověříme nulovost posledního členu

$$\int_{\omega} \cos \vartheta d\omega = \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \overbrace{\cos \vartheta \sin \vartheta}^{\frac{1}{2} \sin 2\vartheta} d\vartheta d\varphi = \int_{\varphi} \overbrace{\left[-\frac{1}{4} \cos 2\vartheta \right]_0^{\pi}}^{=0} d\varphi = 0. \quad (4.90)$$

Druhý člen opět integrujeme metodou per partes

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta d\omega &= \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \overbrace{\frac{\partial I}{\partial \vartheta}}^{f'} \overbrace{\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta}^{g = \sin^2 \vartheta \cos \vartheta} d\vartheta d\varphi = \\ &= \int_{\varphi} \overbrace{\left[I \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \right]_0^{\pi}}^{=0} d\varphi - \\ &\quad - \int_{\varphi} \int_{\vartheta} I (2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta \cdot (-\sin \vartheta)) d\vartheta d\varphi = \\ &= -2 \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \overbrace{I \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}^{cP_r} d\vartheta d\varphi + \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \overbrace{(1 - \cos^2 \vartheta)}^{cu} \overbrace{\sin \vartheta}^{cP_r} d\vartheta d\varphi = \\ &= -2cP_r + cu - cP_r = -3cP_r + cu. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Dostáváme tak 2. integrál

$$\frac{dP_r}{dR} + \frac{1}{R}(3P_r - u) + \frac{\rho\kappa}{c}H = 0. \quad (4.92)$$

Rozvoj skoro izotropní intenzity. K řešení je třeba ještě třetí vztah. Konkrétní tvar funkce $I(\vartheta)$ sice neznáme, ale protože pole záření uvnitř hvězdy je velmi blízké isotropnímu, můžeme intenzitu rozvinout v řadu

$$I(\vartheta) = I_0 + I_1 \cos \vartheta + I_2 \cos^2 \vartheta + \dots, \quad (4.93)$$

kde I_0, I_1, I_2 již na ϑ nezávisejí. Lze dokázat (viz Schwarzschild 1958), že již člen I_2 je o 20 řádů menší než I_0 , takže jej lze pro všechny praktické účely zcela zanedbat. Dosadíme-li proto do definic integrálních veličin (4.82), (4.83) a (4.84) výraz $I = I_0 + I_1 \cos \vartheta$, obdržíme velmi jednoduché výrazy pro hustotu, tok a tlak záření

$$u = \frac{1}{c} \int_{\omega} I_0 d\omega + \frac{1}{c} \int_{\omega} I_1 \cos \vartheta d\omega =$$

$$= \frac{4\pi}{c} I_0 + \frac{1}{c} I_1 \int_0^{2\pi} \overbrace{\int_0^\pi \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}^{=0} d\varphi = \frac{4\pi}{c} I_0, \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} H &= \overbrace{\int_\omega I_0 \cos \vartheta d\omega}^{=0} + \int_\omega I_1 \cos^2 \vartheta d\omega = \\ &= I_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = I_1 2\pi \left[-\frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^\pi = \frac{4\pi}{3} I_1, \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$P_r = \frac{1}{c} \overbrace{\int I_0 \cos^2 \vartheta d\omega}^{\text{stejně jako u } H} + \frac{1}{c} \overbrace{\int I_1 \cos^3 \vartheta d\omega}^{=0} = \frac{4\pi}{3c} I_0. \quad (4.96)$$

Z toho mimochodem plyne, že při skoro izotropní intenzitě je

$$P_r = \frac{1}{3} u. \quad (4.97)$$

Kirchhoffův zákon. Protože v nitru existuje *lokální termodynamická rovnováha*, lze pro vyjádření emisního koeficientu využít Kirchhoffův zákon a psát

$$j = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \kappa + \frac{\epsilon}{4\pi}, \quad (4.98)$$

kde $\epsilon = \epsilon_{\text{nuk}} - T \frac{dS}{dt}$ představuje součet nukleární, vnitřní i gravitační potenciální energie uvolňované za jednotku času v jednotce hmoty *do všech směrů*, zatímco emisní a absorpční koeficienty jsou vztaheny k jednotkovému prostorovému úhlu.

Nyní hodláme využít rovnice tepelné rovnováhy (4.65), kde vystupuje tok energie L_R povrchem koule obsahující hmotu M_R . Zřejmě platí

$$L_R = 4\pi R^2 H \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_R}{dR} = 8\pi R H + 4\pi R^2 \frac{dH}{dR}, \quad (4.99)$$

a tedy

$$\frac{dH}{dR} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dL_R}{dR} - \frac{2H}{R} = \rho \overbrace{\frac{dL_R}{dM_R}}^{=\epsilon} - \frac{2H}{R} = \rho\epsilon - \frac{2H}{R}. \quad (4.100)$$

1. integrál (4.88) lze proto přepsat do tvaru

$$\rho\epsilon - \frac{2H}{R} + \frac{2H}{R} + \kappa\rho c u - 4\rho\sigma T^4 \kappa - \rho\epsilon = 0, \quad (4.101)$$

což po algebraické úpravě vede na vztah pro hustotu záření (platný při LTE)

$$u = \frac{4\sigma}{c} T^4 = aT^4. \quad (4.102)$$

Dosazením do rovnice (4.97) pak dostáváme i výraz pro tlak záření

$$P_r = \frac{1}{3}aT^4, \quad (4.103)$$

který jsme již (bez odvození) použili v oddílu 3.3, věnovaném stavové rovnici hvězdné látky.

Dosadíme-li ve 2. integrálu (4.92) za P_r , u a H , dostaneme

$$\frac{1}{3}a4T^3\frac{dT}{dR} + \frac{1}{R}\left(3\frac{1}{3}aT^4 - aT^4\right) + \frac{\rho\kappa}{4\pi cR^2}L_R = 0, \quad (4.104)$$

neboli

$$\frac{dT}{dR} = -\frac{3\rho\kappa L_R}{16\pi acR^2T^3}, \quad (4.105)$$

což lze ještě s využitím rovnice kontinuity (4.2) upravit na tvar

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{3\kappa L_R}{64ac\pi^2T^3R^4}. \quad (4.106)$$

To je rovnice zářivé rovnováhy.

Rosselandova střední opacita. Závěrem tohoto oddílu si ještě naznačíme, jak se počítá koeficient zářivé difuze, vhodným způsobem středovaný přes všechny frekvence elektromagnetického záření, neboli Rosselandova střední opacita κ . Z 2. integrálu (4.92) a vztahu $P_r = \frac{1}{3}u$ plyne vztah mezi tokem a hustotou záření

$$H = -\frac{c}{3\rho\kappa}\frac{du}{dR}, \quad (4.107)$$

příčemž celý postup, který jsme k odvození použili, by bylo možno provést i pro monochromatické veličiny intenzity, hustoty a toku záření, a proto můžeme analogicky psát

$$H_\nu = -\frac{c}{3\rho\kappa_\nu}\frac{du_\nu}{dR}. \quad (4.108)$$

Vzhledem k tomu, že v nitrech hvězd je velmi přesně splněna podmínka lokální termodynamické rovnováhy, lze monochromatickou hustotu záření velmi dobře aproximovat *Planckovou funkcí* a psát

$$u_\nu \doteq \frac{4\pi}{c}B_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (4.109)$$

Celkový, integrální tok záření lze z (4.108) získat integrací přes všechny frekvence, což formálně zapíšeme jako

$$H = \int_0^{\infty} H_{\nu} = -\frac{c}{3\rho} \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{du_{\nu}}{dR} d\nu = -\frac{c}{3\rho} \overbrace{\int_0^{\infty} \frac{du}{dR}}^{\text{rozšíření}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{du_{\nu}}{dR} d\nu. \quad (4.110)$$

Chceme-li, aby tato rovnice odpovídala rovnici (4.107) pro integrální tok záření, pak zřejmě musí pro integrální koeficient opacit platit

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{du_{\nu}}{dR} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{du_{\nu}}{dR} d\nu} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{du_{\nu}}{dT} \frac{dT}{dR} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{du_{\nu}}{dT} \frac{dT}{dR} d\nu} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{dB_{\nu}(T)}{dT} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{dB_{\nu}(T)}{dT} d\nu}, \quad (4.111)$$

čili Rosselandovu střední opacitu získáme středováním, kde využíváme Planckovy funkce, respektive jejich derivace.

Odhad střední volné dráhy a toku. Podívejme se ještě jednou, co nám opacitní koeficient udává. Budeme-li uvažovat samostatně zářivé pohlcování energie, platí, že prochází-li záření o intenzitě I v daném směru infinitesimálním válečkem hvězdné látky o jednotkové podstavě a výšce dx , bude z něj pohlceno záření dI dané vztahem

$$dI = -I\kappa\rho dx, \quad (4.112)$$

To znamená, že za střední volnou dráhu fotonů ve hvězdné látce můžeme označit takovou vzdálenost $l_f = dx$, během které dojde k pohlcení *veškerého* záření, tzn. kdy bude $|dI| = I$. Podle rovnice (4.112) z toho zřejmě plyne

$$l_f = \frac{1}{\kappa\rho}. \quad (4.113)$$

Pro model hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$ na začátku nukleárního vývoje udává Harmanec (1970) centrální teplotu 25,29 milionů K a centrální hustotu $22,59 \text{ g cm}^{-3}$. Z tabulek Rogerse a Iglesiasa (1992) lze odhadnout pro tuto oblast hodnotu opacit asi $0,5 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$, takže pro střední volnou dráhu fotonů dostáváme z rovnice (4.113) odhad $l_f \doteq 0,89 \text{ mm}$.

S použitím téhož modelu můžeme rovněž odhadnout gradient teploty. V blízkosti středu hvězdy je

$$\frac{dT}{dR} = -3,99 \cdot 10^{-5} \text{ K cm}^{-1}, \quad (4.114)$$

zatímco na hranici sféry obsahující 97% celkové hmotnosti hvězdy je to $-9,16 \cdot 10^{-5} \text{ K cm}^{-1}$. Z rovnic (4.102) a (4.107) plyne pro celkový tok jednotkou plochy v místě s poloměrem R

$$H = -\frac{16}{3\rho\kappa} \sigma T^3 \frac{dT}{dR}. \quad (4.115)$$

Tento tok si můžeme porovnat s tokem absolutně černého tělesa *do poloprostoru* ve stejném místě, který je dán vztahem

$$\pi B = \sigma T^4. \quad (4.116)$$

Pokud by platila termodynamická rovnováha dokonale, byl by ovšem celkový tok plochou v daném místě nulový. Velikost toku H je proto mírou nerovnováhy a zářivého přenosu energie ve hvězdě.

Uvažujme pro příklad sféru obsahující 0,001 celkové hmotnosti hvězdy $4 M_{\odot}$. Ta má podle modelu poloměr $4,365 \cdot 10^9 \text{ cm}$. Pro odpovídající hodnoty teploty a jejího gradientu, hustoty a opacity pak dostáváme

$$H = 1,71 \cdot 10^{14} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad (4.117)$$

zatímco tok černého tělesa jednotkovou plochou do poloprostoru by byl o jedenáct řádů větší

$$\pi B = 2,26 \cdot 10^{25} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (4.118)$$

Poznámka o difuzním formalismu. Závěrem ještě poznamenejme, že díky velmi malé střední volné dráze lze na zářivý přenos energie pohlížet jako na *difuzi*. Z fyziky víme, že pro difuzní tok částic f_p mezi místy s různou částicovou hustotou ρ_n platí vztah

$$f_p = -D \nabla \rho_n, \quad (4.119)$$

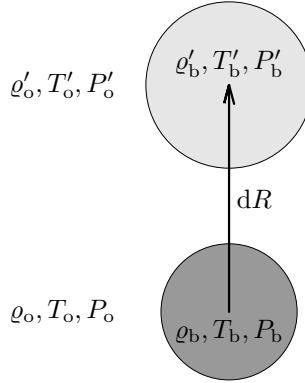
kde difuzní koeficient D souvisí se střední rychlostí částic v a jejich střední volnou dráhou l_p vztahem

$$D = \frac{1}{3} v l_p. \quad (4.120)$$

Pro záření lze ovšem za „částicovou hustotu“ považovat hustotu energie záření danou vztahem (4.102) a za střední rychlost rychlost světla ve vakuu, přičemž střední volná dráha je dána rovnicí (4.113). Gradient se v jednorozměrném pojetí redukuje na derivaci podle R a rovnice pro zářivou difuzi tak nabude tvar

$$H = -\frac{16}{3\rho\kappa} \sigma T^3 \frac{dT}{dR}, \quad (4.121)$$

což je opět rovnice zářivého přenosu energie, identická s (4.105), kterou jsme odvodili integrováním rovnice přenosu záření.



Obrázek 4.12: Stavové veličiny ρ , T , P v bublině a v okolním plynu, při přemístění o dR .

4.4.2 Rovnice konvektivního přenosu energie

Podmínka pro konvekci. Zkoumejme nyní, kdy je zářivá rovnováha nestabilní a kdy se změní v rovnováhu konvektivní. Předpokládejme, že v nějaké bublině je hustota ρ_b , kdežto okolní plyn má hustotu ρ_o (obr. 4.12). Podle Archimédova zákona na bublinu působí *vztlaková síla*, a proti ní gravitace

$$F = F_{vz} + F_g = \rho_o V_b g - \rho_b V_b g = (\rho_o - \rho_b) V_b g, \quad (4.122)$$

kde V_b označuje objem studované bubliny a g tíhové zrychlení v daném místě (ve vzdálenosti R od centra hvězdy). Pokud je na počátku, *náhodnou fluktuací*, hustota bubliny menší ($\rho_b < \rho_o$), vychází $F > 0$ a bublina začne stoupat vzhůru. Po přemístění o dR se změní hodnoty stavových veličin v bublině (na ρ'_b , T'_b , P'_b) i v okolí (na ρ'_o , T'_o , P'_o). Mohou nastat dva případy: (i)

$$\rho'_b \geq \rho'_o, \quad (4.123)$$

kdy se jakákoliv konvekce potlačí a bublina případně klesne zpět; (ii)

$$\rho'_b < \rho'_o, \quad (4.124)$$

při kterém bude stoupaní dále pokračovat, čili jde o základní *podmínku pro konvekci*.

Uvědomme si, že tlak v bublině je *neustále vyrovnaný* s okolním tlakem

$$P_b = P_o, \quad P'_b = P'_o. \quad (4.125)$$

Podle stavové rovnice ideálního plynu (3.27) pak platí (při $\mu = \text{konst.}$)

$$\rho'_b T'_b = \rho'_o T'_o \quad (4.126)$$

a podmínku pro konvekci (4.124) můžeme napsat v teplotách jako

$$T'_b > T'_o. \quad (4.127)$$

Provedeme-li Taylorovy rozvoje teplotních závislostí

$$T'_b = T_b + \frac{dT_b}{dR} dR, \quad (4.128)$$

$$T'_o = T_o + \frac{dT_o}{dR} dR, \quad (4.129)$$

a předpokládáme-li, že počáteční fluktuaace byla zcela nepatrná ($T_b \doteq T_o$), obdržíme konvektivní podmínku pro gradienty teploty

$$\frac{dT_b}{dR} > \frac{dT_o}{dR}. \quad (4.130)$$

Protože přemístění bubliny obvykle probíhá rychle, bez výměny tepla s okolím, lze termodynamický děj v bublině pokládat za *adiabatický* (a gradient teploty na levé straně za adiabatický gradient). Neboť v okolním prostředí doposud panovala zářivá rovnováha, příslušný gradient na pravé straně ztotožníme s radičním gradientem (4.105) a můžeme nakonec psát podmínku pro konvekci

$$\left(\frac{dT}{dR}\right)_{\text{ad}} > \left(\frac{dT}{dR}\right)_{\text{rad}}. \quad (4.131)$$

Nezapomeňme, že $T(R)$ bývá klesající funkce, takže gradienty jsou vlastně záporné.

Odvození adiabatického gradientu teploty. Pokusme se vyjádřit adiabatický gradient z 1. věty termodynamické, a to pomocí stavových veličin (P, T)

$$TdS = dU + PdV = dU - \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (4.132)$$

Diferenciály v rovnici (4.132) vyjádříme pomocí tlaku P a teploty T

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP, \quad (4.133)$$

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T dP, \quad (4.134)$$

kde jsme při rozkladu změn vnitřní energie dU , podle vztahu (4.67), předpokládali $d\mu = 0$.⁵ Po dosazení

$$dS = \overbrace{\frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \right]}^{\frac{\partial S}{\partial T}} dT + \overbrace{\frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \right]}^{\frac{\partial S}{\partial P}} dP. \quad (4.135)$$

⁵Kato (1966) beztak ukázal, že podmínka konvektivní rovnováhy odvozená bez ohledu na změny střední molekulové hmotnosti částic je *silnější* než podmínka odvozená obecně. Toto zanedbání se ovšem nečiní v rovnici tepelné rovnováhy (4.65).

Využijeme faktu, že entropie má úplný diferenciál, a napíšeme podmínku záměnnosti druhých derivací

$$\frac{\partial^2 S}{\partial P \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial P}, \quad (4.136)$$

neboli⁶

$$\frac{\partial}{\partial P} \left\{ \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \right] \right\}, \quad (4.137)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \left[\frac{\partial U}{\partial T \partial P} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P + \frac{2P}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial P} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T \partial P} \right] = \\ & = -\frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \right] + \frac{1}{T} \left[\frac{\partial U}{\partial P \partial T} + \frac{2P}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial T} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T \partial P} \right], \end{aligned} \quad (4.138)$$

což lze ještě za předpokladu záměnnosti druhých derivací vnitřní energie a hustoty upravit na tvar

$$\frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T. \quad (4.139)$$

Tuto podmínku dosadíme do (4.135) a označíme přitom

$$\delta \equiv - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P = \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P. \quad (4.140)$$

Rovnice (4.135) tak přejde do tvaru

$$dQ = TdS = \overbrace{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + \frac{P\delta}{\rho T} \right]}^{\left(\frac{\partial Q}{\partial P} \right)_P} dT - \frac{\delta}{\rho} dP. \quad (4.141)$$

Využijeme také definice specifického tepla c_P , jakožto snadno představitelné veličiny, protože podle rovnice (4.141) je

$$c_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + \frac{P\delta}{\rho T}. \quad (4.142)$$

Konečně dostáváme⁷

$$TdS = c_P dT - \frac{\delta}{\rho} dP. \quad (4.143)$$

⁶ P a T jsou zde *nezávislé* proměnné, tudíž $\frac{\partial P}{\partial T} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial P} = 0$.

⁷Někteří autoři tento vztah používají i na pravé straně rovnice tepelné rovnováhy. S ohledem na zanedbání členů s $d\mu$ se tím ale dopouštějí chyby, která může hrát roli zejména u modelů s hlubokými podpoверхovými konvektivními zónami.

Pro praktický výpočet je třeba použít pro veličiny c_P a δ konkrétní výrazy, závisející m.j. na použité stavové rovnici. Zde se omezíme na obecnou formulaci a nebudeme c_P , δ specifikovat. Pro *adiabatický děj* ($dS = 0$) přejde (4.143) na

$$c_P dT = \frac{\delta}{\rho} dP, \quad (4.144)$$

a po dělení dR

$$\left(\frac{dT}{dR}\right)_{\text{ad}} = \frac{\delta}{c_P \rho} \frac{dP}{dR}. \quad (4.145)$$

Nakonec dosadíme za $\frac{dP}{dR}$ z rovnice hydrostatické rovnováhy (4.5) a z rovnice kontinuity (4.2)

$$\left(\frac{dT}{dR}\right)_{\text{ad}} = -\frac{\delta}{c_P} \frac{GM_R}{R^2}. \quad (4.146)$$

To je rovnice konvektivní rovnováhy.

Jednotný zápis zářivé a konvektivní rovnováhy. Zavedeme-li symbol

$$\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dR} \frac{dR}{dP}, \quad (4.147)$$

lze podmínku pro konvekci (4.131) zapsat jednoduše jako

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla_{\text{rad}}, \quad (4.148)$$

kde konkrétní výrazy pro (kladné) gradienty jsou

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa PL_R}{16\pi acGM_R T^4}, \quad (4.149)$$

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{\delta P}{c_P \rho T}. \quad (4.150)$$

Výhodou tohoto zápisu je, že rovnice zářivé a konvektivní rovnováhy lze zapsat najednou jako

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{GTM_R}{4\pi PR^4} \nabla, \quad (4.151)$$

kde

$$\nabla = \min(\nabla_{\text{rad}}, \nabla_{\text{ad}}), \quad (4.152)$$

čili použije se vždy ten menší z gradientů.⁸

Shrňme na závěr, kdy a kde obvykle nastává konvekce?

⁸Přenos energie konvekci je mnohem účinnější než přenos zářením, proto v konvektivních zónách počítáme pouze s konvekci, i když v nich zároveň probíhá přenos zářením.

1. Když je opacita κ vysoká, pak je totiž ∇_{rad} velké. Záření nemůže neprůhledným materiálem pronikat a přirozeně tak vzniká velký teplotní spád. To se stává ve vnějších vrstvách chladnějších hvězd, např. tak vzniká konvektivní zóna Slunce.
2. Pokud dochází k ionizaci, protože pak je tepelná kapacita c_P velká⁹ a ∇_{ad} malé.
3. Je-li strmá závislost produkce energie $\epsilon(T)$ na teplotě, jako tomu je u CNO cyklu, bývá velký gradient ∇_{rad} . Proto u masivnějších hvězd existují konvektivní jádra.

Podpovrchové vrstvy. Ze současné teorie konvekce plyne, že asi v 95 až 98 % hmoty hvězdy je konvekce adiabatická, ale v podpovrchových vrstvách to neplatí. Zde se používá *semiempirická teorie konvekce*, ve které vystupuje parametr α , charakterizující poměr mezi střední volnou dráhou l konvektivního elementu a tlakovou škálou H_P ,

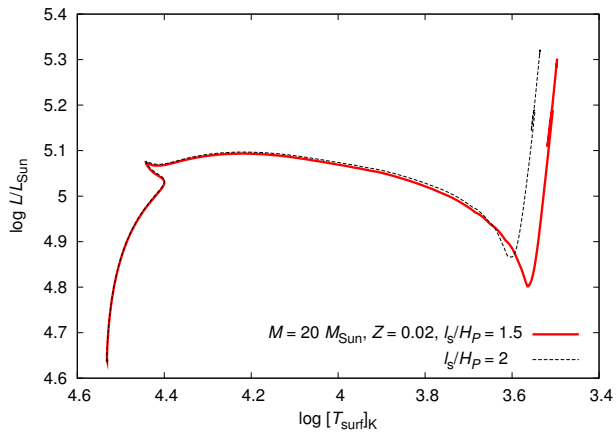
$$\alpha = \frac{l}{H_P}, \quad H_P \equiv \left(-\frac{d \ln P}{dR} \right)^{-1} = -\frac{P}{dP/dR}. \quad (4.153)$$

Obvykle se tato hodnota empiricky volí, typicky $\alpha = 1$ až 2. Jak vidíme na obr. 4.13, může změna parametru vývoj hvězdy značně ovlivnit. Podle teorie, popsané například v Carrol a Ostlie (2007), vychází pro gradient teploty

$$\left(\frac{dT}{dR} \right)_{\text{semi}} = \frac{g}{T} \left[\frac{L_R}{4\pi R^2} \frac{1}{\alpha^2 \sqrt{b} \rho c_P} \left(\frac{\mu m_{\text{H}}}{k} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}}, \quad (4.154)$$

kde $g = \frac{GM_R}{R^2}$ označuje tíhové zrychlení a $b \in \langle 0; 1 \rangle$ účinnost (kolik z práce vykonané vztakovou silou se přemění na kinetickou energii bubliny). Protože tento semiempirický gradient teploty vychází pod povrchem hvězdy obvykle větší než adiabatický, hovoří se též o *superadiabatické* vrstvě.

⁹Dodávka tepla Q se spotřebovává na zvýšení ionizace a teplota T se zvýší jen nepatrně, čili $c_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P$ vychází velké.



Obrázek 4.13: Vliv volby parametru $\alpha = l/H_P$ semiempirické teorie konvekce v podpovrchových vrstvách na vývoj hvězdy $20 M_{\odot}$ v HR diagramu. U lehčích hvězd ($M \simeq 1 M_{\odot}$) ovlivňuje volba parametru i polohu hvězdy na hlavní posloupnosti nulového věku, neboť již při kolapsu byla hvězda konvektivní. Výpočet programem EZ.

5 Matematická struktura rovnic hvězdného nitra

Z matematického hlediska jsou rovnice stavby hvězd (4.2), (4.4), (4.65), (4.151) *soustavou čtyř nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic* pro čtyři neznámé funkce $R(M_R, t)$, $P(M_R, t)$, $L_R(M_R, t)$, $T(M_R, t)$ *dvou nezávislých proměnných*: (i) zobecněné geometrické souřadnice M_R a (ii) času t . Soustavu uzavírá ještě (nediferenciální) stavová rovnice (3.54) pro výpočet $\rho(M_R, t)$. Kromě toho v rovnicích vystupují *závislé* parametry vyjadřující chemické složení $X(M_R, t)$, $Y(M_R, t)$, $Z(M_R, t)$. Funkce popisující nukleární přeměny $\epsilon_{\text{nuk}}(\rho, T, X, Y, Z)$ a opacitu $\kappa(\rho, T, X, Y, Z)$ jsou sice složité, ale zadané.

Při řešení rovnic používáme určitá zjednodušení a podle nich rozlišujeme tři typy modelů: i) stacionární, ii) vývojový a iii) dynamický.

5.1 Stacionární model

Stacionární model je nejjednodušší a neobsahuje žádnou závislost na čase (všechny časové derivace jsou nulové), m.j. předpokládáme hydrostatickou rovnováhu. Rovnice pak mají tvar

$$\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}, \quad (5.1)$$

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4}, \quad (5.2)$$

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuk}}(\rho, T, X, Y, Z), \quad (5.3)$$

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{GT M_R}{4\pi P R^4} \nabla, \quad (5.4)$$

kde gradient $\nabla = \min(\nabla_{\text{rad}}, \nabla_{\text{ad}})$ je dán výrazy (4.149) a (4.150). Neznámými jsou zde čtyři funkce $R(M_R)$, $P(M_R)$, $L_R(M_R)$, $T(M_R)$ jedné proměnné. Model umožňuje vypočítat pouze strukturu nitra (v jednom časovém okamžiku).

5.2 Vývojový model

Vývojový model čas t explicitně obsahuje, jednak v rovnici tepelné rovnováhy

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuk}} - T \frac{dS}{dt}, \quad (5.5)$$

jež zahrnuje časové změny vnitřní a potenciální energie, a jednak v rovnicích pro změny chemického složení. Omezíme-li se na nukleární přeměny vodíku a helia, lze např. pro časovou změnu obsahu helia psát

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_i \alpha_i \epsilon_i, \quad (5.6)$$

kde koeficienty α_i zjevně označují převrácenou hodnotu množství energie vzniklé úplnou nukleární přeměnou 1 g látky v té které reakci (koeficient pro nukleární spalování helia bude mít přirozeně v daném případě opačné znaménko než reakce spalování vodíku na helium), a ϵ_i jsou energetické vydatnosti jednotlivých reakcí. Pro každé místo ve hvězdě proto můžeme psát

$$Y(M_R, t + dt) = Y(M_R, t) + \frac{\partial Y}{\partial t} dt. \quad (5.7)$$

V oblastech *konvektivních zón* je ještě třeba takto získané veličiny *homogenizovat* s ohledem na účinné promíchávání. V každé konvektivní zóně bude obsah helia Y_K homogenní a bude dán vztahem

$$Y_K(t + dt) = \frac{\int_K Y(M_R, t + dt) dM_R}{\int_K dM_R}. \quad (5.8)$$

Protože v oblastech spalování vodíku musí všude zůstat konstantní součet relativního množství vodíku a helia a též obsah uhlíku

$$X + Y = \text{konst.}, \quad X_C = \text{konst.}, \quad (5.9)$$

a protože v oblastech spalování helia platí

$$X = 0, \quad Y + X_C = \text{konst.}, \quad (5.10)$$

lze pomocí změn relativního obsahu helia Y všude snadno spočítat i změny ostatních elementů.

Pokud nás zajímá detailní chemický vývoj jednotlivých isotopů, je přirozeně možné rozepsat zvlášť jednotlivé části jaderných reakcí a sledovat změny všech isotopů pomocí většího počtu analogických rovnic.

Vývojový model vlastně umožňuje spočítat *sekvenci stacionárních modelů*, mezi kterými lze použít relativně velký časový krok Δt , při němž změníme chemické složení. **Změny chemického složení jsou „motorem“ hvězdného vývoje!** Stále však používáme podmínku hydrostatické rovnováhy, čili veškeré změny struktury musí být velmi pozvolné.

5.3 Dynamický model

Dynamický model je nejsložitější, používá se v něm pohybová rovnice

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM_R}{R^2} - 4\pi R^2 \frac{dP}{dM_R}, \quad (5.11)$$

protože zrychlení (setrvačný člen) nelze zanedbat. Tím se ovšem rovnice stavby stávají soustavou parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu. Nezbytný malý časový krok problém komplikuje i po numerické stránce.

Takový model musíme použít, pokud dochází k rychlým změnám struktury. Jako kritérium může sloužit *dynamická škála*

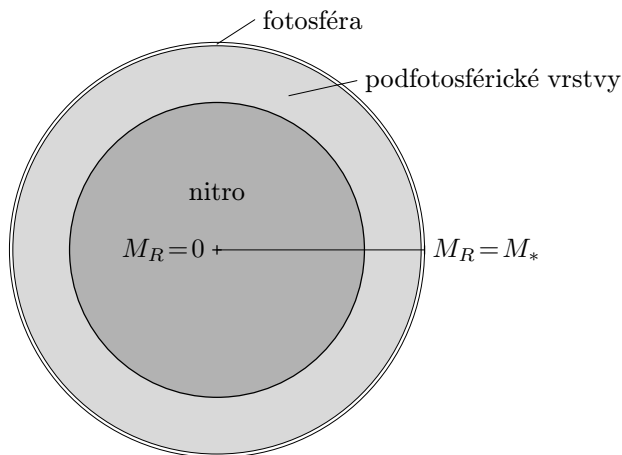
$$\tau_{\text{dyn}} \simeq \sqrt{\frac{R_*^3}{GM_*}} \simeq \sqrt{\frac{1}{G\bar{\rho}}}, \quad (5.12)$$

vlastně řádový odhad doby volného pádu hvězdy.¹ Je-li ve vývojovém modelu optimální časový krok $\Delta t < \tau_{\text{dyn}}$, jsme nuceni jej opustit a počítat dynamicky.

¹Pro pohyb povrchu hvězdy lze použít III. Keplerův zákon $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$, přičemž velkou poloosu a ztotožníme s $\frac{R}{2}$ a polovinu oběžné doby $T/2$ s τ_{dyn} .

6 Počáteční a okrajové podmínky

Abychom diferenciální rovnice vůbec mohli řešit, musíme specifikovat nějaké počáteční a okrajové podmínky. V našem případě se jedná o rovnice 1. řádu, čili zadáváme hodnoty některých studovaných veličin (R, P, L, T)¹ v čase $t = 0$ nebo hodnoty na hranicích hvězdy (např. v centru, na povrchu), které pak budou platit ve *všech* časech. Z výpočetních důvodů je užitečné ve hvězdě rozlišovat nitro, podfotosférické vrstvy a fotosféru (viz obr. 6.1).



Obrázek 6.1: Znázornění okrajových podmínek v centru a na povrchu; hvězda je rozdělena na fotosféru, podfotosférické vrstvy a nitro.

V modelech se vyskytují též *volné parametry*, například celková hmotnost M_* hvězdy, počáteční chemické složení X, Y, Z , parametr konvekce α , v sofistikovanějších modelech volíme účinnost hvězdného větru η_{wind} apod. I pro ně musíme samozřejmě vymyslet vhodné hodnoty.

¹Kdyby se jednalo o rovnice 2. řádu, museli bychom zadat také 1. derivace.

6.1 Počáteční podmínky ($t = 0$)

Ačkoliv nám příroda při poznávání dějů a jejich příčin obvykle hází klacky pod nohy, v případě hvězdných modelů byla milosrdná v tom smyslu, že protohvězda po svém vzniku v molekulárním mračnu projde při smršťování stádiem, kdy je prakticky celá ve stavu konvektivní rovnováhy. To znamená, že jedna počáteční podmínka je nečekaně jednoduchá: na počátku nukleárního vývoje je hvězda *chemicky homogenní*:

$$X(M_R, t = 0) = \text{konst.}, \quad (6.1)$$

$$Y(M_R, t = 0) = \text{konst.}, \quad (6.2)$$

$$Z(M_R, t = 0) = \text{konst.} \quad (6.3)$$

Jako výchozí můžeme přijmout chemické složení *pozorované v atmosféře* normálních hvězd. Atmosféra totiž bývá zcela oddělená od jádra, kde probíhají nukleární přeměny, a to zónou zářivé rovnováhy, ve které nedochází k žádnému promíchávání. Často studovaná chemická složení uvádí tab. 6.1.

Tabulka 6.1: Typická chemická složení různých hvězdných populací.

X	Y	Z	populace
0,60	0,35	0,044	mladé hvězdy v Galaxii
0,70	0,28	0,02	Slunce
0,68	0,30	0,02	populace I (hvězdy 3. generace)
0,75	0,25	0,001	populace II (2. generace)
0,76	0,24	$\leq 0,0001$	populace III (1. generace po Velkém třesku)
		0,004	Malé Magellanovo mračno

6.2 Okrajové podmínky v centru ($M_R = 0$)

V centru je zřejmé

$$L_R = 0, \quad (6.4)$$

$$R = 0, \quad (6.5)$$

což plyne ze základní fyziky a geometrie. Tyto okrajové podmínky však vedou k *singularitě* základních rovnic. V blízkosti centra hvězdy proto použijeme lineární

aproximaci, v zásadě rozvoj se zanedbáním členů vyšších řádů. Diferenciální rovnici zachování hmoty (4.2) tedy zintegrujeme za předpokladu $\rho_c \doteq \text{konst.}$

$$\int_0^{M_R} dM_R = \int_0^R 4\pi R^2 \rho_c dR, \quad (6.6)$$

$$M_R = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c, \quad (6.7)$$

takže dostaneme obyčejnou rovnici

$$R = \left(\frac{3M_R}{4\pi\rho_c} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (6.8)$$

Rovnice tepelné rovnováhy (4.65) přejde zřejmě do tvaru

$$L_R = \left(\epsilon_{\text{nuk}_c} - T_c \frac{dS_c}{dt} \right) M_R. \quad (6.9)$$

Pro tlak máme z rovnice hydrostatické rovnováhy (4.5)

$$\int_{P_c}^P dP = \int_0^{M_R} -\frac{GM_R}{4\pi R^4} dM_R, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} P - P_c &= \int_0^{M_R} -\frac{GM_R}{4\pi} \left(\frac{4\pi\rho_c}{3M_R} \right)^{\frac{4}{3}} dM_R = \\ &= -\frac{G}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{4}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} M_R^{\frac{2}{3}}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

a analogicky

$$T - T_c = -\frac{G}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} M_R^{\frac{2}{3}} T_c \nabla_c P_c^{-1}. \quad (6.12)$$

6.3 Okrajové podmínky na povrchu ($M_R = M_*$)

Konstrukce okrajových podmínek na povrchu hvězdy je poněkud složitější, protože by bylo příliš hrubé předpokládat na povrchu hvězdy nulový tlak a teplotu ($P(M_*, t) = 0$, $T(M_*, t) = 0$). Obvykle se místo toho počítá zjednodušený model povrchových částí hvězdy, přičemž se uvažují dvě různé vrstvy:

1. *fotosféra*, tj. tenká poloprůhledná vrstva, ze které uniká záření do mezihvězdného prostoru;
2. *podfotosférické vrstvy*, ve kterých je materiál ještě ve stavu neúplné ionizace a kde nelze konvekci považovat za adiabatickou. Podfotosférické vrstvy obsahují obvykle pouze 2 až 5 % hmoty hvězdy, ale často více než polovinu jejího celkového objemu.

6.3.1 Fotosféra

Ve fotosféře, jejíž celková hmotnost i rozměry jsou již zanedbatelné, se obvykle jako nezávisle proměnná volí *optická hloubka* τ , která se zavádí pomocí vztahu

$$d\tau = \kappa\rho dx, \quad (6.13)$$

kde x označuje geometrickou hloubku uvažovaného místa ve fotosféře, měřenou od „vnějšího okraje“ fotosféry směrem do středu hvězdy. Pro průběh teploty s optickou hloubkou lze použít aproximační vztah, založený na některém zcela jednoduchém nebo poněkud složitějším modelu atmosféry. Pro nejjednodušší model lze psát

$$T^4 = \frac{1}{2}T_{\text{eff}}^4 \left(1 + \frac{3}{2}\tau \right). \quad (6.14)$$

Všimněme si, že z uvedeného vztahu vyplývá, že teplota v optické hloubce $\tau = 2/3$ se právě rovná efektivní teplotě hvězdy. Složitější a přesnější vztahy pro průběh teploty s optickou hloubkou lze nalézt např. v pracech Böhm-Vitense (1958) či Ando a Osaki (1975).

Pro změnu tlaku plynu lze psát

$$dP_g = g\rho dx = \frac{g}{\kappa} d\tau, \quad (6.15)$$

kde $g = GM_*R_*^{-2}$ je gravitační zrychlení na povrchu hvězdy. Podle Unsölda (1955) je třeba tíhové zrychlení korigovat s ohledem na tlak záření podle vztahu

$$g_{\text{eff}} = g - \frac{\sigma\kappa}{c}T_{\text{eff}}^4, \quad (6.16)$$

takže průběh tlaku plynu ve fotosféře můžeme počítat podle rovnice

$$\frac{dP_g}{d\tau} = \frac{g_{\text{eff}}}{\kappa}. \quad (6.17)$$

Je zřejmé, že výraz pro *efektivní tíhové zrychlení* g_{eff} je založen na vztahu (6.14) pro nejjednodušší atmosféru. Podle (4.103) platí totiž

$$dP_r = \frac{4}{3}aT^3dT = \frac{16\sigma}{3c}T^3dT. \quad (6.18)$$

Diferencováním vztahu (6.14) přitom dostáváme

$$4T^3dT = \frac{3}{4}T_{\text{eff}}^4d\tau, \quad (6.19)$$

tudíž

$$dP_r = \frac{\sigma}{c} T_{\text{eff}}^4 d\tau. \quad (6.20)$$

Odtud je již výraz (6.16) pro efektivní tíhové zrychlení nasnadě. Je dobře si uvědomit, že pokud pro průběh teploty s optickou hloubkou použijeme nějaký dokonalejší model atmosféry, je nutné modifikovat i výraz (6.16) pro korekci tíhového zrychlení o tlak záření.

S využitím interpolace v tabulkách opacitních koeficientů $\kappa(\rho, T)$ je možno rovnici (6.14) a rovnici (6.17), či její dokonalejší tvar, řešit numericky od optické hloubky $\tau = 0$ až do dolní hranice fotosféry, t.j. pro $\tau = \frac{2}{3}$. (Někteří autoři doporučují ukončit řešení až u $\tau = 2$.) Pro $\tau = 0$ se obvykle volí nějaká velmi malá, ale nenulová hustota, např. $\rho = 10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$. Na dolní hranici fotosféry bude

$$T = T(\tau = \frac{2}{3}), \quad (6.21)$$

$$P = P(\tau = \frac{2}{3}) = P_g(\tau = \frac{2}{3}) + \frac{a}{3} T^4(\tau = \frac{2}{3}). \quad (6.22)$$

Z definice efektivní teploty ještě plyne

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 = \pi a c R_*^2 T_{\text{eff}}^4, \quad (6.23)$$

takže

$$R_* = T_{\text{eff}}^{-2} \left(\frac{L_*}{\pi a c} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.24)$$

6.3.2 Podfotosférické vrstvy

Výpočet pro podfotosférické vrstvy se obvykle zjednodušuje předpokladem, že se zářivý tok L_R v těchto oblastech s malou hmotou a mimo zónu nukleární přeměny prakticky nemění a rovnice tepelné rovnováhy se ze soustavy rovnic vypouští. Z výpočetních důvodů se ukazuje výhodné volit v těchto oblastech za *nezávisle proměnnou tlak* P , neboť hmota se mění velmi málo. Přejít k jiné nezávislé proměnné je jednoduchý, jde jen o násobení rovnic stavby

$$L_R = L_*, \quad (6.25)$$

$$\frac{dM_R}{dP} = -\frac{4\pi R^4}{GM_R}, \quad (6.26)$$

$$\frac{dR}{dP} = \frac{dR}{dM_R} \frac{dM_R}{dP} = -\frac{R^2}{\rho GM_R}, \quad (6.27)$$

$$\frac{dT}{dP} = \frac{dT}{dM_R} \frac{dM_R}{dP} = \frac{T}{P} \nabla. \quad (6.28)$$

Změny *ionizace* se „skrývají“ ve stavové rovnici, respektive ve střední molekulové hmotnosti μ a parametru Q (3.59). Stavovou rovnici musíme k výše uvedeným diferenciálními rovnicím přidat, abychom byli schopni vypočítat $\rho(T, P)$. Rovnice se obvykle numericky integrují (např. metodou Runge–Kutta), od spodku fotosféry až do $M_R/M_* = 0,97$, kde již můžeme předpokládat, že je hvězdný materiál zcela ionizován.

7 Henyeova numerická metoda integrace vnitřních částí hvězdy

V současnosti se k numerickému řešení rovnic vnitřní stavby hvězd nejčastěji užívá metoda kompletní linearizace rovnic, kterou poprvé navrhli Henyey a spol. (1959) a která se později začala používat i k výpočtu modelů atmosfér.

7.1 Metoda úplné linearizace

Metoda úplné linearizace sestává z následujících kroků:

1. diskretizace rovnic;
2. doplnění okrajových podmínek v centru;
3. konstrukce vnějších okrajových podmínek, sestávající z: (a) odhadu zářivého výkonu L_* a efektivní teploty T_{eff} ; (b) výpočtu tří modelů fotosféry a podpovrchových vrstev; (c) nalezení koeficientů lineárních funkcí $R_1(P_1, T_1)$, $L_1(P_1, T_1)$;
4. linearizace rovnic;
5. iteračního výpočtu stacionárního modelu;
6. časového kroku v případě vývojového modelu.

Diskretizace. Prvním krokem je přechod od diferenciálních rovnic k *diferenčním*, čili diskretizace problému. Celé nitro hvězdy (tj. oblast, kde je látka ve stavu úplné ionizace) rozdělíme na dostatečný počet koncentrických slupek a očíslováme je směrem od povrchu do centra indexem $j = 1 \dots N$ (obr. 7.1), volíme např. $N = 200$. Zadáme tak vlastně diskrétní hodnoty M_j , původně spojité nezávislé proměnné M_R .

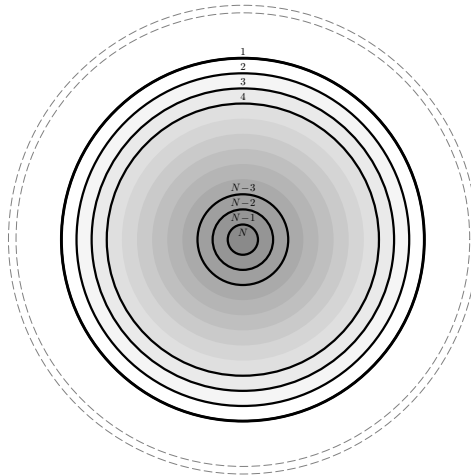
Derivace spojitých funkcí R, P, L_R, T na levých stranách rovnic nahradíme rozdíly proměnných R_j, P_j, L_j, T_j mezi sousedními slupkami j a $j+1$. Místo výrazů na pravých stranách rovnic píšeme jejich aritmetické průměry mezi j -tou a $(j+1)$ -ní slupkou.¹ Například pro rovnici hydrostatické rovnováhy máme (po převedení všech členů vlevo)

$$\frac{dP}{dM_R} + \frac{GM_R}{4\pi R^4} \simeq \frac{P_j - P_{j+1}}{M_j - M_{j+1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{GM_j}{4\pi R_j^4} + \frac{GM_{j+1}}{4\pi R_{j+1}^4} \right) = 0. \quad (7.1)$$

Pro každou dvojici slupek máme k dispozici čtyři rovnice stavby, čili můžeme sestavit celou soustavu rovnic, kterou si abstraktně označíme

$$G_{ij} = 0, \quad (7.2)$$

kde $i = 1 \dots 4$ a $j = 1 \dots N - 1$. Jedná se o $4(N - 1)$ rovnic pro $4N$ neznámých R_j, P_j, L_j, T_j . Je zřejmé, že budeme muset ještě nějaké rovnice doplnit.



Obrázek 7.1: Diskretizace nitra hvězdy na N koncentrických slupek. Čárkovaně jsou naznačené ještě podfotosférické vrstvy a fotosféra.

Okrajové podmínky v centru. Přepis okrajových podmínek (6.4) a (6.5) je zcela jednoduchý

$$L_N = 0, \quad (7.3)$$

$$R_N = 0. \quad (7.4)$$

Počet rovnic tak stoupne na $4N - 2$.

¹Nebo lze do pravých stran dosadit průměrné hodnoty veličin $\frac{1}{2}(R_j + R_{j+1})$, atd.

Vnější okrajové podmínky. Okrajové podmínky na povrchu jsou však komplikovanější, protože nelze předepsat určitou hodnotu R_1 , P_1 , L_1 nebo T_1 , to bychom chybně omezili řešení! Nejprve podle zadané hmotnosti hvězdy M_* odhadneme tři dvojice hodnot zářivého výkonu a efektivní teploty

$$L_*, T_{\text{eff}}^{(1,2,3)}, \quad (7.5)$$

v okolí očekávané polohy hvězdy na HR diagramu. Pak spočteme *tři modely fotosféry* (od $\tau = 0$ do $\tau \simeq 2/3$) a *podfotosférických vrstev* (od $P_{\text{fotosféry}}$ do $M_R/M_* \simeq 0,97$) a získáme tak trojí hodnoty

$$\begin{aligned} R_1, P_1, L_1, T_1^{(1)}, \\ R_1, P_1, L_1, T_1^{(2)}, \\ R_1, P_1, L_1, T_1^{(3)}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

ze kterých metodou nejmenších čtverců vypočítáme koeficienty $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ a $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ lineárních funkcí dvou proměnných

$$R_1 = \alpha_1 P_1 + \beta_1 T_1 + \gamma_1, \quad (7.7)$$

$$L_1 = \alpha_2 P_1 + \beta_2 T_1 + \gamma_2. \quad (7.8)$$

Ty použijeme jako okrajové podmínky. Všimněme si, jak jsme to udělali chytře — předepsali jsme pouze přibližné funkční závislosti $R_1 = f_1(P_1, T_1)$, $L_1 = f_2(P_1, T_1)$, nikoli konkrétní hodnoty veličin! Máme tedy konečně 4N rovnic pro 4N neznámých, ale nemáme vyhráno. Soustava je totiž *silně nelineární* a nelze pro její řešení použít nějakou jednoduchou metodu.

Linearizace. Celou soustavu rovnic můžeme řešit tak, že hodnoty proměnných R_j, P_j, L_j, T_j prostě odhadneme (pak ovšem rovnice (7.2) nebudou platit), v rovnicích (7.2) provedeme záměnu za „odhady plus malé opravy“

$$\begin{aligned} R_j &\rightarrow R_j + \Delta R_j, \\ P_j &\rightarrow P_j + \Delta P_j, \\ L_j &\rightarrow L_j + \Delta L_j, \\ T_j &\rightarrow T_j + \Delta T_j, \end{aligned} \quad (7.9)$$

a celou soustavu linearizujeme²

$$G_{ij} + dG_{ij} = 0, \quad (7.10)$$

²Nestačí ovšem pouze linearizovat jednotlivé proměnné např. $(R_j + \Delta R_j)^2 \doteq R_j^2 + 2R_j \Delta R_j$, protože se v rovnicích vyskytují jejich součiny a podíly.

kde

$$\begin{aligned} dG_{ij} = & \frac{\partial G_{ij}}{\partial R_j} \Delta R_j + \frac{\partial G_{ij}}{\partial P_j} \Delta P_j + \frac{\partial G_{ij}}{\partial L_j} \Delta L_j + \frac{\partial G_{ij}}{\partial T_j} \Delta T_j + \\ & + \frac{\partial G_{ij}}{\partial R_{j+1}} \Delta R_{j+1} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial P_{j+1}} \Delta P_{j+1} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial L_{j+1}} \Delta L_{j+1} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial T_{j+1}} \Delta T_{j+1} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Parciální derivace snadno spočteme z původních rovnic, například

$$\frac{\partial G_{23}}{\partial R_3} = \frac{\partial}{\partial R_3} \left[\frac{P_3 - P_4}{M_3 - M_4} + \frac{1}{2} \left(\frac{GM_3}{4\pi R_3^4} + \frac{GM_4}{4\pi R_4^4} \right) \right] = -\frac{GM_3}{2\pi R_3^5}. \quad (7.12)$$

Iterace. Soustavu (7.10) $4N$ lineárních rovnic o $4N$ neznámých $\Delta R_j, \Delta P_j, \Delta L_j$ a ΔT_j vyřešíme snadno (např. Gaussovou eliminační metodou nebo lépe metodou optimalizovanou pro řešení pásových matic). Získané opravy původních odhadů použijeme pro zpřesnění

$$\begin{aligned} R_j^{(2)} &= R_j^{(1)} + \Delta R_j^{(1)}, \\ P_j^{(2)} &= P_j^{(1)} + \Delta P_j^{(1)}, \\ L_j^{(2)} &= L_j^{(1)} + \Delta L_j^{(1)}, \\ T_j^{(2)} &= T_j^{(1)} + \Delta T_j^{(1)}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

a soustavu (7.10) řešíme znovu pro $\Delta R_j^{(2)}, \Delta P_j^{(2)}, \Delta L_j^{(2)}, \Delta T_j^{(2)}$. Iterace opakujeme, dokud není dosaženo požadované přesnosti (tzn. $\Delta R_j, \Delta P_j, \Delta L_j, \Delta T_j$ jsou malé). Pokud by z našeho modelu vyplynuly hodnoty L_*, T_{eff} mimo rozsah našich původních odhadů (7.5), musíme se pochopitelně vrátit k bodu 3.

Časový krok. Pokud počítáme vývoj hvězdy, tj. časovou posloupnost stacionárních modelů, zvolíme ještě časový krok Δt mezi dvěma modely a ve všech slupkách spočteme nové chemické složení podle diskretizovaného vztahu (5.7)

$$Y_j(t + \Delta t) = Y_j(t) + \sum_i \alpha_i \epsilon_i(\rho_j, T_j, X_j, Y_j, Z_j) \Delta t, \quad (7.14)$$

přičemž v konvektivních zónách poté provedeme středování podle vztahu (5.8), jen integrály nahradíme sumami.

7.2 Meze linearizace

Je poučné učinit si představu o tom, jak zdárně lze linearizaci diferenciálních vztahů vést do extrému. Vezměme si pro příklad rovnici hydrostatické rovnováhy ve tvaru

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{GM_{R\rho}}{R^2}. \quad (7.15)$$

Jestliže budeme derivaci na levé straně nahrazovat diferencí mezi centrem a povrchem (rozdělíme hvězdu na pouhé dvě slupky), dostáváme

$$\frac{P_c - 0}{0 - R_*} = - \left(\frac{GM_R}{R^2} \right)_{\text{střední}} \rho_{\text{střední}} = - \frac{1}{2} \frac{GM_*}{R_*^2} \frac{M_*}{\frac{4}{3}\pi R_*^3}, \quad (7.16)$$

s přihlédnutím k tomu, že pro gravitační zrychlení v centru platí

$$g_c = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{GM_R}{R^2} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3} GR\rho_c = 0. \quad (7.17)$$

Po úpravě dostáváme následující odhad centrálního tlaku ve hvězdě

$$P_c = \frac{3GM_*^2}{8\pi R_*^4}. \quad (7.18)$$

Dosadíme-li pozorované hodnoty M_* a R_* pro Slunce, dostáváme tlak asi $1,34 \cdot 10^{15}$ [cgs], zatímco z přesného modelu Slunce vychází hodnota $2,269 \cdot 10^{17}$ [cgs]. To je dosti velký rozdíl. V tabulce 7.1 je srovnání modelu a odhadu pro několik hmotností hvězdy. Je ale zajímavé, že vztah mezi logaritmem tlaku spočteným a odhadnutým je skoro dokonale lineární. Vidíme, že odhad vede *k poklesu centrálního tlaku s rostoucí hmotností hvězdy*, ve shodě s tím, co dávají reálné modely. Sportovně řečeno: jakýsi odhad toho, že tlak v nitru je hodně vysoký, pomocí i tak hrubé linearizace dostáváme, a dokonce můžeme správně kvalitativně odhadnout, jak se tlak mění v závislosti na hmotnosti hvězdy.

Tabulka 7.1: Srovnání spočteného centrálního tlaku s odhadem

hmotnost hvězdy (M_\odot)	$\log P_c$ (model) [cgs]	$\log P_c$ (odhad) [cgs]
1	17,356	15,128
7	16,609	14,709
25	16,275	14,518

8 Vývoj osamocené hvězdy

Podle současných představ vznikají hvězdy *gravitačním kolapsem* z náhodného zhuštění chladné mezihvězdné látky v obřích molekulových mračnách. Tyto procesy jsou dnes předmětem intenzivního výzkumu, a to i v souvislosti s rozvojem pozorovacích technik v infračerveném oboru, které přímá pozorování chladné hmoty dovolují. Je zřejmé, že se jedná o obecně nesférický problém a složitější fyziku, než jakou jsme při odvozování rovnic stavby hvězd předpokládali.

Přibližná podmínka pro hmotnost M mračna, aby se samovolně smršťovalo, je

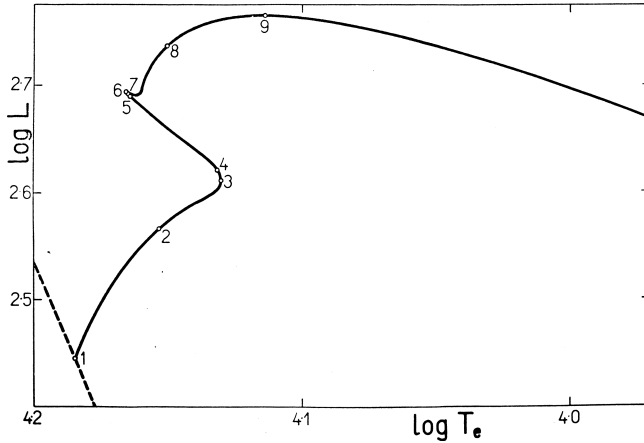
$$M > M_J \simeq \text{konst.} \left(\frac{kT}{G\mu m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\rho}}. \quad (8.1)$$

Nazýváme ji *Jeansovo kritérium*. Vznikající protohvězdy procházejí stadiem, kdy se v celém tělese ustaví konvektivní rovnováha, takže se chemické složení hvězdy homogenizuje. S rostoucí hustotou roste i opacita a teplota v nitru, až se v nitru zažehnou první nukleární reakce, nejprve energeticky málo významná *slučování lithia, berylia a bóru*, ale nakonec primární slučování vodíku na helium. Uvolňovaná jaderná energie je zčásti vyzařena, zčásti je pohlcena; to vede k růstu centrální teploty, hustoty a tlaku. Protože nukleární produkce energie je funkcí vysoké mocniny teploty a je přímo úměrná hustotě, vede rozdíl podmínek od místa k místu i k ustavení potřebného *gradientu* tlaku a k dosažení stavu hydrostatické rovnováhy.

Okamžik ustavení hydrostatické rovnováhy bývá obvykle ztotožňován s polohou hvězdy v HR diagramu na *hlavní posloupnosti nulového věku*. Poloha hvězdy je jednoznačně dána její hmotností M_* a počátečním chemickým složením X, Y, Z .

8.1 Ilustrativní příklad: vývoj hvězdy o hmotnosti $4 M_\odot$

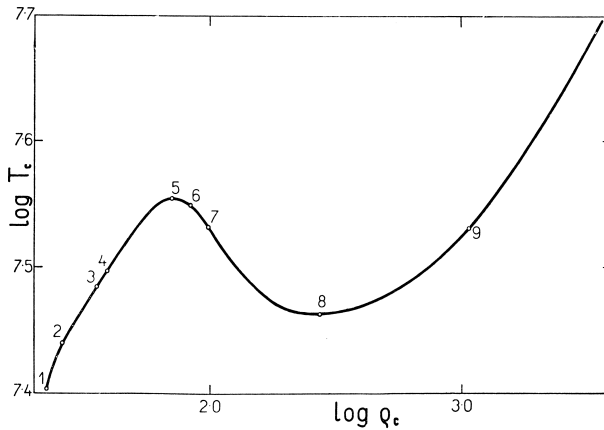
Popišme si jako ilustrativní příklad vývoj hvězdy s hmotností $M_* = 4 M_\odot$ a s počátečním chemickým složením odpovídajícím mladým hvězdám v Galaxii, $X = 0,602$ a $Z = 0,044$ (z toho $X_N = 0,014$):



Obrázek 8.1: HR diagram pro vývoj *osamocené* hvězdy s hmotností $4 M_{\odot}$. Hlavní posloupnost nulového stáří (ZAMS) je vyznačena čárkovaně. Model začíná v bodě 1 (v okamžiku $t = 0$); počáteční chemické složení je $X = 0,602$, $Z = 0,044$, $X_N = 0,014$. Bod 2 ($t = 63$ Myr): začíná růst centrální tlak. 3) $t = 84,4$ Myr: konec poklesu efektivní teploty, hvězda opouští hlavní posloupnost. 4) $t = 86,1$ Myr: první maximum poloměru, hvězda začíná kontrahovat. 5) $t = 88,5$ Myr: rychlý konec termonukleárních reakcí v jádru z důvodu vyčerpání vodíku. 6) $t = 88,59$ Myr: vytvoření slupky, ve které hoří vodík, opětovně roste poloměr hvězdy. 7) $t = 88,62$ Myr: rychlý pokles obsahu vodíku v centru vede ke zmizení vnitřní konvektivní zóny. 8) $t = 90,5$ Myr: vodík je v centru hvězdy zcela vyčerpán, jádro se zmenšuje a zahřívá, zatímco obálka se rozpíná a ochlazuje. 9) $t = 93,5$ Myr: hvězda dosahuje maximální luminozitu. Vývoj hvězdy by pokračoval dále zapálením heliových reakcí, ale výpočet končí v tomto bodě. Převzato z Harmanec (1970).

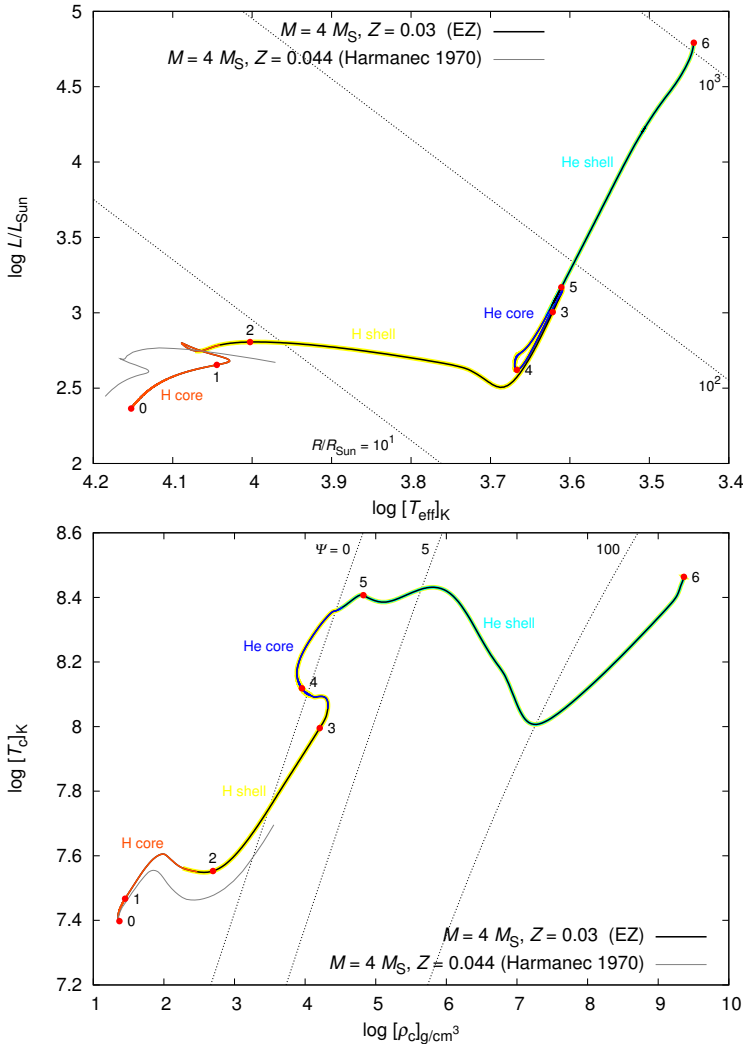
0. čas $t = 0$, bod 1 na obr. 8.1, 8.2, dosažení hydrostatické rovnováhy, CNO cyklus, konvektivní zóna v centru: U této hvězdy hraje již rozhodující roli CNO cyklus jaderné přeměny. V centru hvězdy a jeho okolí se již při dosažení hydrostatické rovnováhy vytvoří *konvektivní zóna*, která zahrnuje 18 % celkové hmotnosti hvězdy.

1a. pokles $X_c \rightarrow$ pokles $\kappa \rightarrow$ pokles $\nabla_{\text{rad}} \rightarrow$ zmenšování konvektivní zóny: Primární příčinou vývoje hvězdy je jaderné slučování vodíku. Díky němu postupně v centrálních částech ubývá vodíku a přibývá helia. Na produkci nukleární energie to má dlouho jen malý vliv díky účinnému promíchávání v konvektivní zóně, které do centra hvězdy přináší stále nový materiál bohatý na vodík. Úbytek vodíku má však za následek pokles opacity, která pro dané hustoty a teploty klesá s klesajícím obsahem vodíku. Pokles opacity znamená přirozeně podle rovnice (4.149) i pokles ∇_{rad} a v důsledku toho se postupně *zmenšuje* hmotnost konvektivního jádra. Zmenšující se konvektivní jádro za sebou zanechává zónu plynule se měnícího chemického složení, s klesajícím obsahem vodíku směrem k centru.



Obrázek 8.2: Závislost centrální hustoty ρ_c a centrální teploty T_c pro vývoj hvězdy s hmotností $4 M_{\odot}$. Označení bodů je stejné jako na obr. 8.1. Převzato z Harmanec (1970).

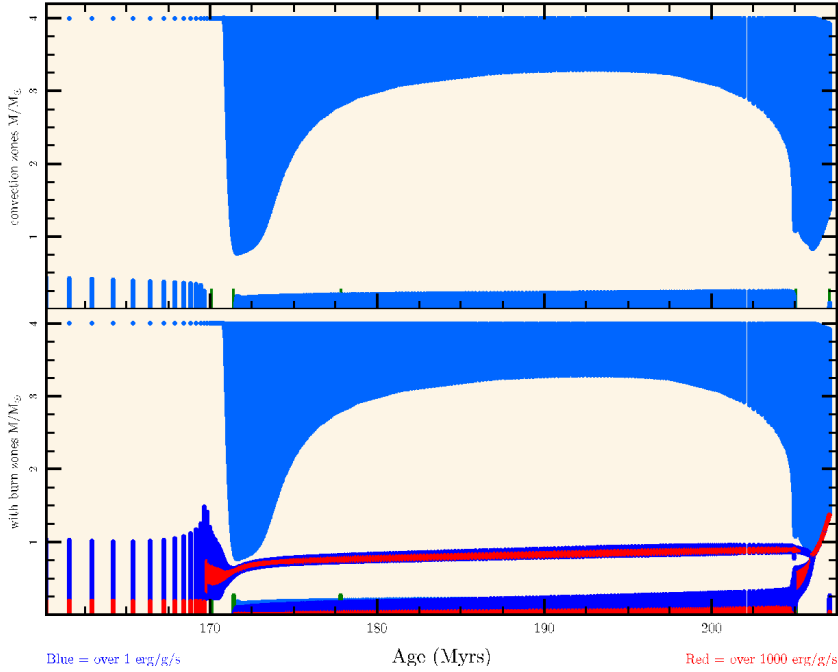
- 1b. *pokles $X_c \rightarrow$ růst $\mu \rightarrow$ pokles p i $\nabla p \rightarrow$ zmenšení jádra \rightarrow zvýšení $T \rightarrow$ zvýšení ϵ* : Jiným důsledkem nukleárních přeměn v nitru hvězdy je postupný růst střední molekulové hmotnosti μ částic v konvektivní zóně, což vzhledem ke stavové rovnici (3.54) vede k mírnému poklesu tlaku s časem. Klesá i gradient tlaku, vnitřní části hvězdy se smršťují a zahřívají, což ovšem zvětšuje výkon nukleární produkce ϵ a ve svých důsledcích i růst střední hmotnosti částic.
2. *$t = 63$ Myr, bod 2, růst T převáží růst $\mu \rightarrow p_c$ roste*: Po 63 miliónech let převýší růst teploty růst střední hmotnosti částic a centrální tlak se počne zvyšovat. Po celou tuto dobu v důsledku růstu produkce energie roste i celkový zářivý výkon na povrchu hvězdy.
3. *růst $\epsilon \rightarrow$ růst $L \rightarrow$ expanze vnějších vrstev \rightarrow pokles T_{eff}* : Vysvětlit důvody vývoje ostatních povrchových charakteristik je nesnadné, protože se zde kombinuje několik vlivů. Výpočet ukazuje, že rostoucí tok zářivé energie z centra hvězdy způsobuje po dlouhou dobu i pozvolnou expanzi vnějších vrstev, spojenou s poklesem teploty v nich. Klesá i efektivní teplota hvězdy.
4. *$t = 84$ Myr, bod 3, $X_c \doteq 0,04 \rightarrow$ růst T_{eff}* : Až po více než 84 miliónech let se tento pokles teploty zastaví a teplota začíná znovu růst. „Krátkce“ poté (v čase 86,1 miliónů let, bod 4) dosáhne poloměr hvězdy lokálního maxima a začíná klesat. To ovšem jen urychlí růst teploty. Prvotní příčina těchto změn spočívá opět v nitru hvězdy. V té době klesl již relativní hmotnostní obsah vodíku v konvektivní zóně pod $X_c = 0,04$, což se ukazuje jako kritická hodnota. Přitom spotřeba vodíku díky růstu teploty i hustoty stále roste.
5. *$t = 88,5$ Myr, bod 5, $X_c = 0,0015 \rightarrow$ pokles $\epsilon \rightarrow$ pokles $T_c \rightarrow$ smršťování hvězdy \rightarrow růst ρ, T nad He jádrem \rightarrow zapálení H ve slupce \rightarrow expanze vněj-*



Obrázek 8.3: Horní panel: Hertzsprungův–Russellův diagram zachycující vývoj hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$, s chemickým složením $X = 0,67$, $Z = 0,03$ (tyto hodnoty se mírně liší od obr. 8.1; vývoj tak probíhá na jiné časové škále, ale kvalitativně je velmi podobný). Bod 0 ($t = 0$) značí dosažení hlavní posloupnosti nulového stáří; bod 1 ($t = 159,8$ Myr) opuštění hlavní posloupnosti; bod 2 ($t = 170,1$ Myr) spotřebování vodíku v jádru ($X_{\text{c}} = 0$), pokles T_{eff} ; bod 3 ($t = 171,4$ Myr) zažehnutí hélia; bod 4 ($t = 177,8$ Myr) postupné spotřebovávání hélia, růst L_{*} ; bod 5 ($t = 205,0$ Myr) $Y_{\text{c}} = 0$, pokles centrální teploty T_{c} ; bod 6 ($t = 207,1$ Myr) konec modelu — časový krok $\Delta t < \tau_{\text{dyn}}$ dle (5.12). Barevně jsou odlišeny fáze nukleárních přeměn: (i) hoření vodíku v jádru, (ii) hoření vodíku ve slupce, (iii) hoření hélia v jádru, (iv) hoření hélia ve slupce. Tečkované linie odpovídají konstantním poloměrům ($\log L/L_{\odot} = 2 \log R/R_{\odot} + 4 \log T_{\text{eff}}/T_{\odot}$). Dolní panel: odpovídající diagram centrální hustota ρ_{c} , centrální teplota T_{c} . Tečkované linie vyznačují stupeň degenerace Ψ . Výpočet programem EZ.

ších vrstev: V čase 88,5 miliónů let klesne obsah vodíku v jádru na hodnotu $X_c = 0,0015$, což již vede k poklesu výkonu nukleární produkce a v důsledku toho i k poklesu centrální teploty. Pokles produkce je tak prudký, že celá hvězda se začíná smršťovat. To ale vede k růstu hustoty a teploty v oblastech pozměněného chemického složení, které po sobě zanechala k centru ustupující konvektivní zóna. V důsledku toho vznikne nad téměř čistě heliovým jádrem druhé energetické maximum nukleární přeměny vodíku na helium, *vodíková slupka*. Intensita tohoto zdroje zpočátku velmi rychle roste, takže do vrstev blíže k povrchu přichází více zářivé energie, než kolik se stačí vyzářit, a vnější části hvězdy začínají velmi rychle expandovat ($t = 88,589$ Myr, bod 6). Následkem toho dochází k novému poklesu teploty a zpočátku i zářivého výkonu hvězdy.

6. $t = 88,618$ Myr, bod 7, pokles $\epsilon \rightarrow$ pokles L_R i $\nabla_{\text{rad}} \rightarrow$ zánik konvektivní zóny, ustavení zářivé rovnováhy: S poklesem energetické produkce v centru se zmenšuje L_R a tedy i ∇_{rad} , takže po velmi krátké době zanikne centrální konvektivní zóna. Celá oblast se rychle přizpůsobí stavu zářivé rovnováhy a nastává krátké období relativní stability, ve kterém se do značné míry zastaví expanze hvězdy i smršťování jádra. (Gravitační energie uvolňovaná v jádru je v té době zhruba o řád menší, než v období zániku konvektivní zóny.)
7. $t = 90,5$ Myr, bod 8, $X_c = 0 \rightarrow$ smrštění jádra (uvolnění E_G) \rightarrow růst $\rho_c, T_c \rightarrow$ destabilizace slupky \rightarrow růst ϵ tamtéž \rightarrow expanze obálky, pokles T_{eff} : Jaderné reakce v centru brzo spotřebují i zbývající zásobu vodíku, takže dochází k novému prudkému smršťování jádra spojenému s růstem tlaku, hustoty, uvolňování gravitační energie a tedy i růstu centrální teploty. Růst teploty a hustoty naruší i relativně stabilizovanou vodíkovou slupku, ve které nastává nový rychlý růst produkce nukleární energie. To vede k nové expanzi a ochlazení obalu hvězdy. Pokles teploty je rychlejší než pokles hustoty, opacitní koeficient roste, a po určitém čase vede i k postupnému poklesu zářivého výkonu hvězdy ($t = 93,5$ Myr, bod 9).
8. zužování slupky a posouvání k povrchu (kde je menší ρ, T) \rightarrow pokles $\epsilon \rightarrow$ pokles L_* : Vodíková slupka se neustále zužuje a posouvá směrem k povrchu. Souvisí to s úbytkem vodíku směrem k centru a poklesem teploty a hustoty směrem k povrchu. Produkce energie ve slupce proto zvolna klesá a snižuje se tím pádem i zářivý výkon celé hvězdy.
9. pokles T v podfotosférických vrstvách \rightarrow pokles ionizace \rightarrow zvýšení $\kappa \rightarrow$ vznik podpovrchové konvektivní zóny, nad zónou pokles κ : Pokračující pokles teploty vyvolá pokles ionizace v podfotosférických vrstvách, což vede ke vzniku vnější konvektivní zóny (viz obr. 8.4). V tenké vrstvě nad touto konvektivní zónou navíc poklesne opacita, čímž je přenos energie směrem k povrchu usnadněn.



Obrázek 8.4: Změny vnitřní struktury hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$, po opuštění hlavní posloupnosti (do té doby je struktura téměř neměnná, pouze se zmenšuje jaderná konvektivní zóna). Dolní panel: zóny nukleárních přeměn, kde je měrný výkon $\epsilon > 1000 \text{ erg/s/g}$ (červeně) nebo $\epsilon > 1 \text{ erg/s/g}$ (modře). Horní panel: konvektivní zóny (světle modře). V čase 171 Myr je patrný zánik konvektivní zóny v centru a poté vznik zóny povrchové, která zasahuje až do oblastí, kde probíhaly nukleární přeměny. Po zažehnutí héliových reakcí v centru (v čase 172 Myr) se vytváří druhá vnitřní konvektivní zóna. Výpočet programem EZ.

10. *rozšiřování konvektivní zóny k centru* \rightarrow *růst L_* , podpovrchové vrstvy rozhoďující*: Konvektivní zóna která se postupně rozšiřuje směrem k centru hvězdy. Je třeba si připomenout, že zatímco v oblastech se zářivým přenosem energie dochází k expanzi zčásti na úkor pohlcovaného záření, v oblastech konvekce probíhá expanze prakticky adiabaticky, tedy pouze na úkor vnitřní energie. Výsledkem je, že zářivý výkon hvězdy znovu roste a tento růst probíhá tak rychle, jak rychle se dolní hranice konvektivní zóny přibližuje k okraji hořící vodíkové slupky.

Tato nová změna struktury hvězdy vede k růstu teploty a tedy i produkce energie ve vodíkové slupce. To je pozoruhodná situace — poprvé za celý vývoj od hlavní posloupnosti nulového věku jsou pro chování celé hvězdy určující procesy probíhající v jejích *podpovrchových vrstvách*.

11. $T_c \simeq 10^8 \text{ K} \rightarrow$ *slučování He na C* \rightarrow *zastavení smršťování jádra* \rightarrow *snížení ϵ ve slupce (přeměna H na He stále nejvydatnější)* \rightarrow *po zažehnutí 2. zdroje L_* klesne*: Zářivý výkon hvězdy roste do té doby, než teplota v blízkosti centra hvězdy dosáhne hodnoty 10^8 K . Poté započne v centru hvězdy jaderné slučování helia na uhlík. V centru se opakuje podobná situace jako při zapálení vodíku během kontrakce hvězdy k hlavní posloupnosti nulového věku. Smršťování jádra se zastaví a v jádru se ustaví stabilní stav, postupně se ovšem vytvoří konvektivní zóna, která při svém zvětšování vede k diskontinuitě chemického složení na vnějším okraji zóny. Hlavním důsledkem však je, že zastavením kontrakce jádra se zhorší podmínky pro slučování vodíku na helium ve vodíkové slupce, která je i nadále *nejvydatnějším energetickým zdrojem hvězdy*. Ač se to zdá poněkud kuriózní, zářivý výkon hvězdy po zažehnutí dalšího zdroje nukleární energie proto začíná *klesat* a její poloměr se zmenšuje.
12. *stabilní hoření He na C (méně vydatné), trvající 10 až 20% doby pobytu na hlavní posloupnosti*: Vzhledem k nižší energetické vydatnosti slučování helia na uhlík (menšímu rozdílu vazebných energií), trvá relativně stabilní období hoření helia v jádru hvězdy mnohem kratší dobu, než fáze pobytu hvězdy na hlavní posloupnosti.
13. *hoření He ve slupce, smršťování C jádra* \rightarrow *růst T_c* \rightarrow *růst ϵ_{He}* \rightarrow *expanze slupky H* \rightarrow *pokles ϵ_{H}* \rightarrow *smršťování hvězdy* \rightarrow *pokles L_* (dvojitá vazba)*: Po vyčerpání helia v jádru dojde opět analogicky k hoření helia v *heliové slupce*. Nyní však dochází již ke *dvojitě vazbě*: jak se uhlíkové jádro smršťuje a zahřívá, dostává se heliová slupka do oblastí s vyšší teplotou a hustotou a zvýšený tok energie z ní vede k expanzi a ochlazování oblasti hoření vodíku ve slupce a tedy ke smršťování hvězdy a poklesu jejího zářivého výkonu.
14. *ztráta hmoty hvězdným větrem*: V těchto fázích vstupuje do hry další faktor, který námi uvažované modely dobře nepopisují: únik hmoty ve formě

hvězdného větru. (V některých výpočtech se únik hmoty bere v potaz formou parametrického popisu na základě empirických údajů.)

15. *další reakce s menší vydatností, pulzace obalu, pohyb podél AGB, odvržení obalu:* Hvězda v důsledku dalších nukleárních reakcí s menší a menší energetickou vydatností stále zrychluje svůj vývoj, což vede k tomu, že je nakonec třeba další vývoj uvažovat *dynamicky*, s použitím pohybové rovnice místo rovnice hydrostatické rovnováhy. Dochází k pulsacím obalu hvězdy, v HR diagramu se hvězda pohybuje po velice složité trajektorii v blízkosti *asymptotické větve obrů* (AGB). Může dojít i k odvržení celého vnějšího obalu hvězdy.
16. *jádro Fe (Co, Ni) → elektronová degenerace → zastavení smršťování:* Výsledným produktem jaderných reakcí je jádro složené z prvků skupiny železa, jejichž atomová struktura je velmi stabilní. Jeho další smršťování nakonec zastaví *elektronová degenerace* centrálních částí hvězdy.
17. *postupné spotřebování paliva ve slupkách → smršťení hvězdy → pomalé chladnutí:* Pokud nedojde k odvržení obalu v důsledku dynamických nestabilit, spotřebuje se po zastavení kontrakce jádra zbytek nukleárního paliva v horících slupkách a celá hvězda se začne smršťovat a skončí jako více či méně kompaktní objekt v blízkosti hlavní posloupnosti čistě heliových hvězd.

Pozdní stádia vývoje (15.–16.) vyžadují mnohem složitější modely a jsou v současnosti předmětem intenzivního výzkumu.

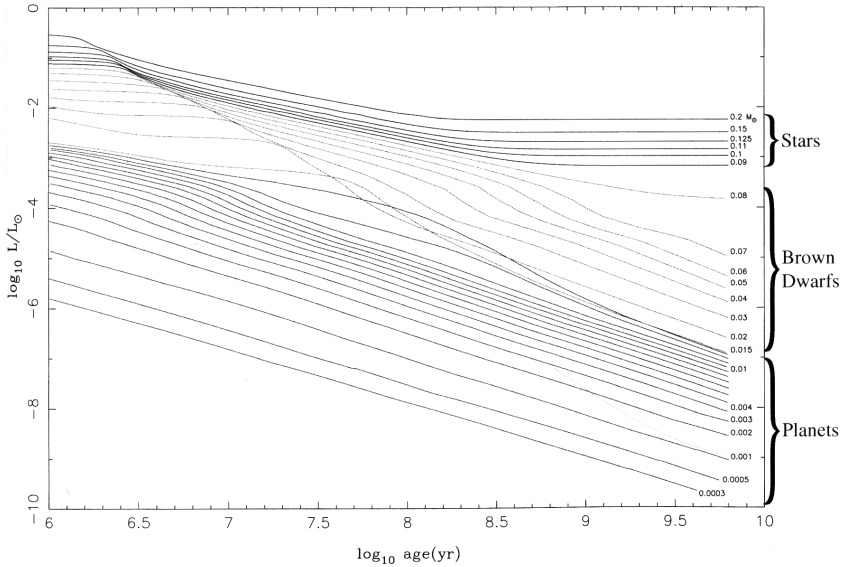
8.2 Odlišnosti hvězdného vývoje v závislosti na hmotnosti hvězdy

Počáteční hmotnost hvězdy je pro celý její vývoj zcela určující. Již z toho, co dosud víme, je zřejmé, že hvězdy s vyšší hmotností budou díky větší vlastní gravitaci schopny dosahovat při počáteční kontrakci *vyšších centrálních teplot* (a zároveň nižších hustot). Vzhledem ke strmé závislosti energetické výtěžnosti jaderných reakcí na teplotě lze proto očekávat, že **nukleární vývoj i ostatní fáze vývoje hvězdy se budou s rostoucí hmotností zkracovat**. To výpočty skutečně potvrzují. Popíšme si nyní podrobněji, jak se liší vývoj hvězd v závislosti na jejich počáteční hmotnosti (viz též přehledovou tabulku 8.1 a obrázky 8.6, 8.7, 8.8).

Je-li hmotnost protohvězdy menší než asi $0,075 M_{\odot}$, nestačí její vlastní přitažlivost k tomu, aby v jejím jádru došlo k řádnému zapálení vodíkové syntézy. Hroucení jádra proto pokračuje, hvězda chabě září na úkor změn potenciální energie a nakonec je smršťování jádra zastaveno jeho narůstající elektronovou degenerací.

Tabulka 8.1: Vývoj osamocené hvězdy v závislosti na její počáteční hmotnosti

hmotnost (M_{\odot})	stadium hoření vodíku	stadium hoření helia	konečné stadium vývoje
< 0,075	ne	ne	hnědý trpaslík
0,075–0,5	ano	ne	dynamické oscilace
	p-p řetězec	elektronová degenerace	+
0,5–1,0	ano: žádné konvektivní jádro	ano	hvězdný vítr
1,0–2,0	ano: postupně rostoucí konvektivní zóna	heliový záblesk	↓
2,0–10,0	ano: roste podíl CNO cyklu	ano	bílý trpaslík
10,0–50,0	ano: CNO dominuje, semikonvekce, konvektivní přestřelování	ano	supernova → neutronová hvězda
> 50		ano	černá díra?



Obrázek 8.5: Luminozity v závislosti na čase pro tělesa různých hmotností: planety ($M < 0,01 M_{\odot}$), hnědé trpaslíky ($M = 0,015$ až $0,07 M_{\odot}$) a trpasličí hvězdy ($M = 0,08$ až $0,2 M_{\odot}$). Planety září pouze díky gravitační kontrakci (odražené světlo zde nepočítáme), v nitru hnědých trpaslíků dochází zpočátku pouze k hoření deuteria nebo lithia, ve hvězdách se později zažehne i vodík. Převzato z práce de Pater a Lissauera (2001).

Hvězdám v tomto stavu se začalo říkat *hnědí trpaslíci* a několik desítek jich je již pozorováno. Od obřích planet se hnědí trpaslíci odlišují tím, že v nich dočasně probíhalo slučování deuteria nebo lithia, které zvyšovalo luminozitu v prvních miliónech let (obr. 8.5).¹

U hvězd, jejichž hmotnost nepřevyšuje hmotnost Slunce, probíhá jaderné slučování vodíku na helium téměř výlučně formou proton-protonového cyklu, jehož energetická závislost na teplotě je méně strmá. V důsledku toho v takových hvězdách zaujímá oblast nukleárního slučování relativně větší objem než u hvězd hmotnějších. Kromě toho se u nich vůbec *nevytvoří* centrální konvektivní zóna (obr. 8.9) a nedochází k žádnému výraznému přechodu mezi hořením vodíku v jádru a ve vodíkové slupce. Dlouhé období klidného vývoje tak zahrnuje i dobu hoření vodíku ve slupce. (Z tohoto pohledu lze říci, že si lidstvo pro svou existenci nevybralo tak špatnou centrální hvězdu.)

Pro hvězdy, jejichž hmotnost je menší než asi $0,5 M_{\odot}$, elektronová degenerace zastaví kontrakci jejich jádra po vyhoření vodíku dřív, než je dosažena teplota

¹I největší planeta sluneční soustavy, Jupiter o hmotnosti $0,001 M_{\odot}$, vysílá do okolí asi dvakrát více zářivé energie než přijímá od Slunce — vysvětlujeme si to jako stále probíhající kontrakci a uvolňování gravitační potenciální energie. Mimochodem se pro modelování atmosféry a spektra Jupitera používají stejné metody jako u hnědých trpaslíků.

potřebná ke slučování helia na uhlík.

U hvězd s hmotností mezi 1 a $2 M_{\odot}$ dochází k jinému zajímavému jevu: během jejich stabilního vývoje po zapálení vodíku v jádru se jejich centrální konvektivní zóna postupně zvětšuje v závislosti na tom, jak se spolu se zvolna rostoucí centrální teplotou stále více na produkci energie podílí i CNO cyklus.

U těchto hvězd se při centrální teplotě $T_c \simeq 10^8$ K zažehne helium, ale dojde k tomu *mimo střed* hvězdy, kvůli ztrátám energie neutriny při určitých hustotách. Normálně by zažehnutí helia způsobilo expanzi, ochlazení jádra a pokles měrného výkonu ϵ , avšak zde se uvolněná energie spotřebuje na zvýšení vnitřní energie neboli snížení stupně degenerace. Nenastane tedy *žádná expanze*, T_c dále roste, ϵ roste překotně a proběhne *heliový záblesk*. Špičkový výkon přitom dosahuje až $10^{10} L_{\odot}$! (Helium se zde spálí najednou, nikoli pomalu a postupně.) Tento jev nicméně není vidět na povrchu. Záblesk skončí až jádro přestane být degenerované, pak nastane opožděná expanze jádra, rozepnutí vodíkové slupky, pokles ϵ , a na povrchu tedy uvidíme pokles L , bez ohledu na záblesk.

Pro hvězdy s hmotností mezi 0,5 a asi $10 M_{\odot}$ můžeme předpokládat, že v pozdějších fázích vývoje ztratí díky dynamickým oscilacím a vlivem hvězdného větru své vnější vrstvy a poté, co se v jejich jádru uplatní elektronová degenerace, končí jako *bílí trpaslíci*, horké a velmi husté hvězdy, „skrblicí“ svou zářivou energií a velmi zvolna chladnoucí.

Konečně u hvězd s hmotností větší než asi $10 M_{\odot}$ dochází během hoření vodíku v jádru k rozšiřování konvektivní zóny v důsledku značného tlaku záření. Protože v uvažovaném rozsahu teplot a hustot je opacitní koeficient určován především rozptylem na volných elektronech, pro který platí přibližný vztah

$$\kappa \doteq 0,19 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} (1 + X), \quad (8.2)$$

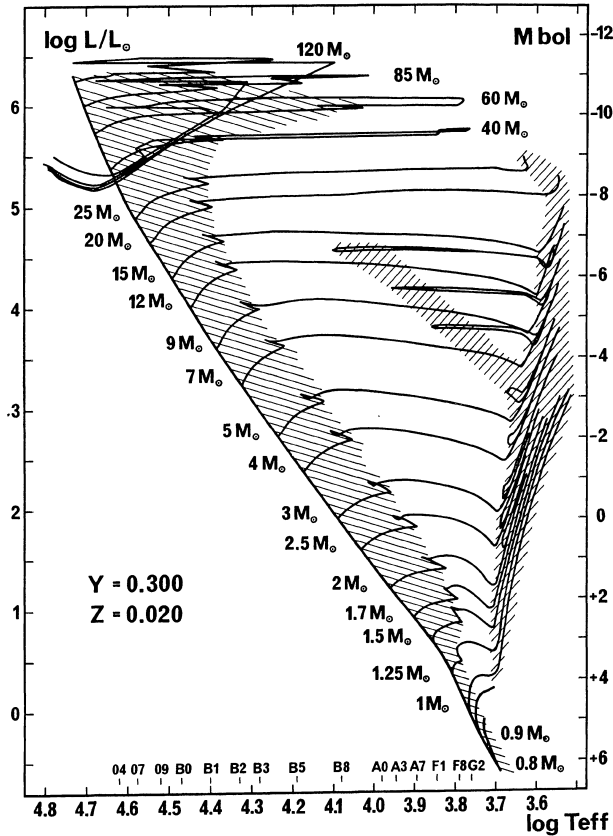
roste opacita s rostoucím obsahem vodíku a vrstvy nad konvektivní zónou se tak stávají vůči konvekci nestabilní. Vytváří se *semikonvektivní zóna*, tj. oblast, ve které dochází pouze k částečnému promíchávání chemických elementů tak, aby v každém místě byla splněna podmínka $\nabla_{\text{rad}} = \nabla_{\text{ad}}$.

V literatuře se rovněž vedou spory o tom, zda nedochází k jevu nazývanému *konvektivní přestřelování* (angl. convective overshooting). Jde o to, že pokud je materiál vztlakem nadlehčován a unášen konvekcí vzhůru, může kinetická energie velkých konvektivních elementů způsobit to, že se část materiálu dostane i do míst, kde již podmínka konvektivní rovnováhy splněna není. Tím by se velikost oblasti, ve které dochází k promíchávání materiálu, poněkud zvětšila (viz obr. 8.10).

Jak ukázal teoreticky již Chandrasekhar (1938), pokud hmotnost *jádra* složeného z prvků skupiny železa (nikoli celé hvězdy) překročí $1,4 M_{\odot}$, stačí jeho vlastní přitažlivost k tomu, aby překonala gradient tlaku vzniklý elektronovou degenerací. Dochází k dezintegraci atomových jader při interakci



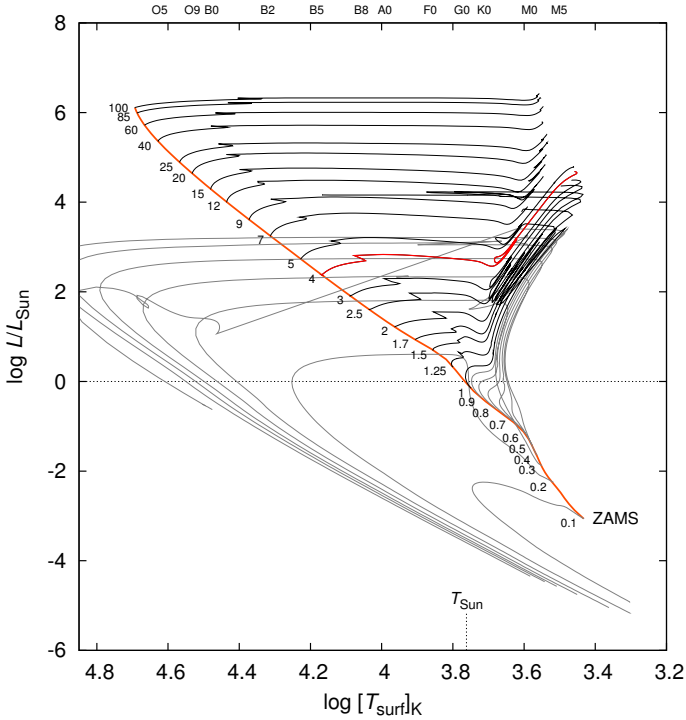
a vzniká neutronové jádro. Kolaps jádra je provázen prudkým uvolněním obrovského množství gravitační potenciální energie, kterou z velké části odnesou neutrina.



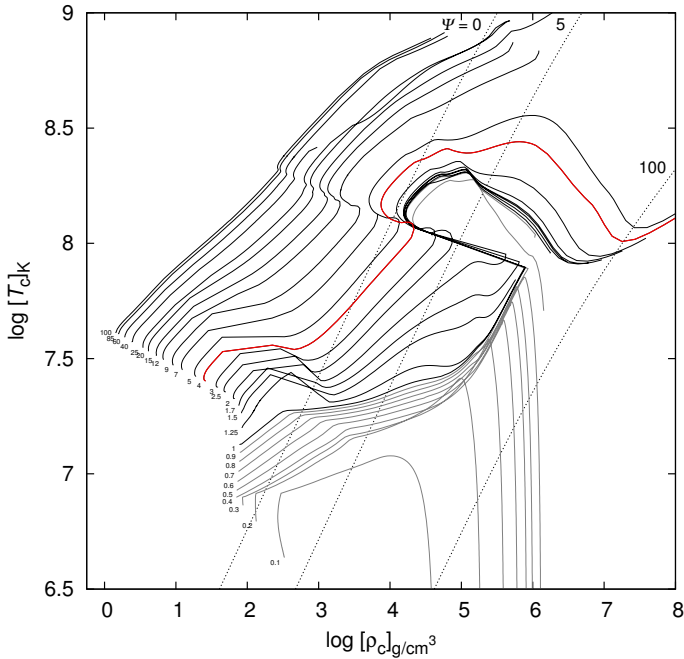
Obrázek 8.6: Hertzsprungův–Russellův diagram pro hvězdy 0,8 až $120 M_{\odot}$, s obsahem hélia $Y = 0,3$ a metalitou $Z = 0,02$. Šrafované jsou vyznačené oblasti pomalého nukleárního vývoje. Převzato z práce Schallera a spol. (1992).

Náraz obalu na tvrdou *neutronovou hvězdu*, vzniknuvší rázová vlna a zejména ohřev neutrinu odmrští celý obal hvězdy rychlostmi, které překonávají rychlost únikovou. Radioaktivní prvky, které vznikly při nukleosyntéze za rázovou vlnou, pak dávají vzniknout opožděnému záření *supernovy*.

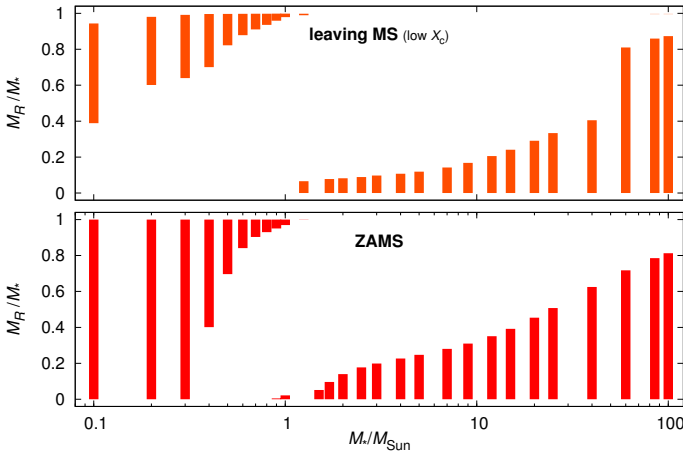
V Galaxii extrémně vzácné hvězdy s počáteční hmotností nad asi $50 M_{\odot}$ by mohly v závěrečných fázích vývoje dosáhnout v jádru tak velkou přitažlivost, že by došlo k uplatnění relativistických efektů a vzniku *černé díry*. Je třeba ovšem upozornit na to, že např. modelové výpočty ženevské skupiny (např. Schaller a spol. 1992), ve kterých se bere v potaz i únik hmoty ve formě *hvězdného větru*, ukazují, že např. hvězda s počáteční hmotností $60 M_{\odot}$ ztratí již během fáze hoření vodíku v jádru plných $12 M_{\odot}$.



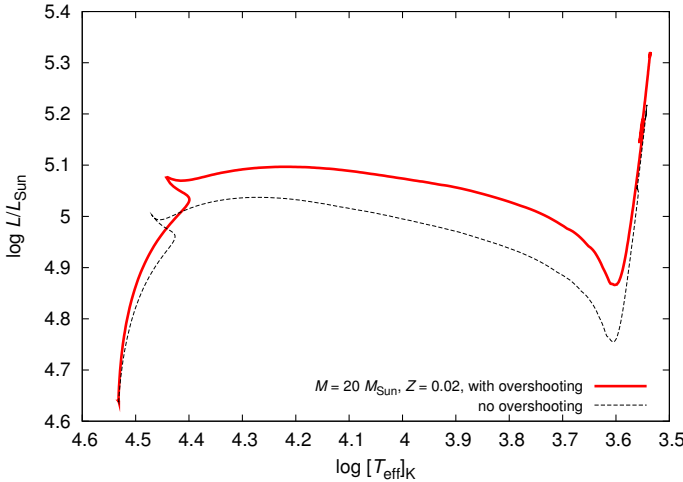
Obrázek 8.7: Vývoj hvězd s počátečními hmotnostmi od $0,1$ do $100 M_{\odot}$ a abundancemi $Y = 0,28$, $Z = 0,02$ na Hertzsprungově–Russellově diagramu. Červeně je vyznačena hvězda $4 M_{\odot}$. Hvězdy lehčí než Slunce se vyvíjejí pomalu, jejich životní doby na hlavní posloupnosti přesahují stáří vesmíru; nejllehčí hvězda s $0,1 M_{\odot}$ ji opustí a ochladne až za 4 miliardy let. Výpočet programem EZ.



Obrázek 8.8: Vývoj centrálních hustot ρ_c a teplot T_c pro hvězdy $M = 0,1$ až $100 M_\odot$ a $Y = 0,28$, $Z = 0,02$. Pro hvězdy hmotnější než $2 M_\odot$ je zřetelné, že T_c je rostoucí, kdežto ρ_c klesající funkcí hmotnosti M . U hvězd středních hmotností $0,8$ až $2 M_\odot$ vidíme po spotřebování vodíku v jádře nejprve růst centrální hustoty i teploty, způsobený smrštěním jádra. Pak proběhne rychlý héliový záblesk a opožděné rozepnutí jádra (pokles ρ_c). U hmotnějších hvězd je přechod mezi hořením vodíku a hélia pozvolný. Tečkové linie označují stupeň degenerace Ψ látky. Výpočet programem EZ.



Obrázek 8.9: Konvektivní zóny v nitrech hvězd různých hmotností ($M = 0,1$ až $100 M_{\odot}$, s $Y = 0,28$, $Z = 0,02$). Pro danou počáteční hmotnost hvězdy M_* je barevně vyznačena oblast konvektivní zóny v proměnné M_R , škálované hodnotou M_* . Dolní panel: situace na hlavní posloupnosti nulového věku. Horní panel: situace při opuštění hlavní posloupnosti (když je X_c malé). Výpočet programem EZ.



Obrázek 8.10: Vliv konvektivního přestřelování na vývoj hvězdy s $M = 20 M_{\odot}$ v HR diagramu. Parametr přestřelování byl zvolen `overshoot_param = 0.12`. Výpočet programem EZ.

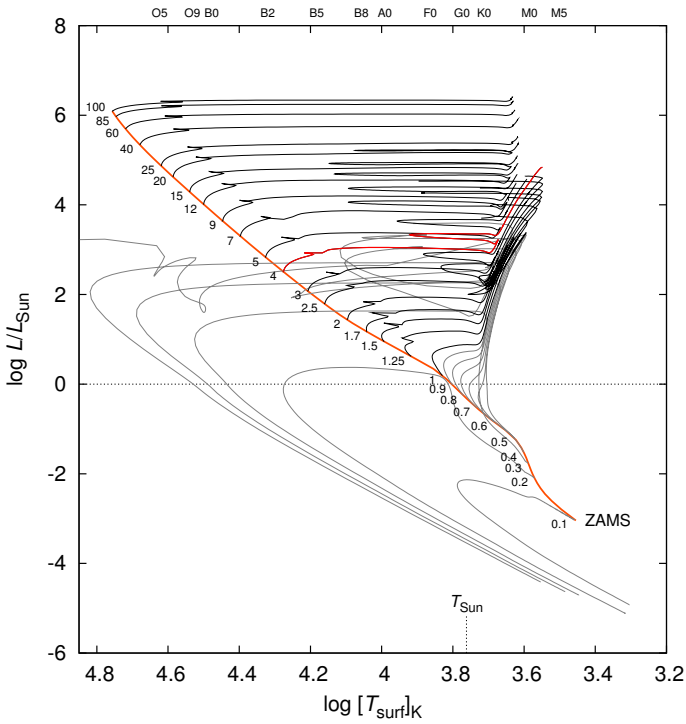
Vliv počátečního obsahu hélia a těžších prvků. Je zřejmé, že vývoj hvězdy je také funkcí počátečního chemického složení, tedy hodnot X, Y, Z . Na obrázku 8.11 vidíme HR diagram pro nižší hodnotu metalicity $Z = 0,001$ (a zároveň nižší Y). Nejnápadnějšími rozdíly jsou:

1. různá poloha *hlavní posloupnosti nulového věku* (patrně proto, že Z hraje roli již při gravitačním kolapsu a také účinnost CNO cyklu klesá se Z , čili se v nitru ustaví jiná hydrostatická rovnováha);
2. u hvězd s hmotností $M = 1$ až $15 M_{\odot}$ se častěji objevuje pokles T_{eff} („klička“ na HR diagramu) v pozdních fázích vývoje.

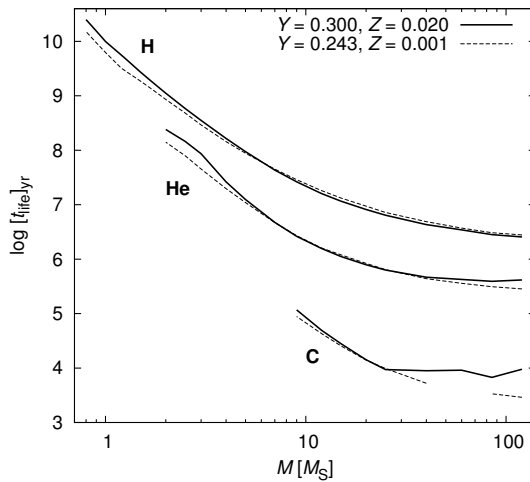
Závislost doby hoření vodíku, případně helia, na hmotnosti a metalitě znázorňuje obrázek 8.12. Pro *lehké* hvězdy platí, že menší Z vede k menší střední molekulové hmotnosti μ , většímu P_c, T_c, ρ_c (dle stavové rovnice), rychlejšímu průběhu reakcí a *kratší* době života.

U *těžkých* hvězd je tomu jinak: menší Z sice stále znamená menší μ , ale zároveň je méně účinný CNO cyklus, dX_c/dt pak vychází přibližně stejné pro obě metalicity a rozhoduje především větší počáteční obsah vodíku X , což vede na *delší* dobu života.²

²Rozdíly nejsou způsobené hvězdným větrem, který je sice podstatně účinnější při $Z = 0,02$, ale přesto má lehčí hvězda (s větším úbytkem M) kratší životní dobu.



Obrázek 8.11: Vývojový H–R diagram jako na obr. 8.7, ale pro nižší hodnotu metalicity $Z = 0,001$.



Obrázek 8.12: Doby hoření vodíku, hélia a uhlíku v závislosti na počáteční hmotnosti hvězdy, počítané pro různá počáteční chemická složení. Podle Schallera a spol. (1992).

9 Srovnání předpovědí teorie hvězdného vývoje s pozorováním

Zkoumejme nyní otázku, nakolik se zjednodušená teorie stavby a vývoje hvězd, založená na jednorozměrných modelech, shoduje s tím, co je o stavbě a vývoji hvězd známo z jejich pozorování.

9.1 Jak získávat pozorovací data?

Je zřejmé, že všechny makroskopické veličiny, jež charakterizují hvězdy, a které můžeme ze Země pozorovat, se v důsledku hvězdného vývoje v naprosté většině vývojových fází mění příliš *pomalou*, než abychom je mohli během lidského života pozorovat. Kvantitativní pozorovací údaje o jasnostech či teplotách hvězd existují (až na několik čestných výjimek) pouze za období posledních asi 100 až 150 let. Nezbyvá proto, než se při srovnávání teorie s pozorováním uchýlit ke *statistice* a k jiným nepřímým metodám srovnávání a k hledání důkazů rozdílného vývoje v důsledku různé počáteční hmotnosti hvězd.

Uvažme nejprve, jaké měřitelné veličiny můžeme pro takové porovnávání použít: (i) zářivý výkon hvězdy, (ii) efektivní teplotu, (iii) hmotnost a poloměr, (iv) diagram V versus $(B - V)$ pro hvězdokupy.

Zářivý výkon hvězdy. Velké množství hvězd bylo proměřeno v Johnsonově UBV systému či ve Strömgenově *uvby*. Hvězdné velikosti měřené ve žluté barvě Strömgenova systému y jsou přímo navázány na Johnsonovy hvězdné velikosti ve *žlutém* filtru V jeho systému. I z dalších praktických důvodů se při srovnávání dat z různých zdrojů jeví hvězdná velikost měřená ve žluté barvě jako nejvhodnější: rozložení energie hvězd se v oblasti žluté barvy kolem 550 nm mění jen zvolna s vlnovou délkou a také extinkční koeficient naší atmosféry je při pozorování ve žluté barvě nižší, než v barvě modré či fialové. (Za dobrých pozorovacích podmínek zřídka kdy na

kterékoliv pozemské observatoři přesahuje hodnotu 0,3–0,4; v dobrých podmínkách bývá pouze asi 0,15.) Ze všech těchto důvodů jsou měření ve žluté barvě zatížena nejmenšími chybami a také se nejnázne převádějí na standardní systém.

Chceme-li ovšem měření jasnosti ve žluté barvě srovnávat s bolometrickým zářivým výkonem modelu L_* , musíme provést několik kroků. Nejprve musíme měřenou *zdánlivou* hvězdnou velikost V přepočítat na velikost *absolutní* M_V , jakou by hvězda měla ve vzdálenosti 10 pc od nás. (1 pc = $3,085678 \cdot 10^{16}$ m je vzdálenost, ze které je vidět střední poloměr zemské dráhy okolo Slunce, astronomická jednotka, pod úhlem 1''0.) Protože tok záření v prázdném prostoru ubývá se čtvercem vzdálenosti d , je zřejmě podle Pogsonovy rovnice

$$M_V - V = -2,5 \log \frac{L/(10 \text{ pc})^2}{L/d^2} = 5 - 5 \log[d]_{\text{pc}}. \quad (9.1)$$

Vlivem mezihvězdné hmoty však dochází na velkých vzdálenostech k pohlcování světla hvězdy, což se obvykle popisuje *absorpčním koeficientem* ve žluté barvě A_V . Po proměření řady hvězd, u nichž bylo možno získat určitou představu o jejich vzdálenosti od nás, bylo zjištěno, že absorpci ve žluté barvě lze dobře popsat pomocí vztahu

$$A_V \doteq 3,^m2 E(B - V), \quad (9.2)$$

kde veličina $E(B - V)$ označuje *zčervenání* barevného indexu $(B - V)$. To se dá z měření v Johnsonově či Strömgenově systému obvykle dobře určit. Zčervenání lze také odvodit podle velikosti charakteristického zavlňení v průběhu spojitého spektra v dalekém ultrafialovém oboru kolem 250 nm, jehož velikost je úměrná právě velikosti zčervenání $E(B - V)$.

Zdánlivá hvězdná velikost ve žluté barvě, opravená o mezihvězdnou absorpci, se obvykle označuje indexem nula a je tedy

$$V_0 = V - A_V. \quad (9.3)$$

Pro absolutní hvězdnou velikost ve žluté barvě, zvanou obvykle velikost *visuální*, tak dostáváme jednoduchý pracovní vztah

$$M_V = V_0 + 5 - 5 \log[d]_{\text{pc}} = V_0 + 5 + 5 \log[\pi]_{\text{arcsec}}. \quad (9.4)$$

Vztah (9.4) můžeme přirozeně použít jen tehdy, známe-li vzdálenost hvězdy od nás. Pro hvězdy do vzdáleností asi 100 pc bylo možno vzdálenosti již od dob astronomického využití fotografických emulzí určovat trigonometrickou metodou. V nedávné době se díky mimořádně úspěšné družici Evropské kosmické agentury *Hipparcos*, která měřila velmi přesné paralaxy a též jasnosti hvězd v období let 1989–1994, podařilo tuto hranici prakticky o jeden řád zvětšit. Kromě toho lze měření jasnosti této družice pořizovaná ve velmi širokopásmovém filtru a označovaná jako H_p , v mnoha případech velmi přesně převést na Johnsonovu hvězdnou velikost V ve žluté barvě pomocí vztahu, který publikoval Harmanec (1998).

Jinou možností, i když podstatně méně přesnou, je odhadnout zářivý výkon (a vzdálenost) podle vzhledu spektra hvězdy. Tato metoda *spektroskopické paralaxy* byla navržena Adamsem a Kohlschütterem (1914).

Rozdíl mezi bolometrickou a vizuální absolutní hvězdnou velikostí se nazývá *bolometrická korekce BC*. Bolometrické korekce byly empiricky určeny na základě měření úhlových průměrů hvězd pomocí intenzitního interferometru, měření jejich spektra a s použitím modelů atmosfér pro odhad příspěvku z krátkovlnné části spektra. Souhrnně jsou jako funkce efektivní teploty tabelovány v pracích Code a spol. (1976) a Flower (1996) nebo v závislosti na spektrálním typu hvězd v práci Popper (1980). Jejich přičtením k absolutní vizuální velikosti ze vztahu (9.4) dostáváme potřebnou absolutní velikost bolometrickou

$$M_{\text{bol}} = M_V + BC. \quad (9.5)$$

Tuto bolometrickou hvězdnou velikost můžeme již přímo porovnat s bolometrickou hvězdnou velikostí spočtenou ze zářivého toku hvězdy, udaného v jednotkách zářivého toku Slunce, který bývá obvykle v pracích s modely hvězdných niter tabelován:

$$M_{\text{bol}} - M_{\text{bol}\odot} = -2,5 \log \frac{L_*}{L_\odot}. \quad (9.6)$$

Protože novější studie ukazují, že zářivý výkon Slunce se poněkud mění během jedenáctiletého slunečního cyklu, a protože hodnota sama závisí na současné přesnosti našich měření, vyskytují se v literatuře pro zářivý výkon Slunce mírně odlišné údaje. To je ovšem nepříjemnost, která do našich srovnání vnáší zbytečnou nepřesnost navíc. Proto Mezinárodní astronomická unie přijala na svém 23. valném shromáždění r. 1997 resoluci, která stanoví, že nadále již nebude bolometrický zářivý výkon hvězd kalibrován zářivým výkonem Slunce, ale že jeho *nulový bod* bude pevně stanoven, konkrétně

$$L_0 = 3,055 \cdot 10^{28} \text{ W} \quad \text{pro} \quad (9.7)$$

$$M_{\text{bol}} = 0,^m00. \quad (9.8)$$

To jinými slovy znamená, že bolometrická hvězdná velikost není již definována pouze relativně, ale absolutně. Snadno zjistíme, že pro zářivý výkon ve watttech plyne z právě uvedené definice vztah

$$M_{\text{bol}} = -2,5 \log[L]_{\text{W}} + 71,^m2125. \quad (9.9)$$

Je snadné si ověřit, že to dobře odpovídá často přijímaným následujícím středním hodnotám pro Slunce

$$M_{\text{bol}\odot} = +4,^m75, \quad (9.10)$$

$$L_\odot = 3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}. \quad (9.11)$$

Efektivní teplota hvězdy. Efektivní teplotu T_{eff} hvězdy lze odhadnout přímo z jejího *spektrálního typu*. Existují různé škály efektivních teplot od různých autorů, jako dobrou lze doporučit např. škálu publikovanou v práci Popper (1980). Ideální ovšem je použít k určení efektivní teploty spočtené detailní *modely hvězdných atmosfér* a srovnávat pozorované a spočtené profily řady spektrálních čar, až nalezneme model, jehož spočtené čáry nejlépe popisují spektrum pozorované.

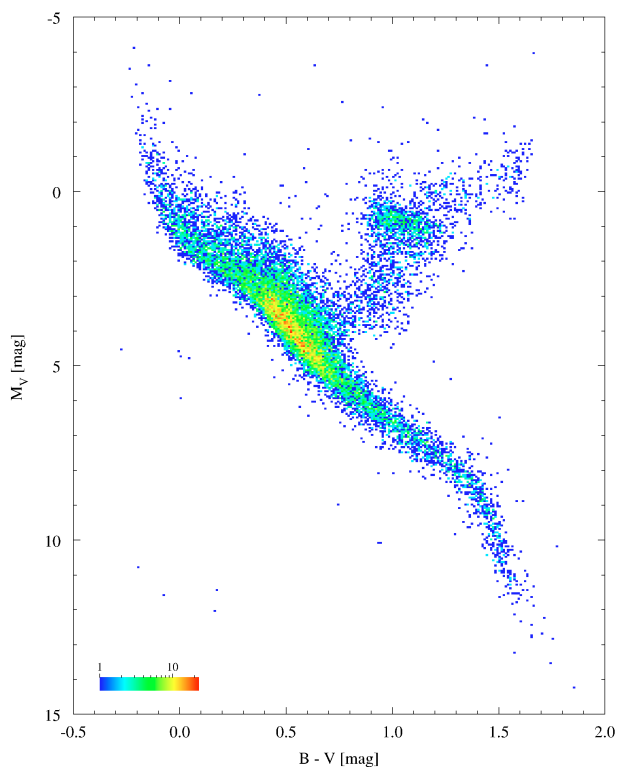
Hmotnosti a poloměry hvězd. Pro řadu *oddělených* zákrytových dvojhvězd, jejichž vývoj nebyl dosud ovlivněn přímou interakcí mezi složkami, se podařilo ze spektroskopie a fotometrie určit všechny jejich základní vlastnosti: hmotnosti M , poloměry R , efektivní teploty T_{eff} a zářivé výkony L obou složek.

Poloměry hvězd lze rovněž získat z kombinace *interferometrických pozorování*, poskytujících úhlové rozměry, a spolehlivě určené vzdálenosti. Tu lze pro bližší hvězdy získávat přímým trigonometrickým měřením, jak už o tom byla řeč výše, nebo lze studovat hvězdy z hvězdokup s dobře určenou vzdáleností.

Diagram V versus $(B - V)$ pro hvězdokupy. Protože i hvězdokupy, patřící do naší Galaxie, jsou od nás vzdáleny nejméně desítky parseků, můžeme vzhledem k jejich daleko menším vlastním rozměrům předpokládat, že všechny jejich členy vidíme prakticky ve *stejně vzdálenosti* od nás. Toto poznání se stalo základem pro jeden z nejlepších testů teorie hvězdného vývoje. Pro danou hvězdokupu totiž stačí provést měření jasnosti jejich členů v nějakém standardním fotometrickém systému a poté zkonstruovat diagram barevný index versus *zdánlivá* vizuální hvězdná velikost. Takový diagram je v zásadě jen jiným provedením HR diagramu. Příkladně pro Johnsonův UBV systém existuje velmi dobrá kalibrace mezi indexem $(B - V)$ a spektrálním typem či efektivní teplotou hvězdy. Protože všechny hvězdy kupy jsou zhruba stejně daleko, popisují zdánlivé jasnosti hvězd zcela správně jejich *vzájemné* jasnosti.

9.2 Vysvětlení hlavních rysů Hertzsprungova–Russellova diagramu

Zcela zásadním úspěchem teorie hvězdného vývoje je to, že dokáže velmi dobře vysvětlit nerovnoměrné rozložení hvězd v HR diagramu (obr. 9.1). Konkrétně *hlavní posloupnost* se ukázala být identická s množinou bodů $(\log T_{\text{eff}}, M_{\text{bol}})$, které definují modely hvězd o různých počátečních hmotnostech pro fáze klidného slučování vodíku na helium v jejich jádrech. Teorie předpovídá, že tyto fáze vývoje trvají nejdéle, a proto máme statisticky největší šanci právě v nich hvězdy pozorovat. Navíc se velmi uspokojivě shodují předpovězená a pozorovaná poloha hlavní posloupnosti.



Obrázek 9.1: Hertzsprungův–Russellův diagram ($B - V, M_V$) zkonstruovaný na základě měření družice Hipparcos. Hipparcos změnil přesné paralaxy a provedl UBV fotometrii pro přibližně 17 000 hvězd. Barevná škála znázorňuje počet hvězd v jedné buňce ($\Delta(B - V), \Delta M_V$). Převzato z http://www.rssd.esa.int/index.php?project=HIPPARCOS&page=HR_dia.

9.3 Projevy vývoje ve hvězdokupách

Historicky prvním velkým úspěchem teorie hvězdného vývoje byl souhlas předpovědi s pozorováními několika hvězdokup, který publikoval Sandage (1957). Jak jsme podrobně probrali, vyvíjejí se hvězdy tím rychleji, čím je jejich počáteční hmotnost větší. Mimo to můžeme pokládat za velice pravděpodobné, že všechny hvězdy dané hvězdokupy vznikly *současně*, a také ze stejného materiálu. Každá hvězdokupa je tedy jako celek nějak stará a dá se čekat, že čím je starší, tím méně hmotné hvězdy k ní patřící stačily již spotřebovat ve svých jádrech zásobu vodíku a opustit hlavní posloupnost. Sandage poskládal v HR diagramu pozorování hvězd z 11 hvězdokup se známými absolutními vizuálními hvězdnými velikostmi a ukázalo se, že v dolní části hlavní posloupnosti se pozorování ze všech hvězdokup dobře shodovala, zatímco v horní části se jednotlivé hvězdokupy lišily podle svého stáří (obr. 9.2).

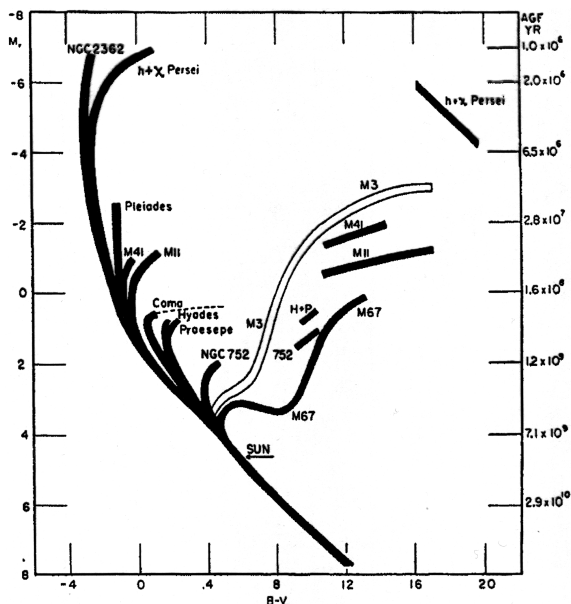
Toto zásadní zjištění je dnes používáno již ne k důkazu správnosti teorie hvězdného vývoje, ale naopak k určování stáří hvězdokup a jejich vzdálenosti od nás. Při detailních studiích se postupuje tak, že se nejprve pomocí spektroskopických pozorování řady členů kupy určí její *chemické složení*, konkrétně obsah Z těžkých prvků a helia Y , a poté se srovnává její pozorovaný HR diagram s předpovědí modelových výpočtů pro dané chemické složení. Z bodu, kde se pozorovaná sekvence hvězd kupy v HR diagramu začíná vzdalovat od hlavní posloupnosti, lze velmi přesně odhadovat vývojový věk kupy. Konstanta, kterou by bylo třeba odečíst od pozorovaných zdánlivých vizuálních hvězdných velikostí, opravených o mezihvězdnou absorpci, aby se hvězdy hlavní posloupnosti v pozorovaném a modelovém HR diagramu překrývaly, se obvykle nazývá *modul vzdálenosti* $V_0 - M_V$ a podle (9.4) jej zřejmě lze vyjádřit jako

$$V_0 - M_V = 5 \log[d]_{\text{pc}} - 5. \quad (9.12)$$

Z něj můžeme ihned spočítat vzdálenost d hvězdokupy od nás.

Je třeba se zmínit, že poté, co byla zpracována měření vzdáleností z již zmiňované družice Hipparcos, ukázalo se, že pro většinu dobře pozorovaných galaktických hvězdokup se fotometricky a trigonometricky určené vzdálenosti velmi dobře shodují, ale v několika případech existuje dosud ne zcela uspokojivě vysvětlený rozdíl.

Konkrétně pro velmi známou hvězdokupu Plejády (M45) je podle Pinsonneaulta a kol. (1998) fotometricky určená vzdálenost (s použitím modelů hvězdného vývoje) asi 130 pc, zatímco měření družice *Hipparcos* vedou na vzdálenost (116 ± 3) pc. Tito autoři vyslovili domněnku, že měření družice *Hipparcos* mohou být na některých částech oblohy zatížena systematickou chybou. Na obranu spolehlivosti měření družice *Hipparcos* však velmi přesvědčivě vystoupili Robichon a spol. (1999), kteří ukázali, že fotometrická vzdálenost Plejád se podle určení různých autorů pohybuje v rozmezí 124 až 132 pc a z vlastní analýzy určili vzdálenost Plejád z družicových měření na 115 až 121 pc. Nezávisle vyloučil existenci systematických chyb v měření družice *Hipparcos* van Leeuwen (1999), který z nich určil vzdálenost Plejád v rozpětí 115 až 122 pc. Nicméně Narayanan a Gould (1999) publikovali kritickou studii, ve které dokazovali, že družici *Hipparcos* měřené paralaxy Plejád a Hyád



Obrázek 9.2: Hertzsprungův–Russellův diagram pro vybrané hvězdokupy. Převzato z práce Sandage (1957).

jsou prostorově korelovány na úhlových vzdálenostech asi 2° až 3° s amplitudami až $0''/002$. Za předpokladu, že se všechny hvězdy náležející do Plejád pohybují se stejnou prostorovou rychlostí poté odvodili jejich individuální paralaxy z vlastních pohybů, rovněž měřených družicí Hipparcos a z nich získali vzdálenost Plejád (131 ± 11) pc, tedy hodnotu shodující se s klasickými odhady. Li a Junliang (1999) nezávisle statisticky vyhodnotili prostorový pohyb hvězd z Plejád a určili vzdálenost ($135,56 \pm 0,72$) pc.

Příběh ale pokračoval. Munari a kol. (2004) publikovali studii první objevené zákrytové dvojhvězdy v Plejádách V1229 Tau = HD 23642 a určili její vzdálenost na (132 ± 2) pc, ve výborné shodě s fotometricky určenou vzdáleností Plejád a v rozporu se vzdáleností určenou družicí Hipparcos. Další studii zákrytové dvojhvězdy V1229 Tau publikovali Southworth a kol. (2005). Nově analyzovali fotometrii získanou Munarim a kol. a zaměřili se na analýzu chyb. Určili vzdálenost dvojhvězdy několika metodami konsistentně na (139 ± 1) pc. To se ovšem liší od dřívějších fotometrických určení vzdálenosti Plejád skoro stejně, jako se tato určení liší od vzdálenosti měřené družicí Hipparcos. Ještě jednu detailní studii V1229 Tau publikovali Groenewegen a kol. (2007), kteří dospěli ke vzdálenosti ($138,0 \pm 1,5$) pc. Pan a kol. (2004) použili velký interferometr na Palomaru a rozlišili prostorovou dráhu spektroskopické dvojhvězdy Atlas = HD 23850, která má oběžnou periodu asi 291 dní. Došli k závěru, že tato dvojhvězda je od nás vzdálena více než 127 pc, přičemž nejpravděpodobnější vzdálenost stanovili na 133 až 137 pc. Zwahlen a kol. (2004) poté získali i přesnou spektroskopickou dráhu obou složek této dvojhvězdy. Vzhledem k tomu, že z analýzy astrometrické dráhy lze získat úhlový rozměr velké poloosy oběžné dráhy a sklon

oběžné roviny, zatímco ze spektroskopie lze určit rozměr poloosy dráhy v absolutních jednotkách násobený sinem sklonu oběžné dráhy, vede kombinace obou dráhových řešení na skoro čistě geometrické určení vzdálenosti dvojhvězdy. Zwahlen a kol. tímto způsobem stanovili vzdálenost Plejád na (132 ± 4) pc.

9.4 Projevy vývoje ve dvojhvězdách

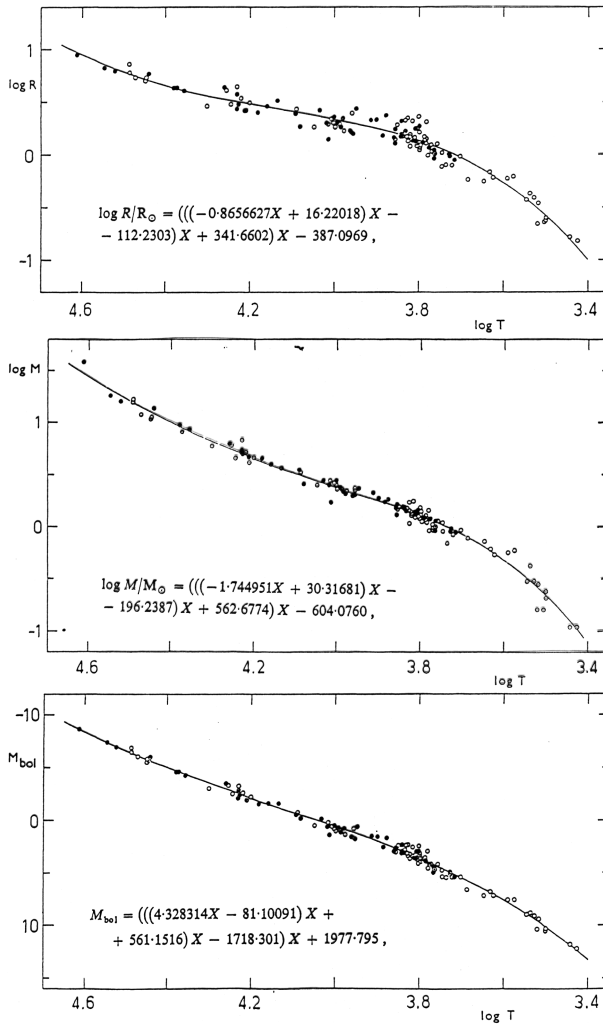
Pokud se podaří pro některou zákrytovou dvojhvězdu s dobrou přesností určit její základní fyzikální vlastnosti, můžeme se opět pokusit o srovnání s vývojovými modely spočtenými pro pozorované hmotnosti obou složek. Harmanec (1988) kriticky shromáždil určení hmot a poloměrů hvězd hlavní posloupnosti a odvodil střední závislost těchto veličin na efektivní teplotě hvězdy (obr. 9.3). Jeho *empirickou kalibraci* lze porovnat se spočtenou sítí modelů Schallera a spol. (1992). Toto srovnání ukazuje velmi dobrou shodu v celém rozsahu hmotností, pro něž byly modely spočteny (obr. 9.4).

Andersen (1991) prováděl detailní srovnání vývojových modelů s konkrétními dvojhvězdami. Ve většině případů našel velmi dobrou shodu, t.j. v mezích přesnosti stejný vývojový věk obou složek a dobrou shodu vypočtené a pozorované polohy v různých diagramech (obr. 9.5). Pro některé systémy se však shodu nalézt nepodařilo pro žádné rozumné chemické složení.

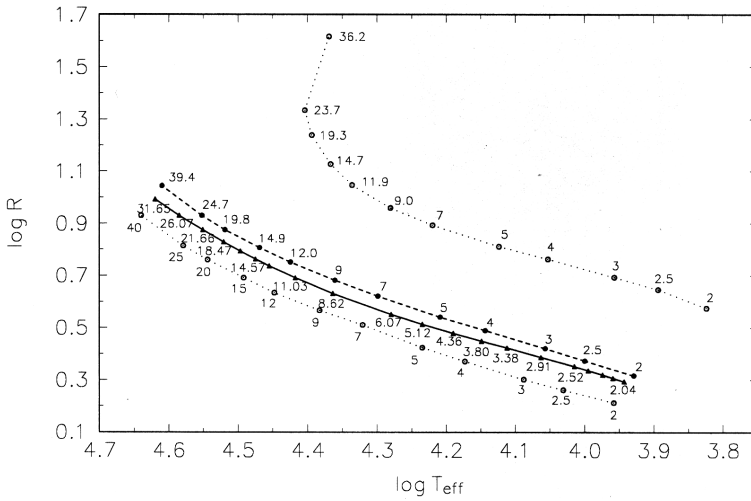
9.5 Změny chemického složení pozorované ve spektrech

Po většinu vývoje hvězdy jsou jakékoliv změny chemického složení skryté v jádře, kde probíhají nukleární přeměny, a na povrchu hvězdy se vůbec neprojevují — tam je chemické složení prakticky stejné jako na hlavní posloupnosti nulového stáří. Jádro a povrch jsou oddělené zónou zářivé rovnováhy.

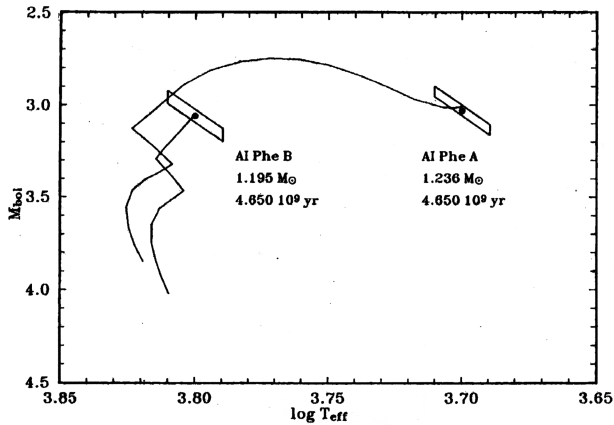
V pozdějších fázích hvězdného vývoje však obvykle vznikají *povrchové konvekční zóny*, které zasahují až do oblastí, kde předtím probíhaly nukleární přeměny (je v nich tedy zvýšený nebo snížený obsah helia, případně těžších prvků). Proudění tak může syntetizované prvky *vynešt* k povrchu, což se samozřejmě projeví v atmosféře hvězdy, a tedy i ve spektru, jako změny intenzit a profilů určitých



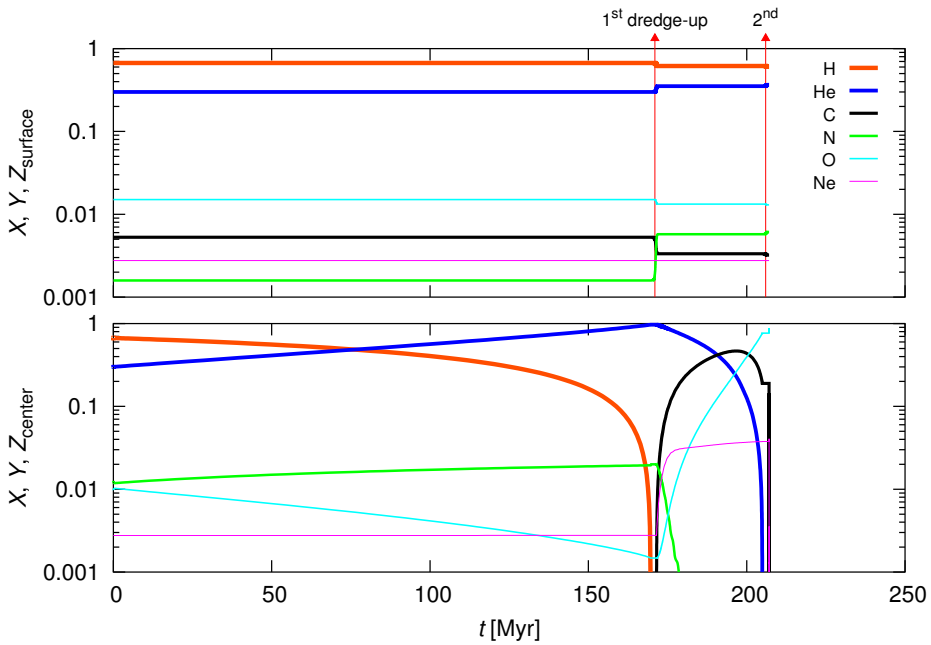
Obrázek 9.3: Parametry (T_{eff} , M_{bol} , M_* , R), určené měřením složek dvojhvězd, které posléze umožnily odvodit empirické závislosti mezi těmito veličinami. Převzato z práce Harmance (1988).



Obrázek 9.4: Porovnání empirické závislosti $R(T_{\text{eff}})$, odvozené z pozorování oddělených dvojhvězd (plná čára), s pozdějšími teoretickými modely Schallera a spol. (1992). U symbolů jsou zapsané hmotnosti hvězd v jednotkách M_{\odot} , tečkované čáry znázorňují hlavní posloupnost nulového věku (ZAMS) a konec hlavní posloupnosti (TAMS), čárkované jsou vyznačeny polohy hvězd přibližně v polovině pobytu na hlavní posloupnosti. Převzato z práce Harmance (2002a).



Obrázek 9.5: Vývoj složek dvojhvězdy AI Phe na HR diagramu (T_{eff} , M_{bol}), od hlavní posloupnosti nulového věku po dobu 4,65 Gyr, a porovnání s polohami odvozenými z pozorování (s určitými chybovými intervaly). Chemické složení bylo také volným parametrem. Převzato z práce Andersena (1991).



Obrázek 9.6: Chemické složení v centru a na povrchu hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$. Po většinu nukleárního vývoje nejsou změny v centru vůbec znatelné na povrchu. Až rozšíření povrchové konvektivní zóny směrem k jádru, v čase 171 Myr, způsobí první vynesení k povrchu — obohacení o helium, dusík a ochuzení o kyslík, uhlík — což se projeví v atmosféře (a ve spektru). Druhé vynesení následuje v čase 206 Myr. Výpočet programem EZ.

spektrálních čar.¹ Takových vynesení se může odehrát vícero — jedno až tři, v závislosti na hmotnosti hvězdy (obr. 9.6).

Konvekce může z nitra vynést také *radioaktivní prvky* s krátkými poločasy rozpadu. Příkladem je nuklid technecia ^{99}Tc , který má poločas rozpadu $t_{1/2} = 211\,000\text{ yr}$, a jehož přítomnost v atmosféře se projeví spektrálními čarami na $\lambda = 403$ až 430 nm . Příkladem může být R Geminorum nebo jiné hvězdy ve fázi po asymptotické větvi obrů (Merril 1952, Lebzelter a Hron 2003). Čára důkazem, že konvektivní zóna zasahuje hluboko do nitra, kde jsou podmínky umožňující vznik těchto nestabilních nuklidů zachycováním pomalých neutronů (s-procesem).

¹Spektrum se pochopitelně mění při každé změně teploty a ionizace ve fotosféře. Zde však musíme mít dokonalejší model hvězdné atmosféry, který prokáže, že pozorovaná změna je způsobena právě změnou chemického složení fotosféry.

9.6 Test vnitřní struktury hvězd pomocí apsidálního pohybu

Již dlouhou dobu je známo, že některých dvojhvězd ve výstředných drahách lze využít k mapování vnitřní struktury jejich složek. Pokud by dvojhvězda ve výstředné dráze sestávala ze dvou hmotných bodů, byla by její dráha keplerovská, čili oběžný pohyb eliptický a neměnný. Jakmile však hvězdy zaujímají konečný objem některé ekvipotenciální plochy nebo jakmile se uplatňují relativistické efekty, dochází k narušování eliptického pohybu.

9.6.1 Apsidální pohyb v klasické mechanice

Podrobné modelování pomocí rozvoje gravitačního potenciálu do sférických harmonických funkcí vedlo ke zjištění, že rozložení hmoty ve hvězdě vede k postupnému *stáčení přímky apsid* ve směru oběžného pohybu, zatímco výstřednost oběžné dráhy se nemění. Je-li oběžná perioda dvojhvězdy udána ve dnech a $q = M_2/M_1$ označuje hmotový poměr, pak pro změnu délky periastra ω , ve stupních za časovou jednotku, v níž je udána oběžná perioda, platí v nebeské mechanice následující rovnice

$$\dot{\omega}_c = \frac{360^\circ}{P} \{ k_{2,1} [15qf(e) + (1+q)g(e,1)] r_1^5 + k_{2,2} [15q^{-1}f(e) + (1+q^{-1})g(e,2)] r_2^5 \} \quad (9.13)$$

kde funkce

$$f(e) = (1 - e^2)^{-5} \left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 \right), \quad (9.14)$$

$$g(e, j) = (1 - e^2)^{-2} \left(\frac{\Omega_j}{\Omega_K} \right)^2 \quad (9.15)$$

a r_1 a r_2 označují relativní poloměry primární a sekundární složky, vyjádřené v jednotkách hlavní poloosy oběžné dráhy A . Členy s funkcí $f(e)$ vznikají díky slapové deformaci hvězdy, členy s $g(e)$ souvisejí s rotační deformací, přičemž Ω_j označuje úhlovou rotační rychlost j -té hvězdy ($j = 1, 2$) a $\Omega_K = 2\pi/P$ je Keplerova střední úhlová oběžná rychlost.

Konstanta vnitřní struktury k_2 je rovna nule pro hmotný bod a dosahuje hodnoty 0,75 pro zcela homogenní hvězdu. Ze sférických modelů stavby hvězd, funkce $\rho(r)$, ji lze spočítat podle vztahu

$$k_2 = \frac{16\pi}{5MR^5} \int_0^R \rho(r) r^7 dr \quad (9.16)$$

a např. v pracích Clareta a Giméneze (1992) a nověji Clareta (2004) je tato konstanta tabelována pro rozsáhlou síť vývojových modelů hvězd o různé hmotnosti.

Je ovšem zřejmé, že pozorovaný apsidální pohyb dvojhvězdy je důsledkem rozložení hmoty uvnitř *obou těles* a proto z něj lze určit pouze váhovaný průměr

$$k_2 = \frac{c_1 k_{2,1} + c_2 k_{2,2}}{c_1 + c_2}, \quad (9.17)$$

kde c_1 a c_2 představují koeficienty u $k_{2,1}$ a $k_{2,2}$ v rovnici (9.13). Pro dvojhvězdu se stejnými hmotnostmi složek je tedy takový test nejspolehlivější.

9.6.2 Relativistický apsidální pohyb

Relativistický apsidální pohyb se řídí následujícím vztahem, který poprvé odvodili Levi-Civita (1937) a Robertson (1938):

$$\dot{\omega}_r = \frac{6\pi G}{c^2} \frac{M_1 + M_2}{AP(1 - e^2)}, \quad (9.18)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu a rychlost stáčení periastra je v radiánech za tu jednotku času, ve které se měří oběžná perioda. Vzdálenost složek A lze ještě eliminovat s použitím 3. Keplerova zákona $A^3 P^{-2} = G(M_1 + M_2)/(4\pi^2)$ a rychlost stáčení udat ve stupních za jednotku času. Dostáváme tak vztah

$$\dot{\omega}_r = \frac{(\pi G)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{5038848000} (M_1 + M_2)^{\frac{2}{3}}}{c^2 P^{\frac{5}{3}} (1 - e^2)}. \quad (9.19)$$

Je vidět, že relativistický apsidální pohyb závisí na celkové hmotnosti dvojhvězdy. U kompaktních objektů, jako jsou *binární pulsary*, nehraje klasický apsidální pohyb $\dot{\omega}_c$ prakticky žádnou roli a proto lze relativistický apsidální pohyb $\dot{\omega}_r$ využít k přesnému určení hmotnosti soustavy.

Např. u binárního pulsaru PSR 1913+16 činí stáčení přímky apsid plných $4^\circ 2$ ročně. V roce 2003 byl publikován objev binárního pulsaru s oběžnou periodou 2,4 hodiny, výstředností 0,088 a stáčením přímky apsid o $16^\circ 88$ ročně (Burgay a kol. 2003). Podle rovnice (9.19) je tedy celková hmotnost této soustavy $2,58 M_\odot$. Pro úplnost poznamenejme, že oběžná rychlost těles ve dráze činí asi 315 km s^{-1} , takže pokud jde o vlastní dráhový pohyb, žádné významné relativistické efekty se neuplatňují.

Výhodnější výraz pro relativistický apsidální pohyb lze ovšem získat tak, že ještě nahradíme hmotnosti složek polovičními amplitudami K_1, K_2 křivek radiálních rychlostí. Nejenže tím získáme vztah přímo použitelný na pozorovaná data, ale zvýšíme tím i přesnost určení, neboť z výrazu zcela zmizí gravitační konstanta G . Dostáváme tak

$$\dot{\omega}_r = \frac{1080^\circ}{c^2} \frac{(K_1 + K_2)^2}{P \sin^2 i}. \quad (9.20)$$

9.6.3 Celkový apsidální pohyb

U obecné dvojhvězdy je stáčení přímky apsid součtem klasického a relativistického stáčení a pro pozorovanou rychlost stáčení $\dot{\omega}$ přirozeně platí

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_c + \dot{\omega}_r . \quad (9.21)$$

Označíme-li symbolem U periodu úplné rotace přímky apsid, platí

$$U = \frac{360^\circ}{\dot{\omega}} . \quad (9.22)$$

Chceme-li ovšem zjistit, jak se pozorované stáčení přímky apsid shoduje s hodnotou konstanty vnitřní stavby k_2 , předpovězenou z klasické mechaniky, musíme nejprve spočítat relativistický příspěvek $\dot{\omega}_r$ z rovnice (9.20), ten odečíst od pozorované hodnoty stáčení, tedy

$$\dot{\omega}_c = \dot{\omega} - \dot{\omega}_r , \quad (9.23)$$

a poté spočítat pozorovanou hodnotu konstanty vnitřní stavby podle vztahu

$$k_2 = \frac{P\dot{\omega}_c}{360^\circ} \frac{1}{c_1 + c_2} . \quad (9.24)$$

Hodnoty k_2 vypočtené z modelů stavby hvězd jsou obvykle řádově 10^{-3} až 10^{-2} .

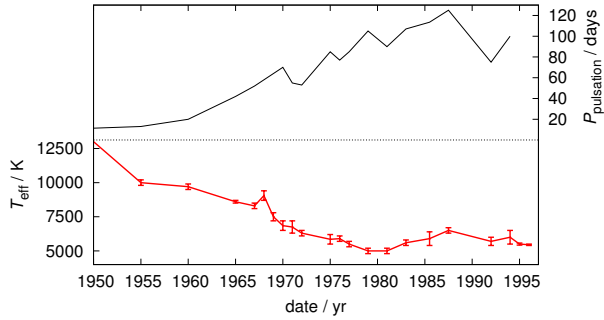
9.7 Projevy vývoje za dobu lidské historie

Projevy hvězdného vývoje můžeme pozorovat jen v případech velmi rychlých vývojových stádií. Soudí se například, že projevem závěrečných fází vývoje hmotnějších hvězd jsou *výbuchy supernov*, které rozmetají většinu hmoty hvězdy do okolního prostoru. Tento názor potvrdil výbuch supernovy 1987A ve Velkém Magellanově mračnu, kdy byl změřen i slabý tok neutrin. Dalším argumentem je přítomnost *pulzaru* v centru Krabí mlhoviny, která vznikla při výbuchu supernovy pozorované roku 1054.

Za důkaz hvězdného vývoje se považují i nálezy *bílých trpaslíků* v centru planetárních mlhovin.

Podobně se soudí, že např. známá proměnná hvězda FG Sge s velkou amplitudou změn, je hvězda v dynamickém pozdním stádiu vývoje (post-AGB star, obr. 9.7) — viz Jurcsik a Montesinos (1999).

Nezvyklý a originální pokus o ověření hvězdného vývoje v reálném čase učinil Mayer (1984), který se srovnáním hvězdných velikostí z katalogu Almagest se současnými pozorovanými jasnostmi veleobrů pokusil statisticky prokázat jejich pozorovatelný vývoj ve shodě s teorií. Jeho výsledky však byly Hearnshawem (1999) podrobeny kritice. I k Hearnshawově studii však lze mít výhrady a věc tak zůstává otevřená.



Obrázek 9.7: Změny efektivní teploty a periody pulzací pro hvězdu FG Sge v období 1950 až 1996. Data z Jurcik a Montesinos (1999).

10 Jednoduché analytické modely a odhady

Nejen z historických důvodů, ale i pro pochopení některých souvislostí a často používaných vztahů je užitečné se seznámit s jednoduchými modely hvězd. Začneme připomenutím termodynamických dějů.

10.1 Polytropní děj

Polytropní změna je taková změna stavu, při které zůstává specifické teplo¹ c konstantní, tedy (pro 1 g látky)

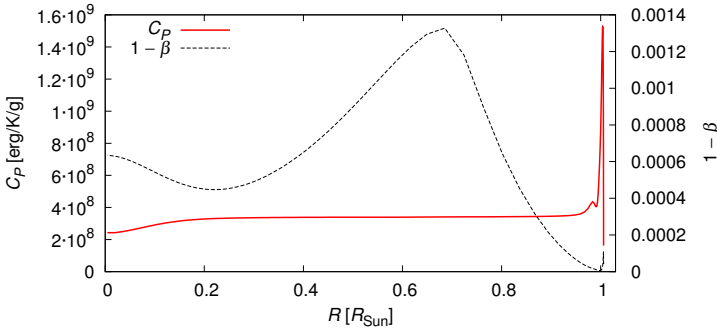
$$\frac{dQ}{dT} = c = \text{konst.} \quad (10.1)$$

Speciální případ, kdy $c = 0$, se nazývá adiabatickým dějem, případ, kdy $c = c_P$, se nazývá dějem isobarickým, případ $c = c_V$ dějem isochorickým a případ, kdy $c \rightarrow \infty$, je dějem isothermickým.

Naším cílem je využít konstantního c k tomu, abychom zjednodušili stavovou rovnici $P(\rho, T)$ na tvar $P(\rho)$. Uvědomme si, že rovnice hvězdné stavby se tím podstatně zjednoduší: když tlak nezávisí na teplotě T , stačí nám pro popis stavby pouze *dvě rovnice* — rovnice kontinuity a hydrostatické rovnováhy, ve kterých vystupují $R(M_R), P(M_R), \rho(M_R)$ — nikoli čtyři.

Je ale předpoklad $c = \text{konst.}$ v celé hvězdě vůbec rozumný? Je jasné, že chemické složení musí být homogenní a také stupeň ionizace konstantní, jinak by se tepelná kapacita měnila. Navíc se vyloučením teploty zbavujeme i produkce energie z nukleárních reakcí a hvězda je tak zcela bez zdroje energie! Kupodivu to nevádí a ve většině objemu hvězdy můžeme takové přiblížení použít. Výsledky složitějších numerických modelů (obr. 10.1) to ostatně potvrzují.

¹též měrná tepelná kapacita, $[c] = \text{erg K}^{-1} \text{g}^{-1}$



Obrázek 10.1: Měrná tepelná kapacita c_P při konstantním tlaku a parametr $1 - \beta = 1 - P_g/P = P_r/P$ ve standardním modelu Slunce. V oblasti $0,3$ až $0,8 R_{\odot}$, tj. zejména v zóně zářivé rovnováhy, je c_P téměř konstantní. Řádový nárůst kapacity v podpovrchové vrstvě je způsoben neúplnou ionizací — přírůstek tepla dQ se spotřebuje hlavně na zvýšení ionizace, čili přírůstek teploty dT je malý a tepelná kapacita $c_P = (dQ/dT)_P$ velká. Hodnoty parametru $1 - \beta$ dosahují řádově 10^{-3} , čili tlak záření P_r je ve celé hvězdě velmi malý v porovnání s celkovým tlakem P .

Konkrétní případ stavové rovnice hvězdné látky. Nejprve zkusíme zjednodušit stavovou rovnici pro směs plynu a záření

$$P = P_g + P_r = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \rho T + \frac{1}{3} a T^4. \quad (10.2)$$

Musíme v celé hvězdě předpokládat *konstantní poměr β tlaku plynu k celkovému tlaku*

$$\beta = \frac{P_g}{P} = \text{konst.}, \quad (10.3)$$

což není velký „hřích“, neboť u reálných hvězd mnohdy představuje tlak záření sotva dvě procenta celkového tlaku (viz obr. 10.1). Teplotu T pak lze elegantně vyjádřit pomocí β

$$P = \frac{1}{\beta} P_g = \frac{1}{\beta} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \rho T = \frac{1}{1 - \beta} P_r = \frac{1}{1 - \beta} \frac{1}{3} a T^4, \quad (10.4)$$

$$T^3 = \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{3 \mathfrak{R}}{\mu a} \rho. \quad (10.5)$$

Dosazením zpět do (10.4) obdržíme zjednodušenou stavovou rovnici ve tvaru $P(\rho)$

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \left[\frac{1 - \beta}{\beta} \frac{3 \mathfrak{R}}{\mu a} \right]^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} = K \rho^{\frac{4}{3}}. \quad (10.6)$$

Obecnější odvození z 1. věty termodynamické. Odvodíme nyní obecněji platnou rovnici polytropy, a to postupnými úpravami první věty termodynamické, která zní (pro 1 g látky)

$$\underbrace{\text{dodané}}_{\text{teplo}} \underbrace{dQ} = \underbrace{\text{zvýšení}}_{\text{vnitřní energie}} \underbrace{dU} + \underbrace{\text{vykonaná}}_{\text{mechanická práce}} \underbrace{PdV}. \quad (10.7)$$

Za vnitřní energii U hvězdné látky bychom dosadili

$$U = \frac{3}{2} \frac{\Re}{\mu} T + \frac{aT^4}{\rho}, \quad (10.8)$$

za předpokladu konstantního β však můžeme hustotu ρ vyloučit pomocí (10.5) a psát U pouze jako funkci teploty

$$U = \frac{3}{2} \frac{\Re T}{\mu} \frac{2 - \beta}{\beta} = U(T). \quad (10.9)$$

Namísto diferenciálu dU pak budeme počítat pouze jednu parciální derivaci

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = c_V$$

$$dQ = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial T}}_{c_V} dT + PdV. \quad (10.10)$$

Vidíme, že pro specifické teplo c_V při konstantním objemu ($dV = 0$) máme výraz

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (10.11)$$

Stavovou rovnici zapíšeme ve tvaru

$$PV = \frac{\Re}{\beta} T \quad (10.12)$$

a diferencujeme ji (při $\beta = \text{konst.}$)

$$d(PV) = PdV + VdP = \frac{\Re}{\beta} dT. \quad (10.13)$$

Dosazením za PdV do rovnice (10.10) dostáváme

$$dQ = \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P}_{c_P} dT - VdP, \quad (10.14)$$

takže pro specifické teplo c_P při konstantním tlaku ($dP = 0$) máme vztah

$$c_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = c_V + \frac{\Re}{\beta}. \quad (10.15)$$

Platí tedy rovnice

$$c_P - c_V = \frac{\Re}{\beta}, \quad (10.16)$$

kterou využijeme pro dosazení za P v rovnici (10.10)

$$dQ = c dT = c_V dT + (c_P - c_V) \frac{T}{V} dV. \quad (10.17)$$

Po úpravě

$$(c - c_V) \frac{dT}{T} = (c_P - c_V) \frac{dV}{V}, \quad (10.18)$$

což lze snadno integrovat

$$(c - c_V) \ln T = (c_P - c_V) \ln V + \text{konst.} \quad (10.19)$$

a po zavedení exponentu

$$\gamma \equiv \frac{c - c_P}{c - c_V} \quad (10.20)$$

zapsat jako

$$TV^{\gamma-1} = \text{konst.}' \quad (10.21)$$

Použijeme-li znovu stavovou rovnici (10.12), získáme

$$PV^\gamma = \text{konst.}'' \quad (10.22)$$

nebo ekvivalentně ($V = \frac{\mu}{\rho}$)

$$P = K \rho^\gamma. \quad (10.23)$$

Polytropní děje bývá zvykem charakterizovat indexem n , který souvisí s exponentem γ vztahem

$$n \equiv \frac{1}{\gamma - 1}. \quad (10.24)$$

Pak můžeme napsat obecnou rovnici pro polytropní děj ve tvaru

$$P = K \rho^{\frac{n+1}{n}}, \quad (10.25)$$

kde konstanta K obsahuje i střední molekulovou hmotnost částic μ .

Vidíme, že výše odvozený výraz (10.6) pro hvězdnou látku odpovídá polytropě s indexem $n = 3$. Použití dalších (přibližných) polytropních modelů shrnuje tabulka 10.1.

Tabulka 10.1: Použití polytropních modelů s různým indexem n , respektive γ . Větší n znamená mimo jiné větší koncentraci látky ke středu.

index		látka (objekty)
$n = \frac{1}{2}$ až 1	$\gamma = 3$ až 2	degenerovaný neutronový plyn (neutronové hvězdy)
$n = \frac{3}{2}$	$\gamma = \frac{5}{3}$	hvězdy s plně konvektivním nitrem nerelativistický degenerovaný elektronový plyn (bílé trpaslíci, hnědí trpaslíci, Jupiter)
$n = 3$	$\gamma = \frac{4}{3}$	směs ideálního plynu a záření (normální hvězdy), relativistický degenerovaný elektronový plyn
$n = 5$	$\gamma = \frac{6}{5}$	„nekonečná hvězda“ (resp. vnější část hvězdy s hustým jádrem a řídkou obálkou)
$n \rightarrow \infty$		izotermální koule (bezsrážková kulová hvězdokupa)

10.2 Laneova–Emdenova diferenciální rovnice

Rovnice hvězdné stavby nyní zjednodušíme následujícím postupem:

1. rovnici kontinuity (4.2) přepíšeme pro gravitační potenciál Φ ;
2. použijeme rovnici hydrostatické rovnováhy (4.5) a rovnici polytropy (10.25) k nalezení $\rho(\Phi)$;
3. dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro Φ , kterou lze řešit analyticky pro určité hodnoty indexu n (nebo numericky pro všechny ostatní).

Pro sférickou hvězdu lze snadno zavést gravitační potenciál Φ . Gravitační zrychlení, čili síla působící na jednotku hmoty, je totiž gradientem potenciálu, tedy

$$\frac{d\Phi}{dR} = -\frac{GM_R}{R^2} = -\frac{G}{R^2} \int_0^R 4\pi R'^2 \rho dR'. \quad (10.26)$$

Tuto rovnici můžeme derivovat podle R (jako součin), a s přihlédnutím k rovnici zachování hmoty ve tvaru (4.1) dostáváme

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} = \frac{2G}{R^3} \overbrace{\int_0^R 4\pi R'^2 \rho dR'}^{M_R} - 4\pi G\rho = -\frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} - 4\pi G\rho, \quad (10.27)$$

což lze snadno upravit na tvar

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} + 4\pi G\rho = 0. \quad (10.28)$$

Tuto rovnici zatím není možné vyřešit, neboť v ní kromě potenciálu $\Phi(R)$ vystupuje neznámá hustota $\rho(R)$.

Vzhledem k výše uvedenému můžeme rovnici hydrostatické rovnováhy (4.5) psát také ve tvaru

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{GM_R}{R^2}\rho = \rho \frac{d\Phi}{dR}, \quad (10.29)$$

čili

$$dP = \rho d\Phi. \quad (10.30)$$

Podle obecné rovnice polytropy (10.25) máme

$$dP = K \frac{n+1}{n} \rho^{\frac{1}{n}} d\rho \quad (10.31)$$

a po dosazení

$$d\Phi = K \frac{n+1}{n} \rho^{\frac{1}{n}-1} d\rho. \quad (10.32)$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$\Phi + \text{konst.} = K(n+1)\rho^{\frac{1}{n}}. \quad (10.33)$$

Jestliže zvolíme nulový bod potenciálu na povrchu hvězdy, kde předpokládáme $\rho = 0$, bude konstanta v rovnici (10.33) nulová a obdržíme kýžený vztah $\rho(\Phi)$

$$\rho = \left[\frac{\Phi}{K(n+1)} \right]^n. \quad (10.34)$$

Dosazením za ρ do (10.28) získáme rovnici, kde vystupuje pouze potenciál Φ

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} + \frac{4\pi G}{[K(n+1)]^n} \Phi^n = 0. \quad (10.35)$$

Jde o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro neznámou funkci $\Phi(R)$. Než ji budeme řešit, provedeme škálování zavedením parametru

$$\alpha^2 \equiv \frac{4\pi G}{[K(n+1)]^n} \Phi_c^{n-1} = \text{konst.} \quad (10.36)$$

a nových proměnných φ a z pomocí vztahů

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_c}, \quad z = \alpha R, \quad (10.37)$$

kde Φ_c označuje hodnotu Φ v centru hvězdy. Bude zřejmě

$$\frac{d\Phi}{dR} = \Phi_c \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dR} = \alpha \Phi_c \frac{d\varphi}{dz}, \quad (10.38)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\Phi}{dR} \right) \frac{dz}{dR} = \alpha^2 \Phi_c \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \quad (10.39)$$

$$\frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} = \frac{2\alpha^2}{z} \Phi_c \frac{d\varphi}{dz}. \quad (10.40)$$

Rovnici (10.35) pak lze přepsat do tvaru *diferenciální rovnice Laneovy–Emdenovy*

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \varphi^n = 0. \quad (10.41)$$

Jiný možný zápis Laneovy–Emdenovy rovnice zřejmě je

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\varphi}{dz} \right) + \varphi^n = 0. \quad (10.42)$$

Tato rovnice se obecně řeší numericky, např. pomocí rozvoje v řadu. Analytická řešení existují pro polypotropní indexy $n = 0$, $n = 1$ a $n = 5$.

10.3 Polytropní modely hvězd

Řešení rovnice (10.41) pro $n = 0$ je

$$\varphi(z) = 1 - \frac{z^2}{6}, \quad (10.43)$$

pro $n = 1$ má řešení tvar

$$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z} \quad (10.44)$$

a konečně pro $n = 5$

$$\varphi(z) = \left(1 + \frac{z^2}{3} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (10.45)$$

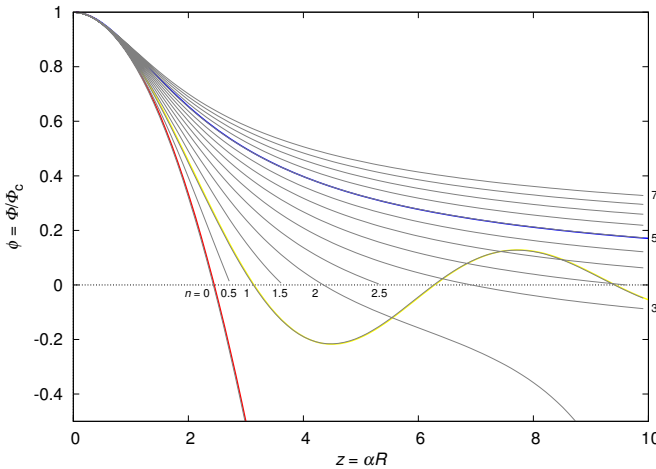
jak se můžeme snadno přesvědčit zpětným dosazením. Povšimněme si, že důsledkem řešení pro $n = 5$ je, že povrch hvězdy, kde je podle naší volby $\Phi = 0$, a tedy také $\varphi = 0$, odpovídá nekonečně velké hodnotě z , a tedy i R . Jinými slovy, hvězda stavěná podle polytropu $n = 5$ se rozprostírá do nekonečna.

Numerické řešení pro libovolnou hodnotu n můžeme snadno získat Eulerovou metodou. Příslušný kód programu ve Fortranu 77 by mohl vypadat následovně

```

c  pocatecni podminky
    z = 1.e-3
    phi = 1.e0
    dphi_dz = 0.e0
    do while (z.lt.zmax)
c  Laneova-Emdenova rovnice
    d2phi_dz2 = -2.e0/z * dphi_dz - phi**n
c  jednoduchy Euleruv integrator
    dphi_dz = dphi_dz + d2phi_dz2 * dz
    phi = phi + dphi_dz * dz
    write(*,*) z, phi
    z = z + dz
enddo

```



Obrázek 10.2: Analytická a numerická řešení Laneovy–Emdenovy rovnice, tedy funkce $\varphi(z)$, pro různé hodnoty polytropního indexu n . Hladinu, kde je $\varphi = 0$, považujeme za povrch hvězdy.

Hustota. Význam polytropních modelů spočívá v tom, že pomocí nich lze činit určité odhady vnitřní stavby hvězd. Jak jsme již viděli, lze např. pomocí rovnice (10.34) počítat hustotu v libovolném bodě hvězdy ze znalosti hustoty v centru

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{\Phi}{\Phi_c} \right)^n = \varphi^n. \quad (10.46)$$

Pro případ $n = 0$ bychom dostali

$$\rho(R) = \rho_c \varphi^0 = \rho_c, \quad (10.47)$$

neboli homogenní hvězdu s konstantní hustotou. Pro větší n vychází vždy větší koncentrace látky ke středu.

Rovněž si můžeme všimnout, že podle vztahů (10.34) a (10.36) platí

$$\frac{1}{\alpha^2} = \left(\frac{R}{z}\right)^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1-n}{n}}. \quad (10.48)$$

Tuto rovnici lze použít k určení centrální hustoty ρ_c ze zadaného poloměru R_* a odpovídající hodnoty z_* , získané integrací Laneovy–Emdenovy rovnice. Plyne z ní rovněž, že

$$R_* \propto \rho_c^{\frac{1-n}{2n}}. \quad (10.49)$$

Vidíme tedy, že pro všechny polytropní modely s $n > 1$ je poloměr hvězdy klesající funkcí její centrální hustoty.

Tlak. Podobně lze odvodit odhad pro tlak; kombinací rovnic (10.25) a (10.34) dostáváme

$$P = \frac{\rho\Phi}{n+1}, \quad (10.50)$$

z čehož vyplývá

$$P = P_c \varphi^{n+1}. \quad (10.51)$$

Teplota. Z rovnice (10.5) plyne ihned teplota pro hvězdnou látku

$$T = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \frac{3\Re}{\mu a} \rho\right)^{\frac{1}{3}} = T_c \varphi^{\frac{n}{3}}. \quad (10.52)$$

V případě odlišné stavové rovnice by byla pochopitelně odlišná také funkce $T(\varphi)$.

Hmotota obsažená v kouli. Pro hmotu v kouli o poloměru R_0 můžeme psát s využitím rovnice (10.46)

$$M_R(R_0) \equiv \int_0^{R_0} 4\pi R^2 \rho \, dR = 4\pi \rho_c \int_0^{R_0} R^2 \varphi^n \, dR, \quad (10.53)$$

kde R_0 označuje nějakou uvažovanou vzdálenost od středu hvězdy. Pokud provedeme substituci $R = z/\alpha$, dle zavedené transformace (10.37), vyjde

$$M_R(z_0) = 4\pi \rho_c \frac{1}{\alpha^3} \int_0^{z_0} z^2 \varphi^n \, dz = 4\pi \rho_c \frac{R_0^3}{z_0^3} \int_0^{z_0} z^2 \varphi^n \, dz, \quad (10.54)$$

kde z_0 opět představuje hodnotu této proměnné v uvažované vzdálenosti R_0 od centra hvězdy. Integrál na pravé straně ovšem můžeme snadno vyjádřit z Laneovy–Emdenovy rovnice (10.42), takže dostáváme

$$M_R(z_0) = 4\pi\rho_c \frac{R_0^3}{z_0^3} \left(-z_0^2 \frac{d\varphi(z_0)}{dz} \right) = 4\pi\rho_c R_0^3 \left(-\frac{1}{z_0} \frac{d\varphi(z_0)}{dz} \right). \quad (10.55)$$

Hmota obsažená v kouli o daném poloměru je tedy dána derivací gravitačního potenciálu *v daném bodě*.

Je přirozeně možné zavést také střední hustotu hvězdy zřejmým vztahem

$$\bar{\rho} = \frac{M_*}{\frac{4}{3}\pi R_*^3}, \quad (10.56)$$

kde hvězdičkou jsou značeny hodnoty veličin odpovídající povrchu hvězdy. Pro celkovou hmotnost hvězdy M_* samozřejmě platí rovnice (10.55) při $z_0 = z_*$.

Hodnoty z_* , $-z_*^2 \frac{d\varphi(z_*)}{dz}$ a $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$ byly pro různé hodnoty polytropního indexu n numericky spočteny a tabelovány, takže pomocí nich bylo možno pro hvězdu o dané hmotnosti M_* a poloměru R_* spočítat její vnitřní strukturu.

Srovnání polytropních modelů se standardním modelem Slunce. Již ze základní fyziky víme, že směsi plynu a záření by měla přibližně odpovídat polytropa s $n = 3$ (viz (10.6)). Potvrzuje to i porovnání jednoduchého polytropního modelu se složitým standardním modelem Slunce (obr. 10.3). Pokud v polytropním modelu fixujeme poloměr Slunce (místo, kde $\varphi = 0$), vychází z rovnice (10.48) centrální hustota $\rho_c = 90 \text{ g cm}^{-3}$, jen o málo menší než přesná hodnota 150 g cm^{-3} . I profily hustoty $\rho(R)$, respektive derivace $\rho'(R)$, v oblasti zóny zářivé rovnováhy si dobře odpovídají.

Co se teploty týče, polytropní model vede k centrální teplotě Slunce 12 milionů kelvinů, což je slušný odhad vzhledem k současným nejlepším modelům, které udávají $T_c = 15,4 \cdot 10^6 \text{ K}$.

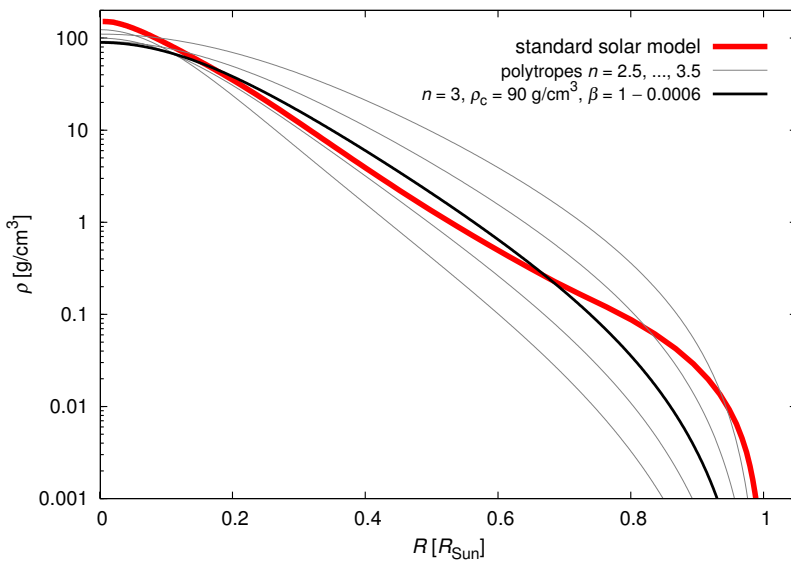
Chandrasekharova mez. Z rovnic (10.55) a (10.48) plyne, že

$$M_* \propto \rho_c R_*^3 \propto \rho_c^{\frac{3-n}{2n}}. \quad (10.57)$$

Zmínili jsme se již, že jedna polytropa s indexem $n = 3$ odpovídá stavové rovnici relativisticky degenerovaného elektronového plynu. Podle právě uvedené rovnice hmotnost takto konstruované hvězdy nezávisí na centrální hustotě a pro numerické hodnoty odpovídající relativistickému degenerovanému elektronovému plynu vychází

$$\frac{M_*(\text{mezní})}{M_\odot} = \frac{5,836}{\mu_e^2}. \quad (10.58)$$

To je slavná *Chandrasekharova mez* stability bílých trpaslíků. Všimněme si, že pro kompaktní hvězdy, které již prodělaly nukleární vývoj, můžeme předpokládat $X = 0$, a tedy $\mu_e = 2$, což pro ně dává limitní hmotnost $1,459 M_\odot$.



Obrázek 10.3: Porovnání polytropních modelů se standardním modelem Slunce na profilu hustoty $\rho(R)$. Všechny modely jsou škálovány tak, aby poloměr hvězdy vycházel roven $1 R_{\odot}$; centrální hustota pak je samozřejmě pro každý model jiná. Uvažované hodnoty indexu n jsou od 2,5 do 3,5. V zóně zářivé rovnováhy by standardnímu modelu Slunce nejlépe odpovídala polytropa s $n \doteq 3,15$, $\rho_c = 95 \text{ g/cm}^3$, $\beta = 1 - 0,0006$.

11 Hvězdný vítr a ztráta hmoty z hvězd

11.1 Observační fakta

To, že hvězdné atmosféry nemusí být statické, a že z nich může docházet k úniku hmoty do okolního prostoru, naznačovala existující pozorování delší dobu.

Již Biermann (1951) upozornil na to, že plynné ohony komet, mířící vždy směrem od Slunce, nasvědčují přítomnosti radiálního výtoku plynu ze Slunce do meziplanetárního prostoru, a odhadl výtokové rychlosti na 500 km/s v blízkosti Slunce, urychlující se až k 1500 km/s ve velkých vzdálenostech od Slunce. Od padesátých let, kdy začaly být vypouštěny sondážní rakety a později i družice a meziplanetární sondy, bylo přímo možné měřit tento tok plynu, *sluneční vítr* — nejprve v okolí Země a posléze i v různých vzdálenostech od Slunce.

Z měření slunečního větru v blízkosti Země ($r = 1$ AU) plyne koncentrace $n \simeq 10$ částic/cm³ a rychlost $v \simeq 400$ km/s. To odpovídá hustotě $\rho \simeq m_{\text{H}}n = 1,7 \cdot 10^{-20}$ kg/m³ a celkové ztrátě hmoty ze Slunce¹

$$\frac{dM_{\odot}}{dt} = 4\pi r^2 v \rho \simeq 3 \cdot 10^{-14} M_{\odot}/\text{rok}. \quad (11.1)$$

Pozorovací důkazy větru u chladných hvězd. Pro obry a veleobry chladnější než G0 byly pozorovány následující jevy:

1. Absorpční čáry vápníku a hořčíku bývají posunuté do fialova vůči rychlosti *fotosférických* čar, což naznačuje rozpínání materiálu směrem k pozorovateli. U známých spektroskopických dvojhvězd radiální rychlosti těchto čar nesdílejí oběžný pohyb, což přesvědčivě dokazuje jejich *cirkumstelární*, resp. cirkumbinární původ.
2. Zmíněné chladné hvězdy mají většinou také chromosférické emise čar vápníku a hořčíku, a právě pro hvězdy s cirkumstelárními absorpcemi mají dvojité emisní složky poměr V/R (violet/red) menší než jedna. Pro tytéž hvězdy se

¹Hmota se ztrácí také zářením, nejen korpuskulami! Při zářivém výkonu $L_{\odot} = 3,84 \cdot 10^{26}$ W to činí $\frac{dM}{dt} = \frac{L_{\odot}}{c^2} \simeq 7 \cdot 10^{-14} M_{\odot}/\text{rok}$.

rovněž pozorují cirkumstelární absorpční čáry He I na vlnové délce 1083,0 nm, posunuté do fialova o 150 až 200 km/s.

3. Pro zákrytové dvojhvězdy sestávající z chladného veleobra a horké složky spektrálního typu B (soustavy typu ζ Aur) lze během zákrytů pozorovat, zejména v družicových ultrafialových spektrech, cirkumstelární čáry z obálky veleobra, a v průběhu zákrytu tak studovat strukturu hvězdného větru v různé vzdálenosti od povrchu veleobra.
4. Na spektrech s vysokým rozlišením byly nalezeny čáry z cirkumstelárních obálek veleobrů typu M až do vzdáleností několika tisíců poloměrů veleobra.

Důkazy pro horké hvězdy. Pro *horké hvězdy spektrálních tříd O a B* o vysoké svítivosti byl únik plynu pozorován nejprve na základě *profilů P Cygni* (nazvaných podle veleobra P Cygni, pro kterého jsou tyto čáry zvláště nápadné; obr. 11.1). Jde o kombinaci emisní čáry, s radiální rychlostí odpovídající radiální rychlosti hvězdy, a absorpční čáry téhož iontu, která je však posunutá do fialova a má tedy zápornou rychlost.

Takový profil vznikne, když hvězdu obklopuje *expandující obálka*: emisní složka má původ v horkém řídkém plynu okolo, rozpínajícím se na všechny strany stejně, kdežto dopplerovsky posunutá absorpční čára vzniká v oblasti před hvězdou, kdy je poloprůhledný plyn, letící k pozorovateli, v popředí husté spojitě zářící fotosféry (obr. 11.3).

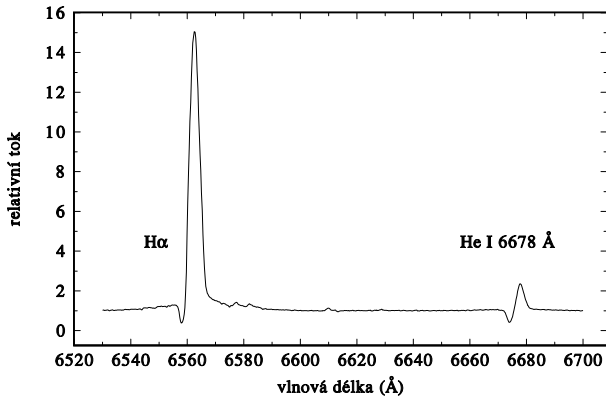
Poté, když byla získána první kvalitní ultrafialová spektra hvězd vně zemské atmosféry, byly u mnoha veleobrů pozorovány výrazné P Cyg profily rezonančních čar iontů jako C IV, Si IV či N V, které měly v některých případech velmi ostře definován fialový okraj absorpce. Posun o $\Delta\lambda \simeq 15 \text{ \AA}$ na $\lambda = 1500 \text{ \AA}$ naznačuje, že plyn se ve velkých vzdálenostech urychluje až na konečné rychlosti $v \doteq c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq 3000 \text{ km/s}$. Později bylo zjištěno, že projevy větru lze nalézt i u hvězd se závojem (v anglické literatuře Be stars) o nižší svítivosti, t.j. s třídami svítivosti V, IV a III.

Úniková rychlost. Z nebeské mechaniky je známo, že má-li se hmotná částice dostat z nějakého centrálního gravitačního pole do nekonečna, musí být její celková mechanická energie kladná

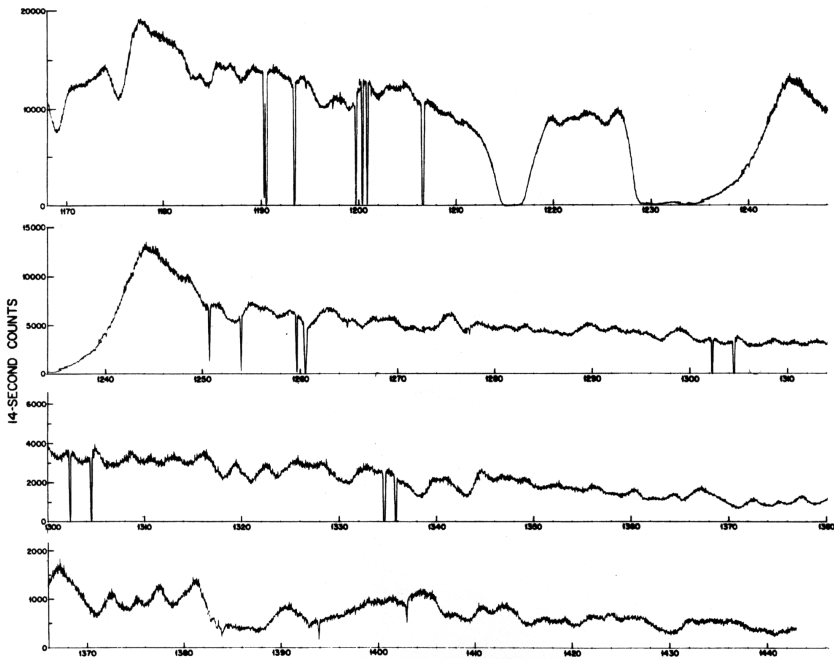
$$E = E_k + E_G = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_*m}{r} \geq 0. \quad (11.2)$$

Pro únikovou rychlost v_{esc} s povrchu hvězdy o hmotnosti M_* , čili ze vzdálenosti rovníkového poloměru R_{rov} , tedy platí

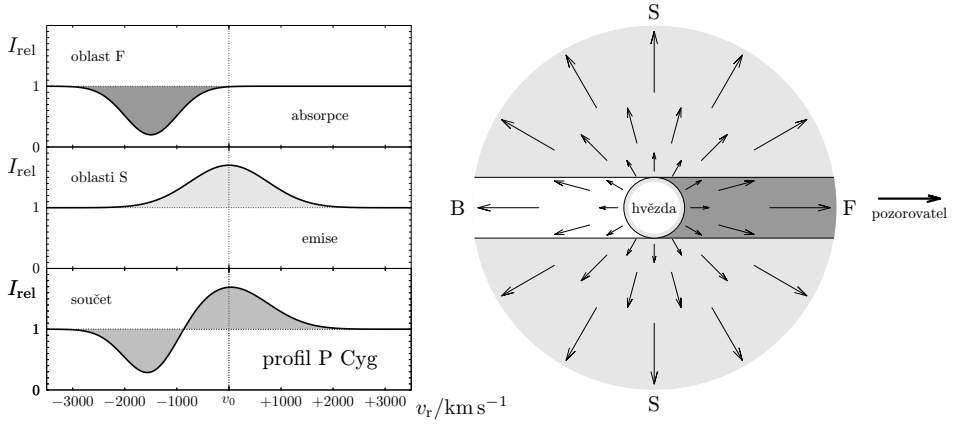
$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_*}{R_{\text{rov}}}}. \quad (11.3)$$



Obrázek 11.1: Profily typu P Cygni pozorované u hvězdy P Cygni, která je přímo prototypem. Zachyceny jsou spektrální čáry H α a He I.



Obrázek 11.2: Spektrum hvězdy ζ Puppis v UV oblasti (117 až 144 nm), pořízené družicí Copernicus. Je na něm patrné množství širokých spektrálních čar s charakteristickými profily P Cygni; úzké čáry jsou způsobeny absorpcí v mezihvězdném prostředí. Převzato z Morton a Underhill (1977).



Obrázek 11.3: Vznik profilu P Cygni emisí záření (v oblastech označených S) a dopplerovskými posunutou absorpcí (v oblasti F) v rozpinající se cirkumstelární obálce.

Tabulka 11.1: Únikové rychlosti v_{esc} podle rovnice (11.4) na povrchu různých hvězd.

hvězda	M_* (M_\odot)	R_{rov} (R_\odot)	v_{esc} (km/s)
Slunce	1,00	1,00	618
O7V	26,0	8,54	1079
O7Ia	28,0	22,9	683
B0V	14,6	5,80	979
B5V	4,36	3,01	743
A0V	2,24	2,09	639
F0V	1,50	1,56	606
G0V	1,16	1,25	595
K0V	0,91	1,01	556
K0III	2,9	10,0	333
M0V	0,45	0,52	575
M0Ia	15,8	500	110

Pokud hmotnost a rovníkový poloměr hvězdy budeme vyjadřovat v jednotkách hmotnosti a poloměru Slunce, dostaneme rovnici

$$v_{\text{esc}} = 617,61 \text{ km/s} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R_{\text{rov}}}{R_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (11.4)$$

Několik odhadů, v jakém rozmezí se pro reálné hvězdy takové únikové rychlosti v blízkosti jejich povrchů mohou pohybovat, je shrnuto v tabulce 11.1.

11.2 Parkerova teorie větru u chladných hvězd

Nestabilita isotermální atmosféry. V jednorozměrném případě planparalelní atmosféry platí jednoduchá rovnice hydrostatické rovnováhy $dP = -\rho g dz$. Dosazením ze stavové rovnice $\rho = P \frac{\mu m_{\text{H}}}{kT}$ a formální integrací získáme pro tlak

$$P(z) = P(0) \exp \left[- \int_0^z \frac{\mu m_{\text{H}}}{kT(z)} g dz \right], \quad (11.5)$$

přičemž integrál musí divergovat, aby exponenciála konvergovala. Pokud ve velké vzdálenosti předpokládáme závislost teploty ve tvaru polynomu $T(z) \propto z^n$, $\int z^{-n} \propto z^{-n+1}$, musí být evidentně $n < 1$, aby tato podmínka byla splněna. Izotermální atmosféra ($n = 0$) je stabilní.

Ve třech rozměrech (sférické symetrii) je však situace odlišná. Ve výrazu pro tlak se navíc objeví $\frac{1}{r^2}$ z gravitačního zrychlení

$$P(r) = P(R) \exp \left[- \int_R^r \frac{\mu m_{\text{H}}}{kT(r')} \frac{GM_*}{r'^2} dr' \right], \quad (11.6)$$

takže při obdobné závislosti teploty $T(r) \propto r^n$ vychází podmínka stability $n < -1$. Statická isotermální atmosféra tedy neexistuje! Místo rovnice hydrostatické rovnováhy musíme použít rovnici pohybovou.

Hydrodynamické rovnice. Základy teorie slunečního větru formuloval jako první Parker (1958). Ukázal, že potřebné únikové rychlosti lze dosáhnout řešením hydrodynamických rovnic a že k výtoku plynu dochází ze sluneční koróny zahřáté na teplotu 3 000 000 K. Takový mechanismus můžeme očekávat u relativně chladných hvězd, které mají rozsáhlé podpovrchové konvektivní zóny, a tedy i chromosféry a koróny.

Pohybová rovnice pro radiálně se rozpínající plyn je

$$m \frac{dv(r, t)}{dt} = - \overbrace{\frac{GM_* dm}{r^2}}^{\text{gravitace}} - \overbrace{\frac{dPA}{d\rho}}^{\text{gradient tlaku}}, \quad (11.7)$$

kde v označuje rychlost, dm hmotnost infinitesimalně tenké kulové vrstvy plynu, A jí příslušnou plochu a M_* hmotnost hvězdy. Dosadíme za $dm = A dr \rho$ a získáme

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial v}{\partial r} \underbrace{\frac{dr}{dt}}_v = - \frac{GM_*}{r^2} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial \rho}}_{c_s^2} d\rho \frac{A}{A dr \rho}. \quad (11.8)$$

Budeme-li uvažovat *stacionární* případ, je časová derivace rychlosti nulová. Rychlost zvuku c_s můžeme pro adiabatický děj, popsany $P = K \rho^\gamma$, vyjádřit jako

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \sqrt{K \gamma \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{kT}{\mu m_H}}. \quad (11.9)$$

Výsledkem je *Bernoulliho rovnice*

$$v \frac{dv}{dr} + c_s^2 \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = 0. \quad (11.10)$$

Závislost hustoty na rychlosti $\rho(v)$ můžeme zjistit z rovnice kontinuity

$$dM = 4\pi r^2 v dt \rho = 4\pi r_0^2 v_0 dt \rho_0, \quad (11.11)$$

čili

$$\rho(v) = r_0^2 v_0 \rho_0 r^{-2} v^{-1}, \quad (11.12)$$

a tedy

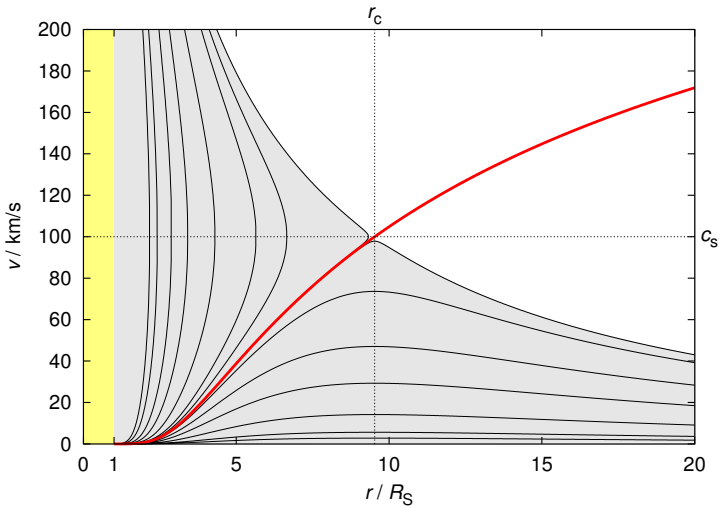
$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = r^2 v \left(-2r^{-3} v^{-1} - r^{-2} v^{-2} \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{2}{r} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dr}. \quad (11.13)$$

Po dosazení výrazu do (11.10) získáme *Parkerovu rovnici*

$$v \frac{dv}{dr} \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) - \frac{2c_s^2}{r} + \frac{GM_*}{r^2} = 0, \quad (11.14)$$

což je diferenciální rovnice 1. řádu pro funkci $v(r)$. Její numerické řešení² vidíme na obrázku 11.4.

²Asi nejjednodušší je vyjádřit derivaci rychlosti $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v(1-c_s^2/v^2)} \left(\frac{2c_s}{r} - \frac{GM_*}{r^2} \right)$, uvážit počáteční podmínky $v_0 \doteq 0$ na $r_0 = 1,01 R_\odot$ a provést Eulerovu integraci $v_{i+1} = v_i + \frac{dv}{dt} \Delta r$, $r_{i+1} = r_i + \Delta r$. Pouze je třeba ošetřit singularitu při $v = c_s$.



Obrázek 11.4: Numerická řešení Parkerovy rovnice pro hvězdný vítr, závislost rychlosti v na vzdálenosti r . Pohyb začíná na $r_0 = 1 R_\odot$ a malých hodnotách $v_0 \in (0,01; 10)$ m/s. Hodnota rychlosti zvuku byla zvolena konstantní $c_s = 100$ km/s, čili se jedná o isothermální model. Většina řešení (v šedé oblasti) je nezajímavá, neboť končí na malých rychlostech nebo malých vzdálenostech; jinde (v bílé oblasti) žádná řešení neexistují (resp. jde o řešení pro akreci, která začínají na velkých r). Důležité je ovšem *kritické řešení* (červeně) pro $v_0 \doteq 0,216$ m/s, které se vyznačuje překročením rychlosti zvuku c_s přesně v kritické vzdálenosti $r_c \doteq 10 R_\odot$, kde je funkce $H(r) = 0$. Vede totiž na vítr, tedy urychlení až na $v \simeq 400$ km/s ve velké vzdálenosti $r \simeq 1000 R_\odot$.

11.3 CAK teorie hvězdného větru řízeného zářením

Horké hvězdy mají jen velmi malé podpovrchové konvektivní zóny, a proto u nich existence horkých korón není příliš pravděpodobná. I kdyby však koróny z nějaké dosud neznámé příčiny měly, Parkerův mechanismus vzniku slunečního větru by nebyl pro horké hvězdy použitelný. Jak upozornili Lucy a Solomon (1970), k dosažení pozorovaných rychlostí hvězdného větru horkých hvězd ($2\,000$ až $3\,000\text{ km s}^{-1}$) by v hypotetické koróně musely panovat teploty řádu 10 milionů K, při kterých by ionty C IV, Si IV či N V musely dávno zaniknout v důsledku srážkové excitace.

Lucy a Solomon (1970) proto navrhli jiný mechanismus: vznik hvězdného větru působeného mechanickou silou v důsledku *selektivní absorpce záření v silných resonančních čarách*. Jejich myšlenka byla zásadním způsobem vylepšena v klíčové práci Castora, Abbota a Kleina (1975), kteří ukázali, že síla, způsobující únik plynu z atmosfér horkých hvězd, vzniká díky selektivní absorpci *velkým množstvím spektrálních čar v ultrafialové oblasti*, ne pouze díky čarám resonančním. Podařilo se jim ukázat, že výsledná síla vede na ztrátu hmoty, která je stokrát vyšší, než podle výpočtu Lucyho a Solomona (1970). Jejich práce se záhy stala klasickou prací v oboru a dnes lze často nalézt odkazy na standardní CAK teorii hvězdného větru řízeného zářením.

Zrychlení působené zářením. Naznačme si nyní, jak se hvězdný vítr modeluje. První potřebnou rovnicí je zmiňovaná rovnice kontinuity, která je přímo časovou derivací rovnice (4.1),

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \rho v, \quad (11.15)$$

kde \dot{M} je tok hmoty povrchem koule o poloměru r , nazývaný často rychlostí ztráty hmoty hvězdným větrem, a v je rychlost radiálního pohybu plynu ve vzdálenosti r od centra hvězdy.

Druhá rovnice je pohybová (hydrodynamická), obdobná jako (4.4), do níž je ale potřeba kromě gravitačního zrychlení a gradientu tlaku dosadit i zrychlení g_r působené zářením

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM_*}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP_g}{dr} + g_r. \quad (11.16)$$

Jak víme podle rovnice (2.60), pro mechanickou sílu působící na tenkou vrstvu plynu o tloušťce dr a ploše A lze psát

$$f_r = \frac{\rho dr A}{c} \int_0^\infty \kappa_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu. \quad (11.17)$$

kde \mathcal{F}_ν je monochromatický tok záření a κ_ν opacita. Příslušné zrychlení vrstvy je

$$g_r = \frac{f_r}{dm} = \frac{f_r}{\rho dr A} = \frac{1}{c} \int_0^\infty \kappa_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu. \quad (11.18)$$

Jasně vidíme, že zrychlení bude velké pro horké hvězdy, mající velký tok \mathcal{F}_ν . Důležité je též vědět, co je hlavním zdrojem opacity.

Lucy a Solomon (1970) ukázali, že absorpce záření v rezonančních čarách ve vlnových délkách v blízkosti maxima zářivého toku je dostatečná k tomu, aby výsledné zrychlení (11.16) bylo *kladné*. Atmosféra pak není statická a musí docházet k úniku hmoty. Celá věc je ještě usnadňována tím, že jakmile se nějaká vrstva plynu dá do pohybu, budou ionty v ní díky *Dopplerovu posuvu* pohlcovat záření na vyšších frekvencích než v klidovém stavu, tedy záření, které předtím pohlcováno být nemuselo.

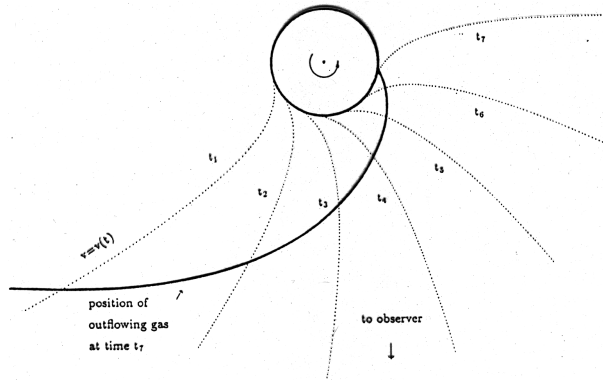
Castor, Abbot a Klein (1975) řešením pohybové rovnice se započtením absorpce v mnoha čarách v UV oblasti zjistili, že v nadzvukové oblasti je poměr zrychlení úniku plynu ke gravitačnímu zrychlení téměř konstantní, asi 1,5. Tím vysvětlují, proč lze rychlost plynu popisovat empirickou formulí

$$v(r) \doteq v_\infty \left(1 - \frac{R_*}{r}\right)^\beta, \quad (11.19)$$

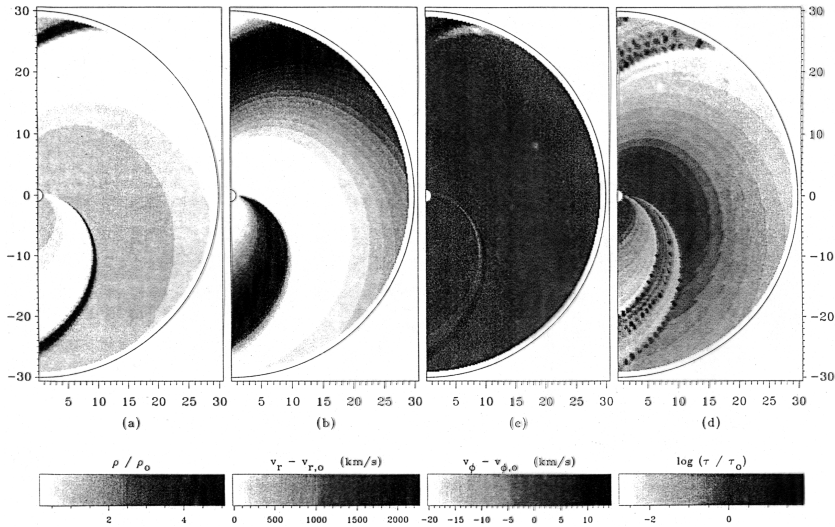
kteřou užíval již Chandrasekhar ve třicátých letech. Parametr β udávají roven $\frac{1}{2}$, různí autoři jej ale volí různě. Rychlost v nekonečnu v_∞ musí převyšovat rychlost únikovou. Spočetli rovněž, že např. pro hvězdu hlavní posloupnosti spektrálního typu O5 činí rychlost ztráty hmoty $6 \cdot 10^{-6} M_\odot$ ročně.

Vliv metalicity na vítr. Je dobré si uvědomit, co vše nám rovnice (11.18) říká. Pokud budeme uvažovat hvězdy, které vznikaly v období, kdy mezihvězdná látka obsahovala jen malé procento těžších prvků (například typický obsah těžších prvků v Malém Magellanově mračnu se odhaduje na $Z = 0,004$), budou podmínky pro vznik silného hvězdného větru podstatně *horší*, neboť atmosféra takových hvězd bude obsahovat téměř výlučně jen nepočtené absorpční čáry vodíku a helia (κ_ν je nízké).

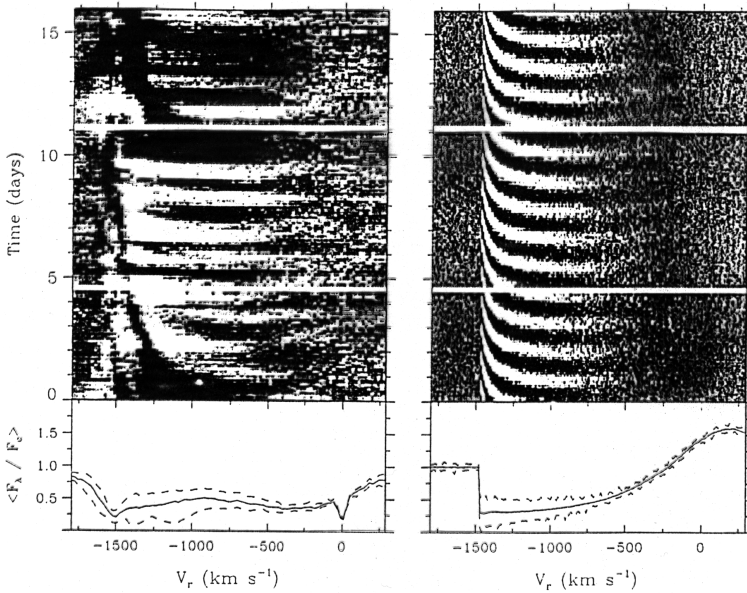
Časová modulace hvězdného větru. V nedávné době byla rozpracována teorie hvězdného větru soustředovaného rotací směrem k rovníku hvězdy. Bjorkman a Cassinelli se pomocí této teorie snažili vysvětlovat vznik hvězd se závojem. Rovněž existují pozorování, že hvězdný vítr není rovnoměrný proud hmoty, existují náznaky modulace s rotační periodou (viz obr. 11.5 až 11.7). Na tuto možnost upozorňovali např. Mullan (1984) či Harmanec (1991), pozorováním byla podobná modulace poprvé doložena Owockim a spol. (1995) a hydrodynamický model cirkumstelárních korotujících struktur byl publikován v práci Cranmer a Owocki (1996).



Obrázek 11.5: Trajektorie, kterou zaujímají částice vyvrhované z určitého místa na povrchu rotující hvězdy (pohled ve směru rotační osy). Při pozorování spekter (pozorovatelem v rovině rovníku) se objeví modulaace intenzity a profilů čar s rotační periodou hvězdy. Převzato z práce Harmance (1991).



Obrázek 11.6: Hydrodynamická simulace struktury hvězdného větru (korotující interakční oblasti, CIR), která je ve stacionárním stavu. Šedou škálou je znázorněny normalizované hodnoty: (a) hustoty, (b) radiální složky rychlosti, (c) azimutální složky rychlosti a (d) radiální Sobolevovy optické tloušťky. Převzato z práce Cranmera a Owockiho (1996).



Obrázek 11.7: Vlevo: série spekter hvězdy HD 64760 pořízených v čáře SiIV ($\lambda = 139,4$ nm). Na vodorovné ose je dopplerovská rychlost, na svislé čas, monochromatický tok je zobrazen stupněm šedi. Dole je spočtený průměrný profil čáry (plnou čarou) a maximální odchyky (čárkovaně). Vpravo: analogický graf pro modelový výpočet, ve kterém autoři předpokládali zhuštění hvězdného větru, buzené neradiálními pulzacemi hvězdy. Převzato z Owocki a spol. (1995).

11.4 Vliv hvězdného větru na vývoj hvězd

Parametrický popis větru. Reimers (1975) odvodil ze spektroskopických pozorování červených obrů empirický vztah pro ztrátu hmoty (obr. 11.8)

$$\frac{dM}{dt} \doteq \eta_w \cdot 4 \cdot 10^{-13} M_\odot / \text{rok} \frac{R}{R_\odot} \frac{L}{L_\odot} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-1}, \quad (11.20)$$

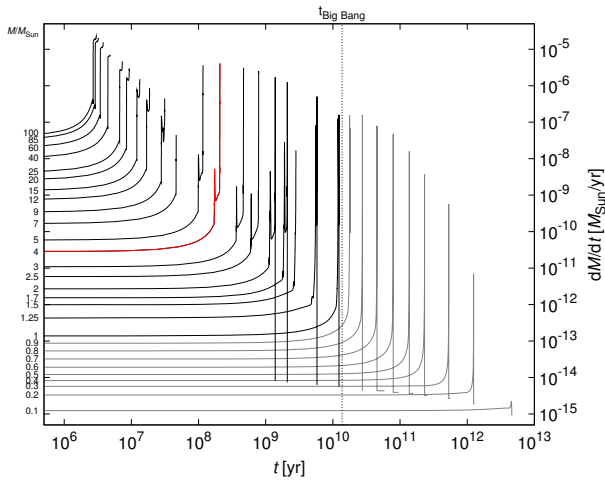
v němž jsme ještě doplnili účinnost η_w , kterou můžeme považovat za volný parametr. Tento Reimersův vítr není samozřejmě použitelný univerzálně pro všechny typy hvězd ve všech fázích vývoje. Například u současného Slunce je skutečně pozorovaný vítr řádově 10 krát méně efektivní než by plynulo z (11.20) při $\eta_w = 1$.

Vliv větru. Hvězdy ztrácející hmotu větrem se chovají jako hvězdy s nižší hmotností. Během vývoje na hlavní posloupnosti je však u chladných hvězd vliv nepatrný; vždyť Slunce za dobu své existence ztratilo jen 0,01 % své hmotnosti, nebyl-li dříve vítr silnější. Naproti tomu horké hvězdy mohou na hlavní posloupnosti ztratit řádově i $10 M_\odot$ (Schaller a spol. 1992).

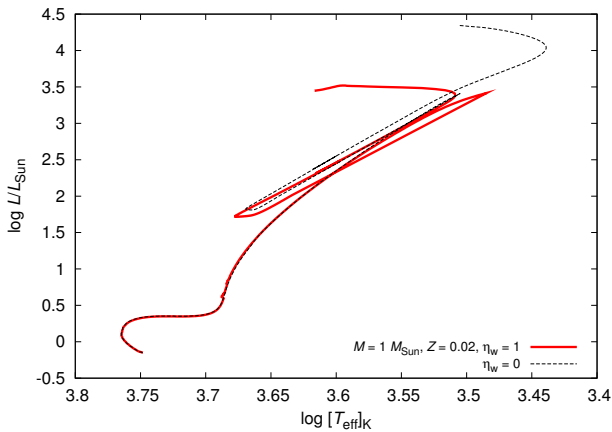
U červených obrů můžeme při započtení větru zjistit menší zářivý výkon (viz obr. 11.9). Ve výsledku vede vítr k malému prodloužení doby života. (Příliš velká ztráta hmoty by však naopak mohla vést k dřívějšímu ukončení nukleárního vývoje, protože v nitru nenastanou podmínky pro zažehnutí pozdějších reakcí.)

Velký význam má vítr v závěrečných fázích vývoje, například pro hvězdy na asymptotické větvi obrů (AGB) jsou pozorované ztráty hmoty až $\dot{M} \gtrsim 10^{-3} M_\odot$ za rok, při poměrně malé rychlosti $v \simeq 10$ km/s. Tento *supervítr* (angl. superwind) je pravděpodobně buzen *tlakem záření na prachové částice*, uhlíkaté nebo silikátové, které běžně kondenzují v rozsáhlých obálkách obřích hvězd (Lagadec a Zijlstra 2008).

Hvězdný vítr významně přispívá k obohacení mezihvězdného prostředí těžšími prvky, a postupně tak zvyšuje metalicitu mezihvězdné látky. Vítr je (pro některé prvky) pravděpodobně vydatnějším zdrojem než exploze supernov.



Obrázek 11.8: Ztráta hmoty dM/dt Reimersovým větrem (úměrná zářivému výkonu L) v závislosti na čase, pro hvězdy s hmotnostmi 0,1 až $100 M_{\odot}$. Výpočet programem EZ.



Obrázek 11.9: Vliv započtení hvězdného větru na vývoj hvězdy ($M = 1 M_{\odot}$) v HR diagramu. Účinnost větru byla zvolena $\eta_w = 1$. Výpočet programem EZ.

12 Vliv rotace

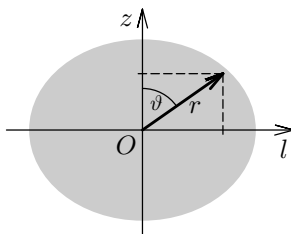
12.1 Rocheův model a jednoduché odhady

Hrubý odhad vlivu rotace na rozměry hvězdy poskytuje *Rocheův model*. Je založen na předpokladu, že všechna hmota hvězdy je soustředěna ve hmotném bodu v jejím centru, a na předpokladu tuhé rotace s úhlovou rychlostí ω . Z hlediska povrchových vrstev je tento předpoklad u reálných hvězd docela dobře splněn. (Vnitřní stavba takové hvězdy by se vlastně měla podobat polytropě s indexem $n \geq 5$, která se rozprostírá do nekonečna nebo jinými slovy je velmi koncentrovaná ke středu.)

Rotující hvězdu budeme popisovat v *neinerciální* soustavě korotující s hvězdou, s válcovými souřadnicemi l, z . Osa z je identická s osou rotace, a druhá souřadnice l odpovídá kolmé vzdálenosti od rotační osy (obr. 12.1). Na částici v atmosféře hvězdy působí jednak gravitační zrychlení $a_g = -GM_*r^{-2}$, kde $r^2 = l^2 + z^2$, jednak odstředivé $a_o = \omega^2 l$. Jejich působení popíšeme celkovým potenciálem ($\mathbf{a} = \nabla\Psi$)

$$\Psi = \frac{GM_*}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 l^2. \quad (12.1)$$

Ekvipotenciální plochy jsou zároveň plochami konstantní hustoty, takže rotující hvězda bude zaujímat tvar některé konkrétní ekvipotenciální plochy.



Obrázek 12.1: Zavedení válcových souřadnic (l, z) pro výpočet gravitačního potenciálu rotující hvězdy.

Zkoumejme, jaké budou vlastnosti *kritické plochy*, pro níž bude někde výslednice přitažlivé a odstředivé síly nulová. Podmínkou pro to je nulový gradient potenciálu ($\nabla\Psi = 0$). Konkrétně dostáváme

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = -\frac{1}{2}GM_*(l^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}2z = -GM_*r^{-3}z = 0, \quad (12.2)$$

což je zřejmě splněno všude v rovině rovníku hvězdy, t.j. pro $z = 0$, a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial l} = -GM_*(l^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}l + \omega^2 l = 0. \quad (12.3)$$

Protože $z = 0$, je tato druhá podmínka splněna pro l_0 , pro něž platí

$$GM_*(l_0^2)^{-\frac{3}{2}} = GM_*l_0^{-3} = \omega^2, \quad (12.4)$$

čili

$$l_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_*}{\omega^2}}. \quad (12.5)$$

Hodnota kritického potenciálu je tedy

$$\Psi_{\text{krit}} = \frac{GM_*}{l_0} + \frac{1}{2}\omega^2 l_0^2 = \frac{3}{2}\omega^2 l_0^2. \quad (12.6)$$

Kritická ekvipotenciála $\Psi = \Psi_{\text{krit}}$ je množinou bodů (l, z) , pro něž platí

$$\frac{GM_*}{\sqrt{l^2 + z^2}} + \frac{1}{2}\omega^2 l^2 = \Psi_{\text{krit}}. \quad (12.7)$$

Můžeme ještě zjistit hodnotu *polárního* poloměru z_{pol} takové kriticky rotující hvězdy, jestliže položíme $l = 0$ a dosadíme za $GM_* = \omega^2 l_0^3$

$$\frac{\omega^2 l_0^3}{\sqrt{z_{\text{pol}}^2}} = \frac{3}{2}\omega^2 l_0^2. \quad (12.8)$$

Dostáváme

$$z_{\text{pol}} = \frac{2}{3}l_0 \quad (12.9)$$

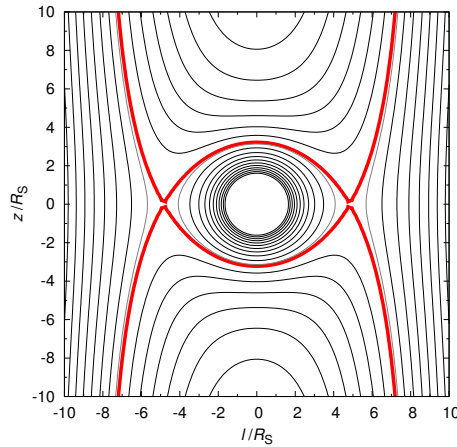
a vidíme, že hvězda rotující na mezi své dynamické stability má rovníkový poloměr o polovinu větší než poloměr polární. Tvar ekvipotenciál je znázorněn na obrázku 12.2 a příklad hvězdy rotující blízko kritické meze uvádíme na obrázku 12.3.

Odhady poloměrů hvězd. Rotační zploštění může mít vliv na odhady poloměrů hvězd z jejich hvězdné velikosti. Pokud bychom pozorovali hvězdu rotující v blízkosti kritické rotační rychlosti zhruba od pólu rotace, budeme vidět v zásadě její rovníkový poloměr. Pokud však pozorujeme hvězdu zhruba v rovině jejího rovníku, můžeme průmět zářící plochy v prvním přiblížení aproximovat plochou elipsy s velkou poloosou rovnou rovníkovému, a malou polárnímu poloměru hvězdy. Pro efektivní poloměr R_{eff} tak dostáváme

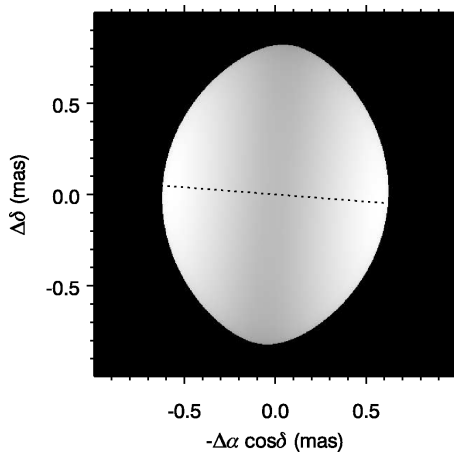
$$\pi R_{\text{eff}}^2 = \pi ab = \frac{3}{2}\pi R_{\text{pol}}^2, \quad (12.10)$$

neboli

$$R_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{3}{2}} R_{\text{pol}} \doteq 1,225 R_{\text{pol}}. \quad (12.11)$$



Obrázek 12.2: Ekvipotenciály rocheovského potenciálu $\Psi(l, z)$ rotující hvězdy o hmotnosti $M = 3,5 M_{\odot}$ a rotační periodě $P = 15,9$ h. Červeně je vyznačena kritická hodnota potenciálu Ψ_{krit} , čili maximální rozměr, jaký hvězda může zaujmout, aby byla ještě stabilní. Tence je nakreslena ekvipotenciála $\Psi = 1,028 \Psi_{\text{krit}}$, přibližně odpovídající hvězdě Regulus.



Obrázek 12.3: Rekonstruovaný obraz hvězdy Regulus (α Leo) získaný interferometrem CHARA ve filtru K . Při své hmotnosti $3,5 M_{\odot}$, periodě 15,9 h a poloměru rotuje hvězda blízko meze stability. Zřetelné je také ztemnění rovníku oproti pólům, způsobené rozdílným gravitačním potenciálem a tedy i teplotou. Tečkovaně je naznačena osa rotace hvězdy. Převzato z práce McAlistera a spol. (2005).

Minimální rotační perioda. Uveďme si v té souvislosti několik užitečných základních vztahů, které se hodí pro podobné odhady. U rotujících hvězd se můžeme setkat s projevy rychlé proměnnosti jasnosti nebo profilů spektrálních čar. Může se stát, že si budeme chtít učinit představu, v jakém rozmezí se může nalézat rotační perioda rotující hvězdy. Označíme-li v rovníkovou rotační rychlost hvězdy, R_{rov} její rovníkový poloměr a P_{rot} její rotační periodu, platí zřejmě

$$v = \frac{2\pi R_{\text{rov}}}{P_{\text{rot}}} . \quad (12.12)$$

Bývá zvykem vyjadřovat obvodovou rotační rychlost v km s^{-1} , rotační periodu ve dnech a poloměry hvězd v jednotkách slunečního poloměru. Pro sluneční poloměr můžeme přijmout hodnotu $R_{\odot} = (6,95508 \pm 0,00026) \cdot 10^8 \text{ m}$ (viz dodatek A.4) a dostáváme užitečnou pracovní rovnici

$$v = 50,57877 \text{ km/s} \frac{R_{\text{rov}}}{R_{\odot}} \frac{1}{[P_{\text{rot}}]_{\text{d}}} . \quad (12.13)$$

Žádná hvězda nemůže rotovat rychleji, než *kritickou rychlostí* v_{krit} , při které se přítažlivé a odstředivé zrychlení vyrovnávají (nazývá se též Keplerova či oběžná rychlost)

$$\frac{GM_*}{R_{\text{rov}}^2} = \frac{v_{\text{krit}}^2}{R_{\text{rov}}} , \quad (12.14)$$

což vede na vztah

$$v_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{GM_*}{R_{\text{rov}}}} . \quad (12.15)$$

Pokud opět hmotnost a rovníkový poloměr hvězdy budeme vyjadřovat v jednotkách hmotnosti a poloměru Slunce z práce Gundlach a Merkwitz (2000) a použijeme-li moderní hodnoty gravitační konstanty, $M_{\odot} = (1,988435 \pm 0,000027) \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $G = (6,674215 \pm 0,000092) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, bude

$$v_{\text{krit}} = 436,822 \text{ km/s} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R_{\text{rov}}}{R_{\odot}}\right)^{-\frac{1}{2}} . \quad (12.16)$$

Kombinací vztahů (12.12) a (12.16) dostáváme odhad minimální možné rotační periody ve tvaru

$$\begin{aligned} P_{\text{min}} = \frac{2\pi R_{\text{rov}}}{v_{\text{krit}}} &\doteq 0,11587 \text{ d} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{R_{\text{rov}}}{R_{\odot}}\right)^{\frac{3}{2}} \doteq \\ &\doteq 0,21287 \text{ d} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{R_{\text{pol}}}{R_{\odot}}\right)^{\frac{3}{2}} . \end{aligned} \quad (12.17)$$

Maximální rotační perioda. Pro konkrétní hvězdy ve většině případů *neznáme sklon* jejich rotační osy vůči nám, z rotačního rozšíření profilů spektrálních čar proto určíme pouze projekci rotační rychlosti $v \sin i \leq v$, tedy hodnotu, která je menší než skutečná rovníková rotační rychlost nebo je jí nanejvýš rovna. Proto můžeme pro hvězdu se změřenou promítnutou rotační rychlostí $v \sin i$ — máme-li představu o jejím poloměru — odhadnout i *maximální* možnou rotační periodu s použitím vztahu (12.12):

$$P_{\max} = \frac{2\pi R_{\text{rov}}}{v \sin i} \doteq 50,57877 \text{ d} \frac{R_{\text{rov}}}{R_{\odot}} \frac{1}{[v \sin i]_{\text{km/s}}}. \quad (12.18)$$

Je ovšem třeba upozornit na jednu okolnost. Pokud se nějakým vnějším vlivem vytvoří v blízkosti rovníku hvězdy, která rotuje hluboko pod kritickou rotační rychlostí a je prakticky sférická, cirkumstelární plynová obálka (např. akreční disk ve dvojhvězdě), může být perioda rotace případných struktur v takové obálce kratší, než by plynulo z aplikace vztahů (12.17). Odhad minimální periody v takových případech dostaneme, jestliže do vztahu (12.17) dosadíme za rovníkový poloměr skutečný sférický poloměr hvězdy.

12.2 Modely hvězdného vývoje se započtením rotace

Rotace může ovlivnit stavbu hvězdy v několika směrech:

1. Odstředivá síla všude mimo rotační osu hvězdy *snižuje efektivní gravitaci*.
2. Protože vektor odstředivé síly není mimo rovník hvězdy rovnoběžný s vektorem síly přitažlivé, dojde k *narušení sférické symetrie* — ekvipotenciály přestávají být kulové, jak jsme to již diskutovali výše pro limitní případ Rocheova modelu.
3. Protože se zářivý tok H mění s gravitačním zrychlením v tom kterém místě, není konstantní na daném ekvipotenciálním povrchu, což může změnit podmínky vzniku konvektivní rovnováhy.
4. Rotace může *ovlivňovat konvekci* několika dalšími způsoby: jednak může působit proti konvektivním pohybům, jednak může — v důsledku přerozdělování momentu hybnosti — určité konvektivní pohyby vyvolat i v oblastech zářivé rovnováhy (v důsledku diferenciální rotace, meridionální cirkulace).

5. Rotace způsobí i *meridionální cirkulaci*, která vede na *diferenciální rotaci*, ta vyvolá ‘střih’ a efektivní promíchávání hvězdného materiálu. To vše ovlivní přerozdělování úhlového momentu hybnosti a obecně způsobí, že rotační rychlost v různých částech hvězdy nebude odpovídat konservativnímu případu, t.j. odstředivá síla nebude mít potenciál.

Naprostá většina badatelů, zabývajících se modelováním vývoje hvězd se započtením rotace, se ovšem zatím omezila na (vnitřně fyzikálně nekonzistentní) případy, kdy lze odstředivou sílu potenciálem popsat. Při obecné formulaci se obvykle vychází z *vektorového tvaru* základních rovnic.

Vektorový tvar rovnic stavby. Pro silové pole se uvažuje obecný *gravitační potenciál* a *potenciál rotace*, jak byl zaveden vztahem (12.1). Rovnici hydrostatické rovnováhy pak lze zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \Phi + \omega^2 \mathbf{1} = -\nabla \Psi, \quad (12.19)$$

kde Φ označuje (záporný) gravitační potenciál, Ψ je celkový potenciál, ω je úhlová rotační rychlost kolem osy z a vektor $\mathbf{1}$ míří kolmo na osu rotace a jeho délka je rovna kolmé vzdálenosti uvažovaného místa od osy z .

Rovnici kontinuity nahradí *Poissonova rovnice* ve tvaru

$$\Delta \Phi \equiv \operatorname{div}(\nabla \Phi) = 4\pi G \rho. \quad (12.20)$$

Místo veličiny L_R je výhodnější uvažovat *vektorový tok* záření jednotkovou plochou \mathbf{H} a rovnici zářivého přenosu energie psát ve tvaru

$$\nabla T = -\frac{3\kappa\rho}{4acT^3} \mathbf{H}. \quad (12.21)$$

Rovnici tepelné rovnováhy zapíšeme pomocí *divergence toku* jako

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \epsilon\rho, \quad (12.22)$$

kde ϵ představuje veškerý uvolňovaný měrný výkon. Původní čtyři funkce $R(M_R)$, $P(M_R)$, $L_R(M_R)$, $T(M_R)$ jsme tedy nahradili funkcemi $\Phi(\mathbf{R})$, $P(\mathbf{R})$, $\mathbf{H}(\mathbf{R})$, $T(\mathbf{R})$.

Dá se ukázat (viz např. Schwarzschild 1958), že pro rotační zákony, pro něž úhlová rychlost rotace závisí pouze na vzdálenosti od osy rotace z , jsou všechny fyzikální veličiny konstantní podél každé ekvipotenciální plochy. Pro případ tuhé rotace lze pro celkový potenciál psát

$$\Psi(R, \vartheta) = \Phi(R, \vartheta) - \frac{1}{2} \omega^2 \overbrace{(R \sin \vartheta)^2}^l = \Phi(R, \vartheta) - \frac{1}{3} \omega^2 R^2 [1 - P_2(\cos \vartheta)], \quad (12.23)$$

kde

$$P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \quad (12.24)$$

je Legendrův polynom druhého stupně (nejedná se o žádný rozvoj, pouze přepis $\sin^2 \vartheta$). Lze definovat jakýsi střední poloměr každé ekvipotenciální plochy R_0 jako poloměr ve směru $\vartheta = \vartheta_0$, pro který je $P_2(\cos \vartheta_0) = 0$. To je splněno pro $\vartheta \doteq 55^\circ$.

Různé modely rotujících hvězd. Jak si jako první uvědomili Faulkner, Roxburgh a Strittmatter (1968), je v takovém případě možné napsat pro poloměr R_0 rovnice formálně velmi podobné rovnicím pro případ nerotující hvězdy.

Jiný postup zvolili Kippenhahn a spol. (1970). Vyšli z toho, že rotace ovlivňuje hvězdu dvojným způsobem: (i) působí proti gravitaci spolu s gradientem tlaku, a (ii) způsobuje rotační zploštění hvězdy. Oni se rozhodli *zploštění ignorovat*. Předpokládali rovněž sférickou symetrii úhlové rychlosti, tedy $\omega = \omega(R)$. Vzhledem k rotační symetrii lze pro *radiální složku* odstředivé síly působící na element slupky (pod úhlem ϑ) psát

$$dF_o = \omega^2 l \sin \vartheta dm_R = \omega^2 R \sin^2 \vartheta dm_R, \quad (12.25)$$

kam za hmotnost elementu dosadíme

$$dm_R = \frac{dM_R}{4\pi R^2} \overbrace{R d\vartheta R \sin \vartheta d\varphi}^{dS}. \quad (12.26)$$

Integrovaním přes celý prostorový úhel ω získáme střední hodnotu radiální složky odstředivé síly působící na celou slupku o hmotnosti dM_R

$$\begin{aligned} \bar{F}_o &= \int_{\omega} dF_o = \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \omega^2 R \frac{dM_R}{4\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta \overbrace{d\varphi}^{2\pi} = \omega^2 R \frac{dM_R}{4\pi} \overbrace{2\pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta}^{\frac{4}{3}} = \\ &= \frac{2}{3} \omega^2 R dM_R. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Na plošnou jednotku povrchu koule o poloměru R působí tedy radiálně odstředivá síla

$$\frac{1}{4\pi R^2} \bar{F}_o = \frac{\omega^2}{6\pi R} dM_R \quad (12.28)$$

a příslušná rovnice hydrostatické rovnováhy nabude tvar

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4} + \frac{\omega^2}{6\pi R}. \quad (12.29)$$

To je třeba vzít v potaz i v rovnici konvektivní rovnováhy.

Jejich metodu převzali a ještě zdokonalili Endal a Sofia (1976). Předpokládali opět, že místy stejné teploty, tlaku a hustoty jsou ekvipotenciální plochy a jako nezávisle proměnnou zvolili veličinu M_{Ψ} , t.j. hmotu obsaženou uvnitř ekvipotenciální plochy s hodnotou celkového potenciálu Ψ . Místo poloměru R zavedli jakýsi efektivní poloměr ekvipotenciální plochy R_{Ψ} vztahem

$$V_{\Psi} = \frac{4}{3} \pi R_{\Psi}^3, \quad (12.30)$$

kde V_Ψ je objem příslušné ekvipotenciální plochy. To jim umožnilo psát rovnici zachování hmoty ve tvaru

$$dM_\Psi = \rho dV_\Psi = 4\pi R_\Psi^2 \rho dR_\Psi, \quad (12.31)$$

a tedy

$$\frac{dR_\Psi}{dM_\Psi} = \frac{1}{4\pi R_\Psi^2 \rho}, \quad (12.32)$$

což je rovnice formálně stejná, jako pro případ nerotující hvězdy. Hodnoty všech veličin, které se na ekvipotenciálním povrchu nezachovávají, střeďovali integrací přes povrch ekvipotenciální plochy.

Asi od druhé poloviny devadesátých let 20. století se studiu vývoje rotujících hvězd soustavně věnuje ženevská skupina kolem prof. Maedera. Základy jejich přístupu jsou popsány v práci Meyneta a Maedera (1997). Tito autoři upozornili na problém *nekonservativnosti rotace*. Aby i přesto mohli celý problém pojednat jako jednorozměrný, předpokládali, že diferenciální rotace má takový charakter, že úhlová rychlost rotace ω je konstantní na *isobarách* — plochách konstantního tlaku. To vcelku dobře odpovídá existujícím studiím turbulence u Slunce i u jiných hvězd. V literatuře se takový charakter rotace nazývá *obálková rotace* (angl. shellular rotation). Pro menší rotační rychlosti lze takovou rotaci dobře aproximovat vztahem $\omega = \omega(R)$, který předpokládali již Kippenhahn a spol. (1970). Meynet a Maeder (1997) ukázali, že v takovém případě lze využít výše naznačený postup s tím, že místo ekvipotenciálních ploch se uvažují isobary, a odvodili příslušný tvar rovnic. Další studie rotace hvězd jsou popsány v pokračující sérii prací (Meynet a Maeder 1997, 2000, Maeder 1997, 1999, Maeder a Meynet 2000b, Maeder a Zahn 1998) a shrnuty v práci Maeder a Meynet (2000a).

Dosud jediné experimentální dvourozměrné modely vývoje rotujících hvězd publikovali Shindo a spol. (1997) pro hvězdu o hmotnosti $18 M_\odot$ a pro heliovou hvězdu o hmotnosti $5 M_\odot$.

Je ovšem třeba říci, že všechny tyto studie je třeba považovat za předběžné. Porovnávání výsledků se skutečně pozorovanými hvězdami je proto třeba činit s patřičnou rezervou, neboť obecný problém v alespoň dvourozměrném (rotačně symetrickém popisu) nebyl ještě zdaleka vyřešen.

12.3 Některé výsledky vývoje rotujících hvězd

Sackmann a Anand (1970) spočítali modely rotujících hvězd hlavní posloupnosti o hmotnostech mezi 5 a $10 M_\odot$ a vývoj rotující hvězdy o hmotnosti $10 M_\odot$ za

předpokladu *tuhé rotace* ($\omega(R) = \text{konst.}$) a *zachování celkového momentu hybnosti* ($\mathcal{L} = \text{konst.}$). Při výpočtu vývoje hvězdy tedy měnili model od modelu úhlovou rychlost rotace $\omega(t)$ (kterou podle předpokladu zachovávali pro daný čas konstantní v celém nitru hvězdy) tak, aby byla splněna podmínka

$$\mathcal{L} = I\omega = \text{konst.}, \quad (12.33)$$

kde I označuje moment setrvačnosti celé hvězdy

$$I = \int_M R^2 dM = \int_V R^2 \rho(R) dV. \quad (12.34)$$

Zjistili, že za těchto předpokladů je vliv rotace na stavbu hvězd hlavní posloupnosti poměrně malý. Bolometrický zářivý výkon se snižuje jen o méně než 7% a polární poloměr hvězdy o méně než 2%.

Výrazné změny však nastávají během nukleárního vývoje hvězdy. S postupným růstem poloměru hvězdy sice klesá obvodová rychlost v na rovníku, ale ukazuje se, že *pomaleji*, než rychlost kritická $v_{\text{krit}} \propto R^{-1/2}$ (viz (12.15)), čili může nastat situace

$$v \geq v_{\text{krit}}. \quad (12.35)$$

Modely proto vedou k závěru, že i hvězdy, které mají na hlavní posloupnosti nulového věku rotační rychlosti několikrát menší než je rychlost kritická, se během vývoje na hlavní posloupnosti mohou stát *rotačně nestabilní*. Sackmann a Anand tím vysvětlovali možný vznik hvězd se závojem.

Kippenhahn a spol. (1970) propočítali vývoj rotujících hvězd pro dva jiné možné případy: (i) moment hybnosti se zachovává lokálně v oblastech zářivé rovnováhy zatímco v oblastech konvektivního přenosu energie rotuje hvězda jako tuhé těleso a zachovává se celkový moment hybnosti. (ii) Moment hybnosti se zachovává lokálně v oblastech měnícího se chemického složení; v oblastech, kde je chemické složení homogenní, rotuje hvězda jako tuhé těleso a zachovává se celkový moment hybnosti.

Vývoj pro obě uvedené alternativy spočetli pro hvězdu o hmotnosti $9 M_{\odot}$, přičemž pro model na hlavní posloupnosti nulového věku předpokládali tuhou rotaci. Vývoj propočítali až do fázi vyhoření helia a v obou případech vedl v závěrečných fázích ke vzniku rychle rotujícího jádra a pomalu rotujících vnějších vrstev. Pro druhý uvažovaný případ zachovávání momentu hybnosti navíc vývoj na konci hlavní posloupnosti vedl rovněž k rotační nestabilitě hvězdy, autoři však upozorňují, že již pro model na hlavní posloupnosti nulového věku kritickou rotaci předpokládali.

Kippenhahn a spol. také upozornili na to, že když rotace zmenšuje efektivní gravitační zrychlení, **rotující hvězda se chová v jistých ohledech jako hvězda s poněkud menší hmotností** — všechna vývojová stadia trvají pro rotující hvězdu poněkud déle než pro nerotující hvězdu o stejné hmotnosti.

Endal a Sofia (1979) propočítali vývojové modely v rozsahu hmotností od 1,5 do $10 M_{\odot}$ pro tři různé alternativy: (i) tuhou rotaci, (ii) zcela lokální zachování

momentu hybnosti a (iii) pro realistický model simulující co nejlépe očekávané přerodělování momentu hybnosti ve hvězdě (viz Endal a Sofia 1978). Došli k závěru, že pokud hvězda na hlavní posloupnosti nulového věku rotuje s obvodovou rychlostí, která se rovná alespoň asi 60 % rychlosti kritické, dojde u ní během vývoje na hlavní posloupnosti k rotační nestabilitě, která může napomoci vzniku hvězdy se závojem.

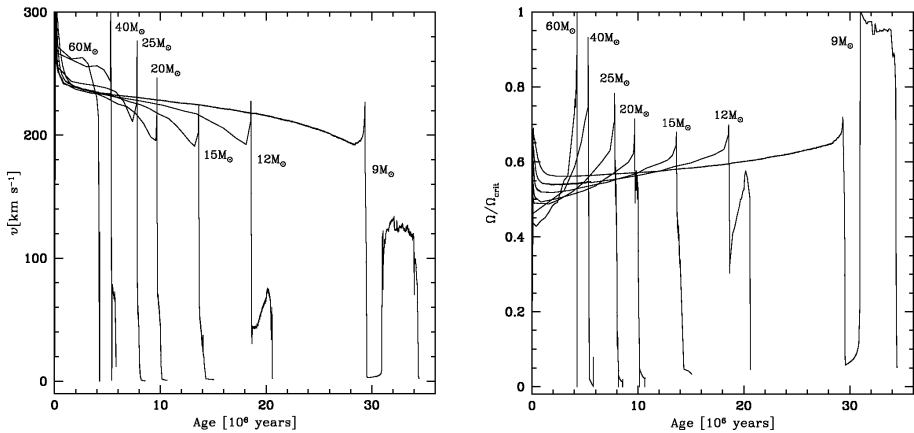
Kromě toho z jejich výpočtů vyplývá, že pro stadium obrů vedou jejich výpočty k nižším rotačním rychlostem než jednodušší rotační modely, takže není třeba hledat další mechanismy ztráty úhlového momentu u obrů typu K.

Meynet a Maeder (2000) publikovali první sít vývojových modelů rotujících hvězd v rozmezí hmotností 9 až $120 M_{\odot}$ pro sluneční chemické složení a různé počáteční rotační rychlosti. Předpokládali nekonzervativní odstředivou sílu, vývoj rotační rychlosti modelovali s uvážením všech známých procesů a brali v potaz i ztrátu hmoty hvězdným větrem. Jejich výsledky shrnují následující odstavce.

Vývoj rotační rychlosti. Obecně lze říci, že sekulární mechanismy přerozdělení úhlového momentu, jako je konvekce či meridionální cirkulace, se uplatňují v obdobích *klidného vývoje*, zatímco v rychlých vývojových stádiích nemají dost času se uplatnit a úhlová rotační rychlost se mění v zásadě tak, že se lokálně zachovává moment hybnosti. Pro modely na hlavní posloupnosti nulového věku byla předpokládána tuhá rotace. Vývoj probíhá takto (obr. 12.4):

1. $R_* \rightarrow pokles \omega$; *hvězdný vítr* \rightarrow *diferenciální rotace*: Pomalý růst poloměru R_* během hlavní posloupnosti vede k tomu, že úhlová rotační rychlost ω všude ve hvězdě postupně klesá, včetně centrálního konvektivního jádra. Zároveň se ustaví diferenciální rotace, s rotační rychlostí klesající směrem k povrchu hvězdy. Tak tomu je především díky započtení ztráty hmoty hvězdným větrem. (Testovací výpočet, ve kterém byly uvažovány všechny procesy kromě ztráty hmoty, vede k soustavně rostoucí rotační rychlosti na povrchu hvězdy během vývoje na hlavní posloupnosti a k dosažení kritické rotace.)
2. $X_c \lesssim 0,05 \rightarrow$ *smrštění jádra* \rightarrow *zvýšení $\omega_{\text{jádra}}$* : Ke konci životní doby na hlavní posloupnosti, když relativní hmotnostní obsah vodíku klesne pod 0,05 a jádro se smršťuje, začne úhlová rotační rychlost v centrálních částech růst.
3. $X_c \doteq 0 \rightarrow$ *pokles R_** \rightarrow *růst ω* \rightarrow *možná nestabilita*: Ve fázi celkové kontrakce hvězdy po spotřebování zásob vodíku v jádru roste úhlová rotační rychlost v celé hvězdě. Zejména pro méně hmotné hvězdy (ve studovaném rozsahu hmotností) dosáhne v této fázi krátkodobě rotační rychlost i více než 80 % kritické rotační rychlosti na povrchu hvězdy.

Zajímavým zjištěním je i to, že během vývoje podél hlavní posloupnosti klesá rotační rychlost na povrchu hvězdy tím rychleji, čím větší byla počáteční rychlost rotace. Právě tak je zajímavé si povšimnout, že povrchová rotační rychlost během vývoje klesá s časem tím rychleji, čím je hvězda hmotnější.



Obrázek 12.4: Vlevo: vývoj obvodových rychlostí v na rovníku s časem pro hvězdy s různými počátečními hmotnostmi, s počáteční $v = 300 \text{ km/s}$ a $Z = 0,004$. Vpravo: poměr $\omega/\omega_{\text{krit}}$ úhlové rychlosti ku kritické úhlové rychlosti. Převzato z práce Maeder a Meynet (2001).

Vliv na vývojové dráhy v HR diagramu. Vzhledem k tomu, že — jak jsme se již úvodem zmínili — závisí tok záření na povrchu rotující hvězdy přibližně na lokálním gravitačním zrychlení, jsou polární oblasti hvězdy teplejší než oblasti rovníkové. Hvězda kromě toho nemá kulový tvar a pojem efektivní teploty podle původní definice proto ztrácí smysl. Aby i přesto bylo možno konstruovat teoretický HR diagram, zavedli Meynet a Maeder (1997) střední efektivní teplotu rotující hvězdy vztahem

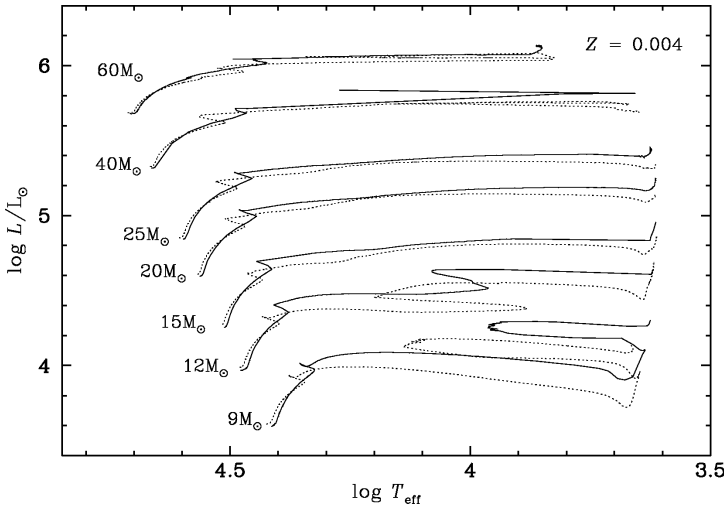
$$L = \sigma T_{\text{eff}}^4 S, \quad (12.36)$$

kde S označuje plochu povrchu hvězdy.

Srovnání rotujících a nerotujících hvězd ukazuje, že na hlavní posloupnosti nulového věku vede rostoucí rotace k poklesu jak efektivní teploty T_{eff} , tak zářivého výkonu L hvězdy. Rotující hvězda se proto jeví jako nerotující hvězda s poněkud menší hmotností.

Naproti tomu postupný vývoj vede k tomu, že rotující hvězdy mají *větší* L než hvězdy nerotující. Tento fakt spolu s působením odstředivé síly znamenají také, že ztráta hmoty \dot{M} z rotujících hvězd je o 60 až 100 % větší, než z hvězd nerotujících. Počáteční rotační rychlost 200 km s^{-1} vede rovněž k *prodloužení životní doby* na hlavní posloupnosti asi o 20 až 30 % a pokud porovnáváme isochrony, zvýší taková rotace odhad staří o tuto hodnotu.

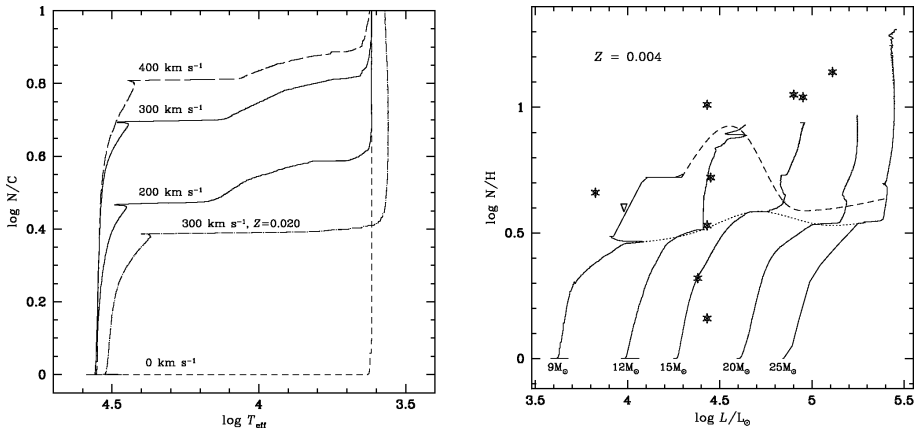
Vliv na povrchové chemické složení. Velmi zajímavým důsledkem rotace je to, že již během vývoje na hlavní posloupnosti dochází u hvězd v uvažovaném rozsahu hmotností k *obohacování jejich atmosfér heliem a dusíkem a naopak k úbytku uhlíku a kyslíku*. Tento efekt roste s rostoucí hmotností hvězdy (obr. 12.6).



Obrázek 12.5: Vývoj hvězd na HR diagramu pro hvězdy rotující (plná čára) a nerotující (čárkovaná čára). Počáteční obvodové rychlosti rotujících hvězd byly $v = 300$ km/s. Převzato z práce Maeder a Meynet (2001).

Srovnání s pozorováním. Je třeba si uvědomit, že srovnání výsledků modelů rotujících hvězd s pozorováním je obtížné nejen proto, že rotační modely se dosud vyvíjejí a nejsou dokonalé, ale i proto, že pro danou hvězdu obvykle neznáme sklon její rotační osy. Pokud jde o hvězdu rychle rotující, její pozorované vlastnosti, včetně její zdánlivé polohy v HR diagramu, se přirozeně budou výrazně lišit podle toho, zda se na ni díváme spíše od pólu či spíše od rovníku. Přesto se lze dohadovat alespoň o dvou souvislostech:

1. *Vznik hvězd se závojem.* Z pozorování je známo, že největší procento hvězd se závojem se pozoruje kolem spektrální třídy asi B2, což odpovídá na hlavní posloupnosti hmotnosti asi $9 M_{\odot}$. Jak jsme viděli, pro hmotnější hvězdy během vývoje povrchová rotační rychlost rychle klesá (v důsledku rostoucího \dot{M} a \dot{L}) takže podmínky pro únik hmoty v rovníkových oblastech se zhoršují. To by s jevem hvězd se závojem mohlo souviset v případě, že k němu v zásadě dochází nějakým vyvrhováním materiálu z hvězdy samotné.
2. *Přebytek He, N u rotujících hvězd.* Z pozorování se zdá, že pro rychleji rotující O hvězdy se pozoruje přebytek helia, jsou známy i OBN hvězdy, u nichž je i přebytek dusíku, a ty se vyskytují hlavně mezi hvězdami hmotnějšími než asi $40 M_{\odot}$. Rovněž se zdá, že obsah helia a dusíku v atmosférách rotujících B hvězd roste během jejich vývoje na hlavní posloupnosti. Tato fakta jsou v dobré kvalitativní shodě s modelovými výsledky.



Obrázek 12.6: Vlevo: poměr abundancí N/C dusíku a uhlíku na povrchu v závislosti na efektivní teplotě T_{eff} , pro hvězdu $M = 20 M_{\odot}$ a různé hodnoty rotačních rychlostí od $v = 0$ do 400 km/s. Vpravo: poměr povrchových abundancí N/H v závislosti na luminositě L , pro hvězdy s různými hmotnostmi a počáteční rychlostí $v = 300$ km/s. Převzato z práce Maeder a Meynet (2001).

Vliv metalicity na rotační nestabilitu. Maeder a Meynet (2001) spočítali rotační modely pro hvězdy v rozsahu hmotností od 9 do $60 M_{\odot}$ pro velmi malý obsah těžkých prvků $Z = 0,004$, který odpovídá hvězdám v Malém Magellanově oblaku. Zjistili, že při *malém* Z je malá opacita κ_{ν} látky, malá zářivá síla f_r v atmosféře hvězdy (viz (11.17)), čili slabší *hvězdný vítr*, malá ztráta hmoty \dot{M} , a tedy i malá ztráta úhlového momentu hybnosti \dot{L} hvězdy, což *napomáhá* vzniku rotační nestability.

Uvedené zjištění může souviset s nedávno pozorovanými fakty, že hvězdokupy s nižším obsahem těžkých prvků obsahují vyšší procento hvězd se závojem. Nové modely také lépe předpovídají obohacování atmosfér veleobrů dusíkem, v souladu s pozorováním veleobrů typu A v Magellanově mračnu a vysvětlují větší počet červených veleobrů.

Závěrem poznamenejme, že Maeder a Meynet (2000a) publikovali podrobnou přehledovou práci o vývoji rotujících hvězd.

13 Vývoj dvojhvězd

Z toho, co jsme si již o hvězdném vývoji pověděli, je zřejmé, že ve dvojhvězdě se rychleji bude vyvíjet hmotnější složka. Je-li oběžná perioda a tedy vzdálenost mezi složkami menší než určitá mez, může se stát — již během vývoje na hlavní posloupnosti, pravděpodobněji ale při přechodu hvězdy z hlavní posloupnosti do oblasti obrů po vypálení vodíku v jádru — že se poloměr hvězdy zvětší natolik, že překročí mez stability a plyn z hvězdy začne odtékat směrem k sekundární, méně hmotné složce dvojhvězdy. Tento proces naruší rovnováhu hvězdy ztrácející hmotu a výrazně změní její další vývoj. Popišme si nejprve, jak se výpočty ve stadiu výměny hmoty provádějí.

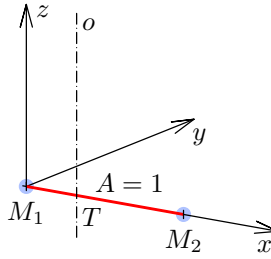
13.1 Rocheův model a jednoduché odhady

Vzhledem k výrazné koncentraci hmoty směrem k centru hvězdy lze i ke studiu dvojhvězd velmi úspěšně využít Rocheův model, který je ovšem komplikovanější, než v případě osamocené rotující hvězdy. Předpokládáme opět, že hmotnost primární i sekundární složky je soustředěna do hmotných bodů o hmotnostech M_1 a M_2 , ω označuje úhlovou oběžnou rychlost soustavy a zavedeme také *hmotový poměr*

$$q = \frac{M_2}{M_1}. \quad (13.1)$$

Zvolme *neinerciální* pravoúhlou souřadnou soustavu pevně spojenou s dvojhvězdou, která má počátek v bodě M_1 a jejíž osa x míří od M_1 k M_2 , osa y je na ni kolmá a leží v oběžné rovině a osa z je kolmá na oběžnou rovinu, přičemž vzdálenost $A = 1$ mezi oběma hmotnými body zvolíme za jednotku vzdálenosti (obr. 13.1). Označme vzdálenost těžiště od bodů M_1 a M_2 jako x_1 a x_2 . Platí zřejmě $x_1/x_2 = M_2/M_1$ a $x_2 = 1 - x_1$, z čehož dostaneme $x_1 = M_2/(M_1 + M_2)$.

Na infinitesimální tělísko o hmotnosti m , nacházející se v obecném bodě (x, y, z) , budou působit tři síly: gravitační přitažlivosti obou hmotných bodů a odstředivá



Obrázek 13.1: Zavedení souřadnicové soustavy pro výpočet potenciálu v okolí dvojhvězdy. Těžiště T a osa o otáčení nejsou v počátku.

síla odpovídající rotaci souřadnicové soustavy. Tyto síly mají tvar:

$$\mathbf{F}_1 = -G \frac{mM_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{F}_2 = -G \frac{mM_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{F}_3 = m\omega^2 \mathbf{r}_3,$$

$$\mathbf{r}_1 = (x, y, z), \quad \mathbf{r}_2 = (x - 1, y, z), \quad \mathbf{r}_3 = \left(x - \frac{M_2}{M_1 + M_2}, y, 0 \right).$$

Označíme-li ještě

$$r_1 = |\mathbf{r}_1|, \quad r_2 = |\mathbf{r}_2|, \quad r_3 = |\mathbf{r}_3|, \quad (13.2)$$

lze celkový potenciál oněch tří sil ($F = m\nabla W$) zapsat ve tvaru

$$W = \frac{GM_1}{r_1} + \frac{GM_2}{r_2} + \frac{1}{2} \omega^2 r_3^2. \quad (13.3)$$

Úhlovou oběžnou rychlost ω vyjádříme ze 3. Keplerova zákona ($A = 1$)

$$\omega^2 A^3 = G(M_1 + M_2) = GM_1(1 + q) \quad (13.4)$$

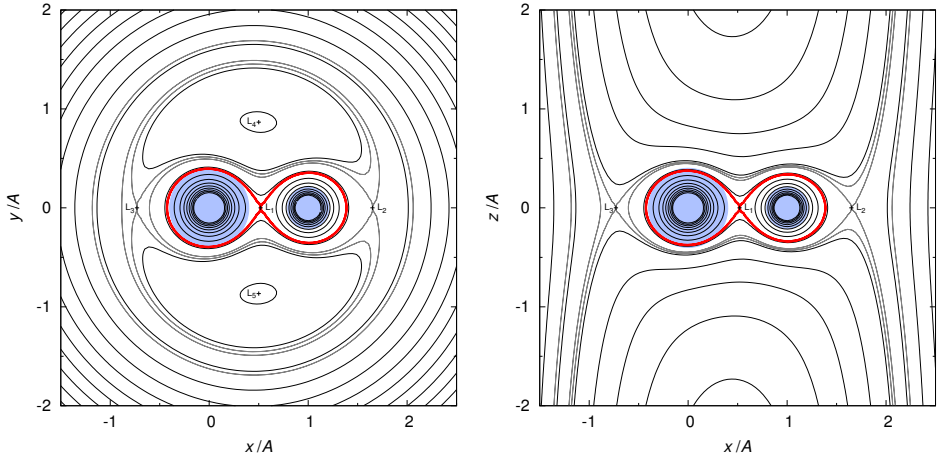
a pro zjednodušení zápisu místo potenciálu W zavedeme potenciál

$$\Omega = \frac{W}{GM_1} = \frac{1}{r_1} + \frac{q}{r_2} + \frac{1}{2}(1 + q)r_3^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+ q((x - 1)^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1 + q)(x^2 + y^2) - qx + \frac{q^2}{2(1 + q)}. \quad (13.5)$$

Rovnice ekvipotenciálních ploch je pak

$$\Omega = C, \quad (13.6)$$



Obrázek 13.2: Potenciál $\Omega(x, y, 0)$ a $\Omega(x, 0, z)$ pro dvojhvězdu s hmotnostmi $M_1 = 4,0 M_\odot$, $M_2 = 3,2 M_\odot$ ($q = 0,8$). Znázorněny jsou polohy Lagrangeových libračních bodů a kritická ekvipotenciála, při jejímž překročení by docházelo k přetoku hmoty. Naznačené jsou i kulové hvězdy, s poloměry R_1 , R_2 , jaké by měly na hlavní posloupnosti nulového věku (v čase $t = 0$). Ve skutečnosti by ovšem tvar povrchu hvězd nezůstal kulový, ale přizpůsobil by se určitým ekvipotenciálám.

kde C je konstanta odpovídající konkrétní ploše (obr. 13.2). Všimněme si ještě, že tvar ekvipotenciálních ploch je funkcí jediné proměnné, poměru hmot q .¹

Můžeme se opět ptát po místech, ve kterých je výsledná síla působící na testovací tělísko nulová, čili

$$\nabla\Omega = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \frac{\partial\Omega}{\partial z} \right) = \mathbf{0}. \quad (13.7)$$

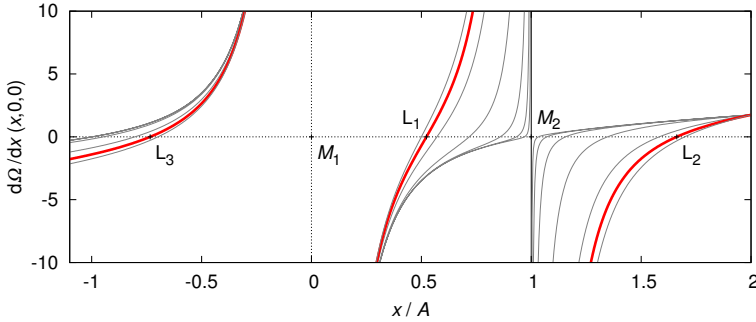
Rozepsáno do souřadnic

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z + q \left(-\frac{1}{2}\right) ((x-1)^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z = 0. \quad (13.8)$$

Z této rovnice plyne řešení $z = 0$. Druhá rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial y} &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y + q \left(-\frac{1}{2}\right) ((x-1)^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y + \\ &+ \frac{1}{2}(1+q) \cdot 2y = 0, \end{aligned} \quad (13.9)$$

¹Podotkněme, že obdobná analýza se provádí v nebeské mechanice v problému tří těles. Při transformaci souřadnic tam kromě odstředivé síly vzniká i Coriolisova ($\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$), kterou v našem stacionárním případě neuvažujeme ($\mathbf{v} = 0$). Zmiňované ekvipotenciální plochy se někdy nazývají křivky nulových rychlostí.



Obrázek 13.3: Průběh funkce $\frac{\partial\Omega(x,0,0)}{\partial x}$ pro poměr hmotností $q = 4,0/3,2 = 0,8$ a její kořeny, což jsou souřadnice Lagrangeových libračních bodů L_1 , L_2 , L_3 . Tence jsou vyznačeny funkce pro další hodnoty $q = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0,1, 0,5, 1,0$.

má dvě řešení. Vezměme nejprve $y \neq 0$, po krácení y totiž máme

$$-\frac{1}{r_1^3} - \frac{q}{r_2^3} + 1 + q = 0, \quad (13.10)$$

což je možné splnit pouze když

$$r_1 = r_2 = 1. \quad (13.11)$$

Jedná se o dva body v oběžné rovině, ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka s body M_1 , M_2 . Nazývají se Lagrangeovy body L_4 a L_5 .

Pokud $y = 0$ (čili hledáme kolineární řešení na ose x), pak ze třetí rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega(x,0,0)}{\partial x} &= -\frac{x}{|x|^3} + \frac{q(x-1)}{|x-1|^3} + (1+q)x - q \\ &= -\frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^2} + \frac{q \operatorname{sgn}(x-1)}{|x-1|^2} + (1+q)x - q = 0 \end{aligned} \quad (13.12)$$

plyne polynom 5. stupně pro x (s parametrem q), který má tři reálné kořeny (obr. 13.3). Těm se obvykle říká L_1 (bod mezi M_1 a M_2); L_2 (ležící za M_2) a L_3 (ležící vně M_1).

Jak jsme se již zmiňovali u jednotlivých hvězd, význam ekvipotenciálních ploch spočívá v tom, že rovnovážná hvězda zaujme tvar některé z nich. Zvláště významná je kritická plocha obsahující bod L_1 — často zvaná *Rocheova mez* — která představuje mez dynamické stability dvojhvězdy. Praktický návod jak počítat rozměry kritické meze pro zvolený poměr hmot lze nalézt v appendixu práce Harmanec (1990).

Fyzikální klasifikace dvojhvězd. Rocheův model poskytuje kritérium pro dodnes využívanou fyzikální klasifikaci dvojhvězd na:

1. *oddělené*, kdy obě složky mají rozměry menší než kritická plocha;
2. *polodotykové*, ve které je jedna složka uvnitř kritické plochy a druhá ji právě vyplňuje, tudíž dochází k přetoku hmoty přes bod L_1 ;
3. *dotykové*, když obě složky zaplňují nebo překračují kritickou plochu a mají společnou atmosféru. Eventuálně může docházet k úniku hmoty ze systému přes bod L_2 .

13.2 Výpočet hvězdného vývoje ve stadiu výměny hmoty

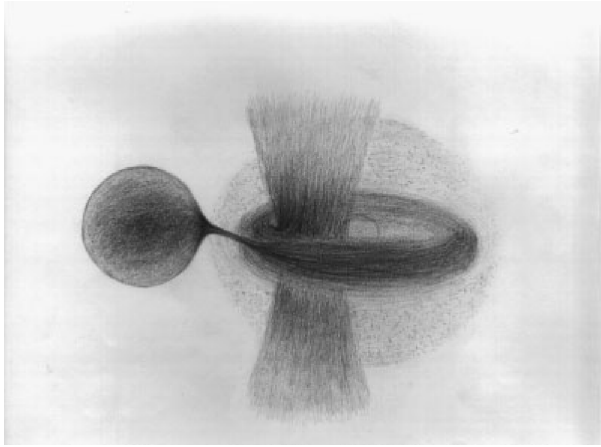
Je zřejmé, že problém vývoje dvojhvězd je úloha, která zásadním způsobem narušuje předpoklad sférické symetrie, úspěšně použitý v případě modelů osamocených hvězd. Jak jsme si ukázali pomocí Rocheova modelu, projeví se narušení nejen sférické, ale i osově symetrie ve chvílích, kdy hvězda expanduje na mez dynamické stability.

Následný přenos hmoty mezi složkami probíhá formou *plynného proudu*, který vytéká z okolí Langrangeova bodu L_1 a je v důsledku *Coriolisovy síly* nevyhnutelně strháván ve směru oběžného pohybu hmotu ztrácející složky. V řadě případů — jak ukazují i nejnovější třírozměrné hydrodynamické modely — oblétno druhou hvězdu a při návratu složitě interaguje s původním proudem (vznikne *horký pás*). Kolem hmotu přijímající složky se vytváří *akreční disk* a též sférická obálka. Část plynu opouští dvojhvězdu a odnáší s sebou tedy část hmoty, i část úhlového momentu soustavy (obr. 13.4).

Ze všech těchto důvodů — i přes velký pokrok ve výpočetní technice — fyzikálně konsistentní výpočty vývoje dvojhvězd ve fázi výměny hmoty dosud neexistují. Přesto existuje již od konce šedesátých let postup, jak výměnu hmoty ve dvojhvězdách alespoň zhruba modelovat, a jak si učinit představu, co asi můžeme u reálných soustav očekávat. Vychází se z následujících zjednodušení:

1. Počítá se *jednorozměrný* model hmotu ztrácející hvězdy, místo skutečné geometrie Rocheova modelu se za dosažení meze stability pokládá, když hvězda dosáhne takového poloměru $R_{\text{krit}}(t)$, že se její objem rovná objemu odpovídající Rocheovy meze pro okamžitý poměr hmot obou složek. Ten lze dobře popsat jednoduchou aproximační formulí (Paczyński 1971)

$$R_{\text{krit}}(t) \doteq \left[0,38 + 0,2 \log \frac{M_1(t)}{M_2(t)} \right] A(t), \quad (13.13)$$



Obrázek 13.4: Nákres modelu dvojhvězdy β Lyrae, sestávající z obra spektrálního typu B6–8II o hmotnosti $3 M_{\odot}$, z něhož přetéká hmota na trpaslíka typu B, s hmotností $13 M_{\odot}$. Rychlost přenosu hmoty dosahuje $\dot{M} = 2 \cdot 10^{-5} M_{\odot}/\text{rok}$, což vysvětluje pozorované prodlužování oběžné periody $\dot{P} = 19 \text{ s}/\text{rok}$. Hmotu přijímající složka je skrytá v akrečním disku a cirkumstelární obálce; v místě kontaktu disku s proudem hmoty jsou znázorněny kolmé výtrysky. Převzato z práce Harmance (2002b).

kde $M_1(t)$, $M_2(t)$ a $A(t)$ označují hmotu složky, která hmotu ztrácí, hmotu přijímající složky a vzdálenost středů obou hvězd v čase t .

2. Veškerá hmota, která expanduje přes kritický poloměr daný vztahem (13.13) *okamžitě* odtéká směrem ke druhé složce dvojhvězdy. Hrubé odhady expanze plynu do vakua ukazují, že tento předpoklad není nesmyslný.
3. Přenos hmoty je *konzervativní*, t.zn., že veškerá hmota, odtékající ze složky 1 je zachycena složkou 2 a že žádná hmota neuniká ze soustavy. Navíc se uvažuje jen moment soustavy související s oběžným pohybem \mathcal{L}_{orb} a zanedbávají se rotační momenty hybnosti \mathcal{L}_{rot} . Toto druhé zjednodušení je dosti přijatelné, neboť rotační momenty jsou ve srovnání s oběžným momentem podstatně menší.² (Navíc by případný mechanismus přenosu momentu hybnosti mezi \mathcal{L}_{orb} a \mathcal{L}_{rot} byl beztak málo účinný.)
4. Model hmotu přijímající složky se obvykle nepočítá, pouze se registruje její okamžitá hmotnost tak, aby celková hmotnost soustavy zůstala zachována.

²Například pro hvězdu o hmotnosti $M_1 = 4 M_{\odot}$, poloměru $R_1 = 5 R_{\odot}$, rotační periodě $P = 2 \text{ d}$ by bylo $\mathcal{L}_{\text{rot}} \simeq k M_1 R_1^2 \omega \simeq 1,8 \cdot 10^{44} \text{ kg m}^2$, kde koeficient $k \simeq 0,05$ je dosti malý, neboť hmota je značně koncentrována ke středu. V porovnání s tím vychází ve dvojhvězdě s $M_2 = 3,2 M_{\odot}$ a se vzdáleností $A = 12 R_{\odot}$ hodnota $\mathcal{L}_{\text{orb}} = (GM_1^2 M_2^2 / (M_1 + M_2) \cdot A)^{1/2} \simeq 1,0 \cdot 10^{46} \text{ kg m}^2$, čili o 2 řády větší.

Tím se modelování vyhne problému reálného popisu hydrodynamického přenosu hmoty mezi složkami.

Vzdálenost složek dvojhvězdy. Za zmiňovaných předpokladů platí zákon zachování hmoty

$$M_1(t) + M_2(t) = K \quad (13.14)$$

a také zákon zachování celkového (oběžného) momentu hybnosti

$$\mathcal{L} \doteq \mathcal{L}_{\text{orb}} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} A v_K = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} A \frac{2\pi A}{P}. \quad (13.15)$$

Tento vztah lze ještě upravit pomocí 3. Keplerova zákona

$$\frac{A^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2} \quad (13.16)$$

do tvaru

$$\mathcal{L}_{\text{orb}}^2 = G \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1 + M_2} A, \quad (13.17)$$

což se pro případ konstantní celkové hmoty (13.14) redukuje na podmínku

$$A(t)M_1^2(t)M_2^2(t) = C. \quad (13.18)$$

Můžeme si přirozeně položit otázku, kdy bude vzdálenost mezi oběma hvězdami minimální. V poslední rovnici (13.18) vyloučíme hmotnost M_2 s využitím (13.14)

$$A(M_1) = CM_1^{-2}(K - M_1)^{-2} \quad (13.19)$$

a hledáme, kdy bude derivace této funkce podle hmoty M_1 primáru nulová. Dostaneme

$$\frac{dA(M_1)}{dM_1} = -2CM_1^{-3}(K - M_1)^{-2} + 2CM_1^{-2}(K - M_1)^{-3} = 0, \quad (13.20)$$

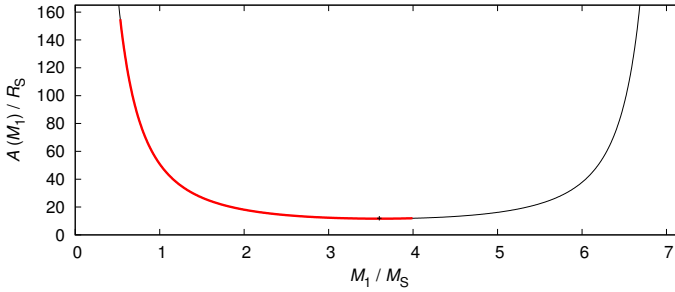
což po úpravě vede na podmínku

$$-(K - M_1) + M_1 = -K + 2M_1 = 0 \quad (13.21)$$

neboli

$$M_1 = M_2. \quad (13.22)$$

Vidíme, že vzdálenost mezi hvězdami je při konservativním přenosu hmoty mezi složkami minimální ve chvíli, když se hmotnost obou těles vyrovná. Při toku z hmotnější složky na méně hmotnou ($M_1 > M_2$) se vzdálenost zmenšuje; při opačném toku ($M_1 < M_2$), respektive po převrácení hmotového poměru, se vzdálenost zvětšuje (obr. 13.5).



Obrázek 13.5: Změny vzdálenosti dvojhvězdy s počátečními hmotnostmi $M_1 = 4 M_\odot$, $M_2 = 3,2 M_\odot$ během přenosu hmoty, v závislosti na hmotnosti M_1 (dle (13.19)). Červeně je vyznačen vývoj takové dvojhvězdy při realisticky počítaném přenosu hmoty — původní hmotový poměr $q = M_2/M_1 = 0,8$ se více než převrátil (na hodnotu $q = 1,89$).

Nekonzervativní přenos hmoty. V některých pracích z novější doby se uvažuje parametricky ztráta hmoty a úhlového momentu ze soustavy. Např. de Loore a De Greve (1992) předpokládají vztah ve tvaru

$$\frac{dM_2}{dt} = -\beta \frac{dM_1}{dt}, \quad (13.23)$$

přičemž parametr β volí konstantní pro celou fázi výměny hmoty, obvykle roven 0,5. To je nepochybně určitý nedostatek, neboť lze předpokládat, že ve fázích rychlejšího přenosu hmoty je pravděpodobnost úniku hmoty ze soustavy větší, než ve fázích pomalých. V tomto modelu tedy $(1 - \beta)$ z hmoty opouštějící složku 1 uniká ze soustavy.

Ještě složitějším problémem je popsat ztrátu úhlového momentu. De Loore a De Greve (1992) předpokládali, že úhlový moment je úměrný celkové hmotnosti soustavy $M(t) = M_1(t) + M_2(t)$, čili

$$\mathcal{L} \propto M^\gamma, \quad (13.24)$$

a změnu momentu hybnosti popisovali parametrickou rovnicí

$$\frac{\Delta \mathcal{L}}{\mathcal{L}} = 1 - \left(1 - \frac{\Delta M}{M}\right)^\gamma, \quad (13.25)$$

kde konstantu γ po pokusech s modelováním konkrétní dvojhvězdy volili rovnou 2,1. Autoři při těchto nekonzervativních výpočtech modelovali i vývoj složky přijímající hmotu, ovšem pouze tak, že přidávali příslušnou hmotnost o daném chemickém složení.

Model hvězdného nitra. Hvězdné nitro primáru se musí odtoku hmoty jistým způsobem přizpůsobit. Zásadní je, aby poloměr hvězdy $R(t)$ vycházel na Rocheově mezi $R_{\text{krit}}(t)$ a ne menší nebo větší. Principem je ke zvolenému odtoku hmoty ΔM_1 najít vhodný časový krok Δt vývojového modelu. Výpočet modelu ve fázi odtoku proto probíhá následovně (Kippenhahn a Weigert 1967):

1. Pro počáteční hodnoty $M_1(t_0)$, $M_2(t_0)$, $A(t_0)$ spočteme konstanty K , C ze vztahů (13.14), (13.18).
2. Zkusmo zvolíme určitý časový krok Δt vývojového modelu.
3. Spočteme poloměr Rocheovy meze $R_{\text{krit}}(t)$.
4. Je-li $R_1(t) > R_{\text{krit}}(t)$, zvolíme odpovídající hodnotu $\Delta M_1 < 0$ podle osvědčeného vztahu

$$\Delta M_1 = -M_1(t) \cdot \min[s(\log R_1(t) - \log R_{\text{krit}}(t)); 0,03], \quad (13.26)$$

kde konstanta s může nabývat hodnotu mezi 0,1 a 0,5. Všimněme si, že tímto nedovolujeme změnu hmotnosti o více než 3 %.

5. Vynecháme jednu nebo několik prvních slupek v diferenčním schematu tak, aby hvězda měla novou hmotnost

$$M_1(t + \Delta t) = M_1(t) + dM_1, \quad (13.27)$$

tyto vrstvy „odteky“ k sekundární hvězdě. Pokud slupky číslujeme od povrchu, musíme je v takovém případě ještě přechíslovat. Jinak řečeno, úloha je v nezávisle proměnné M_R nyní definována na intervalu $\langle 0, M_1(t) + dM_1 \rangle$ místo původního intervalu $\langle 0, M_1(t) \rangle$.

6. Pomocí rovnic (13.14), (13.18) a (13.13) spočteme nové hodnoty $M_2(t + \Delta t)$, $A(t + \Delta t)$ a $R_{\text{krit}}(t + \Delta t)$.
7. Změníme polohu bodu M_F , tj. hranice, kde je již třeba uvažovat neadiabatickou konvekci a neúplnou ionizaci v podpovrchových vrstvách, a to tak, aby bylo

$$\frac{M_F(t + \Delta t)}{M_1(t + \Delta t)} \leq \frac{M_F(t)}{M_1(t)}. \quad (13.28)$$

8. Spočteme nový model nitra — 1. *superiteraci* správného modelu. Zejména nás zajímá výsledný poloměr hvězdy $R_1(t + \Delta t)$.

Je důležité si uvědomit, že expanze povrchových vrstev a narušení tepelné rovnováhy vedou ke *změněm zářivého toku L_R i v podpovrchových vrstvách* a rovnici tepelné rovnováhy (4.65), popisující změnu L_R od místa k místu, je

i v nich proto třeba řešit. (Zde se právě vyplatí, jsou-li změny vnitřní energie popisovány přímo pomocí entropie, neboť se pak nedopouštíme žádných zanedbání v příslušných rovnicích.)

Ve stádiích výměny hmoty je ovšem na začátku každého modelu třeba znovu spočítat *povrchový trojúhelník* (7.8) v diagramu L vs. T_{eff} pro novou hmotnost hvězdy. V rychlejších stádiích přenosu hmoty je to nutné dělat dokonce před každou superiterací.

9. Poloměr hvězdy $R_1(t + \Delta t)$ porovnáme s očekávaným poloměrem Rocheovy meze $R_{\text{krit}}(t + \Delta t)$. Pokud se obě hodnoty liší více než o požadovanou přesnost, zvolíme pomocí lineární interpolace nový časový krok Δt (tzn. vrátíme se k bodu 2) a spočteme 2. superiteraci. To opakujeme tak dlouho, až je dosaženo požadované shody poloměrů $R_1(t + \Delta t)$ a $R_{\text{krit}}(t + \Delta t)$.

Praxe ukazuje, že kromě velmi komplikovaných stádií stačí obvykle 1 až 3 superiterace k nalezení konzistentního modelu (tj. hodnot Δt , dM_1 , resp. M_1 a struktury nitra).

10. Po ukončení zmiňovaných superiterací provedeme obvyklý časový krok vývoje modelu, čili změníme chemické složení dle (7.14), a vrátíme se k bodu 2.

Výpočet fáze přenosu hmoty ukončíme, jakmile vyjde $R_1(t) < R_{\text{krit}}(t)$.

13.3 Některé výsledky modelování vývoje dvojhvězd

Je třeba si uvědomit, že vývoj dvojhvězd nabízí mnohem více *kombinací*, než vývoj osamocené hvězdy. Začátek stadia výměny hmoty mezi složkami závisí na počáteční oběžné periodě soustavy a na hmotách obou složek, dalšími faktory jsou chemické složení a dosud ne dobře prostudovaná dynamika přenosu (množství hmoty a momentu unikajících ze soustavy).

Z vývoje *osamocených* hvězd víme některá fakta:

1. Během vývoje od hlavní posloupnosti nulového věku dosahuje hvězda postupně *několika lokálních maxim svého poloměru* $R(t)$. Ne každé následující maximum je nutně větší než poslední předchozí, avšak absolutním maximem je určitý okamžik ve stadiu veleobra na konci oné části vývoje, která je určována jadernými reakcemi.
2. Životní doba pobytu hvězdy na hlavní posloupnosti je klesající funkcí hmotnosti hvězdy. To pro dvojhvězdy znamená (při rozumném předpokladu, že obě

složky dvojhvězdy vznikly současně), že *dříve bude expandovat vždy hmotnější z nich*. Často se pro ni volí termín *primární složka* či *primár*.

Můžeme ovšem rozlišit dva případy výměny hmoty mezi složkami (Kippenhahn a Weigert 1967):

případ A: je-li vzdálenost A mezi složkami dostatečně malá, může k výměně hmoty dojít ještě během pobytu primární složky na hlavní posloupnosti.

případ B: situace, kdy k překročení Rocheovy meze primární složkou dojde až později v období rychlé expanze poloměru hvězdy po vyhoření vodíku v jejím jádru.

Plavec (1968) odvodil parametrické vztahy, pomocí kterých lze pro konkrétní dvojhvězdu odhadnout kritické hodnoty oběžné periody pro to, aby došlo k některému případu výměny hmoty. S použitím výpočtů vývoje osamocených hvězd pro chemické složení $X = 0,708$ a $Z = 0,02$ vyšly periody (ve dnech)

$$\log P^0 = 0,441 \log M_1 - 1,06 - s(q), \quad (13.29)$$

$$\log P^I = 0,731 \log M_1 - 0,86 - s(q), \quad (13.30)$$

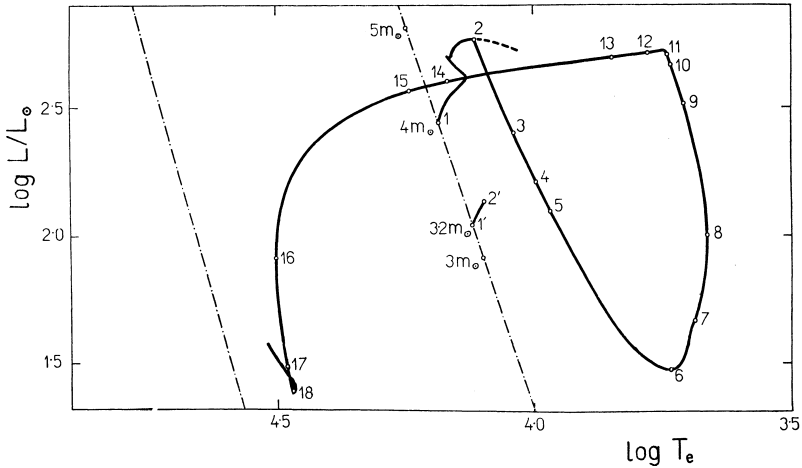
$$\log P^{II} = 2,201 \log M_1 - 0,04 - s(q), \quad (13.31)$$

kde $s(q) = 1,5 \log r + 0,5 \log(1 + q)$, přičemž $r = R/A$ je střední relativní poloměr Rocheovy meze (podle (13.13)) a $q = M_2/M_1$ je hmotový poměr mezi sekundární a primární složkou. Příklad A výměny hmoty nastane, pokud oběžná perioda soustavy leží mezi P^0 a P^I a případ B, je-li perioda mezi P^I a P^{II} . Například pro dvojhvězdu se složkami $M_1 = 4 M_\odot$ a $M_2 = 3,2 M_\odot$ vycházejí hodnoty hraničních period $P^0 = 0,47$ d, $P^I = 1,12$ d, $P^{II} = 56,9$ d.

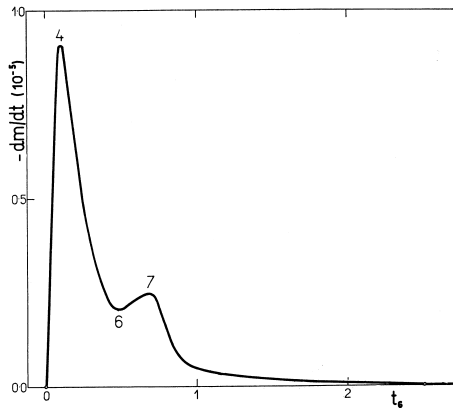
Ačkoliv první pokusy o modelování výměny hmoty byly činěny již roku 1960, lze za první dostatečně realistický výpočet považovat sekvenci modelů publikovaných Kippenhahnem a Weigertem (1967).

Příklad konkrétní dvojhvězdy $4 M_\odot$ a $3,2 M_\odot$. Popíšme si průběh vývoje dvojhvězdy o původních hmotnostech $4 M_\odot$ a $3,2 M_\odot$, jak jej propočtl Harmanec (1970) (viz obr. 13.6):

1. čas $t = 0$, ZAMS: Na počátku vývoje měla uvažovaná soustava oběžnou periodu $1^d 785$. Ke kontaktu primární složky s mezí stability dojde až po vyčerpání vodíku v jejím jádru; jedná se o případ B.
2. $t = 93,5$ Myr, *expanze obálky* \rightarrow *začátek přenosu hmoty* \rightarrow *zmenšování A, pokles L*: Poloměr primáru $R_1 = 4,78 R_\odot$ činí dvojnásobek poloměru na počátku hlavní posloupnosti a je na Rocheově mezi. Obálka hvězdy expanduje v důsledku tepelné nestability v jádru, a ztráta hmoty z povrchových vrstev tuto nestabilitu ještě urychlila. Přenos hmoty se proto v prvním stadiu prudce zrychluje. Tomu napomáhá i zmenšující se vzdálenost A mezi složkami. Narozdíl od osamocené hvězdy je velmi výrazný pokles zářivého výkonu.



Obrázek 13.6: HR diagram pro *primární* složku dvojhvězdy $4 M_{\odot}$ a $3,2 M_{\odot}$. Další parametry dvojhvězdy na počátku přenosu hmoty jsou: poloměry $R_1 = 4,78 R_{\odot}$, $R_2 = 2,47 R_{\odot}$, spektrální typy B7 III a B8 V, vzdálenost mezi složkami $A = 11,95 R_{\odot}$ a orbitální perioda $P = 1,785$ d. Hlavní posloupnosti nulového stáří (ZAMS, čerchované čáry) jsou vyznačeny dvě — pro dvě různá chemická složení: $X = 0,602$, $Y = 0,354$ a $X = 0$, $Y = 0,956$. Vývoj je zachycen před, během i po přenosu hmoty. Přenos hmoty probíhá mezi body 2 až 11; jednotlivé body jsou popisované v textu. Model končí v bodě 18 mimo jiné z toho důvodu, že původně sekundární hvězda by v této fázi pravděpodobně dosáhla Rocheova poloměru a začal by přetok hmoty zpět na primár. Převzato z práce Harmance (1970).



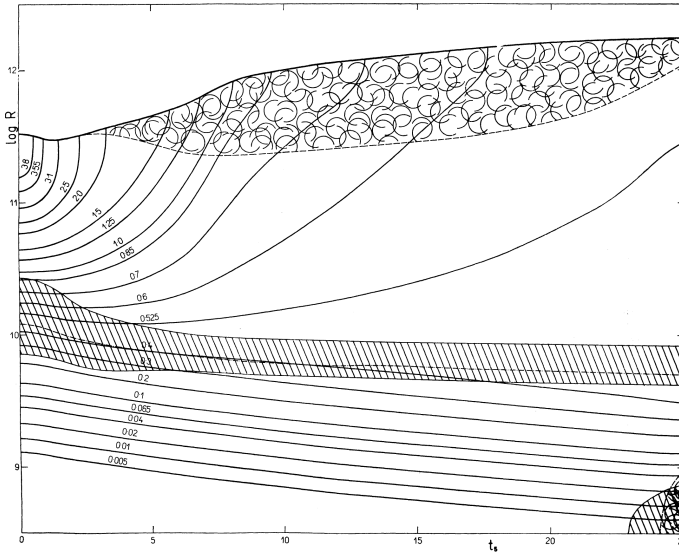
Obrázek 13.7: Rychlost přenosu hmoty $-dM/dt$ ($[dM/dt] = 10^{-5} M_{\odot}$) v závislosti na čase t ($[t] = 10^6$ roků) pro dvojhvězdu $4 M_{\odot}$ a $3,2 M_{\odot}$. Převzato z Harmanec (1970).

3. čas od začátku přenosu hmoty $t_s = 84\,000$ yr, $M_1 = M_2 \rightarrow A$ minimální: Po krátké době mají obě složky stejnou hmotnost $3,6 M_\odot$ a vzdálenost mezi nimi dosahuje minima. Od toho momentu vede pokračující výměna hmoty k narůstání vzdálenosti mezi složkami, což přirozeně brzdí rychlost přenosu.
4. $t_s = 110\,000$ yr, růst $A \rightarrow$ první maximum dM/dt : Vzdalování převládne nad vlivem nukleární nestability, rychlost přenosu hmoty dosáhne svého maxima $9 \cdot 10^{-6} M_\odot$ za rok a počíná klesat (obr. 13.7). Hmotnost primární hvězdy činí v té chvíli $3,37 M_\odot$.
- 5a. $t_s = 127\,800$ yr, q převrácené, pokles $T_{\text{eff}} \rightarrow$ pokles ionizace \rightarrow růst κ , $\nabla_{\text{rad}} \rightarrow$ podpovrchová konvektivní zóna: Po 127800 letech se původní hmotový poměr mezi složkami vymění. Klesající efektivní teplota vede — podobně jako při vývoji osamocené hvězdy — k poklesu ionizace v podpovrchových vrstvách hvězdy a s tím souvisejícím vznikem konvektivní zóny. Asi po 400 000 letech od začátku odtoku začne tato konvektivní zóna prudce narůstat směrem do nitra hvězdy (obr. 13.8).

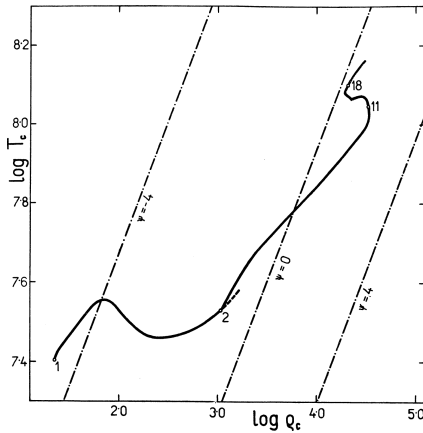
Je dobře si uvědomit, že vnitřní části hvězdy se téměř po celou dobu přenosu hmoty chovají značně *autonomním* a vcelku neměnným způsobem: rovnoměrně se smršťují, aby kompensovaly nestabilitu vzniklou zánikem centrálního nukleárního zdroje energie. Určité změny jsou však patrné. Centrální teplota v poměru k centrální hustotě hned na začátku odtoku začíná narůstat prudčeji než před jeho začátkem (obr. 13.9).

To je chování právě opačné, než jaké ukazují modely výměny hmoty v případě A. Tam totiž centrální teplotu určuje především produkce nukleární energie a ta s úbytkem hmotnosti hvězdy přirozeně klesá. Na začátku odtoku v případě A klesá proto i centrální teplota.

- 5b. kolaps jádra \rightarrow zmenšování H slupky, ale pokles $\epsilon_H \leftarrow$ expanze vnějších částí slupky, úbytek X na spodku slupky: K pochopení průběhu přenosu hmoty je třeba si povšimnout chování hlavního zdroje energie v daném případě: *vodíkové slupky*. Oblast, v níž probíhá slučování vodíku na helium se během celého odtoku absolutně i relativně zmenšuje. Maximum produkce se přitom během první části odtoku zvolna přesouvá směrem k centru, a to jak v poloměru, tak ve hmotě. To souvisí se smršťováním centrálních částí hvězdy. Energetický výkon slupky ale současně klesá. To je způsobeno jednak tím, že klesá hustota a teplota vnějších částí slupky, neboť tyto vrstvy během ztráty hmoty expandují zčásti na úkor své vnitřní energie, a za druhé proto, že ve spodních částech slupky rychle ubývá vodíku. Úbytek vodíku nakonec způsobí, že se (klesající) maximum hoření vodíku ve slupce začne přesouvat směrem k povrchu ve hmotě (obr. 13.8).
6. $t_s = 472\,900$ yr, *minimum L*: Postupně prakticky zanikne původní nestabilita vnějších vrstev hvězdy, vyvolaná ztrátou hmoty, a další odtok hmoty je řízen nestabilitou v jádru. Tím samozřejmě ubude i pohlcování zářivé a vnitřní



Obrázek 13.8: Změny vnitřní struktury primární složky dvojhvězdy $4 M_{\odot}$ a $3,2 M_{\odot}$ v průběhu přenosu hmoty. Na vodorovné ose je vyneseno čas (v jednotkách 10^5 roků) a na svislé logarithmus poloměru $\log[R]_{\text{cm}}$. Každá slupka je označena absolutním hmotnostním podílem (v jednotkách M_{\odot}). Hranice konvektivních zón jsou značeny čárkovanou čarou, oblasti termonukleárních reakcí (s produkcí energie větší než 10 erg/g/s) jsou šrafované, maximum produkce energie ve slupce je čerchovaná čarou. Převzato z Harmanec (1970).

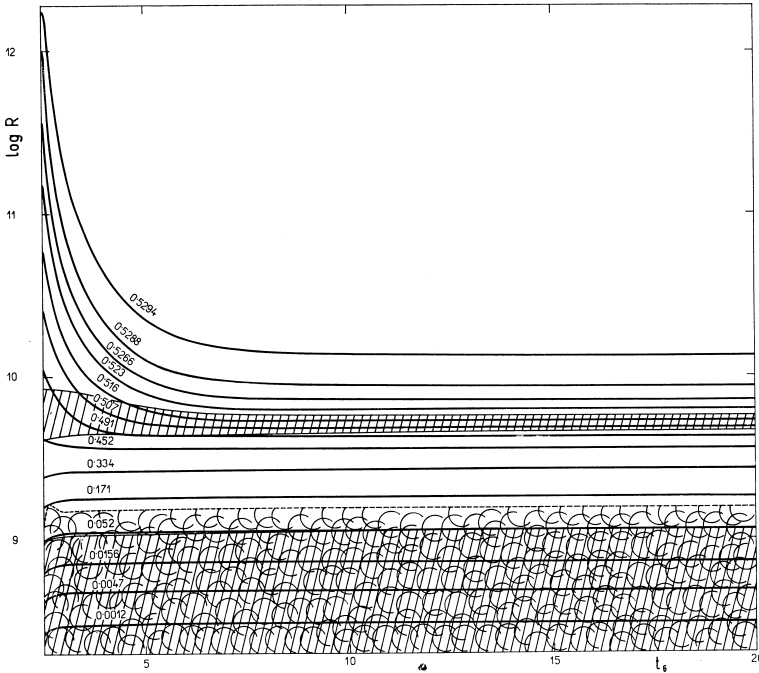


Obrázek 13.9: Závislost centrální hustoty ρ_c a centrální teploty T_c pro vývoj primární složky dvojhvězdy $4 M_{\odot}$ a $3,2 M_{\odot}$. Srovnej s obr. 8.2. Převzato z Harmanec (1970).

energie v obalu a 472 900 let po začátku odtoku dosáhne zářivý výkon hvězdy minima a začíná opět narůstat. K tomuto růstu přispěly ještě další důvody. Přejít na konvektivní přenos energie ve vnějších částech hvězdy vytvořil (podobně jako u vývoje osamocené hvězdy) lepší podmínky pro hoření vodíku ve slupce, takže produkce energie v ní začíná růst. Mimo to se již hvězda v té době zbavila všech vrstev s původním chemickým složením a u povrchu se proto výrazně mění velikost opacity.

7. $t_s = 720\,000\text{ yr}$, *růst oknvektivní zóny* → *rychlejší expanze* → *druhé maximum* dM/dt : Konvektivní zóna má ještě jiný důsledek: rychlejší růst poloměru hvězdy a následkem toho i přechodné druhé maximum přenosu hmoty od začátku odtoku, asi $2,5 \cdot 10^{-6} M_\odot$ za rok.
8. $t_s = 1,11\text{ Myr}$, *zmenšování konvektivní zóny* → *minimum* T_{eff} , *malé* dM/dt : Poté se rozloha konvektivní zóny i rychlost ztráty hmoty opět zmenšují, minima dosáhne i efektivní teplota a končí rychlá fáze odtoku. Další vývoj je určován již jen tepelnou nestabilitou jádra hvězdy. Rychlost odtoku hmoty v té době činí asi $4 \cdot 10^{-7} M_\odot$ za rok a dále se zpomaluje. Efekty ztráty hmoty z povrchu hvězdy jsou v té době už tak malé, že se hvězda chová prakticky stejně jako osamocená hvězda původní hmotnosti v podobném vývojovém stadiu.
9. $t_s = 2,08\text{ Myr}$, *růst* T_c → *slučování He na C*: Růst centrální teploty pokračuje a v jádru začíná docházet k nukleární syntéze helia na uhlík.
10. $t_s = 2,41\text{ Myr}$, *zvýšení* Z → *zvýšení* κ , ∇_{rad} → *jaderná konvektivní zóna*: V centru vzniká nová konvektivní zóna.
11. $t_s = 2,51\text{ Myr}$, *růst* ϵ_{He} → *expanze slupky H* → *pokles* ϵ_{H} → *konec expanze obálky* → *konec přenosu hmoty*: Narůstání produkce v jádru ovšem zhorší podmínky pro hoření ve vodíkové slupce, obal hvězdy přestane růst a 2517900 let po začátku odtoku fáze výměny hmoty končí. Původně primární hvězda má nyní hmotnost pouhých $0,53 M_\odot$, ale poloměr $25,0 R_\odot$ a obsah vodíku na povrchu činí pouze 0,256 proti původního 0,602. Oběžná perioda dvojhvězdy se prodloužila na $84^{\text{d}}2$ a poměr hmot se z původního poměru $M_2/M_1 = 0,8$ více než převrátil na $M_1/M_2 = 0,079$.
- 12.–18. $t_s = 2,60\text{ až }12,6\text{ Myr}$, *kontrakce hvězdy* → *růst* T_{eff} → *ZAMS pro He hvězdy*: Konkrétní výpočet, který jsme použili jako ilustrační příklad, pokračoval i po skončení výměny hmoty. Původně primární složka v důsledku rostoucí produkce hoření helia v jádru rychle kontrahuje a zahřívá se, takže roste efektivní teplota, postupně mizí podpovrchová konvektivní zóna a hvězda se přesouvá v HR diagramu z oblasti obrů až do blízkosti hlavní posloupnosti heliových hvězd (obr. 13.10).

V čase 12,6 miliónu let od začátku výměny hmoty hvězda konečně znovu dosáhne stavu tepelné rovnováhy a lokálního minima svého zářivého výkonu.



Obrázek 13.10: Změny vnitřní struktury *původně* primární složky dvojhvězdy $4 M_{\odot}$ a $3,2 M_{\odot}$ po skončení přenosu hmoty. Značení je podobné jako na obr. 13.8. Převzato z Harmanec (1970).

Je zajímavé si uvědomit, že se tak stalo až v době, kdy obsah helia v jádru v důsledku nukleární přeměny již poklesl zhruba na polovinu ($Y = 0,484$). Původně hmotnější složka dvojhvězdy je v té době horkým trpaslíkem s poloměrem pouhých $0,208 R_{\odot}$.

Další vývoj ve dvojhvězdě bývá rozmanitý. Může dojít:

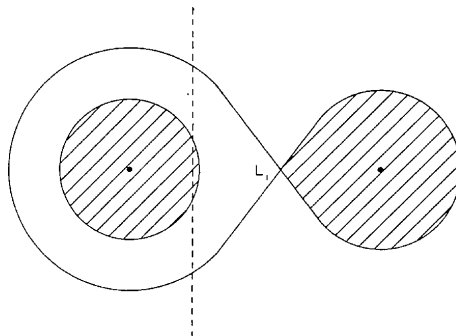
- A. ke spotřebování vodíku v původním sekundáru, jeho expanzi (odpovídající přechodu na větev obrů) a přenosu hmoty *opačným směrem*. Při dopadu látky na horkou kompaktní hvězdu může probíhat nukleární hoření a eruptivní jevy. Tento případ je častější.
- B. ke spotřebování helia v původním primáru, *druhé expanzi* (obdobné jako na AGB) a druhému přenosu hmoty stejným směrem.

Obecně lze ale uzavřít, že pokud k výměně hmoty dojde v kterékoliv fázi vývoje hvězdy, ve které z důvodů změn její vnitřní stavby dochází právě k růstu poloměru, **vede překročení meze stability ve dvojhvězdě k fázi mohutné výměny hmoty mezi složkami, při které se původní hmotový poměr více než vymění.**

13.4 Modely vývoje dvojhvězd versus pozorování

Vývojový paradox. Prvním problémem, který se výpočty výměny hmoty ve dvojhvězdách pokoušely vyřešit, byl *vývojový paradox polodotykových soustav*. Když totiž byly získány údaje o základních fyzikálních vlastnostech dostatečného počtu dvojhvězd a když začala být po roce 1950 využívána klasifikace dvojhvězd na oddělené, polodotykové a kontaktní, ukázalo se, že ve všech případech zaplňovala Rocheovu mez u polodotykových soustav *méně hmotná* sekundární složka (obr. 13.11). V té době bylo už z teorie stavby hvězd jasné, že rychleji by se měla ve dvojhvězdě vyvíjet a k Rocheově mezi expandovat hmotnější z obou složek. A pozorování se zdála ukazovat pravý opak.

Se skvělým fyzikálním citem navrhl možné vysvětlení zdánlivého paradoxu Crawford (1955). Postuloval, že rychleji se bude skutečně vyvíjet hmotnější složka a že dojde k výměně hmoty, která obrátí původní poměr hmot. (Jeho hypotéze velmi vytrvale oponoval astronom českého původu Zdeněk Kopal.) Trvalo více než 10 let, než byla Crawfordova hypotéza výpočty výměny hmoty výtečně kvalitativně potvrzena. Vtip spočívá v tom, že rychlá počáteční fáze výměny hmoty, během níž se původní poměr hmot převrátí, probíhá vůči ostatním fázím vývoje tak rychle, že máme statisticky velmi malou šanci podobný systém pozorovat.



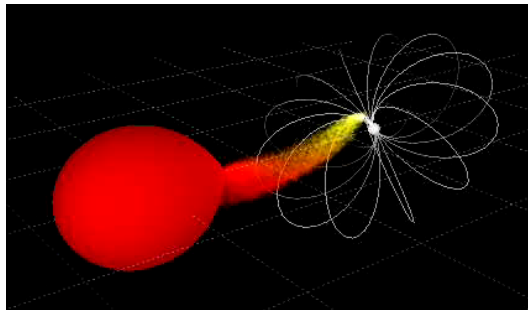
Obrázek 13.11: Schéma polodotykové soustavy, ve které Rocheův lalok vyplňuje méně hmotná sekundární složka. Převzato z Crawford (1955).

Hvězdy se závojem. Po úspěšném vyřešení vývojového paradoxu se začali astronomové přirozeně zajímat, zda i další výsledky výměny hmoty by bylo možno ztotožnit s nějakými pozorovanými systémy. Kříž a Harmanec (1975) formulovali obecnou hypotézu, že výměna hmoty v pozdějších stádiích případu B vede ke vzniku hvězd se závojem. Hypotéza nabízela vysvětlení vzniku závoje kolem těchto hvězd, důvod jejich velké rotační rychlosti a také vysvětlení některých typů pozorovaných

změn. Určitý počet dvojhvězd s očekávanými vlastnostmi se pak skutečně podařilo mezi hvězdami se závojem objevit. Dnes se soudí, že navržený mechanismus je jedním z možných, nemůže však být jediným, neboť se nepodařilo nalézt očekávané procento zákrytových dvojhvězd mezi hvězdami se závojem.

Excentrické dráhy. Dnes se výměna hmoty považuje za integrální součást ve vývoji dvojhvězd a existují četné více či méně propracované scénáře. Např. Habets (1987) pro objekt A0538–668 předpokládá, že první fáze výměny hmoty ve hmotné dvojhvězdě vede skutečně ke vzniku hvězdy se závojem a ke vzrůstu oběžné periody, i při částečné ztrátě hmoty a úhlového momentu ze soustavy. Rovněž bere v potaz přenos a ztrátu hmoty ve formě hvězdného větru ještě před tím, než hvězda dosáhla Rocheovy meze. Další přenos hmoty z původně primární složky nastává ve fázi hoření helia a uhlíku a hvězda nakonec vybuchne jako supernova, což vede ke vzniku *výstředné dráhy*, ve které se pohybuje zbytek supernovy — neutronová hvězda — a hmotná hvězda, která během fáze přenosu získala hmotu. Ta se při průchodu pericentrem stává opakovaně dynamicky nestabilní a posílá hmotu směrem k neutronové hvězdě, což vede ke vzniku rentgenového záření. Konečným stádiem vývoje hmotné dvojhvězdy může být i *binární pulsar*. Rostoucí nejistota těchto scénářů s rostoucím stádiem vývoje spočívá v naší neznalosti skutečných mechanismů ztráty hmoty a úhlového momentu ze soustavy, o nichž byla již řeč úvodem.

Magnetické polary. Jiným komplikovaným případem jsou polary — dvojhvězdy s kompaktním bílým trpaslíkem, který má silné *magnetické pole*. Podle modelu Norton a spol. (2004) pro hvězdu EX Hydrae může takové pole zabránit vzniku normálního akrečního disku, neboť hmota z okolí bodu L_1 odtéká podél magnetických siločar rovnou k pólům bílého trpaslíka (obr. 13.12). Pozorované změny jasnosti systému se interpretují tak, že tok hmoty není ustálený.



Obrázek 13.12: Možný model dvojhvězdy (kataklyzmické proměnné hvězdy) EX Hydrae. Hmota přetéká z červeného trpaslíka na bílého trpaslíka, který má ovšem natolik silné magnetické pole, že látka z okolí bodu L_1 odtéká podél magnetických siločar k pólům bílého trpaslíka. Převzato z <http://www.ukaff.ac.uk/movies.shtml>, Norton a spol. (2004).

14 Pulsace hvězd

Problém pulsací hvězd představuje rozsáhlou a rychle se rozvíjející tematiku, a to zejména poté, co se ukázalo, že pomocí rozboru pulsací s různými periodami je možné nezávislým způsobem studovat vnitřní stavbu našeho Slunce. Dnes přibývá pokusů aplikovat stejnou metodu i na jiné hvězdy a vzniká tak obor, kterému se v astronomické literatuře říká *asteroseismologie*. Na webové stránce sdružení European Network of Excellence in AsteroSeismology, <http://www.eneas.info>, lze nalézt několik vynikajících učebních textů zabývajících se podrobně touto problematikou, např. texty Prof. J. Christensena–Dalsgaard a či Prof. C. Aerts(ové). V tomto textu se omezíme jen na stručný výklad.

14.1 Radiální pulsace sférických hvězd

14.1.1 Podmínka pro vznik pulsací

Úvahy o dynamické stabilitě či nestabilitě hvězd vůči pulsacím mohou vycházet z následující úvahy: během oscilace se termodynamický stav elementu hmoty v pulsující hvězdě periodicky mění a po jednom úplném cyklu se vždy vrací do původního stavu. Podle 1. věty termodynamické je

$$dQ = dU + dW . \quad (14.1)$$

Protože vnitřní energie $U(\rho, T)$ je funkcí stavových veličin, bude její celková změna při cyklickém procesu nulová ($\oint dU = 0$). Práce W vykonaná při jednom cyklu cyklického procesu bude tedy integrálem změn pohlceného tepla

$$W = \oint dQ \quad (14.2)$$

a k pulsacím bude opakovaně docházet tehdy, bude-li celková práce na úkor pohlceného tepla kladná, tedy $W > 0$.

Protože entropie má úplný diferenciál, bude ovšem

$$\oint dS = \oint \frac{dQ}{T} = 0 , \quad (14.3)$$

takže část pohlceného tepla se v procesu opět uvolní (dQ je někde > 0 a někde < 0).

Předpokládejme, že teplota jako funkce času t prodělává malou cyklickou změnu $\delta T(t)$ kolem střední hodnoty T_0 , tedy

$$T(t) = T_0 + \delta T(t). \quad (14.4)$$

Pak lze místo (14.3) psát

$$\oint dS = \oint \frac{dQ(t)}{T_0 + \delta T(t)} = \oint \frac{dQ(t)}{T_0} \frac{1}{1 + \delta T(t)/T_0} = 0. \quad (14.5)$$

S použitím Taylorova rozvoje a zanedbáním členů vyšších řádů můžeme tuto rovnici ještě přepsat do tvaru

$$\oint \frac{dQ(t)}{T_0} \left(1 - \frac{\delta T(t)}{T_0}\right) \doteq 0 \quad (14.6)$$

a tedy

$$\frac{1}{T_0} \oint dQ(t) \doteq \oint \frac{dQ(t)\delta T(t)}{T_0^2}. \quad (14.7)$$

Podmínku udržení pulsací můžeme pomocí toho zapsat ve tvaru

$$W = \oint dQ(t) \doteq \oint \frac{\delta T(t)}{T_0} dQ(t) > 0. \quad (14.8)$$

Protože T_0 je kladné číslo, znamená podmínka (14.8), že k pohlcování tepla ($dQ > 0$) musí docházet v té části cyklu, kdy teplota prochází maximem ($\delta T > 0$) a naopak. Jinak řečeno: **aby hvězda pulsovala, musí k pohlcování tepla docházet při jejím smršťování a k jeho uvolňování naopak při expanzi.**

Všimněme si ještě, že podmínku pulsační nestability jsme formulovali pro malý element hmoty. Analogická podmínka pro celou hvězdu by měla tvar

$$W = \int_0^{M_*} \oint \frac{\delta T(t, M_R)}{T_0(M_R)} dQ(t, M_R) dM_R > 0, \quad (14.9)$$

kde kruhová integrace probíhá přes každý element hvězdné hmoty a integrace ve hmotě přes celou hvězdu.

14.1.2 Opacitní mechanismus pulsací

Nejčastějším mechanismem, který může způsobit pulsační nestabilitu, je mechanismus opacitní, který ovšem funguje pouze v oblastech měnící se ionizace některého dostatečně zastoupeného iontu, nejčastěji vodíku či helia. Uvažujme nejprve úplně ionizovaný plyn. Opacitu hvězdné látky lze přibližně popsat pomocí funkční závislosti

$$\kappa = c\rho^k T^{-m}, \quad (14.10)$$

kde c je konstanta a k a m jsou kladná čísla. Poměrně dobrou aproximaci pro volně-vázané a volně-volné přechody představují *Kramersovy opacity* (obr. 14.1), které lze zapsat ve tvaru

$$\kappa = c\rho T^{-3,5}. \quad (14.11)$$

Pro adiabatický děj je $P \propto \rho^{\frac{5}{3}}$ a tedy $T \propto \frac{P}{\rho} \propto \rho^{\frac{2}{3}}$, což vede na

$$\kappa = c\rho^{-\frac{4}{3}}. \quad (14.12)$$

To ovšem znamená, že při kompresi *s rostoucí hustotou klesá opacita* a tedy pohlcování tepla. Jinými slovy, *plně ionizované části hvězdy jsou stabilní* a ke stabilním pulsacím v nich nemůže docházet.

Jiná je ovšem situace v oblastech *měnící se ionizace*, kde je energie stlačování spotřebována na růst ionizace a teplota roste mnohem pomaleji. Pokud budeme předpokládat závislost teploty na hustotě ve tvaru (λ je malé)

$$T \sim \rho^\lambda, \quad (14.13)$$

pak pro Kramersovu opacitu platí

$$\kappa = c\rho^{1-3,5\lambda} \quad (14.14)$$

a podmínkou vzniku pulsací je tedy nerovnost

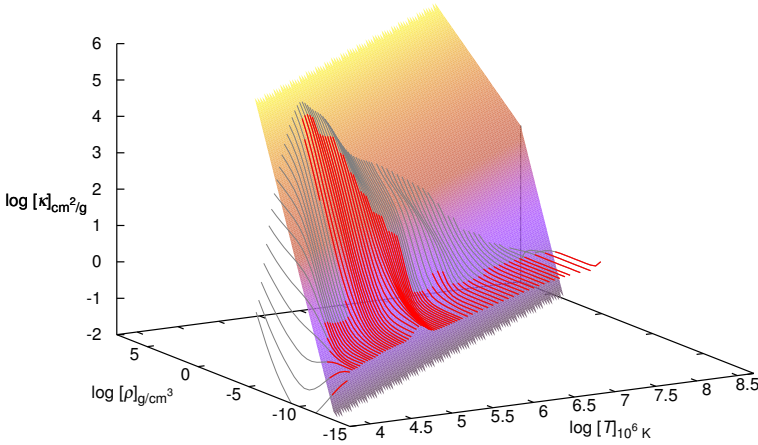
$$1 - 3,5\lambda > 0. \quad (14.15)$$

To bývá v oblastech měnící se ionizace často splněno.

Záleží ovšem na tom, kde se ta která ionizační zóna ve hvězdě nachází:

1. pro chladné hvězdy je zóna příliš hluboko v nitru, kde dochází k utlumení kmitů disipací;
2. pro horké hvězdy je naopak příliš blízko povrchu, kde vychází tepelná kapacita zóny příliš malá na to, aby došlo ke globálním oscilacím.

V určitém rozmezí teplot tak vzniká *pás pulsační nestability*.



Obrázek 14.1: Odchylky přibližných Kramersových opacit (polynomické závislosti $\kappa = c\rho T^{-3,5}$, tj. barevná plocha na logaritmickém grafu) od přesnějších hodnot z Rogerse a Iglesiasa (1996).

14.1.3 Hrubý odhad periody radiálních pulsací

Již Shapley (1914) argumentoval tím, že základní perioda radiálních pulsací sférických hvězd, kdy hvězda zvětšuje a zmenšuje svůj poloměr tak, že zachovává po celou dobu svůj sférický tvar, musí být řádově dána dynamickou časovou škálou (tj. dobou volného pádu)

$$\Pi \sim \tau_{\text{dyn}} \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sim \sqrt{\frac{1}{G\bar{\rho}}}, \quad (14.16)$$

kde $\bar{\rho}$ je průměrná hustota hvězdy. O té tedy základní perioda radiálních pulsací vypovídá. Pulsace můžeme v prvním přiblížení chápat jako *akustické hustotní kmity* s vlnovou délkou rovnou průměru hvězdy. Taková vlna se šíří rychlostí zvuku v_z a perioda radiální pulsace je tak dána výrazem

$$\Pi = \frac{2R}{\bar{v}_z}, \quad (14.17)$$

kde \bar{v}_z je střední rychlost zvuku přes celou pulsační periodu. Zvukové kmity lze považovat za adiabatické a z teorie akustických kmitů plyne pro rychlost zvuku

$$v_z^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{ad}} = \gamma_{\text{ad}} \frac{P}{\rho}, \quad (14.18)$$

kde $\gamma_{\text{ad}} = \frac{c - c_P}{c - c_V}$ pro adiabatický děj ($c = 0$) označuje přímo poměr specifických tepel při konstantním tlaku a objemu.

Pokud uvažujeme hvězdu jako plynovou kouli, plyne z rovnice (4.75) pro vnitřní energii 1 g směsi iontového a elektronového plynu (bez příspěvku záření, tj. $\beta = 1$), že příspěvek vnitřní tepelné energie dE_t připadající na elementární hmotu dM_R bude

$$dE_t = U dM_R = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} dM_R, \quad (14.19)$$

kde P opět označuje celkový tlak směsi plynu. Celkovou tepelnou energii dostaneme integrací přes celý objem hvězdy, čili

$$E_t = \frac{3}{2} \int \frac{P}{\rho} dM_R = \frac{3}{2} \int \frac{v_z^2}{\gamma_{\text{ad}}} dM_R \simeq \frac{3}{2} \frac{\bar{v}_z^2}{\gamma_{\text{ad}}} M_*. \quad (14.20)$$

Z věty o viriálu víme, že mezi celkovou gravitační potenciální energií E_G a celkovou kinetickou (tepelnou) energií E_t v soustavě, která se nalézá v hydrostatické rovnováze, platí vztah

$$E_G = -2E_t. \quad (14.21)$$

Za předpokladu, že hvězda osciluje kolem rovnovážného stavu odpovídajícího stavu hydrostatické rovnováhy, a za předpokladu adiabatického modelu lze tedy střední rychlost zvuku odhadnout s pomocí věty o viriálu (14.21), kde pro gravitační potenciální energii E_G lze pro sférické rozložení hmoty psát

$$E_G = -w \frac{GM_*^2}{R}. \quad (14.22)$$

Faktor w nabývá hodnoty $\frac{3}{5}$ pro homogenní rozložení hmoty a hodnoty přibližně $\frac{3}{2}$ pro hvězdy na hlavní posloupnosti. Hodnota faktoru w roste se stoupající koncentrací hmoty směrem do centra.

Z rovnic (14.20) a (14.22) tedy dostáváme

$$\bar{v}_z^2 = -\frac{\gamma E_G}{3M_*} = \frac{\gamma w}{3} \frac{GM_*}{R}. \quad (14.23)$$

Dosazením do rovnice (14.17) pro pulsační periodu získáme výraz

$$\Pi = 2 \left(\frac{3}{\gamma w} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R^3}{GM_*} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14.24)$$

S využitím definice střední hustoty

$$M_* = \frac{4}{3} \pi R^3 \bar{\rho} \quad (14.25)$$

můžeme rovnici (14.24) ještě upravit do tvaru

$$\Pi\sqrt{\bar{\rho}} = \sqrt{\frac{9}{\pi G \gamma w}}, \quad (14.26)$$

který poprvé odvodil Eddington (1918).

Pokud vypočteme střední hustotu Slunce z hodnot hmotnosti a poloměru (A.8, A.9)

$$\bar{\rho}_{\odot} = 1408,977 \text{ kg m}^{-3}, \quad (14.27)$$

můžeme udávat střední hustotu hvězdy v těchto jednotkách. Za předpokladu $\gamma \simeq \frac{5}{3}$ a pro $w = \frac{3}{2}$ pak pro pulsační periodu ve dnech platí

$$\Pi\sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{\odot}}} = 0,0404 = Q'. \quad (14.28)$$

Konstanta na pravé straně tedy udává periodu radiální pulsace našeho Slunce, pokud by bylo pulsačně nestabilní. Např. pro chladného veleobra spektrální třídy M0Ia s hmotností a poloměrem, jaký jsme uvažovali v tabulce (11.1), dostaneme podle (14.28) $\Pi = 230,0$. Naopak pro bílého trpaslíka Sirius B o hmotnosti $1,034 M_{\odot}$ a poloměru $0,0084 R_{\odot}$ vychází pulsační perioda pouhé 5,4 sekundy.

Vzhledem k tomu, že střední hustota $\bar{\rho} = M_{\star}/V$, kde M_{\star} a V jsou hmotnost a objem hvězdy, je možné pro sférické modely psát úměru ($L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$)

$$Q' = \Pi \left(\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-\frac{3}{2}} = \Pi \left(\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}_{\odot}}} \right)^3, \quad (14.29)$$

přičemž konstantě Q' se říká *pulsační konstanta*.

Pro reálné hvězdné modely ovšem Q' není konstanta, ale ukazuje se, že

$$Q' \sim \left(\frac{R}{M_{\star}} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (14.30)$$

Vemury a Stothers (1978) z toho s použitím Carsonových opacit odvodili následující vztah pro periodu radiální pulsace nerotující hvězdy *ve dnech*

$$\Pi \doteq 0,025 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} \right)^{-\frac{3}{4}}, \quad (14.31)$$

přičemž koeficient úměry 0,025 vykazuje rozptyl $\pm 0,001$.

Vztah (14.31) dává pěkné výsledky. Např. pro primární složku spektroskopické dvojhvězdy Spika (α Vir A), která je proměnnou hvězdou typu β Cep, určili Herbison–Evans a spol. (1971) s pomocí intenzitního interferometru hodnoty $M_{\star}/M_{\odot} = 10,9 \pm 0,9$, $R/R_{\odot} = 8,1 \pm 0,5$, což podle vztahu (14.31) dává teoretickou hodnotu pulsační periody $0,162$. Přihlédneme-li k udaným chybám poloměru a hmotnosti, nachází se teoretická pulsační perioda v rozmezí $0,1366$ až $0,1920$. Skutečně pozorovaná pulsační perioda je přitom $0,174$.

14.1.4 Vztahy perioda – zářivý výkon – barva

Výše uvedené vztahy vysvětlují rovněž existenci empirického vztahu perioda – zářivý výkon pro cefeidy a jiné typy radiálně pulsujících hvězd. Vztah (14.29) můžeme psát v logaritmickém tvaru

$$\log \Pi = \log Q' - \frac{1}{2} \log \frac{M_\star}{M_\odot} + \frac{3}{2} \log \frac{R}{R_\odot}. \quad (14.32)$$

Z definice efektivní teploty plyne

$$\log \frac{R}{R_\odot} = 8,474 - \frac{1}{5} M_{\text{bol}} - 2 \log [T_{\text{eff}}]_{\text{K}}, \quad (14.33)$$

takže po dosazení do (14.32) dostaneme

$$\log \Pi = 12,71 + \log Q' - \frac{1}{2} \log \frac{M_\star}{M_\odot} - 3 \log [T_{\text{eff}}]_{\text{K}} - \frac{3}{10} M_{\text{bol}}. \quad (14.34)$$

Empirické závislosti zářivý výkon – perioda bývají často udávány ve tvaru

$$M_V = a \log \Pi + b, \quad (14.35)$$

kde koeficienty a a b jsou empiricky určeny pro danou skupinu pulsujících hvězd. Rovnici (14.34) můžeme upravit do tvaru

$$M_V = 42,37 + \frac{10}{3} \log Q' - BC(T_{\text{eff}}) - \frac{10}{3} \log \Pi - 10 \log T_{\text{eff}} - \frac{5}{3} \log \frac{M_\star}{M_\odot}. \quad (14.36)$$

Pulsační nestabilita obvykle odpovídá dosti úzkému rozmezí efektivních teplot a tak pouze člen odpovídající hmotnosti hvězdy má vliv na empirické koeficienty a a b , neboť pro danou skupinu hvězd existuje obvykle vztah mezi hmotností a zářivým výkonem ve tvaru

$$\log \frac{M_\star}{M_\odot} = c M_{\text{bol}} + d. \quad (14.37)$$

Konkrétně pro klasické cefeidy byl tento vztah zpřesněn pomocí pozorování s velkým optickým interferometrem ESO v práci Kervelly a spol. (2004), kteří udávají hodnoty $a = -2,769$ a $b = -1,440$. Petersen a Christensen-Dalsgaard (1999) udávají pro δ Sct hvězdy na základě nové kalibrace pomocí družice Hipparcos hodnoty b v rozmezí $-3,2$ až $-4,0$.

V některých empirických závislostech se vliv efektivní teploty bere v potaz pomocí členu, který charakterizuje barvu hvězdy některým fotometrickým indexem, např. $(b - y)$. To jsou pak vztahy zářivý výkon – barva – perioda, nejčastěji ve tvaru

$$M_V = a' \log \Pi + b'(b - y) + c', \quad (14.38)$$

kde koeficienty a' , b' a c' jsou opět empiricky určeny pro danou skupinu pulsujících hvězd.

Je ovšem dobře si uvědomit, že pokud si v logaritmickém tvaru vyjádříme dolní mez rotační periody nějaké hvězdy¹, t.j. Keplerovu rotační rychlost na uvažovaném rovníkovém poloměru, při aproximaci pomocí Rocheova modelu, dostaneme rovnici (viz např. Harmanec 1987)

$$\log P_{\min} = -0,936 - \frac{1}{2} \log \frac{M_{\star}}{M_{\odot}} + \frac{3}{2} \log \frac{R}{R_{\odot}}. \quad (14.39)$$

což je rovnice formálně totožná s rovnicí (14.32) pro $\log Q' = -0,936$. Dodejme, že pro jednoduchý polytropní model Eddingtonův je $\log Q' = -1,433$. *Časové škály radiální pulsace a rotace hvězd jsou tedy srovnatelné* a v konkrétních případech nemusí být snadné rozhodnout, co je skutečnou fyzikální příčinou pozorovaných změn jasnosti či radiální rychlosti hvězdy.

14.2 Kinematika neradiálních pulsací

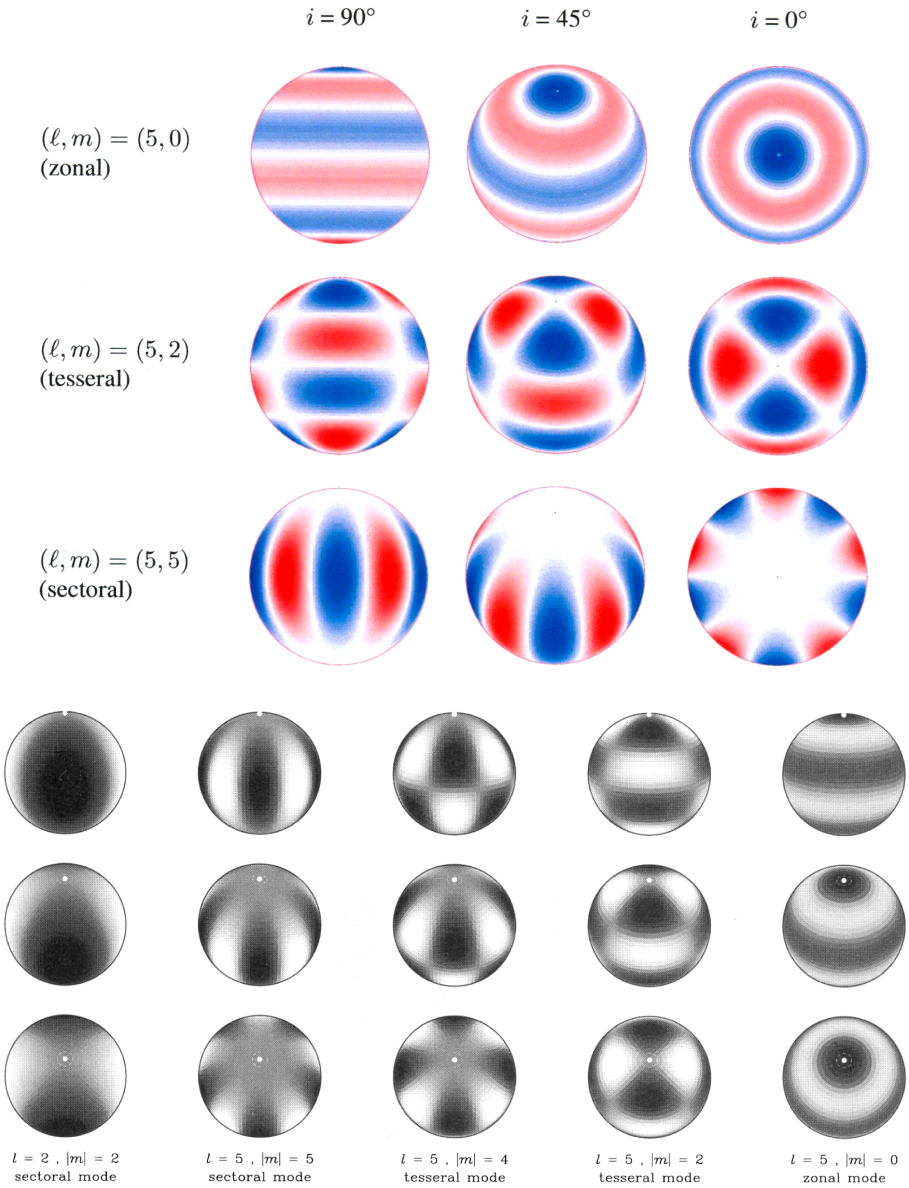
Neradiální pulsací rozumíme takovou (multi)periodickou změnu tvaru hvězdy, při kterém dochází k odchylkám jak od sférické, tak osové symetrie. Vznik neradiálních pulsací může kromě již zmiňovaného opacitního mechanismu souviset s rotací hvězd nebo se slapovými silami, je-li uvažovaná hvězda složkou těsné dvojhvězdy. Základy teorii neradiálních pulsací položil svou prací Ledoux (1951) a později byla rozvíjena např. v pracích Osaki (1986), Osaki a Shibahashi (1986). Kambe a Osaki (1988) publikovali i serie profilů čar ovlivněných neradiálními pulsacemi. Je třeba ale říci, že fyzikálně konsistentní model takových pulsací pro rychleji rotující hvězdy dosud neexistuje, neboť jde o velmi obtížný úkol. Je to pochopitelné — jak jsme si již ukázali, neexistují dosud ani fyzikálně konsistentní modely rychle rotujících hvězd. Při popisu neradiálních pulsací se proto volí určitá zjednodušení.

Zpravidla se předpokládá, že osa symetrie oscilací je identická s osou rotace hvězdy. Pro popis polohy bodů na povrchu hvězdy se používá zápis ve *sférických souřadnicích* (r, ϑ, φ) , kde r je radiální vzdálenost od středu hvězdy, ϑ úhel měřený od „severního“ pólu hvězdy v rozmezí $\langle 0, \pi \rangle$ a φ úhel měřený podél hvězdného rovníku v rozmezí $\langle 0, 2\pi \rangle$. Skalární veličiny se obvykle popisují pomocí sférických harmonických funkcí.

Složky vektoru rychlosti V lze zapsat pomocí sférických funkcí $Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi)$ ve tvaru

$$V_r(r, \vartheta, \varphi, t) = A_n(r) Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi) e^{i\omega_n t}, \quad (14.40)$$

¹To je také dolní mezi oběžné periody dvojhvězdy tvořené námi uvažovanou hvězdou a sekundárním zanedbatelné hmotnosti.



Obrázek 14.2: Příklady neradiálních pulsací s různými kvantovými čísly l a m . Obrázky jsou převzaty z disertačních prací Uytterhoeven(ové) (2004) a Schrijverse (1999).

$$V_{\vartheta}(r, \vartheta, \varphi, t) = A_n(r)k \frac{\partial Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} e^{i\omega_{n\ell m}t}, \quad (14.41)$$

$$V_{\varphi}(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{A_n(r)k}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} e^{i\omega_{n\ell m}t}, \quad (14.42)$$

kde k je poměr amplitud horizontální a radiální rychlosti pulsace. Pro danou frekvenci pulsace souvisí s hmotou hvězdy M , jejím poloměrem R a gravitační konstantou G podle vztahu

$$k = \frac{GM}{\omega_{n\ell m}^2 R^3}. \quad (14.43)$$

Veličina $\omega_{n\ell m}$ označuje kruhovou frekvenci

$$\omega_{n\ell m} = \frac{2\pi}{P_{n\ell m}}. \quad (14.44)$$

$P_{n\ell m}$ je perioda daného pulsačního módu popsaneho kvantovými čísly (n, ℓ, m) :

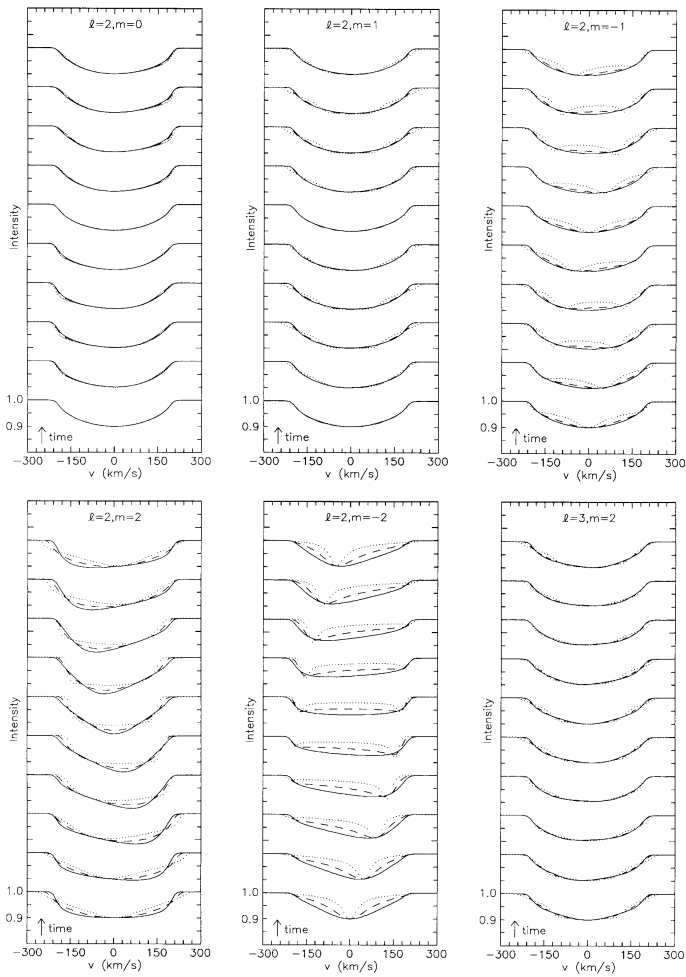
- n označuje počet pulsačních vln v radiálním směru;
- ℓ udává, kolik je na povrchu hvězdy linií (uzlů), které neprodělávají žádný radiální pohyb;
- m v rozmezí $-\ell$ až ℓ je počet vln v azimutálním směru (podél souřadnice φ).

Pro dané kvantové číslo ℓ existuje tedy $2\ell + 1$ módů s různými kvantovými čísly m . Pro nerotující hvězdu mají ale tyto módy všechny stejnou periodu. Pro rotující hvězdu označují módy s $m < 0$ pulsace postupující ve směru rotace hvězdy a módy s $m > 0$ pulsace retrogradní. Pulsační módy, pro něž $|m| = \ell$ se nazývají *sektorální módy* pulsace. Módy, pro něž $0 \neq |m| \neq \ell$, se označují jako *teserální* a módy s $m = 0$ jako *zonální* či osově symetrické. Radiální pulsace v tomto pojetí lze chápat jako speciální případ pro $\ell = 0$. Módy pro různá kvantová čísla m a ℓ jsou znázorněny graficky na obrázku 14.2. Spočtené profily spektrálních čar pro různé módy s kvantovými čísly m a ℓ a pro různé fáze dané pulsační periody lze nalézt na obrázcích 14.3 a 14.4.

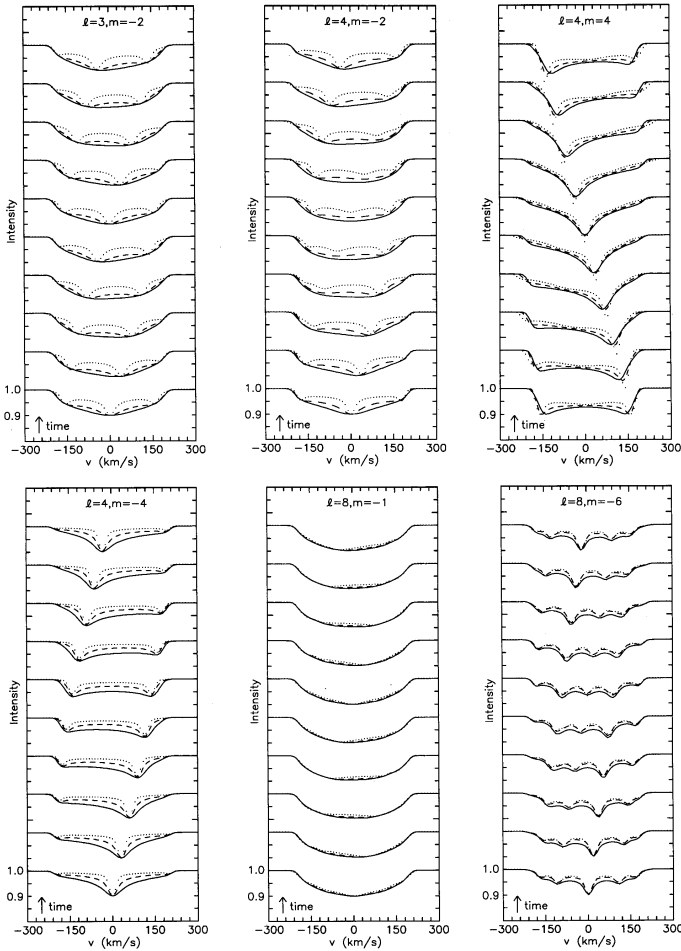
Townsend (1997) publikoval popis dosud asi jednoho z nejdokonalejších programů na výpočet teoretických profilů odpovídajících různým módům pulsace.

14.2.1 Sektorální pulsace rotujících hvězd

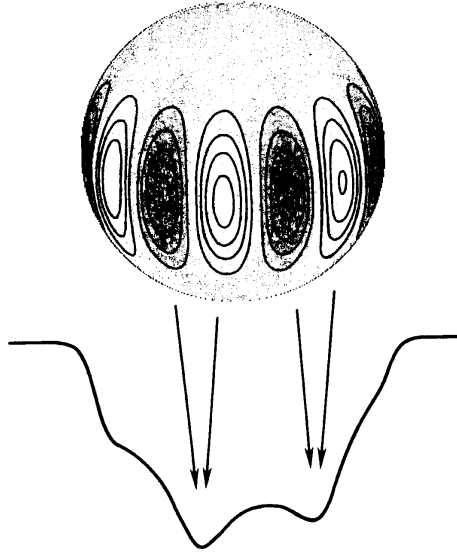
Velmi názorným příkladem neradiálních pulsací, který lze využít k odhadu některých fyzikálních veličin, jsou sektorální pulsace rotujících hvězd. Jak je ukázáno na obrázcích 14.4 a 14.5, projeví se sektorální mód v profilech spektrálních čar (rozšířených rotací) formou *vlnek* putujících postupně přes profil od fialového k červenému křídlu čar, neboť rotace unáší pulsující povrch hvězdy.



Obrázek 14.3: Příklady profilů čar způsobených neradiálními pulsacemi s různými kvantovými čísly l a m . Plné, čárkované a tečkované čáry ukazují profily pro poměr rotační frekvence k pulsační frekvenci v korotující soustavě v hodnotách 0,01, 0,2 a 0,5. Převzato z práce Aerts(ové) a Waelkense (1993).



Obrázek 14.4: Příklady profilů čar způsobených neradiálními pulsacemi s různými kvantovými čísly l a m pro vyšší hodnoty módů. Legenda a zdroj jsou stejné jako u obrázku 14.3.



Obrázek 14.5: Na příkladu sektorální pulsace modů $l = 8$ a $m = -8$ je ilustrováno, jak vznikají putující vlnky v profilech spektrálních čar rozšířených rotací. Tmavé oblasti se pohybují směrem od pozorovatele. Obrázek je převzat z práce Vogta a Penroda (1983).

Pro okamžitou radiální rychlost putující vlnky $RV_m(t)$, kterou lze v serii pozorovaných profilů přímo měřit, můžeme psát

$$RV_m(t) = RV + V_e \sin i \sin \left[\frac{2\pi(t - t_0)}{P} \right] + F(t), \quad (14.45)$$

kde RV označuje radiální rychlost hvězdy, V_e lineární rovníkovou rotační rychlost hvězdy, i sklon rotační osy vzhledem k pozorovateli, t_0 okamžik průchodu konkrétní uvažované vlnky středem čáry, P periodu, za kterou vlnka vrátí zpět do středu čáry, a $F(t)$ rychlostní pole pulsace. Rychlostní pole $F(t)$ má typické amplitudy do 10 km s^{-1} , takže je lze pro následující úvahy pro rychleji rotující hvězdy statisticky zanedbat.

Za předpokladu, že radiální rychlost hvězdy se nemění, plyne z derivace rovnice (14.45) podle času následující výraz pro *zrychlení* a_0 putujících vlnek při přechodu přes střed spektrálních čar vztah

$$a_0 = \frac{2\pi V_e \sin i}{P}. \quad (14.46)$$

Dále platí následující zřejmé vztahy pro lineární rovníkovou fázovou rychlost V_a , se kterou postupuje pulsační vlna, pozorovanou periodu P vlnky a periodu P_{rot} rotace hvězdy (R_e označuje její rovníkový poloměr)

$$V_a = \frac{2\pi R_e}{m P_m}, \quad P = \frac{2\pi R_e}{V_e + V_a}, \quad P_{\text{rot}} = \frac{2\pi R_e}{V_e}. \quad (14.47)$$

Odtud plyne

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_{\text{rot}}} - \frac{1}{mP_m}. \quad (14.48)$$

Pokud se nám podaří získat serii profilů hvězdy, v nichž bude zřetelně přítomen jeden konkrétní vyšší sektorální mód pulsace ve formě putujících vlnek, lze postupovat následovně:

1. Z pozorovaných spektrálních profilů studované hvězdy určíme její promítnutou rotační rychlost $V_e \sin i$. Pokud je znám sklon i rotační osy nebo jej lze odhadnout, budeme znát i rovníkovou rotační rychlost V_e .
2. Proměřením radiálních rychlostí putujících vlnek v celé serii spekter můžeme metodou nejmenších čtverců určit parametry křivky radiálních rychlostí (14.45), a tedy i zrychlení a_0 a dobu Δt mezi průchody dvou následujících vlnek přes střed čáry. Z rovnice (14.46) tak dostaneme odhad pozorované periody P pulsačního módu.
3. Pro dostatečně hustou a dlouhou sérii spekter se lze pokusit o jednoznačnou identifikaci jednotlivých putujících vlnek, a tím pádem o nezávislý odhad periody P .
4. Se známými hodnotami P a V_e můžeme po vhodné kombinaci předchozích rovnic určit další veličiny, charakterizující pulsace hvězdy

$$V_a = V_e \left(\frac{P_{\text{rot}}}{P} - 1 \right), \quad (14.49)$$

$$m = \pm \frac{P}{\Delta t} \quad \text{pro } P > P_{\text{rot}}, \text{ resp. } P < P_{\text{rot}}, \quad (14.50)$$

$$P_m = - \frac{PP_{\text{rot}}}{m(P_{\text{rot}} - P)}. \quad (14.51)$$

Je ovšem třeba si uvědomit, že ke spočtení numerických hodnot všech veličin je třeba znát dvě za tři obecně předem neznámých veličin R_e , P_{rot} a i . Jak jsme si ale ukázali v kap. 12 o rotaci hvězd, lze v některých případech docela dobře odhadnout horní a dolní hranici možné rotační periody hvězdy.

Při přesnějších úvahách se uvažuje vztah mezi pozorovanou frekvencí σ a skutečnou pulsační frekvencí σ_0 ve tvaru (Ω je rotační frekvence hvězdy)

$$\sigma = \sigma_0 - m\Omega(1 - C_l) + \frac{m^2\Omega^2 D_l}{\sigma_0}, \quad (14.52)$$

kde C_l a D_l jsou veličiny, které zahrnují vliv Coriolisovy a odstředivé síly a závisejí na vnitřní stavbě hvězdy. To při dalším zdokonalení teorie a pozorování dává šanci na rozvoj astrorseismologie i pro horké rotující hvězdy.

14.3 Hydrodynamika pro jednoduché vlnění

Možné oscilace v nitru hvězdy se vypočítávají jako řešení hydrodynamických rovnic. Za určitých zjednodušujících předpokladů je možné vyřešit vlnovou rovnici pro poruchy analyticky, což provedeme v této kapitole.

Základní rovnice hydrodynamiky. Nejprve uvedeme vztah mezi lagrangeovskou a eulerovskou derivací funkce $\phi(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi, \quad (14.53)$$

čili mezi totální časovou derivací sledující pohyb a parciální časovou derivací lokální (ve fixním bodě).

Rovnice kontinuity, pohybová rovnice, Poissonova rovnice a adiabatické přiblížení² (pro jednoatomový plně ionizovaný plyn $\gamma = \frac{5}{3}$) mají tvar

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{v} = 0, \quad (14.54)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \rho \nabla\Phi, \quad (14.55)$$

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = 4\pi G\rho, \quad (14.56)$$

$$P = K\rho^\gamma. \quad (14.57)$$

Někdy se tyto rovnice přepisují jako

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (14.58)$$

v pohybové rovnici se nepíše gravitační potenciál, nýbrž obecné zrychlení \mathbf{f} (respektive gravitační $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$)

$$\rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = -\nabla P + \rho\mathbf{f}, \quad (14.59)$$

místo Poissonovy rovnice lze použít její integrál

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (14.60)$$

a místo adiabaty její derivaci

$$\frac{dP}{d\rho} = K\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{P}{\rho}. \quad (14.61)$$

²Obecně samozřejmě dochází k výměně tepla s okolím během oscilace, ale pro rychlé oscilace můžeme dQ zanedbat. Pak ovšem ze soustavy vypadne teplota T , respektive rovnice tepelné rovnováhy.

Rovnovážný stav. Rovnováha znamená, že všechny časové derivace nulové, včetně $\mathbf{v} = 0$. Rovnice kontinuity, pohybová, Poissonova a adiabata se pak značně zjednoduší

$$0 = 0, \quad (14.62)$$

$$0 = -\nabla P_0 - \rho \nabla \Phi_0, \quad (14.63)$$

$$\nabla \cdot \nabla \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (14.64)$$

$$P_0 = K \rho_0^\gamma. \quad (14.65)$$

Perturbace. Pro malé změny tlaku, hustoty a gravitačního potenciálu v daném místě (\mathbf{r}, t) můžeme psát

$$P = P_0 + P', \quad (14.66)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (14.67)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi'. \quad (14.68)$$

Veličiny se samozřejmě mohou změnit i kvůli přemístění z \mathbf{r}_0 do $\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$ ($P = P_0 + \delta P$), pak

$$\delta P = P' + \nabla P_0 \cdot \delta\mathbf{r}, \quad (14.69)$$

$$\delta\rho = \rho' + \nabla\rho_0 \cdot \delta\mathbf{r}, \quad (14.70)$$

$$\delta\Phi = \Phi' + \nabla\Phi_0 \cdot \delta\mathbf{r}. \quad (14.71)$$

To je ekvivalentní vztahu (14.53) pro lagrangeovskou a eulerovskou derivaci. Rychlosti se v tomto případě týkají pouze poruch

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\delta\mathbf{r}}{\partial t}. \quad (14.72)$$

Rovnice pro perturbace získáme dosazením a odečtením rovnovážného stavu

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_0 \mathbf{v} = 0, \quad (14.73)$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P' - \rho_0 \nabla \Phi' - \rho' \nabla \Phi_0, \quad (14.74)$$

$$\nabla \cdot \nabla \Phi' = 4\pi G \rho', \quad (14.75)$$

$$P' = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho'. \quad (14.76)$$

Ověřit to můžeme snadno

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \nabla \cdot (\rho_0 + \rho') \mathbf{v} = 0, \quad (14.77)$$

kde první člen je nulový, neboť jde o derivaci rovnovážného stavu ρ_0 , poslední člen je zanedbatelným součinem dvou poruch $\rho' \mathbf{v}$. Obdobně postupujeme u pohybové rovnice

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho') \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla(p_0 + p') - (\rho_0 + \rho') \nabla(\Phi_0 + \Phi') \\ &= -\nabla p_0 - \nabla p' - \rho_0 \nabla \Phi_0 - \rho' \nabla \Phi_0 - \rho_0 \nabla \Phi' - \rho' \nabla \Phi'. \end{aligned} \quad (14.78)$$

V případě adiabataty použijeme Taylorův rozvoj

$$P_0 + P' = K(\rho_0 + \rho')^\gamma = K\rho_0^\gamma \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^\gamma \doteq K\rho_0^\gamma \left(1 + \gamma \frac{\rho'}{\rho_0}\right). \quad (14.79)$$

14.3.1 Akustické vlny v homogenním prostředí (p-módy)

Jako první vyšetříme vlny v *homogenním* prostředí, bez gravitace. (Tj. poněkud v protikladu se stavbou hvězd a silnou koncentrací ke středu, ale perturbace jsou zde mnohem menší než rovnovážné gradienty!) Nejen časové, ale i *prostorové* gradienty jsou nulové ($\nabla\Phi_0 = 0$), Φ' je malé pro rychle se měnící ρ' , čili zanedbáme i $\rho_0 \nabla \Phi'$. Pohybová rovnice pak přejde na tvar

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\nabla P'. \quad (14.80)$$

Do její divergence

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \delta \mathbf{r} = -\nabla \cdot \nabla P' \quad (14.81)$$

dosadíme vlevo časový integrál rovnice kontinuity ($\nabla \rho_0 = 0$)

$$\rho' + \nabla \cdot \rho_0 \delta \mathbf{r} \simeq \rho' + \rho_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (14.82)$$

a vpravo adiabatické přiblížení (14.76), tudíž

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\frac{\rho'}{\rho_0}\right) = -\nabla \cdot \nabla \left(\gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho'\right). \quad (14.83)$$

Výsledkem je *vlnová rovnice*

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho', \quad (14.84)$$

kde rychlost zvuku (dle stavové rovnice)

$$c_s \equiv \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{k_B T_0}{\mu m_H}} > 0. \quad (14.85)$$

Rovnice (14.84) má řešení v podobě vln

$$\rho' = a e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (14.86)$$

po jehož dosazení zjistíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} &= a i^2 \omega^2 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \\ &= c_s^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho' = c_s^2 a i^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \end{aligned} \quad (14.87)$$

čili musí platit *disperzní vztah*

$$\omega^2 = c_s^2 |\mathbf{k}|^2. \quad (14.88)$$

Vlny s daným vlnočtem $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ musí mít předepsanou frekvenci $\omega = \frac{2\pi}{P}$.

Šíření takových zvukových vln v nehomogenním prostředí můžeme alespoň kvalitativně odhadnout pomocí geometrické optiky. Teplota T , a tedy i rychlost zvuku c_s , v nitru hvězdy rostou s hloubkou. Podle Snellova zákona lomu

$$\sin \theta_2 = \frac{c_s(R_2)}{c_s(R_1)} \sin \theta_1 \quad (14.89)$$

se paprsek lomí *od kolmice* a v určité hloubce můžeme očekávat totální odraz.

14.3.2 Vnitřní gravitační vlny (g-módy)

Studujme nyní složitější případ jednorozměrné vrstvy plynu v homogenním gravitačním poli, ve které gradient tlaku vyrovnává gravitační zrychlení ($0 = -\nabla P_0 + \rho_0 \mathbf{g}_0$). Pohybová rovnice je pak složitější

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P' + \rho' \mathbf{g}_0, \quad (14.90)$$

protože oscilace jsou udržovány *vztakovou silou*, nejen gradientem tlaku.

Řešení hydrodynamických rovnic zde neuvedeme. Uvědomíme si jen, že g-módy jsou obecnější a vlastně v sobě zahrnují i p-módy. Navíc totiž existují řešení s mnohem nižšími frekvencemi. Zavádí se Bruntova–Väisäläova (vztaková) frekvence (viz Christensen-Dalsgaard 2003)

$$N^2 = g_0 \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P_0}{dr} - \frac{d \ln \rho_0}{dr} \right), \quad (14.91)$$

příčmež pro $N^2 > 0$ nastávají oscilace, kdežto pro $N^2 < 0$ konvektivní nestabilita, a disperzní relace má tvar

$$\omega^2 = \frac{N^2}{1 + k_r^2/k_h^2}. \quad (14.92)$$

Takové vlny se patrně vyskytují v nitru Slunce (pod konvektivní zónou), ale zatím nebyly jednoznačně prokázány. Díky škálování je ovšem snadnější detekce g-módů u obrů spektrálního typu K (viz Bedding a spol. 2010).

14.3.3 Povrchové gravitační vlny (f-módy)

Vlny vznikají i na *diskontinuitě* hustoty, jako vlny na moři. Předpokládejme nestlačitelnou kapalinu ($\rho' = 0$), nekonečnou hloubku, volný povrch a $\mathbf{g} = \text{konst.}$ Uvnitř kapaliny platí

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (14.93)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P'. \quad (14.94)$$

Divergence pohybové rovnice dává ihned rovnici

$$0 = \nabla \cdot \nabla P'. \quad (14.95)$$

Řešení hledáme v podobě vln ve směru x (tj. podél hladiny)

$$P' = f(z) \cos(k_h x - \omega t), \quad (14.96)$$

přítom $f(z)$ musí splňovat diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = k_h^2 f. \quad (14.97)$$

Snadno nahlédneme, že

$$f(z) = a \exp(-k_h z) + b \exp(k_h z). \quad (14.98)$$

Podle první hraniční podmínky požadujeme, aby pro $z \rightarrow \infty$ f konvergovalo. Pak musí být $b = 0$.

Jaký je však vztah mezi ω a k (jistě nebudou dovolené všechny vlny)? Využijeme druhou hraniční podmínku: na rozhraní ($z + \delta z$) je vždy $P = \text{konst.}$, neboli $\delta P = 0$. Lagrangeovskou změnu tlaku tedy napíšeme jako

$$\delta P = P' + \nabla P_0 \cdot \delta \mathbf{r} = P' + \rho_0 g_0 \delta z = 0, \quad (14.99)$$

odkud

$$\delta z = -\frac{1}{\rho_0 g_0} P'. \quad (14.100)$$

Zároveň však musí pro δz platit pohybová rovnice (14.94)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta z}{\partial t^2} = -\nabla_z P' = -\frac{df}{dz} \cos(k_h x - \omega t) = k_h a \exp(-k_h z) \cos(k_h x - \omega t) \quad (14.101)$$

jejíž řešení je nasnadě

$$\delta z = -\frac{k_h}{\rho_0 \omega^2} a \exp(-k_h z) \cos(k_h x - \omega t) = -\frac{k_h}{\rho_0 \omega^2} P'. \quad (14.102)$$

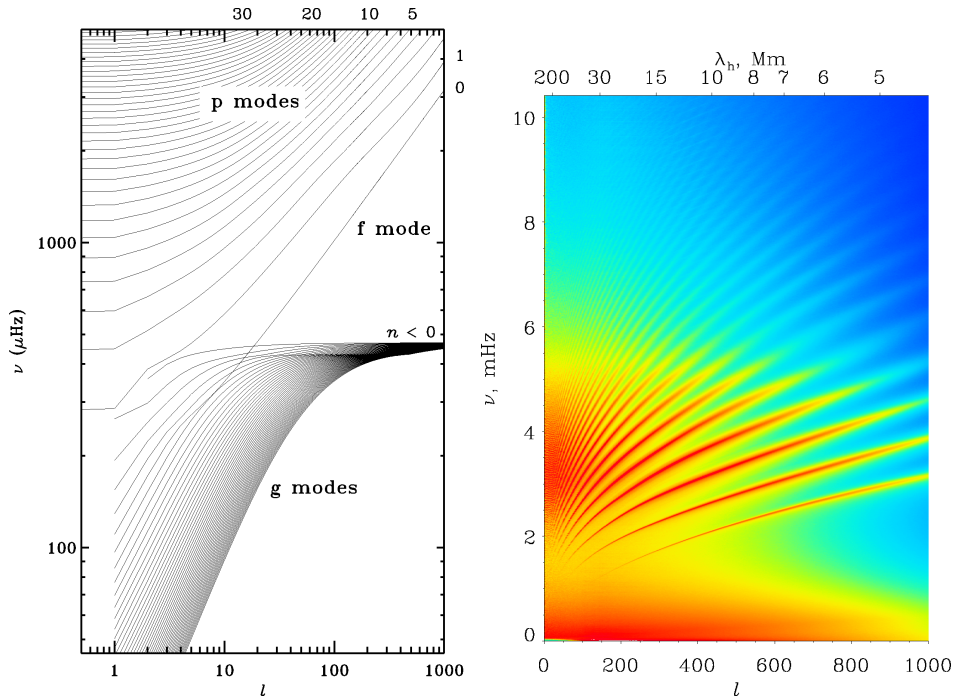
Proto

$$-\frac{1}{\rho_0 g_0} P' = -\frac{k_h}{\rho_0 \omega^2} P' \quad (14.103)$$

a disperzní relace je

$$\omega^2 = g_0 k_h. \quad (14.104)$$

Povšimněme si, že ρ_0 se zkrátilo — z povrchových oscilací (f-módů) nelze zjistit nic o vlastnostech nitra hvězdy!

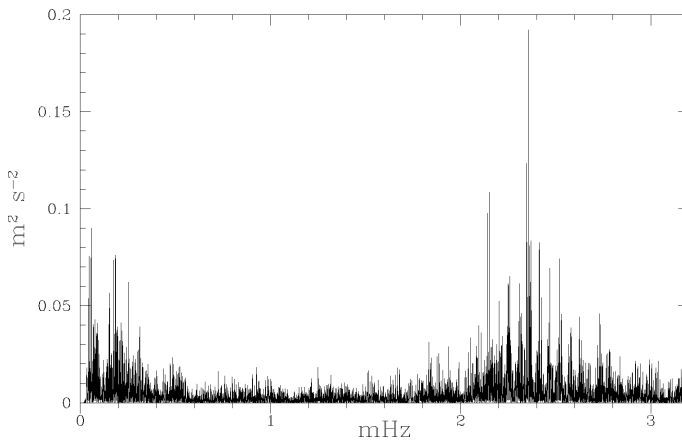


Obrázek 14.6: Vlevo: Teoreticky spočtené frekvence možných stacionárních oscilací jako funkce stupně l , pro sluneční nitro (tj. s daným průběhem $\rho_0(R)$, $P_0(R)$, $T_0(R)$). Čísla vpravo nahoře popisují radiální řád n . Převzato z Christensen-Dalsgaard (2003). Vpravo: Amplitudy oscilací Slunce (vyznačené barevnou škálou) jako funkce stupně l a frekvence ν , odvozené inverzí z dopplerovských měření slunečního povrchu družicí SOHO/MDI. Nejvýznamnější jsou p-módy s frekvencemi $\nu \simeq 3$ až 4 mHz, což odpovídá periodám okolo 5 min. G-módy s nízkými frekvencemi nejsou na Slunci pozorovatelné, neboť v povrchové konvektivní zóně nemůže k oscilacím tohoto typu docházet. Převzato z <http://soi.stanford.edu/>.

Přesná sférická řešení. Pokud bychom hydrodynamické rovnice řešili za předpokladu kulové symetrie, dostali bychom řešení ve tvaru kulových funkcí; pro nitro Slunce by výsledek vypadal jako na obrázku 14.6.

Pozor! Lineární teorie nijak neomezuje amplitudy oscilací. Obdobně jako u matematického kyvadla mohou být výchylky teoreticky nekonečně velké, ale v praxi to samozřejmě nenastává. Dopplerovská měření Slunce poskytují amplitudy spolu s frekvencemi (obr. 14.6 vpravo), které s teorií dobře souhlasí. Lépe řečeno, parametry modelu nitra jsou měřenými frekvencemi oscilací velmi přesně vymezeny.

Oscilace podobné jako na Slunci byly pozorovány i na površích několika vzdálených hvězd, například u α Cen A (obr. 14.7).



Obrázek 14.7: Spektrum oscilačních frekvencí hvězdy α Centauri A, odvozené z měření radiálních rychlostí spektrografem CORALIE, středovaných samozřejmě přes celý disk. Převzato z Bouchy a Carrier (2001).

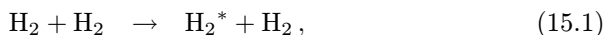
15 Gravitační kolaps protohvězd

Protohvězdy jsou smršťující se objekty, které nejsou v hydrostatické rovnováze. Vývoj před dosažením hlavní posloupnosti je předmětem následující kapitoly.

15.1 Způsoby ochlazování

Při kolapsu chladného molekulového mračna roste jeho teplota T , neboť část gravitační potenciální energie se disipuje na teplo, a odpovídajícím způsobem roste i gradient tlaku ∇p . Kolaps by se mohl brzy zastavit, kdyby se oblak nějak neochlazoval. Právě podle způsobu ochlazování lze rozlišit tři fáze kontrakce:

1. *ochlazování infračerveným zářením*: při zvýšené kinetické energii částic oblaku dochází ke srážkové excitaci *rotačních* stavů molekul H_2 a jejich zářivé deexcitaci



Zářivá deexcitace probíhá na vlnových délkách okolo 1 mm, na nichž je ale oblak dobře *průhledný*, takže unikající IR záření může oblak účinně ochladit. Při tomto procesu se uplatňují i jiné částice (O, C^+ , CO, H) a také prachová zrna.

2. *disociace a ionizace*: v rámci přeměny E_G na U probíhá také disociace molekuly H_2 ($\epsilon_D = 4,5 \text{ eV}$) a ionizace atomárního H ($\epsilon_I = 13,6 \text{ eV}$). Obojí vede ke snižování teploty, neboť se tím odebírá teplo ze systému. Celkem se na disociaci a ionizaci může spotřebovat energie

$$E_{\text{DI}} = \frac{M}{2m_u} \epsilon_D + \frac{M}{m_u} \epsilon_I, \quad (15.3)$$

čemuž odpovídá změna potenciální energie (vynecháváme faktor $\frac{3}{5}$, stejně to není homogenní)

$$\Delta E_G \simeq GM^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \quad (15.4)$$

Zadáme-li počáteční poloměr protohvězdy, můžeme spočítat konečný, po tomto fázovém přechodu. Příklad: $M = 1 M_{\odot}$, $R_1 = 10^{15} \text{ m} \doteq 6700 \text{ AU}$, $E_{\text{DI}} = 3 \cdot 10^{39} \text{ J}$,

$$R_2 \simeq \left(\frac{E_{\text{DI}}}{GM^2} + \frac{1}{R_1} \right)^{-1} \simeq 10^{11} \text{ m} \doteq 0,6 \text{ AU}. \quad (15.5)$$

Časová škála tohoto procesu, respektive volného pádu, je 10^4 roků.

3. *Kelvinova–Helmholtzova kontrakce*: prakticky všechen vodík je nyní plně ionizovaný, čímž značně narostl gradient tlaku a bylo téměř dosaženo hydrostatické rovnováhy. Za tohoto stavu můžeme ovšem aplikovat *virialový teorem*

$$2\langle U \rangle + \langle E_{\text{G}} \rangle = 0. \quad (15.6)$$

Předpokládáme-li $R_1 \gg R_2$, lze za gravitační potenciální energii dosadit energii disociace a ionizace

$$\langle E_{\text{G}} \rangle \simeq -\frac{GM^2}{R_2} \simeq -E_{\text{DI}}. \quad (15.7)$$

Protože plně ionizovaná látka má střední molekulovou hmotnost $\mu \doteq 0,5$, máme místo (15.6)

$$\frac{3}{2} \frac{M}{0,5m_{\text{H}}} kT - \frac{M}{m_{\text{H}}} \left(\frac{\epsilon_{\text{D}}}{2} + \epsilon_{\text{I}} \right) = 0, \quad (15.8)$$

odkud vyjádříme teplotu

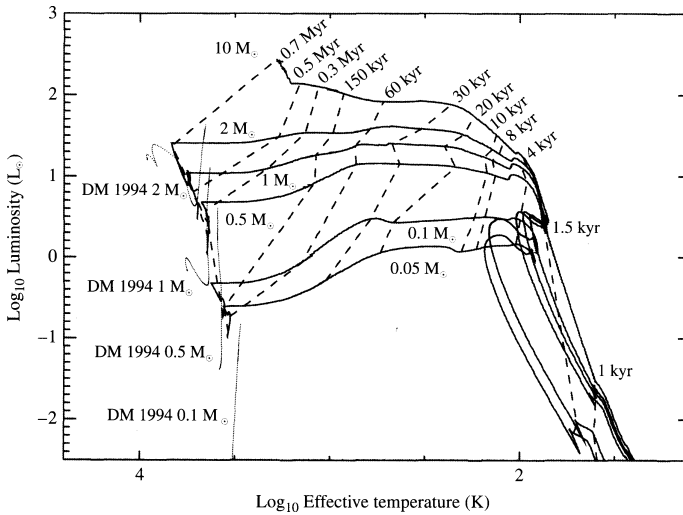
$$kT = \frac{1}{12} (\epsilon_{\text{D}} + 2\epsilon_{\text{I}}) \simeq 2,6 \text{ eV}, \quad (15.9)$$

neboli $T \simeq 30\,000 \text{ K}$. Vidíme, že kolaps hvězdu značně zahřeje. Velkou roli pak hraje *opacita*, která kontroluje rychlost vyzařování (ochlazování). Další kontrakce probíhá na tepelné (Kelvinově–Helmholtzově) škále $\simeq 10^7$ let.

15.2 Vývoj před hlavní posloupností, Hayashiho linie

Kontrahující protohvězdy mají na rozdíl od normálních hvězd *řádově 100 krát nižší teplotu* v nitru, odkud plyne \rightarrow menší stupeň ionizace \rightarrow vysoká opacita $\kappa \rightarrow$ velký gradient $(dT/dR)_{\text{rad}} \rightarrow$ *konvektivní rovnováha v celém nitru*. Nitro je v této fázi promíchávané „skrz naskrz“, čímž se ustaví homogenní chemické složení.

Zahřívání při kolapsu způsobí úplnou ionizaci, a tedy pokles opacity. To má dva důsledky: i) záření může z nitra snadno unikát; ii) hvězda přestane být celá konvektivní.



Obrázek 15.1: Gravitační kolaps oblaků o hmotnosti 0,05, 0,1, 0,5, 1, 2 a $10 M_{\odot}$ zobrazený na HR diagramu. Čárkované čáry vyznačují čas, který uplynul od začátku kolapsu. Převzato z Wuchterl a Tscharnuter (2003).

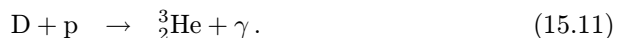
Počáteční kolaps protohvězd (k Hayashiho linii). Podle modelů všechny protohvězdy zpočátku na HR diagramu stoupají doleva nahoru (tzn. že T_{eff} i L roste, obr. 15.1). Zdrojem energie je pouze gravitační smršťování. Významnou hranicí je *Hayashiho linie* — napravo od ní je *zakázaná oblast*, kde jsou hvězdy nestabilní (neexistují zde řešení stacionárních rovnic hvězdné stavby, kdežto nalevo existují). Nachází se na $T_{\text{eff}} \simeq 3000$ až 5000 K a je téměř svíslá, což je způsobeno strmou závislostí opacity κ na teplotě T . Hlavním zdrojem opacity pod 7000 K je fotoionizace H^- , pro níž platí (Maeder 2009)

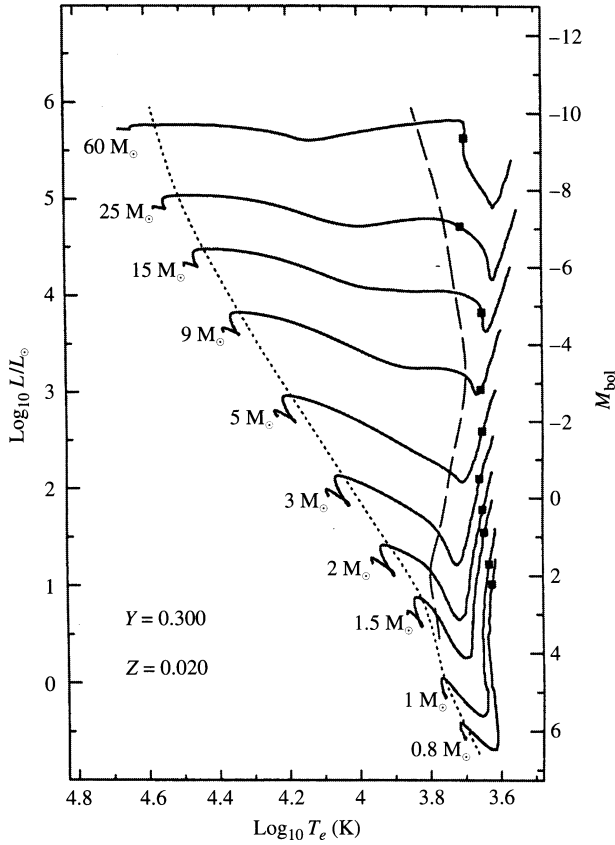
$$\kappa_{\text{H}^-} \simeq 2,5 \cdot 10^{31} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{Z}{0,02} [\rho]_{\text{g cm}^{-3}}^{\frac{1}{2}} [T]_{\text{K}}^9. \quad (15.10)$$

Vyšší metalicita Z hodnotu κ zvyšuje, neboť od kovů s malým ionizačním potenciálem je více volných e^- , čili více iontů H^- . Případný růst T při kontrakci znamená růst κ , větší pohlcování záření, a efektivní teplota pak zůstává na Hayashiho linii přibližně konstantní.

Kolaps ke hlavní posloupnosti (od Hayashiho linie). Záleží na tom, kdy dojde ke zmiňovanému poklesu opacity. Pro masivní hvězdy to nastává brzy, pak je $L \simeq \text{konst.}$ a T_{eff} roste. Pro lehké hvězdy nejprve L klesá a $T_{\text{eff}} \simeq \text{konst.}$ (viz obr. 15.2).

Případná „vlnka“ na vývojové stopě odpovídá *zapálení deuteria nebo lithia*. Při $T \gtrsim 1$ až $2 \cdot 10^6$ K nastávají tři reakce spalující deuterium, ale jen první je energeticky významná





Obrázek 15.2: Vývoj před hlavní posloupností pro hvězdy se složením $X = 0,68$, $Y = 0,30$ a $Z = 0,02$. Vývoj směřuje vesměs zprava doleva, od malých efektivních teplot k velkým. Čtverečky vyznačují počátek hoření deuteria. Čárkovaná a tečkovaná linie jsou místa, kde přestala být konvektivní obálka a kde začalo být konvektivní jádro. Převzato z Bernasconi a Maeder (1996).

Příslušná produkce energie (Maeder, 2009)

$$\epsilon_D = 4,2 \cdot 10^7 \text{ erg s}^{-1} \text{ kg}^{-1} \left[\frac{D}{H} \right] \frac{\rho}{1 \text{ g}} \left(\frac{T}{10^6 \text{ K}} \right)^{11,7}. \quad (15.12)$$

Při ještě vyšší teplotě $T > 2,5 \cdot 10^6 \text{ K}$ se spaluje lithium reakcí



Poloha Hayashiho linie. Hayashi (1961) odvodil polohu linie na základě této argumentace: hvězdy s rozsáhlými konvektivními zónami mají podle modelů vždy

menší T_{eff} než hvězdy s radiálními zónami. *Plně konvektivní hvězdy* tedy představují spodní hranici T_{eff} , platnou pro všechny hvězdy v hydrostatické rovnováze! Pro konvektivní nitro budeme předpokládat, že konvekce je adiabatický děj s $\gamma = \frac{5}{3}$, neboli $n \equiv \frac{1}{\gamma-1} = \frac{3}{2}$.

Hvězdy však nutně musí mít *radiální atmosféru*, neboť opacita $\kappa\rho$ klesá k nule. Model hvězdy zkonstruuje následovně: i) vyřešíme rovnici hydrostatické rovnováhy pro fotosféru; ii) na dno fotosféry ($\tau = \frac{2}{3}$, $P = P_0$, $T \equiv T_{\text{eff}}$) navážeme polytropický model nitra (viz Kippenhahn a Weigert 1990).

Ve fotosféře předpokládejme závislost opacity $\kappa(P, T)$ obdobnou jako (15.10), pouze zapsanou obecněji ($\rho \propto P/T$)

$$\kappa = \kappa_0 \rho^\alpha T^\beta = \kappa'_0 P^a T^b, \quad (15.14)$$

kde $a = \frac{1}{2}$, $b = \beta - \alpha = 8,5$. Diferenciální rovnici hydrostatické rovnováhy napíšeme pro optickou hloubku $d\tau = \kappa\rho dx$

$$dP = g\rho dx = g\rho \frac{d\tau}{\kappa\rho} = \frac{g}{\kappa_0} P^{-a} T^{-b} d\tau \quad (15.15)$$

a integrujeme ji od nekonečna ($\tau = 0$, $P = 0$) po dno fotosféry

$$\int_0^{P_0} P^a dP = \frac{P_0^{a+1}}{a+1} = \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{g}{\kappa_0} T^{-b} d\tau \doteq \frac{g}{\kappa_0} T_{\text{eff}}^{-b} \int_0^{\frac{2}{3}} d\tau = \frac{g}{\kappa_0} T_{\text{eff}}^{-b} \frac{2}{3}, \quad (15.16)$$

tedy hraniční podmínka na dně fotosféry je

$$P_0 = \left[\frac{2}{3} (a+1) \frac{g}{\kappa_0} T_{\text{eff}}^{-b} \right]^{\frac{1}{a+1}} = \left[\frac{g}{\kappa_0} T_{\text{eff}}^{-8,5} \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (15.17)$$

Pro nitro vezmeme konvektivní polytropu (10.23) a stavovou rovnici (3.27)

$$P = K \rho^{\frac{5}{3}} = \overbrace{K}^C \left(\frac{\mu}{\mathcal{R}} \right)^{-\frac{5}{2}} T^{\frac{5}{2}} \quad (15.18)$$

a logicky navážeme rozhraní fotosféra/nitro

$$P_0 = C T_{\text{eff}}^{\frac{5}{2}}. \quad (15.19)$$

Než položíme rovnítko mezi (15.17) a (15.19), dosadíme za gravitační zrychlení $g = GM_\star R^{-2}$, ale především si musíme uvědomit, že „konstanta“ K , respektive C , není stejná pro hvězdy s různými hmotnostmi! Podle vztahu (10.48) vidíme, že $K = K' \rho_c R^2 \simeq K'' M_\star^{\frac{1}{3}} R$, což spolu s definicí C (15.18) dává

$$C = \overbrace{K''}^{C'} \left(\frac{\mu}{\mathcal{R}} \right)^{-\frac{5}{2}} R^{-\frac{3}{2}} M_\star^{-\frac{1}{2}}. \quad (15.20)$$

Po dosazení

$$T_{\text{eff}}^{12,25} = \text{konst.} M_{\star}^{\frac{7}{4}} R^{\frac{1}{4}}. \quad (15.21)$$

Poloměr lze případně vyloučit pomocí definice (2.98) $R = (4\pi\sigma)^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T_{\text{eff}}^{-2}$, pak

$$T_{\text{eff}}^{12,75} = \text{konst.}' M_{\star}^{\frac{7}{4}} L^{\frac{1}{8}}. \quad (15.22)$$

Vidíme, že díky velkému exponentu je závislost $T_{\text{eff}}(M_{\star}, L_{\star})$ slabá a Hayashiho linie na HR diagramu $(L_{\star}, T_{\text{eff}})$ velmi strmá.

15.3 Minimální Jeansova hmotnost

Podle viriálového teorému musí pro vázaný (kolabující) systém platit $2\langle U \rangle + \langle E_G \rangle \leq 0$. Odtud lze odvodit *Jeansovo kritérium*, tj. podmínku pro minimální hmotnost M homogenního oblaku, aby kolaboval

$$M > M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}. \quad (15.23)$$

Při isothermickém ději ($T = \text{konst.}$) je tedy $M_J \propto \rho^{-1/2}$ klesající funkcí hustoty. V případě adiabatického děje ($dQ = 0$) lze odvodit vztah (10.21)

$$T = C' \rho^{\gamma-1} \quad (15.24)$$

a dosazení do Jeansova kritéria (15.23) dá úměru

$$M_J \propto \rho^{(3\gamma-4)/2}. \quad (15.25)$$

Pro atomární vodík je $\gamma = \frac{5}{3}$, a tedy $M_J \propto \rho^{1/2}$ roste s hustotou (pro H_2 by exponent byl $\frac{1}{10}$). Čili musí nutně existovat určitá *minimální* hodnota M_J , a tedy i M !

Přibližně isothermický kolaps nastává zpočátku, kdy oblak stačí uvolněnou E_G vyzářit (luminozita od volného pádu je menší než luminozita radiační, $L_{\text{ff}} < L_{\text{rad}}$). Adiabatický kolaps se odehrává později, kdy je opacita $\kappa\rho$ vysoká (díky vysoké hustotě ρ) a vyzářování značně neefektivní ($L_{\text{ff}} > L_{\text{rad}}$). Právě přechod mezi isothermickým a adiabatickým režimem využijeme pro nalezení $M_{J \text{ min}}$. Platí při něm

$$L_{\text{ff}} \simeq L_{\text{rad}}, \quad (15.26)$$

kde

$$L_{\text{ff}} \simeq \frac{\Delta E_{\text{G}}}{t_{\text{ff}}} = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R} \left(\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}} \right)^{-1/2} \quad (15.27)$$

a

$$L_{\text{rad}} = 4\pi R^2 \epsilon \sigma T^4, \quad (15.28)$$

příčemž emisivita bývá velmi malá ($\epsilon \simeq 0,1$). Z podmínky (15.26) vyjádříme hustotu $\rho(M)$, $R^3 = \frac{3M}{4\pi\bar{\rho}}$

$$\rho^{3/2} = 10 \left(\frac{3\pi}{32} \right)^{1/2} G^{-3/2} M^{-1} \epsilon \sigma T^4, \quad (15.29)$$

dosadíme do Jeansova kritéria (15.23)

$$M > M_{\text{J min}} \doteq 5,4 \left(\frac{kT}{G\mu m_{\text{H}}} \right)^{3/2} \left(5,4 G^{-3/2} M_{\text{J min}}^{-1} \epsilon \sigma T^4 \right)^{-1/3} \quad (15.30)$$

a nakonec vyjádříme $M_{\text{J min}}$

$$M_{\text{J min}}^{2/3} \doteq 3,1 \left(\frac{k}{\mu m_{\text{H}}} \right)^{3/2} G^{-1} (\epsilon \sigma)^{-1/3} T^{1/6}, \quad (15.31)$$

čili

$$M_{\text{J min}} \doteq 5,5 \left(\frac{k}{\mu m_{\text{H}}} \right)^{9/4} G^{-3/2} (\epsilon \sigma)^{-1/2} T^{1/4} \simeq 0,01 M_{\odot} \frac{T^{1/4}}{\epsilon^{1/2} \mu^{9/4}}. \quad (15.32)$$

Pro $\mu \doteq 1$, $\epsilon = 0,1$, $T = 1000 \text{ K}$ vychází $M_{\text{J min}} \simeq 0,25 M_{\odot}$. Reálná hodnota bude ještě nižší.

Uvědomme si ještě, proč hvězdy 1. generace vznikly hmotnější než ve 2. a 3. generaci? Ve vztahu (15.32) je pouze závislost na μ , což na vysvětlení nestačí. Při $Z = 0$ je totiž zhoršené ochlazování — malé Z znamená *velkou* opacitu¹ κ ve středních teplotách! Teplota T tak zůstává velká a $M_{\text{J min}}$ také.

Modely vzniku hvězd 1. generace (populace III) z obřích molekulových mračen jsou navíc podstatně složitější — mechanismus ochlazování zářivými deexcitacemi rotačních a vibračních stavů molekuly H_2 zůstává, ale musí se zároveň uvážit rozpínání prostoročasu dle kosmologického modelu (např. CDM) a existence temné hmoty, která vytváří potenciálové jámy, do nichž se přesouvá baryonická látka (Abel a spol. 2002).

¹Důvodem je, že emise probíhá v čarách a při rozlehlém oblaku dochází k samoabsorpci. Kdyby byly přítomné atomy kovů, mohou srážkovou excitací a zářivou deexcitací snadněji vytvořit foton, který unikne.

15.4 Eddingtonova mez

Existuje nějaká *maximální* hmotnost pro hvězdy? Vyjdeme z pohybové rovnice (4.4) — aby hvězda byla stabilní, nesmí být zrychlení kladné

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM_R}{R^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} \leq 0, \quad (15.33)$$

kde $P = P_g + P_r$ je součtem tlaku plynu a tlaku záření. V hodně hmotných hvězdách je ale $P_r \gg P_g$, a také $\frac{dP_r}{dR} \gg \frac{dP_g}{dR}$, proto lze P_g zanedbat a psát podmínku

$$\frac{dP_r}{dR} \geq -\frac{GM_R \rho}{R^2}, \quad (15.34)$$

aby se hvězda nerozletěla působením gradientu tlaku záření. Pro absolutně černé těleso platí

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4 \quad (15.35)$$

a

$$\frac{dP_r}{dR} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dR}. \quad (15.36)$$

Z rovnice zářivého přenosu energie (4.105) víme, že

$$\frac{dT}{dR} = -\frac{3\rho\kappa L_R}{16\pi a c R^2 T^3}, \quad (15.37)$$

tudíž

$$\frac{dP_r}{dR} = -\frac{\rho\kappa L_R}{4\pi c R^2}. \quad (15.38)$$

Po dosazení do (15.34)

$$L \leq L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi c GM}{\kappa}, \quad (15.39)$$

což je podmínka pro zářivý výkon hvězdy, nazývaná *Eddingtonova mez*.

Pokud bychom potřebovali dosadit za opacitu κ , tak pro rozptyl na volných elektronech, který se nejvíce uplatňuje u horkých hvězd, platí přibližně

$$\kappa \doteq 0,02 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} (1 + X) \neq \kappa(T). \quad (15.40)$$

Porovnejme (15.39) s přibližným vztahem $L(M)$, který odvodíme z následujících úměrností. Z rovnice zářivé rovnováhy máme

$$\frac{dT}{dR} \simeq \frac{T}{R} \propto \frac{\rho \kappa L}{R^2 T^3}, \quad (15.41)$$

odkud

$$L \propto \frac{RT^4}{\rho \kappa}. \quad (15.42)$$

Podle hydrostatické rovnováhy

$$\frac{dP}{dR} \simeq \frac{P}{R} \propto \frac{M\rho}{R^2}, \quad (15.43)$$

pak dle stavové rovnice

$$T \propto \frac{P}{\rho} \propto \frac{M}{R}. \quad (15.44)$$

Z definice hustoty plyne

$$\rho \propto \frac{M}{R^3}. \quad (15.45)$$

Po dosazení všeho do (15.42) máme úměru (jež přibližně odpovídá hlavní posloupnosti)

$$L \propto \frac{M^3}{\kappa}. \quad (15.46)$$

Tento vztah ovšem platí pouze na hlavní posloupnosti, nikoli později, neboť v obrech se uplatňuje jiný mechanismus opacity $\kappa = \kappa(\rho, T)$.

Maximální možnou hmotnost hvězdy tedy získáme z trojčlenky $L_{\odot}/M_{\odot}^3 = L_{\text{Ed}}/M_{\text{Ed}}^3$ jako

$$M_{\text{Ed}} \simeq \sqrt{\frac{4\pi c G}{\kappa} \frac{M_{\odot}^3}{L_{\odot}}} \simeq 200 M_{\odot}. \quad (15.47)$$

Podle pozorování hvězdokupy Arches (poblíž galaktického centra) se zdá, že horní mez pro hmotnost hvězd je $130 M_{\odot}$ (Figer 2005).

16 Explosivní stadia ve vývoji hvězd

16.1 Supernovy vznikající kolapsem jádra

Energetická bilance. Supernovy typů II, Ib a Ic (viz kap. 17.6.3) vznikají při *gravitačním kolapsu jádra hmotné hvězdy*, přičemž se vytvoří *neutronová hvězda*. Jádro je tvořené především hořčíkem, neonem a kyslíkem; k jeho kolapsu dojde při překročení Chandrasekharovy meze $M_{\text{Ch}} \doteq 1,38 M_{\odot}$, přičemž počáteční poloměr $R_{\text{WD}} \doteq 4000 \text{ km}$, konečný poloměr $R_{\text{NS}} \doteq 15 \text{ km}$. Pak podle (1.5) je uvolněná energie řádu¹

$$\Delta E \simeq E_{\text{WD}} - E_{\text{NS}} = -\frac{3}{10}G \left(\frac{M_{\text{Ch}}^2}{R_{\text{WD}}} - \frac{M_{\text{Ch}}^2}{R_{\text{NS}}} \right) \simeq 1 \cdot 10^{46} \text{ J}. \quad (16.1)$$

Tato energie se dělí následovně:

- 99 % uvolněné energie odnášejí neutrina, která vznikají při *neutronizaci*



a zvláště pak termalizovaná neutrina všech vůní;

- 1 % je kinetická energie rozpínající se obálky (E_G se nejprve změní na vnitřní energii U , neboli „mikroskopickou E_K “, a posléze na makroskopickou E_K);
- pouze 10^{-4} uniká jako záření.

O této bilanci svědčí přímá pozorování. Celkovou zářivou energii zjistíme integrací světelné křivky. Absolutní hvězdná velikost v maximu bývá okolo $M_V = -18 \text{ mag}$, barevný index $B - V = +0,5 \text{ mag}$, bolometrická korekce dle Popperových tabulek $BC = -0,05 \text{ mag}$ je nepatrná, čili $M_{\text{bol}} = M_V + BC \doteq -18 \text{ mag}$. Podle

¹Výpočet je pro homogenní kouli, ve skutečnosti je E_G zápornější. Bílí trpaslíci, respektive degenerovaná jádra, a neutronové hvězdy nicméně nejsou tak koncentrované ke středu jako normální hvězdy.

Pogsonovy rovnice je zářivý výkon $L_\gamma = L_0 10^{\frac{2}{5}(M_0 - M_{\text{bol}})} \simeq 5 \cdot 10^{35} \text{ W}$, kde L_0 , M_0 jsou definovány vztahem (9.8). Celková zářivá energie vychází odhadem

$$E_\gamma = \int_t L_\gamma(t) dt \simeq L_\gamma \tau \simeq 5 \cdot 10^{35} \cdot 30 \cdot 86\,400 \text{ J} \doteq 10^{42} \text{ J} \simeq 10^{-4} \Delta E. \quad (16.3)$$

Pro výpočet kinetické energie obálky vezměme například data pro Krabí mlhovinu M1: hmotnost filamentů je $m = (4,6 \pm 1,8) M_\odot$ (Fessen a spol. 1997) a rychlost rozpínání $v \leq 2\,000 \text{ km/s}$ (tj. relativně málo), pak

$$E_K \simeq \frac{1}{2} m v^2 = 1,8 \cdot 10^{43} \text{ J} \lesssim 10^{-2} \Delta E. \quad (16.4)$$

Energie supernovy tedy bohatě stačí na odhození obálky hvězdy do mezihvězdného prostoru. Ostatně její vazebná energie je oproti kompaktnímu jádru nepatrná ($E_G \simeq -10^{42} \text{ J}$).

Pozorování neutrin ze SN 1987 A. Supernova SN 1987 A byla pozorována ve Velkém Magellanově mračnu. Tři detektory, Kamiokande II (Hirata a spol. 1987), IMB (Bionta a spol. 1987) a Baksan, změřily 3 h před optickým vzplanutím tok 25 neutrin za 15 sekund, jejich energie byly mezi 10–40 MeV. Jedná se o detektory čerenkovské, ve kterých neutrino interaguje s částicemi za vzniku rychlých elektronů. Při pohybu elektronu rychlostí nadsvětelnou v daném prostředí vzniká Čerenkovovo záření — částice odlétávájící v kuželu. Na rozdíl od radiochemických detektorů je tak možné určit směr; v tomto případě kužel směřoval přibližně od Magellanova mračna.

Pro rozptyl neutrin na elektronu



je účinný průřez

$$\sigma_{\nu_x e^-} \simeq 9,5 \cdot 10^{-49} \text{ m}^2 \left(\frac{E_\nu}{1 \text{ MeV}} \right) \simeq 1,4 \cdot 10^{-47} \text{ m}^2. \quad (16.6)$$

Slabá interakce elektronového antineutrina s protonem



má mnohem větší účinný průřez

$$\sigma_{\bar{\nu}_e p} \simeq 9,3 \cdot 10^{-48} \left(\frac{E_\nu}{1 \text{ MeV}} \right)^2 \simeq 2,1 \cdot 10^{-45} \text{ m}^2, \quad (16.8)$$

ale Čerenkovovo záření je zde skoro izotropické.

Počet elektronů v přístroji Kamiokande, které mohou sloužit jako „terčíky“ pro rozptyl, je $N_e = 10 \cdot M_{\text{H}_2\text{O}}/m_{\text{H}_2\text{O}}$, kde hmotnost vody v detektoru $M_{\text{H}_2\text{O}} = 2140 \text{ t}$ a hmotnost molekuly vody $m_{\text{H}_2\text{O}} \doteq 18 m_u$; plocha terčíků je $S = N_e \sigma_{\nu_e e}$. Pozorovaný počet takových rozptylů byl $N_{\text{obs e}} = 3$, což při vzdálenosti $d = 51,4 \text{ kpc}$ a průměrné energii neutrina $E_\nu = 15 \text{ MeV}$ dává

$$N_{\text{tot}} = N_{\text{obs e}} \frac{4\pi d^2}{S} \simeq 9 \cdot 10^{57} \text{ neutrin}, \quad (16.9)$$

$$E_{\text{tot}} \simeq E_\nu N_{\text{tot}} \simeq 2 \cdot 10^{46} \text{ J} \simeq \Delta E. \quad (16.10)$$

Protože neutrina přiletěla během $t_{\text{obs}} = 13 \text{ s}$ vychází tok

$$\Phi = \frac{N_{\text{obs e}}}{S t_{\text{obs}}} \simeq 2 \cdot 10^{13} \text{ neutrin m}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (16.11)$$

16.1.1 Mechanismus neutrinové bomby

Myšlenka „gravitační neutrinové bomby“ pochází od Baadeho a Zwickyho (1934). Jádro hvězdy vlastně kolabuje neustále a zvláště u hmotných hvězd, kde se reakce zapalují průběžně, je zřetelná úměra $\rho_c \propto T_c^3$, která přesně odpovídá Jeansovu kritériu (8.1) $M \simeq M_J \propto T_c^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}$. Účinnost ochlazování určuje, jak může jádro kolabovat. Jádro se v závěrečných fázích ochlazuje třemi způsoby:

1. únikem neutrin;
2. zachycováním e^- v jádrech, což vede ke zmenšování tlaku degenerovaného elektronového plynu;
3. fotodisintegrací železa

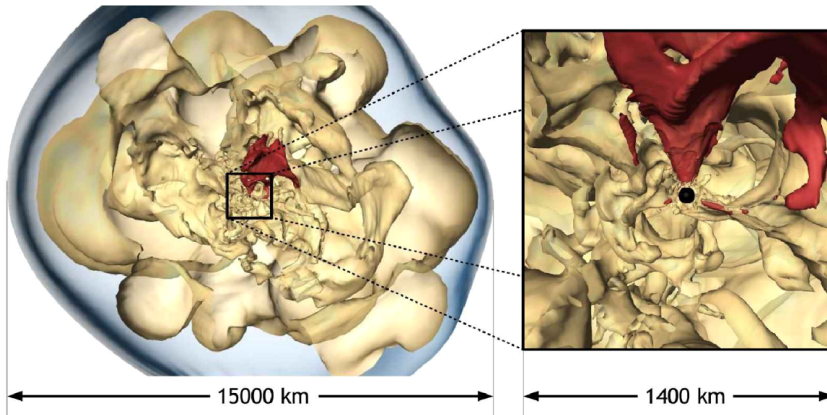


což je endogenní reakce s bilancí -100 MeV .

Po volném pádu se ustaví *protoneutronová hvězda* s poloměrem $R \simeq 30 \text{ km}$, a to díky gradientu tlaku degenerovaného neutronového plynu (neboli krátkodosahové jaderné síle, resp. její odpudivé složce). Hustota látky $\rho = 4$ až $5 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ je dvojnásobná než má atomové jádro (neboť tam působí navíc gravitace).

Náhly konec kolapsu vnitřního jádra vyvolá zpětný ráz a *rázovou vlnu* v okolních vrstvách. Dříve se myslelo, že právě tato vlna způsobuje výbuch supernovy, ale ztráty energie fotodisintegrací a neutrin jsou tak velké, že se vlna za několik milisekund *zastaví!* Protoneutronová hvězda opět akretuje rychlostí $\dot{M} \simeq 0,1 M_\odot/\text{s}$ a pokud by akrece pokračovala pod dobu 1 s, vznikla by černá díra.

Neutronová hvězda, o poloměru $R \simeq 10 \text{ km}$, vznikne po vyzáření obrovského množství neutrin. Jejich energie je více než dostatečná na rozmetání obalu, ale



Obrázek 16.1: Model akrece látky na neutronovou hvězdu (černý kotouček uprostřed). Konvektivní nestabilita obvykle probíhá tak, chladná látka (vyznačená červeně) přitéká z jedné strany, je zahřátá neutriny a odtéká na druhou stranu. Tento mechanismus může neutronové hvězdě udělit rychlost řádu 10^2 km/s. Rázová vlna (modře), obepínající konvektivní bubliny, posléze rozmetá celou obálku hvězdy. Převzato z Woosley a Janka (2006).

problémem je: i) malý účinný průřez σ_ν ; ii) po zachycení nukleony $p + \bar{\nu}_e \leftrightarrow n + e^+$, $n + \nu_e \leftrightarrow p + e^-$ je energie vyzařována opět jako neutrino, čili je obtížné uložit energii do baryonické látky.

Uložení části energie neutrín dá vzniknout fotonům γ a párům e^- , e^+ . Od centra se tak rozpíná horká bublina, s rázovou vlnou na vnějším okraji. Vykazuje dva druhy nestabilit (obr. 16.1): i) konvektivní nestabilitu; ii) neradiální deformace, ve kterých převažuje bipolární mód — chladnější hmota teče z jedné strany, je ohřátá neutriny a odtéká na straně druhé. Neutronové hvězdy bývají tímto procesem značně urychlené a vysvětlují se tak jejich náhodné a vysoké relativní rychlosti 300 až 400 km/s vzhledem ke zbytkům po výbuších supernov.

Numerická řešení radiačně–hydrodynamických rovnic, popisující explozi, stále nedávají jednoznačné výsledky. Jsou navíc nutná vysoká rozlišení, až 10^9 bodů (malé rozlišení vede k velké numerické viskozitě, která by explozi zabránila). Problémy se také liší podle hmotnosti: i) masivní hvězdy mají velké železné jádra, takže téměř vznikne černá díra. Akrece husté obálky z křemíku a kyslíku je tak rychlá, že obtížně vzniká rázová vlna. ii) Lehké hvězdy (8 až $11 M_\odot$) naproti tomu mají slabě vázané vnější vrstvy, takže odhodit je není obtížné, ale vychází příliš malý výhoz prvků středních hmotností (O, Mg, Si, S, Ca).

16.1.2 Záblesky záření gama (GRB)

Podle pozorování *některé* supernovy souvisejí s *některými* záblesky záření gama. Konkrétně se jedná o hypernovy (tzn. uvolňující $\simeq 10^{52}$ erg) a dlouhé měkké zábles-

ky; pozorováno bylo zatím několik kusů. I když nevidíme všechny záblesky kvůli jejich směřování, je supernov produkujících GRB jen pouhých 0,1 %.

Pro gama záblesky byly zjištěné vysoce relativistické kolimované výtrysky, s Lorentzovým faktorem $\Gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2} > 200$, a vrcholovým úhlem výtrysku asi 5° . Tak vysoké rychlosti a směrovost svědčí o nesférické explozi a o souvislosti s *rotací*. V zásadě existují dva možné zdroje:

1. neutronová hvězda rotující na hranici rozpadu odstředivou silou;
2. černá díra s akrečním diskem, ve kterém se uvolňuje energie.²

Normálně hvězda ve fázi červeného obra rotuje velmi pomalu, tření mezi obálkou a jádrem (podpořené magnetickým polem) vede ke zpomalení jádra a následně k obyčejné supernově a pomalu rotujícímu pulzaru ($P = 10$ ms). Pro vznik supernovy, respektive GRB, se ale moment hybnosti musí *zachovat*. Zřejmě se tak děje některým z následujících procesů:

1. rychlá počáteční rotace vede k brzké rotační nestabilitě, odhození obálky a obr tak vůbec nevznikne;
2. hvězda ztratí obálku přetokem v těsném dvojhvězdném systému;
3. hvězdný vítr musí být dostatečně slabý, což může fungovat pro WR hvězdy s nízkou metalicitou $Z < 0,004$.

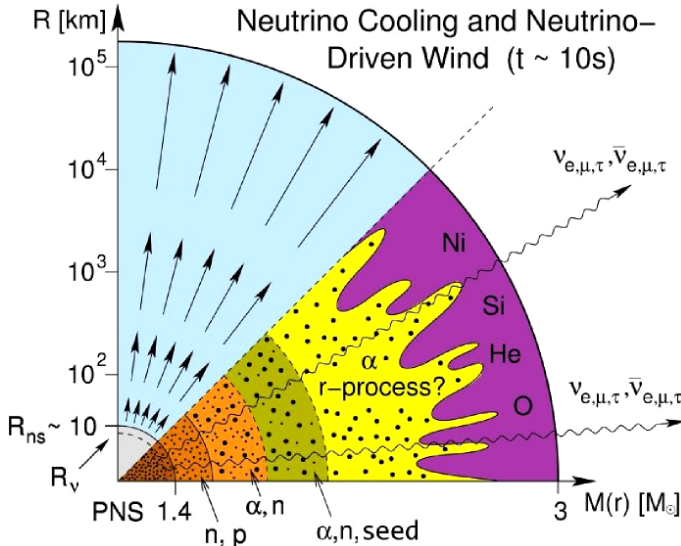
Posledně jmenovaný proces funguje spíše v raném vesmíru (a možná souvisí s tím, že GRB jsou pozorované na velkých rudých posuvech).

16.1.3 Nukleosyntéza r-procesem

R-proces, neboli rychlé zachycování neutronů atomovými jádry, funguje za teplot $T > 10^9$ K a koncentrací $n > 10^{20}$ neutronů/cm³. Takové podmínky můžeme očekávat v těsném okolí neutronové hvězdy (obr. 16.2):

0. neutronizace a termalizace dá vzniknout toku neutrin i antineutrin, skrz hvězdu složenou z neutronů však snáze pronikají antineutrina;
1. neutrina nastartují tok neutronů a protonů (neboli vítr z atmosféry neutronové hvězdy);
2. vznikne přebytek neutronů kvůli větší energii antineutrin, která pak mají větší účinný průřez (16.8) při interakci s protony $p + \bar{\nu} \rightarrow n + e^+$;
3. po ochlazení je syntetizováno helium, reakcemi typu „ $2p + 2n \rightarrow \alpha$ “, až žádné protony nezbudou; na α částicích se další neutrony nezachycují, protože ${}^5\text{He}$ je velmi nestabilní;

²Kdyby systém nerotoval a došlo k radiálnímu kolapsu do černé díry, neviděli bychom nic, protože horizont je pouze myšlená hranice, přes kterou látka volně padá do singularity.



Obrázek 16.2: Schéma r-procesu v těsném okolí protonneutronové hvězdy: tok neutrin vytvoří vítr protonů a neutronů, jež se po ochlazení slučují na částice α ; syntézou částic α vzniknou jádra prvků skupiny železa a teprve na nich se zachycují neutrony, čímž vznikají těžší prvky. Převzato z Woosley a Janka (2006).

4. po ochlazení na $T < 5 \cdot 10^9$ K vznikne malé množství jader skupiny železa, „ $13\alpha + 4n \rightarrow \text{Fe}$ “;
5. teprve zachycování neutronů na tomto „osivu“ vede ke vzniku prvků těžších než železo.

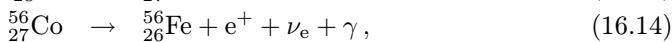
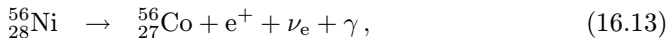
Všimněme si, že nukleosyntéza proběhla na *primární látce*, neboť železo, které hvězda vytvořila dříve, zaniklo při fotodisintegraci. Je též zřejmá nezávislost na původní metalicitě Z_* nebo stáří objektu.

Výše uvedený proces je jediným vysvětlením pozorovaných abundancí těžkých prvků v atmosféře Slunce — při jedné explozi supernovy bývá vyvrženo $10^{-5} M_{\odot}$ materiálu větru, z toho 10 až 20 % jsou prvky syntetizované při r-procesu a při 10^8 výbuších supernov v Galaxii za dobu existence Vesmíru dostáváme právě Z_{\odot} .

Podle detailních modelů však proton-neutronový vítr vychází příliš hustý (asi faktorem 4) — vznikne tak příliš mnoho α částic, málo neutronů zůstane ve větru a je problém se vznikem jader s $A > 200$. Je možné, že se modely ještě musejí doplnit o vliv rotace a magnetických polí.

16.1.4 Dosvit a zbytky po supernovách

Tvary světelných křivek lze dobře vysvětlit radioaktivním rozpadem nestabilních nuklidů



s poločasy rozpadu 6,1 dne a 77 dní. Abychom vysvětlili i celkové množství zářivé energie (16.3), když rozdíl vazebných energií je $E_{\text{Fe}56} - E_{\text{Ni}56} = 492 \text{ MeV} - 484 \text{ MeV} = 8 \text{ MeV}$, potřebujeme řádově $0,1 M_{\odot}$ nuklidu niklu.

Světelnou křivku samozřejmě ovlivňuje i *opacita obálky*. Například u supernov typu II–P vzniká výrazné plato právě díky opacitnímu mechanismu: rázová vlna zvýší ionizaci vodíku ve vnější obálce, což podstatně zvýší κ a pokles L je pak pomalejší. Po ochlazení a rekombinaci je naopak κ malé a pokles L rychlý.

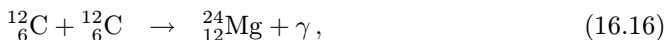
Obvyklým zbytkem po výbuších supernov (angl. supernova remnant, SNR) jsou rozpínající se *obálky* a rázové vlny interagující s mezihvězdným prostředím. Pozorovatelné jsou po dobu více než 10^5 roků. Znamé jsou třeba Krabí mlhovina, mlhovina Řasy nebo Vela. V centrech takových mlhovin se též nacházejí neutronová hvězda, případně *pulsar*, tj. rychle rotující neutronová hvězda s magnetickým polem, která vysílá neteplné záření směřované podél osy magnetického pole do dvou úzkých kuželů. Pozorované rotační periody, a tedy i periody pulzů, jsou od 1,4 ms do 8,5 s.

16.2 Supernovy vznikající explozí bílého trpaslíka

Předchůdce supernov SN Ia bohužel přímo nepozorujeme. Pravděpodobně se ale jedná o *explozi uhlíko–kyslíkového bílého trpaslíka ve dvojhvězdě*, který při postupné akreci překročil *Chandrasekharovu mez*. Během následné kontrakce se zažehne nukleární přeměna C a O až na prvky skupiny železa, což uvolní takové množství tepelné energie, které převyšuje gravitační vazebnou energii bílého trpaslíka

$$E_{\text{WD}} \simeq \frac{3}{10} \frac{GM_{\text{Ch}}^2}{R_{\text{WD}}} \doteq 3,8 \cdot 10^{43} \text{ J}. \quad (16.15)$$

Již z první reakce této série



máme, při vazebných energiích $E_{\text{C12}} = 92 \text{ MeV}$, $E_{\text{Mg24}} = 198 \text{ MeV}$,

$$E_{\text{nukl}} \simeq \frac{M}{m_{\text{C12}}} (E_{\text{Mg24}} - 2 E_{\text{C12}}) \doteq 3,0 \cdot 10^{44} \text{ J} \gg E_{\text{WD}}. \quad (16.21)$$

Poznamenejme, že se nemůže jednat o heliového trpaslíka, protože pak by exploze vycházela mnohem větší, než se pozoruje.

Důležitá je vhodná *rychlost akrece* látky na bílého trpaslíka. Podmínkou je, že před explozí se musí spotřebovat vodík a hélium (neboť je nevidíme ve spektru):

1. malé \dot{M} vede obvykle k erupci novy, při které bílý trpaslík ztratí více hmoty než předtím akreoval;
2. při středním \dot{M} vznikne degenerovaná vrstva helia a záblesk neodpovídající supernově;
3. vyšší $\dot{M} \simeq 10^{-7} M_{\odot}/\text{yr}$ je provázené relativně poklidným, hydrostatickým hořením H, He — může tedy vést až k supernově;³
4. velmi vysoké \dot{M} dá vzniknout vodíkové obálce jako u červeného obra, což je v rozporu se spektry.

Existují dva základní způsoby, jak poté může exploze proběhnout:

1. *detonace*, při které *nadzvuková rázová vlna* zvýší tlak natolik, že komprese materiálu vede k jeho vznícení, přičemž exotermická reakce za vlnou podporuje další šíření vlny;
2. *deflagrace*, kde je šíření zajišťováno *tepelnou vodivostí* materiálu, čili ohřev okolních vrstev způsobuje jejich zapálení.

Podle modelů supernov Ia (Hillebrandt a Niemeyer 2000) je jasné, že *okamžitá detonace nefunguje!* Vytvoří se při ní sice prvky skupiny železa, ale nikoli dostatek prvků středních hmotností. Proto se uvažuje o následujících třech modelech:

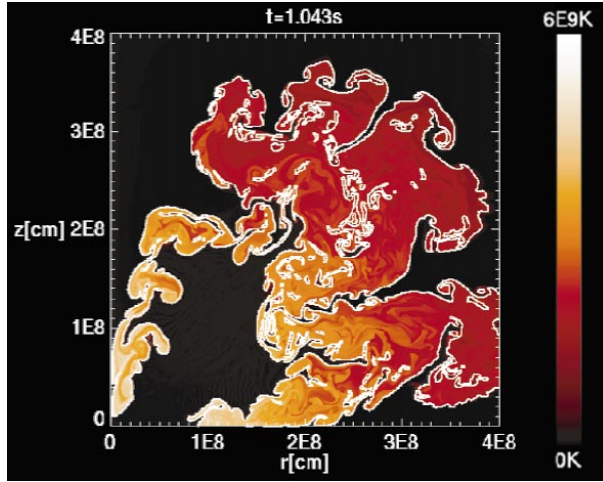
1. podzvuková nukleární deflagrace, která je silně turbulentní;
2. turbulentní deflagrace následovaná opožděnou detonací;
3. totéž doprovázené jedním nebo vícero pulzy.

Turbulence zde hraje roli zcela zásadní. Deflagrační vlna je totiž „zprohýbaná“ (obr. 16.3) a na první pohled by se zdálo, že rychlost turbulentní vlny je menší než rychlost laminární ($S_t < S_l$). Ale právě zmiňované zprohýbání zvětší plochu, na níž deflagrace probíhá, takže nakonec je

$$S_t > S_l \quad (16.22)$$

a dosahuje hodnoty až $S_t \simeq 0,3 c$.

³Možná jsou progenitory SN Ia kataklyzmatické proměnné, konkrétně superměkké rentgenové zdroje. Akrece $10^{-1} M_{\odot}$ by však musela probíhat dlouho, navzdory tomu, že v rentgenovém oboru pozorujeme proměnnost na škále týdnů.



Obrázek 16.3: Prostorové rozložení teploty a tvar deflagrační vlny v bílém trpaslíkovi s mezní Chandrasekharovou hmotností. Převzato z Hillebrandt a Niemeyer (2000).

16.2.1 Laminární rychlost deflagrace

Jakou rychlostí deflagrace probíhá? Označme δ tloušťku vrstvy, ve které probíhá termonukleární hoření i vedení tepla. Časová škála pro vedení tepla je pak

$$\tau_d \simeq \frac{\delta^2}{\chi}, \quad (16.23)$$

kde $\chi = K/(\rho C)$ je tepelná difuzivita, K vodivost, ρ hustota, C tepelná kapacita. Časovou škálu pro hoření můžeme vyjádřit pomocí

$$\tau_b \simeq \frac{\alpha}{\epsilon} \propto \exp \frac{\Delta U}{kT_f}, \quad (16.24)$$

kde α označuje energii obsaženou v 1 g látky, ϵ měrný výkon termonukleárních reakcí, ΔU se nazývá aktivační bariéra, T_f teplota plamene (při které probíhá reakce) a k je Boltzmannova konstanta.

Při stacionární deflagraci je energie uvolněná reakcemi odvedená pryč, čili jsou si časové škály rovny,

$$\tau_d \simeq \tau_b. \quad (16.25)$$

Můžeme pak odvodit tloušťku hořící vrstvy

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{\chi \alpha}{\epsilon}} \quad (16.26)$$

i laminární rychlost postupu deflagrační fronty

$$S_1 \simeq \frac{\delta}{\tau_b} \simeq \sqrt{\frac{\chi \epsilon}{\alpha}}. \quad (16.27)$$

Obvyklé hodnoty pro termonukleární plamen v prostředí $X_C = X_O = 0,5$ a $\rho = 10^9$ až 10^7 g cm⁻³ vycházejí $\epsilon \propto T^{12}$, $S_1 = 10^7$ až 10^4 cm s⁻¹, $\delta = 10^{-4}$ až 1 cm, $\Delta\rho/\rho = 0,2$ až 0,5.

Vzhledem k hodnotě δ jde o mikroskopický proces. Při makroskopickém modelování se proto používá přiblížení tenkého plamene, jakožto nekonečně tenké vlny zředění, postupující rychlostí S_1 .

16.2.2 Chapmanova–Jougetova rychlost detonace

Pro popis detonace použijeme *Rankinovy–Hugoniotovy rovnice* (viz např. Fickett a Davis 2000). Jedná se o jednoduché zákony zachování hmoty, hybnosti a energie, zapsané v souřadnicové soustavě pohybující se spolu s rázovou vlnou. Rozhraní, na kterém se *skokově* mění stavové veličiny, je v takovém případě stacionární (obr. 16.4). Označíme-li D rychlost detonační vlny, kterou látka teče směrem k rozhraní, a $D - u$ rychlost za tímto rozhraním, máme

$$m_0 = m, \quad (16.28)$$

$$m_0 D + F_0 t = m(D - u) + Ft, \quad (16.29)$$

$$U_0 m_0 + \frac{1}{2} m_0 D^2 + p_0 V_0 = Um + \frac{1}{2} m(D - u)^2 + pV, \quad (16.30)$$

kde ρ , p je hustota a tlak po detonaci, totéž s indexem nula je stav před detonací, U označuje vnitřní energii na jednotku hmoty, F sílu působící na rozhraní, rozdíl $pV - p_0 V_0$ je vykonaná mechanická práce. Po dosazení za objem $V_0 = SDt$, $V = S(D - u)t$, hmotnost $m_0 = \rho_0 SDt$, $m = \rho S(D - u)t$, sílu $F_0 = p_0 S$, $F = pS$, a dělení třetí rovnice výrazem $m \equiv m_0$, získáme Rankinovy–Hugoniotovy rovnice

$$\rho_0 D = \rho(D - u), \quad (16.31)$$

$$\rho_0 D^2 + p_0 = \rho(D - u)^2 + p, \quad (16.32)$$

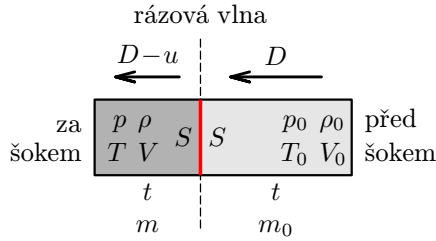
$$U(p_0, \rho_0, \lambda = 0) + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} D^2 = U(p, \rho, \lambda = 1) + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (D - u)^2, \quad (16.33)$$

kde jsme zavedli λ jako stupeň proběhnutí reakce.

Nejprve eliminujeme u z (16.31) a (16.32)

$$u = D \frac{\rho - \rho_0}{\rho}, \quad (16.34)$$

pak



Obrázek 16.4: Detonační fronta nahlížená v soustavě pohybující se s frontou a stav látky před ní (s indexem 0) a za ní.

$$\rho_0 D^2 + p_0 = \overbrace{\rho(D-u)}^{\rho_0 D} (D-u) + p = \rho_0 D(D-u) + p, \quad (16.35)$$

$$p - p_0 = \rho_0 u D, \quad (16.36)$$

$$p - p_0 = \rho_0 D^2 \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \rho_0^2 D \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right). \quad (16.37)$$

Zavedeme ještě specifické objemy $v = \frac{1}{\rho}$, $v_0 = \frac{1}{\rho_0}$ a označíme

$$\mathcal{R} \equiv \frac{D^2}{v_0^2} - \frac{p - p_0}{v_0 - v} = 0, \quad (16.38)$$

což je rovnice pro *Rayleighovu přímku* ($\mathcal{R} = 0$) na grafu (v, p) .

Eliminace D z týchž rovnic dává

$$D = u \frac{\rho}{\rho - \rho_0}, \quad (16.39)$$

$$p - p_0 = u^2 \frac{\rho \rho_0}{\rho - \rho_0}, \quad (16.40)$$

čili

$$(p - p_0)(v_0 - v) = u^2. \quad (16.41)$$

Jedná se o linii konstantní částicové rychlosti ($u = \text{konst.}$), přesněji řečeno hyperbolu. Zadáme-li u , D , je řešením Rankinových–Hugoniotových rovnic průsečík zmiňovaných linií na grafu (v, p) .

Nakonec eliminace u i D z (16.33)

$$U(p, v, \lambda = 0) + \frac{1}{2} D^2 = U(p, v, \lambda = 1) + pv + \frac{1}{2} (D^2 - 2 \overbrace{D^2}^{(p-p_0)v_0} + \overbrace{u^2}^{(p-p_0)(v-v_0)}) \quad (16.42)$$

dává

$$\mathcal{H} \equiv U(p, v, \lambda = 1) - U(p, v, \lambda = 0) - \frac{1}{2}(p + p_0)(v_0 - v) = 0, \quad (16.43)$$

což je křivka nazývaná *hugoniota* ($\mathcal{H} = 0$). Leží na ní všechny možné konečné stavy (pro všechny detonace); pokud zadáme D , je stav určen průsečíkem hugonioty a Rayleighovy přímky.

Pro polytropický plyn (ideální s konstantní tepelnou kapacitou), s reakcí s konstantním měrným teplem q , můžeme snadno vyjádřit měrnou vnitřní energii

$$U = \frac{\alpha NkT}{m} - \lambda q = \frac{pv}{\gamma - 1} - \lambda q \quad (16.44)$$

a dosadit ji do (16.43)

$$\frac{pv}{\gamma - 1} - \lambda q - \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1} - \frac{1}{2}(pv_0 - pv + p_0 v_0 - p_0 v) = 0. \quad (16.45)$$

Vyjádříme tlak

$$p = \frac{p_0(v_0 - \mu^2 v) + 2\mu^2 q}{v - \mu^2 v_0}, \quad (16.46)$$

kde $\mu^2 \equiv \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, a obdržíme tak rovnici hugonioty pro polytropický plyn (s reakcí).

Stav látky (v, p) po detonaci rychlostí D je určen průsečíkem s Rayleighovou linií (16.38). Z obrázku 16.5 je zřetelné, že pro určitou hodnotu rychlosti D_{CJ} , nazývanou *Chapmanova–Jouguetova rychlost*, existuje pouze jediné řešení. Vypočítali bychom ji z podmínky, že tečna k hugoniotě, alias Rayleighova přímka, musí procházet počátečním stavem

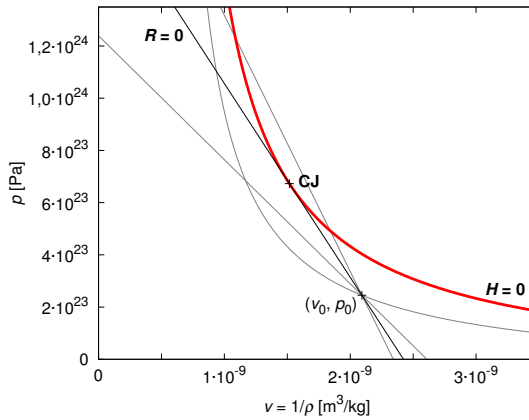
$$p + \left(\frac{dp}{dv} \right)_{\mathcal{H}} (v_0 - v) = p_0, \quad (16.47)$$

kam dosadíme z (16.46), vyřešíme vzhledem k v a vypočteme p , D_{CJ} podle (16.38).

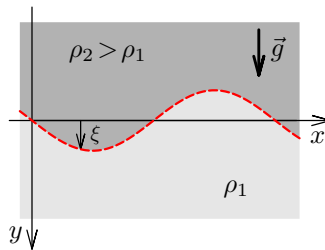
Chapmanova–Jouguetova rychlost je dobrým odhadem rychlosti šíření rázové vlny v daném prostředí, a zároveň je to minimální možná rychlost detonace. Pro $D < D_{\text{CJ}}$ totiž neexistuje žádné řešení R.–H. rovnic. Platí také $D - u = c_s$, čili od rozhraní se látka pohybuje rychlostí zvuku c_s , jak se můžeme snadno přesvědčit z definice a rovnic (16.38), (16.31)

$$c_s^2 \equiv \frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{dv} \frac{dv}{d\rho} = \frac{dp}{dv} (-v^2) = -\frac{D^2}{v_0^2} (-v^2) = (D - u)^2. \quad (16.48)$$

Například pro hodnoty v centru hvězdy $20 M_{\odot}$ — tedy $\rho_0 = 4,8 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^3$, $p_0 = 2,5 \cdot 10^{23} \text{ Pa}$, $T_0 = 9,2 \cdot 10^8 \text{ K}$ — a nukleární přeměnu uhlíku ($q = 5,0 \cdot 10^{14} \text{ J/kg}$) vychází $D_{\text{CJ}} \doteq 5,7 \cdot 10^7 \text{ m/s} \doteq 0,19 c$, $D - u = c_s \doteq 0,14 c$, $\rho \doteq 1,4 \rho_0$, $p \doteq 2,7 p_0$, $T \doteq 2,0 T_0$.



Obrázek 16.5: Hugoniota ($\mathcal{H} = 0$) a Rayleighovy přímky ($\mathcal{R} = 0$) pro různé hodnoty detonační rychlosti D , na grafu tlak p versus specifický objem $v = \frac{1}{\rho}$. Počáteční hodnoty p_0 a v_0 odpovídají degenerovanému nitru bílého trpaslíka. Chapmanova–Jouguetova rychlost je v tomto případě $D_{CJ} \simeq 0,2c$.



Obrázek 16.6: Počáteční perturbace rozhraní dvou kapalin.

16.2.3 Rayleighova–Taylorova nestabilita

Rayleighova–Taylorova nestabilita vzniká například v situaci, kdy je hustší kapalina *nad* řidší v homogenním gravitačním poli (obr. 16.6),⁴

$$\rho_2 > \rho_1. \quad (16.49)$$

Obdobná je i situace při pohybu řidší látky směrem do hustšího prostředí. V souvislosti se supernovami připomeňme, že látka uvnitř, ve které již proběhla nukleární přeměna (deflagrace), může mít vyšší T a tedy *nižší* ρ než okolí, do kterého se rozpíná.

Popíšme takovou nestabilitu v nejjednodušším možném případě. V neporušeném stavu jsou na rozhraní kapalin tlaky $p_1 = p_2 = p_0$. Ovšem při malém vychýlení

⁴Kdyby tomu bylo naopak, měl by systém menší potenciální energii. Není pak divu, že vznikne nějaká nestabilita.

hladiny o ξ se těsně pod a těsně nad rozhraním objeví hydrostatické tlaky $p'_1 = p_0 + \xi\rho_1g$, $p'_2 = p_0 + \xi\rho_2g$. Tlaková síla působící na rozhraní s plochou A je pak

$$F_t = A(p'_1 - p'_2) = A\xi(\rho_1 - \rho_2)g \quad (16.50)$$

a pohybová rovnice

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = F_t. \quad (16.51)$$

Kolik je ale m , tedy hmotnost *pohybující* se kapaliny? Pro jednoduchost předpokládejme, že perturbace má tvar harmonické vlny, s vlnovým číslem $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Pro nestlačitelnou a bezvírovou kapalinu ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) pak platí (bez důkazu), že perturbace musí klesat se vzdáleností od rozhraní jako $\exp(-k|z|)$. Typicky tedy sahá do vzdálenosti $\frac{1}{k}$ a příslušná hmotnost

$$m = m_1 + m_2 = \rho_1 A \frac{1}{k} + \rho_2 A \frac{1}{k}. \quad (16.52)$$

Dosazením do (16.51)

$$(\rho_1 + \rho_2) A \frac{1}{k} \frac{d^2\xi}{dt^2} = (\rho_2 - \rho_1) g \xi \quad (16.53)$$

dostáváme jednoduchou diferenciální rovnici

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} k g \xi = \gamma^2 \xi, \quad (16.54)$$

kde

$$\gamma \equiv \sqrt{A_T k g} \quad (16.55)$$

a Atwoodovo číslo

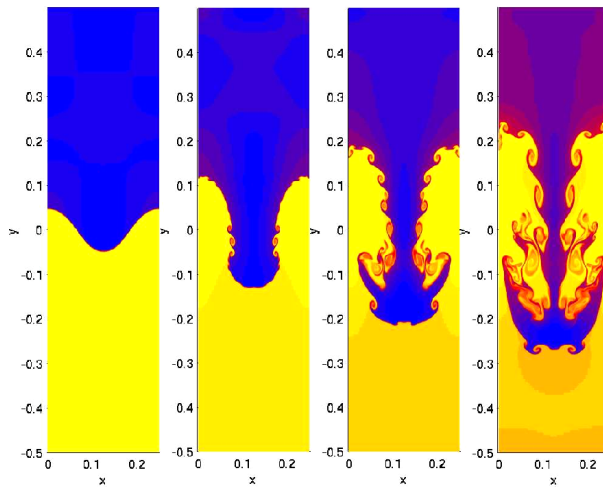
$$A_T \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (16.56)$$

Protože naše $A_T > 0$ je řešení ve tvaru⁵

$$\xi = \xi_0 \cosh(\gamma t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\gamma} \sinh(\gamma t), \quad (16.57)$$

což je s časem divergující exponenciála. To je sice obvyklé u lineárních teorií, ale ve skutečnosti vývoj nestability omezí nelineární členy (viz obr. 16.7).

⁵Kdyby bylo $A_T < 0$ (hustší kapalina dole), dostali bychom naopak řešení v podobě vln (sinů a kosinů).



Obrázek 16.7: Projev Rayleighovy–Taylorovy nestability v numerickém řešení hydrodynamických rovnic. Menší vlny, které vznikají na rozhraní pohybujících se kapalin různých hustot, jsou projevem Kelvinovy–Helmholtzovy nestability. V pozdějších fázích se tvoří charakteristický „hřib“. Převzato z <http://math.lanl.gov/Research/Highlights/amrmhd.shtml>.

17 Typy pozorovaných hvězd a jejich vývojová stadia

V literatuře se používá mnoho zavedených typů hvězd a označení případné proměnnosti. V následujícím přehledovém textu jsou hvězdy řazeny zejména podle spektrálních tříd, od horkých hvězd (O) po chladné (M).

17.1 Horké hvězdy spektrálního typu O a Wolfovy–Rayetovy hvězdy

O hvězdy. Fenomenologicky jsou hvězdy spektrálního typu O definovány přítomností ionizovaného helia He II v jejich čárových spektrech. To odpovídá efektivním teplotám zhruba nad 30 000 K. Pro objekty na hlavní posloupnosti se podle měření dobře pozorovaných dvojhvězd jedná o rozsah hmotností od 15 do více než $60 M_{\odot}$ a poloměrů od 6 do více než $10 R_{\odot}$.

Většina pozorovaných O hvězd se nachází v blízkosti galaktické roviny, patří k první populaci a jedná se zřejmě o mladé hvězdy. Řada hvězd spektrálního typu O se však nachází i ve sférické složce Galaxie. Mají rozložení energie podobné normálním mladým O hvězdám, jejich jasnost je však mnohem menší a jsou označovány jako podtrpaslíci spektrálního typu O, t.j. O VI hvězdy. Tyto objekty jsou zřejmě málo hmotné a musí se svým vývojovým stadiem zásadně lišit od normálních O hvězd. Zarážejícím faktem je, že atmosféry těchto hvězd se svými spektrálními projevy velmi podobají atmosférám normálních O hvězd. Hvězdy typu O byly dále klasifikovány do podtříd O3 až O9.5 podle klesajícího stupně ionizace absorpčních čar pozorovaných v jejich spektrech. Walborn a kol. (2002) zavedli novou spektrální podtřídu O2. Ve spektrech mnoha O hvězd jsou pozorovány emisní čáry helia He II 4686 a též dusíku N III 4634, 4640 a 4641. Tyto hvězdy bývají označovány jako Of hvězdy. U některých Of hvězd se pozoruje i emise C III 5696 a též $H\alpha$ emise. Frost a Conti (1976) zavedli klasifikaci Oe pro O hvězdy s $H\alpha$ emisí, upozornili na to, že tato emise bývá časově proměnná podobně jako pro chladnější hvězdy spektrálního typu Be (viz dále) a vyslovili názor, že Oe hvězdy se zásadně liší od Of hvězd, pro něž u emisních čar podle nich nedochází k časovým změnám. To ale nemusí být pravda, jak ukazuje např. studie Of hvězdy ζ Pup, pro níž Conti a Ni-

emela (1976) pozorovali zcela prokazatelné změny profilu čáry $H\alpha$. Conti (1974) udělal přehledku osamocených O hvězd a Thaller(ová) (1997) publikovala podobnou přehledku O hvězd ve dvojhvězdách. Oba zjistili, že $H\alpha$ emise se prakticky nevyskytuje u hvězd hlavní posloupnosti, ale pouze pro hvězdy obří a veleobří.

Pro některé O hvězdy v pásu hlavní posloupnosti byly také pozorovány rychlé změny profilů absorpčních čar, které byly interpretovány jako projev *atmosferických pulsací*. Podle rovnice (14.31) lze pulsační periodu horkého O veleobra o hmotnosti $50 M_{\odot}$ a poloměru $20 R_{\odot}$ odhadnout na pouhých 0,25 dne. Baade objevil změny profilů čar O4If hvězdy ζ Pup s pravděpodobnou periodou $0^d,356$, kterou interpretoval jako projev neradiální pulsace. Lze odhadnout, že pravděpodobná rotační perioda ζ Pup musí být delší než 4 dny, tedy podstatně delší, než zjištěná perioda změn profilů čar. Není ale dosud znám mechanismus, který by v této části HR diagramu vedl k pulsační nestabilitě.

Wolfovy–Rayetovy hvězdy. Hvězdy zvané Wolfovy–Rayetovy (dále WR hvězdy) jsou definovány přítomností velmi silných a širokých *emisních čar* ve spektru, které svým rozložením energie odpovídá spektru hvězdy spektrálního typu O. Název těchto hvězd je odvozen od jmen dvou astronomů, kteří jako první pomocí vizuálního spektroskopu podobné spektrum pozorovali při přehlídce hvězd v souhvězdí Labutě (viz Wolf a Rayet 1867). Čárové spektrum WR hvězd je patrně čistě emisní. Pro WR hvězdy se používá rovněž podrobnější spektrální klasifikace na podtřídy, přičemž se podtřídy definují opět sestupně podle přítomnosti emisních čar s klesajícím stupněm ionizace pozorovaných v optickém spektru. Navíc se WR hvězdy rozpadají do dvou paralelních skupin:

1. *WC hvězdy*, pro něž jsou pro ně charakteristické silné emisní čáry iontů uhlíku C a kyslíku O.
2. *WN hvězdy*, v jejichž čárových spektrech dominují emisní čáry iontů dusíku N.

Obě skupiny mají silné emisní čáry helia He II. Neexistuje žádné kritérium luminositní třídy a v zásadě není vůbec jasné, zda takto zavedené spektrální klasifikaci lze přiřadit monotonně se měnící efektivní teplotu. Dosud byly zavedeny spektrální podtřídy WC5 až WC9 a WN2 až WN9. Bylo ovšem zjištěno, že WR hvězdy se podobně jako O hvězdy nacházejí v diskové složce Galaxie, hlavně ve spirálních ramenech. Odhady jejich základních fyzikálních vlastností naznačují rozsah efektivních teplot mezi 30 000 a 90 000 K a hmotností mezi 10 a 40 M_{\odot} .

Normální O hvězdy jsou zřejmě hvězdami vyvíjejícími se od hlavní posloupnosti nulového věku, jejichž vývoj je však ovlivněn i ztrátou hmoty ve formě hvězdného větru.

O vývojové stádium WR hvězd se dosud vedou určité spory. Mohou to být objekty ve stadiu hoření helia v jádru, soudí se, že atmosféry WN hvězd jsou obohaceny produkty hoření vodíku a WC hvězdy produkty hoření helia. Vzhledem k jejich menším hmotnostem a stejnému prostorovému rozložení se někteří badatelé domnívají, že WR hvězdy vznikají během vývoje z O hvězd. Roli v jejich vývoji

zřejmě hraje velmi silný hvězdný vítr a snad i rotace a v některých případech i jejich podvojnost. Rozsáhlé obaly WR hvězd se někdy mohou v čase měnit, což dokazuje případ dvojhvězdy CV Ser, u níž došlo ke zmizení fotometrických zákrytů.

Pro úplnost je třeba uvést, že WR spektrum se pozoruje také pro některé velmi hmotné O hvězdy s mohutným hvězdným větrem, který pozorované WR spektrum způsobuje. V těchto případech se zřejmě jedná o mladé a nevyvinuté hvězdy, bohaté na vodík. Tato WR spektra bývají klasifikována WN5h až WN7h, kde přípona „h“ (někdy též „ha“) označuje bohaté zastoupení vodíku. Jde vesměs o objekty ve dvojhvězdách — viz Schnurr a kol. (2009) a citace tam uvedené.

Podtrpaslíci O. Pokud jde o podtrpaslíky O, jejich vývojové stadium je méně jasné, musí se ale zřejmě jednat o hvězdy v pozdním vývojovém stadiu po vypálení vodíku a patrně v období hoření helia ve slupce. Zdá se, že v HR diagramu se kupí kolem vertikální linie u efektivní teploty asi 40 000 K, od hlavní posloupnosti až k bílým trpaslíkům. Podle hrubých odhadů jsou hmotnosti O podtrpaslíků menší než hmotnost Slunce. V jediném případě, kdy byl pozorován O podtrpaslík ve dvojhvězdě spolu s hvězdou spektrálního typu G, existuje odhad $0,55 M_{\odot}$.

17.2 Hvězdy spektrálního typu B

Hvězdy spektrálního typu B se vyznačují optickými spektry, v nichž dominují silné čáry vodíku a neutrálního helia, chybí již čáry He II a jsou přítomny čáry lehčích ionizovaných prvků jako C II, O II, N II atd. Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 2,2 do $15 M_{\odot}$, poloměrů od 2,1 do $6 R_{\odot}$ a efektivních teplot od 9 400 do 30 000 K. Kromě normálních B hvězd se pozorují pulsující hvězdy, několik typů chemicky pekuliárních hvězd a též hvězdy se závojem, které se vyznačují přítomností emisních čar vodíku. Mnohé B hvězdy rychle rotují a nejkratší rotační periody jsou 0^d3-0^d5 .

17.2.1 Chemicky pekuliární Bp hvězdy

Mezi B hvězdami a hvězdami spektrálního typu A (viz níže) se pozorují hvězdy se zřetelně anomálním zastoupením některých chemických prvků. Preston (1974) zavedl zkratku CP k označení chemicky pekuliárních hvězd horní části hlavní posloupnosti a rozlišil čtyři základní typy:

1. CP1 = Am hvězdy (dle novějšího označení),
2. CP2 = magnetické Bp a Ap hvězdy,
3. CP3 = HgMn hvězdy,
4. CP4 = B hvězdy se slabými čarami helia (He-weak stars).

Silná, zhruba dipólová magnetická pole se pozorují pro hvězdy spektrálních typů B1–B2 s anomálně *silnými* čarami helia (He-strong stars) a pro některé B3p–B7p hvězdy se slabými čarami helia a anomálně silnými čarami Si a Ti. Pro tyto objekty se pozorují periodické změny jasnosti, intensity spektrálních čar a intensity magnetického pole s periodou rovnou rotační periodě hvězdy. Osa magnetického dipólu není obecně totožná s osou rotace hvězdy a lze ji z pozorování určit. Některé Bp hvězdy se silnými čarami helia jsou současně hvězdami se závojem, neboť se u nich pozoruje $H\alpha$ emise, která se rovněž mění periodicky s rotační periodou hvězdy. Jedna z těchto hvězd, V1046 Ori, je primární složkou dvojhvězdy s periodou $18^d.6$ a s výrazně výstřednou dráhou. Existence silných makroskopických magnetických polí u některých B a A hvězd zůstává nevysvětlenou záhadou. Existují hvězdy, které jsou ve všech základních fyzikálních parametrech, jež v současnosti dovedeme určit, těmto magnetickým hvězdám velmi podobné, ale žádné měřitelné magnetické pole nemají.

CP3 hvězdy s anomálně silnými čarami Hg a Mn se vyskytují u spektrálních podtříd B6–B9, zatímco nemagnetické B4–B5 s anomálně slabými čarami helia mají ve spektrech nadbytek P a Ga. Rovněž pro obě tyto skupiny lze pozorovat změny jasnosti s rotační periodou.

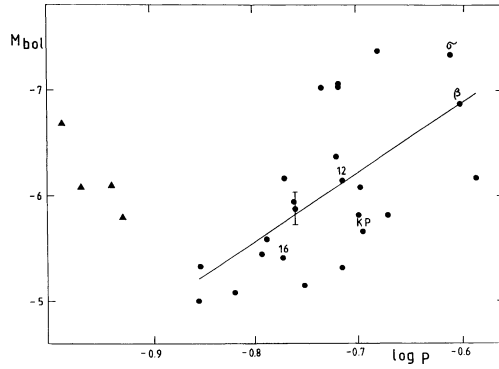
17.2.2 Pulsující β Cep hvězdy

β Cep hvězdy se vyznačují periodickými – a často multiperiodickými – změnami jasnosti a radiální rychlosti s periodami pod $0^d.3$ (typické periody jsou mezi $0^d.1$ a $0^d.25$). Jsou to hvězdy spektrálních podtříd B0–B2 a luminositních tříd III–IV, tedy hvězdy, které se již vyvinuly podél hlavní posloupnosti. Jejich pulsace se poměrně nedávno podařilo objasnit pomocí *opacitního mechanismu*, který souvisí s prvky skupiny železa a je účinný při teplotách kolem $2 \cdot 10^5$ K. Novější studie ukazují, že pro β Cep hvězdy neexistuje dobře definovaný vztah mezi periodou, barvou a zářivým výkonem, což patrně souvisí s tím, že pulsace mnohých β Cep hvězd nejsou radiální, ale neradiální (obr. 17.1). Dziembowski a Pamyatnykh (1993) ukázali, že pulsační nestabilita typu β Cep nastává skutečně v té oblasti HR diagramu, kde se β Cep hvězdy nacházejí (obr. 17.2).

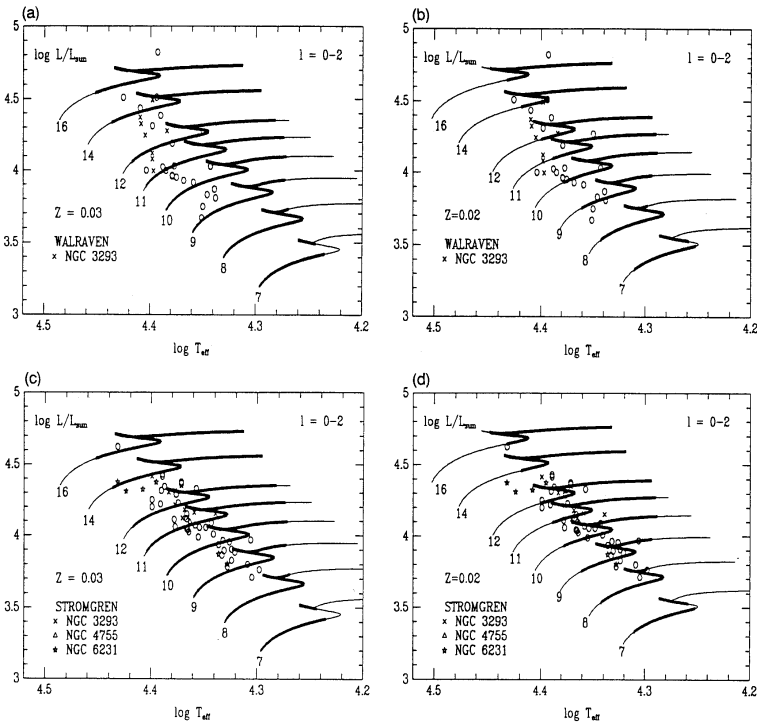
Je třeba se zmínit, že samotný prototyp skupiny, hvězda β Cep je rovněž hvězdou se závojem, má magnetické pole, které se mění s rotační periodou hvězdy a je složkou dlouhoperiodické dvojhvězdy ve výstředné dráze, což m.j. vede ke zdánlivým změnám její pulsační periody.

17.2.3 Pomalu pulsující B hvězdy (SPB)

Asi od počátku osmdesátých let dvacátého století byly objevovány pomalu pulsující B hvězdy (Slowly pulsating B stars, SPB), vykazující malé periodické (a často také multiperiodické) světelné změny. Jejich střední spektrální podtyp je kolem B5 a



Obrázek 17.1: Diagram absolutní hvězdná velikost – perioda pro hvězdy typu β Cep, který ukazuje, že vztah perioda – zářivý výkon pro tento typ pulsujících hvězd neexistuje. Převzato z práce Sterken a Jerzykiewicz (1993).



Obrázek 17.2: Teoreticky spočtené vývojové stopy hvězd na HR diagramu, s tučně vyznačenými obdobími, kdy se u nich vyskytují pulsační nestability (módy $l = 0, 1, 2$). Symboly jsou vyneseny pro pozorované pulsující hvězdy z vybraných hvězdokup. Převzato z práce Dziembowski a Pamyatnykh (1993).

periody mají delší než β Cep hvězdy: asi od 1 do 3 dnů. Dziembowski a spol. (1993) teoreticky dokázali, že opacitní mechanismus, který způsobuje pulsační nestabilitu β Cep hvězd, vede rovněž k nestabilitě hvězd středních B podtypů s periodami od $0,4^d$ do $3,5^d$, a to se zdá existenci pomalu pulsujících teoreticky vysvětlovat. Spolehlivé zařazení konkrétního objektu do této skupiny vyžaduje systematická a pečlivá pozorování. Podobně dlouhé periody jsou totiž běžnými rotačními periodami B hvězd. Harmanec (1981) navíc ukázal, že největší počet známých dvojhvězd s B složkami má oběžné periody mezi 1 a 3 dny. Hmotnosti pomalu pulsujících hvězd jsou asi mezi 3 a $9 M_{\odot}$.

Zajímavé závěry přinesla práce Briquet(ové) a kol. (2007). Tito autoři provedli srovnávací studii 24 jasných pomalu pulsujících hvězd a 24 jasných magnetických Bp hvězd. Studovali hvězdy, pro které existují přesné paralaxy z družice Hipparcos, takže bylo možné značně spolehlivě určovat i vývojový věk obou skupin. Ukázalo se, že pomalu pulsující hvězdy jsou starší než Bp hvězdy a mají také měřitelná magnetická pole, ale mnohem slabší než Bp hvězdy. Asi třetina pomalu pulsujících hvězd jsou dvojhvězdy, zatímco mezi Bp hvězdami byla podvojnost dosud nalezena jen v několika málo případech. Mezi studovanými 24 Bp hvězdami je známa pouze jedna dvojhvězda. Většina Bp hvězd i pomalu pulsujících hvězd rotuje pomalu, ale pro obě skupiny jsou nejtýpější rotační periody mezi 1 a 2 dny. Systematická analýza měření jasnosti za delší období ukazuje, že Bp hvězdy mají jedinou (rotační) periodu změn a světelná křivka je zpravidla modulována jak rotační periodou, tak i periodou poloviční. Naproti tomu pomalu pulsující hvězdy jsou modulovány několika periodami a fázová změna s každou z nich je sinusová.

17.2.4 Hvězdy se závojem (Be stars)

Hvězdy se závojem (anglicky: Be stars) jsou hvězdy spektrálních typů O, B či A, v jejichž spektru byly alespoň někdy za dobu jejich spektroskopických pozorování zjištěny emise v čarách vodíku Balmerovy serie. První dvě byly objeveny již při prvních pozorováních vizuálním spektroskopem roku 1867. Jejich charakteristickou vlastností je velká časová proměnnost na nejrůznějších časových škálách. V současné době lze pokládat za dobře prokázané, že emisní čáry v jejich spektrech vznikají v rozsáhlých obálkách – závojích – které je obklopují a které zřejmě nepravidelně mizí a po čase se obnovují. Jde o plynné obaly, jejichž rozměry alespoň o řád převyšují rozměry samotných hvězd. Příčina vzniku závojí a některé typy zjištěné proměnnosti hvězd se závojem zůstávají i po půldruhém století jejich studia záhadou.

Co je o hvězdách se závojem v současnosti známo? Samotné hvězdy se v naprosté většině případů vyznačují velkými rotačními rychlostmi a statisticky vzato se lze domnívat, že rychle rotují všechny, t.j. že ty, pro než pozorujeme nízkou hodnotu promítnuté rotační rychlosti $v \sin i$, vidíme zhruba od pólu jejich rotace.

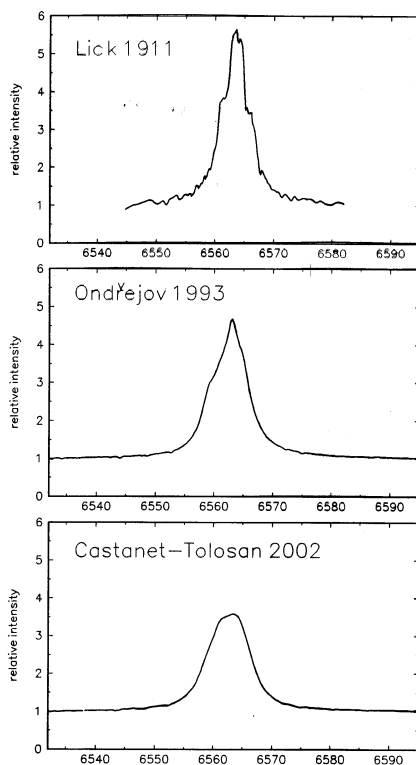
Jsou známy následující typy jejich časové proměnnosti:

1. *Dlouhodobé spektrální změny a změny jasnosti.* Dlouhodobé spektrální změny hvězd se závojem jsou velmi nápadným jevem, který od počátku přitahoval pozornost mnoha pozorovatelů. Na časové škále let až desetiletí (horní hranice není známa vzhledem k tomu, že máme pozorování jen za 130 let) se ve spektrech objevují a mizí emisní čáry. V obdobích bez emisních čar se hvězdy podobají normálním O, B či A hvězdám. Naopak v době silných emisí se ve spektrech mohou objevit ještě dodatečné absorbní čáry, které jsou užší než čáry fotosferické. Tyto čáry vznikají zřejmě dodatečnou absorpcí záření v těch částech závoje, které se promítají na disk samotné hvězdy. V anglické literatuře se jim proto říká „shell lines“, t.j. čáry obálky.

Pokud pozorujeme hvězdu spíše od jejího rovníku, jsou emisní čáry zpravidla dvojitě, neboť obálky, ve kterých vznikají, rotují, a my pozorujeme zachycené a znovu vyzářené záření jak z části obálky, která se k nám přibližuje, tak z té, která se od nás vzdaluje. Intenzity do fialova a do červena posunutých dvojitých vrcholků emisních čar se obvykle označují V a R a v obdobích, kdy je emise přítomna, lze někdy pozorovat cyklické změny poměru jejich intenzit, zvané V/R změny. Odehrávají se v cyklech nestejně délkou, dlouhých několik let. Pokud měříme i radiální rychlost celé emisní čáry na jejich křídlech, zjistíme, že se mění souběžně s cyklickou V/R změnou, a to s amplitudou několika desítek km s^{-1} .

Současně se spektrálními změnami dochází i ke změnám jasnosti a barvy objektu, přičemž lze rozlišit dva možné případy: (a) Postupné objevování se emisních čar ve spektru a vznik nového závoje jsou doprovázeny zjasněním objektu a pohybem od hlavní posloupnosti k veleobrům v barevném diagramu $U - B$ vs. $B - V$. V tom případě hovoříme o *pozitivní korelaci*. (b) Vznik závoje je doprovázen poklesem jasnosti objektu a jeho pohybem podél hlavní posloupnosti ke chladnější spektrální podtřídě v $U - B$ vs. $B - V$ diagramu. To je *inverzní korelace*. Pokud jsou pro danou hvězdu k dispozici údaje z více období vzniku a zániku závoje, je známo, že nastává vždy stejný typ korelace. To podporuje domněnku o tom, že výskyt dvou typů korelací je geometrickým efektem: inverzní korelace nastává tehdy, pozorujeme-li danou hvězdu zhruba od rovníku. Vznikající chladnější obálka v tom případě hvězdu zčásti stíní a činí ji zdánlivě chladnější. Pokud hvězdu vidíme více od pólu, simulují vnitřní opticky tlusté části vznikající obálky zdánlivé narůstání poloměru hvězdy.

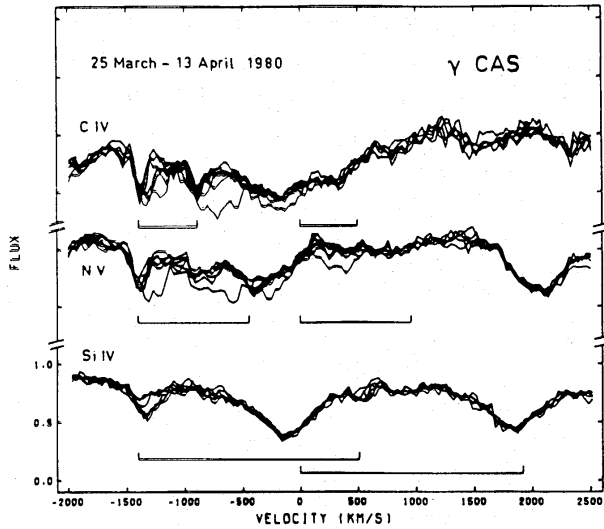
2. *Střednědobé spektrální změny a změny jasnosti.* Střednědobé změny se obvykle odehrávají na škále týdnů a měsíců. V některých případech jde o změny, které jsou jakousi miniaturní obdobou změn dlouhodobých, které mohou mít i stejnou příčinu — dočasný vznik slabé obálky. Často se však pozorují *periodické* změny radiální rychlosti, poměru V/R , intenzity spektrálních čar i jasnosti. Ty obvykle souvisejí s dvojhvězdností dané hvězdy se závojem.
3. *Rychlé spektrální změny a změny jasnosti.* Rychlé změny se odehrávají na



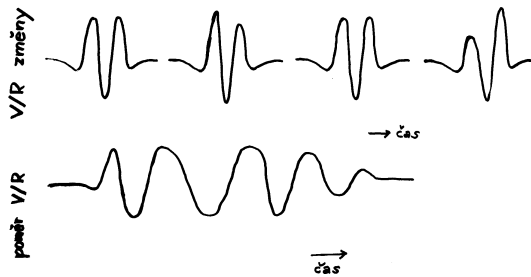
Obrázek 17.3: Dlouhodobé změny profilu čáry H α u hvězdy se závojem γ Cas mezi lety 1911, 1993 a 2002. Převzato z práce Harmanec (2002c).

škále od několika málo desetin dne do asi 2–3 dnů, mají zpravidla velmi malé amplitudy a jsou intenzivně studovány teprve od konce sedmdesátých let 20. století. Jedná se jednak o změny profilů spektrálních čar ve formě měnící se asymetrie a také ve formě putujících vlnek, pohybujících se od fialového k červenému křídlu čáry. Změny jasnosti mají amplitudy zpravidla menší než 0^m_1 . Zdá se, že světelné změny jsou periodické, s periodami blízkými k rotačním periodám příslušných hvězd. Světelné křivky jsou nesinusové a jejich amplituda a tvar se dlouhodobě mění. Změny profilů jsou rovněž periodické nebo možná i multiperiodické. Významnou charakteristikou rychlých změn je to, že jsou pozorovatelné i v době, kdy je daná hvězda zcela bez emisních čar. O původu rychlých změn nepanuje dosud shoda. Část badatelů je vysvětluje jako projev neradiálních pulsací, jiní se domnívají, že jde o projev korotujících struktur v plynu nad fotosférou hvězdy.

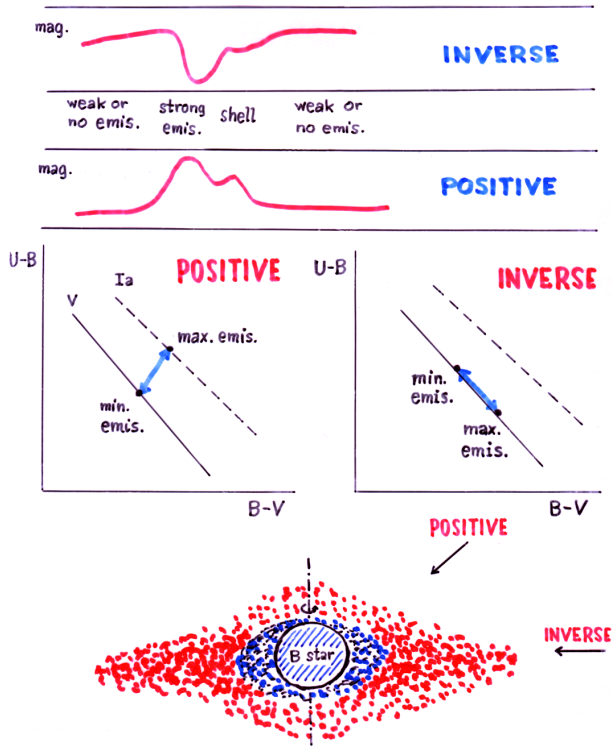
Pokud jde o samotný vznik obálek, existuje celá řada hypotéz, které se je pokoušejí vysvětlit. Všechny se ale dosud setkávají s problémy a žádná z nich nebyla



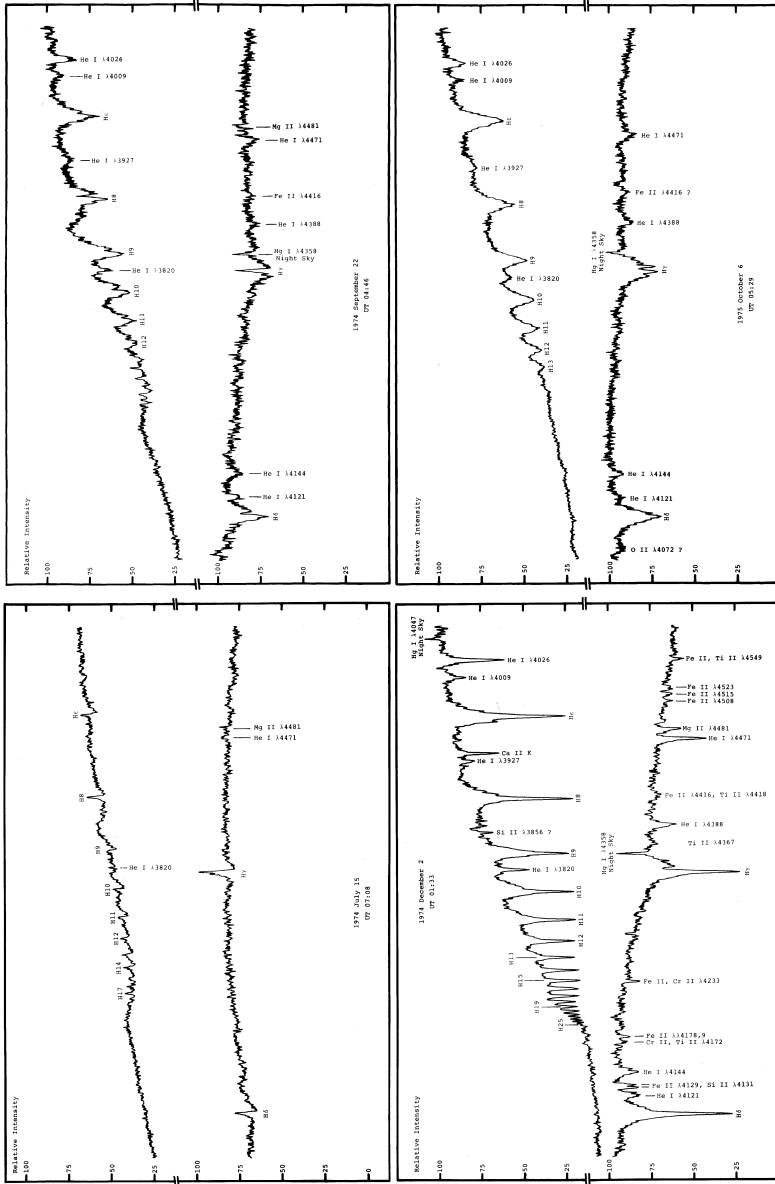
Obrázek 17.4: Rychlé změny úzkých absorpčních komponent v silných rezonančních spektrálních čarách v UV oboru pro hvězdu se závojem γ Cas v období 25. 3. až 13. 4. 1980. Převzato z práce Henrichs a spol. (1983).



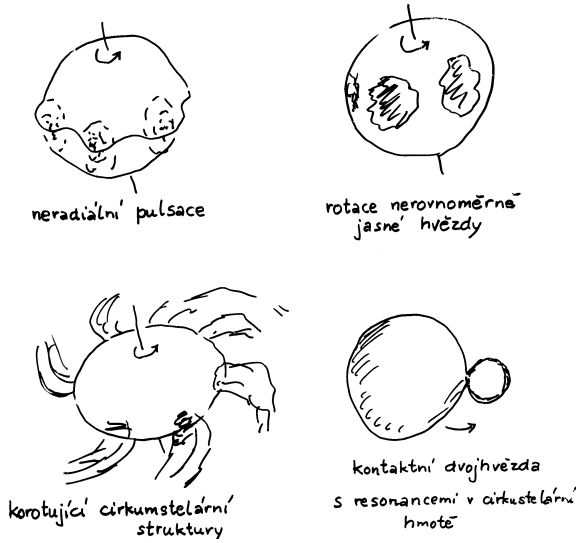
Obrázek 17.5: Schematicky znázorněné V/R změny, tj. poměru fialové a červené složky dvojité emisní čáry.



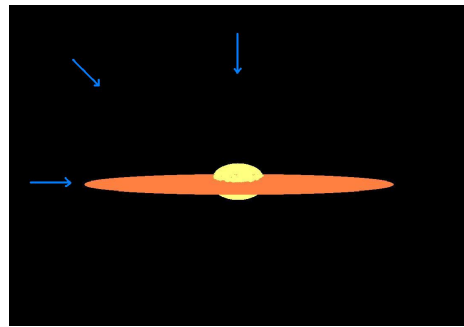
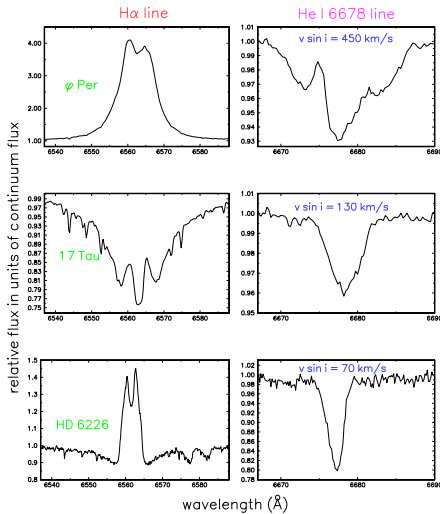
Obrázek 17.6: Schema pozitivní a negativní korelace ve vývoji obálky hvězdy se závojem, kdy je vznik obálky doprovázen zjasněním nebo zeslabením objektu.



Obrázek 17.7: Příklad výrazných dlouhodobých spektrálních změn u hvězd se závojem: spektra hvězdy V832 Cyg = HD 200120 pořízená 15. 7. 1974, 22. 9. 1974, 2. 12. 1974 a o rok později 6. 10. 1975. Je vidět, že vznik nové obálky se projevil nejprve přítomností emisních čar v Balmerově serii vodíku a postupně — jak obálka mohutněla a zvětšovala se — objevily se absorpční čary z obálky, které jsou velmi výrazné na třetím spektru. O rok později se již hvězda jevila jako zcela normální hvězda spektrálního typu B. Převzato z práce Barkera (1982).



Obrázek 17.8: Schematické znázornění čtyř možných interpretací rychlých změn spektrálních profilů a jasnosti hvězd se závojem: neradiální pulsace, skvrny na povrchu hvězdy unášené rotací, korotující struktury v cirkumstelárním prostředí a dvojhvězdný model.



Obrázek 17.9: Pozorovaná korelace mezi pološířkou emisních profilů obálky a pološířkou profilů absorpčních čar (hodnotou $v \sin i$) pro hvězdy se závojem. Emise je měřena v čáře $H\alpha$, absorpce v $He I$ (667,8 nm). Vpravo je zobrazeno pravděpodobné vysvětlení — zploštělá obálka, na kterou se díváme z různých směrů.

dosud universálně přijata. Uvedme si alespoň čtyři pracovní modely, které se v současnosti nejčastěji uvažují:

1. *Model rotační nestability.* Struve (1931) poukázal na existenci korelace mezi šířkou emisních čar a pozorovanou hodnotou $v \sin i$ (obr. 17.9) a vyslovil domněnku, že obálky vznikají rotační nestabilitou na rovníku hvězd se závojem. Jeho hypotéza ale nevysvětluje dlouhodobou časovou proměnnost závoju. Kromě toho se zdá, že hvězdy se závojem dosahují jen asi 70 % kritické rotační rychlosti — viz Porter (1996). Nedávné studie konkrétních hvězd i teoretické studie Owockého však naznačují, že rotace může být velmi blízká kritické rotaci.
2. *Dvojhvězdný model.* Kříž a Harmanec (1975) přišli s domněnkou, že závoje jsou ve skutečnosti akrečními disky a vznikají přítokem plynu z druhé složky ve dvojhvězdách. Jejich hypotéza vysvětluje přirozeným způsobem vysoké rotační rychlosti hvězd se závojem jako důsledek přenosu úhlového momentu dopadající hmoty, dále střednědobé změny a může vysvětlit i změny dlouhodobé. Podvojnost mnoha hvězd se závojem se ale nepodařilo prokázat a u některých dobře studovaných objektů lze dokonce přítomnost sekundáru, který by zaplňoval Rocheovu mez, zcela vyloučit. Harmanec a kol. (2002) předložili proto novou hypotézu: ukázali, že je-li rychle rotující hvězda složkou dvojhvězdy, může u ní docházet ke ztrátě hmoty a vzniku disku formou výtoku pouze z té oblasti rovníku, která je přivrácena ke druhé složce soustavy. Přítomnost druhého tělesa podmínky pro vznik takové rotační nestability poněkud zlepšuje.
3. *Hypotéza rotací stlačovaného hvězdného větru.* Bjorkman a Cassinelli (1993) přišli s domněnkou, že závoje vznikají z hvězdného větru, který je u rychle rotujících hvězd podle jejich výpočtů stlačován do roviny rovníku. Podrobnější výpočty ale ukazují, že jejich mechanismus nedává dostatečně husté závoje, které by mohly vést ke vzniku pozorovaných emisních čar.
4. *Pulsační hypotéza.* Zastánci pulsačního modelu rychlých změn vyslovili domněnku, že k vyvrhování plynu by v rovníkových oblastech hvězd se závojem mohlo docházet ve chvílích, kdy se sejde ve fázi několik módů neradiálních pulsací, takže dodají kinetickou energii potřebnou k dosažení kritické rychlosti — viz např. Rivinius a spol. (1998). Jejich argument je založen na analýze dat hvězdy μ Cen pozorovatelné pouze z jižní oblohy. O to, zda jsou rychlé změny této hvězdy skutečně multiperiodické, se ale dosud vedou určité spory a jejich hypotézu je poněkud brzo hodnotit.

Vývojové stadium hvězd se závojem není vyjasněno. Zdá se dokonce, že celý jev není vázán na konkrétní vývojové stadium. Hvězdy se závojem se vyskytují jak mezi mladými hvězdami v blízkosti hlavní posloupnosti nulového věku, tak mezi vyvinutými obry a veleobry. To by do určité míry nasvědčovalo tomu, že

mechanismus vzniku závoju je externí — jak to předpokládá např. dvojhvězdná hypotéza.

Podle nedávných pozorování hvězd se závojem v různých hvězdokupách se však zdá, že existuje korelace mezi procentuálním zastoupením hvězd se závojem v kupě a obsahem těžkých prvků. Více hvězd se závojem se pozoruje v kupách s nízkým obsahem těžkých prvků. Maeder a Meynet (2001) zjistili, že pro rotující modely s nízkým obsahem kovů se podmínky pro dosažení kritické rotace během vývoje zlepšují — na rozdíl od modelů spočítaných pro $Z = 0,02$. To by mohlo výše zmíněnou korelaci vysvětlovat a naznačovat, že závoje vznikají vyvrháním materiálu hvězdy samotné.

17.2.5 Svítivé modré proměnné (LBV)

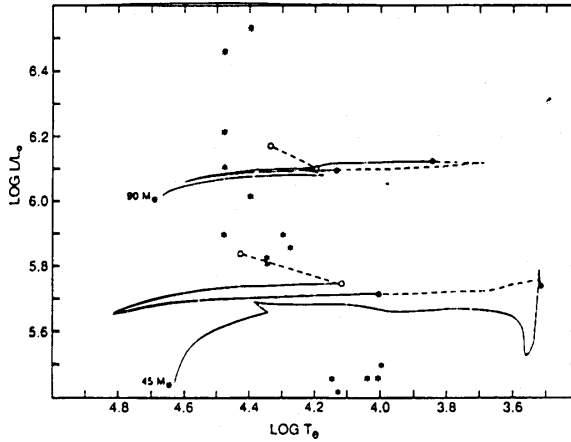
Za svítivé modré proměnné (Luminous Blue Variables, LBV) bývají označovány hmotné hvězdy s vysokou jasností, pro něž se pozorují změny jasnosti a barvy na několika časových škálách, od rychlé mikroproměnnosti až po vzácné výbuchy, vyznačující se zjasněním o několik hvězdných velikostí a velmi pravděpodobně značnou ztrátou hmoty. Soudí se, že představují vzácné, velmi krátce trvající stadium vývoje hmotných hvězd (trvající snad jen 40 000 let) předcházející stadiu WR hvězd. Pod tento název se nyní zahrnují proměnné typu P Cyg, S Dor a Hubbleovy–Sandageovy proměnné.

Ve spektrech těchto hvězd se pozorují výrazné emisní čáry vodíku, neutrálního helia a jednou ionizovaného železa, které v mnoha případech vykazují *P Cyg profily* (tzn. absorpce ve fialové části profilu, vedoucí k poměru dvojitě emise $V/R < 1$). Je zřejmé, že zde existuje určitá fenomenologická příbuznost s hvězdami se závojem.

Spektra, jasnost a tedy i povrchová či efektivní teplota těchto hvězd jsou značně proměnné. V klidných obdobích s minimem jasnosti se tyto objekty zpravidla jeví jako veleobří spektrálního typu B s efektivními teplotami nad 15 000 K a s emisními čarami vodíku a helia. V obdobích silných zjasnění se spektra mění na veleobry typu A až F a zesilují Fe II a zakázané [Fe II] emise. Soudí se ale, že bolometrický zářivý výkon zůstává i během velkých zjasnění nezměněný. Zdánlivý pokles teploty je důsledkem absorpce ve vyvržené plynové obálce a záření z krátkovlnné a optické oblasti je přerozděleno do záření delších vlnových délek. Bolometrické magnitudy těchto hvězd se pohybují kolem -10^m0 .

Pro hvězdy studované soustavněji se pozorují změny jasnosti na nejméně třech časových škálách:

1. Rychlé změny na škále dnů, s amplitudami 0^m1 až 0^m2 .
2. Cyklické změny o 1^m0 až 2^m0 , s délkami cyklů na škále let až několika desítek let, přičemž střední délka cyklu je pro daný objekt charakteristická.
3. Vzácně se objevující zjasnění o více než 3^m0 , která se u daného objektu vyskytnou zpravidla jednou za několik století. Tato zjasnění zjevně souvisí s vyvrže-



Obrázek 17.10: HR diagram pro hmotné hvězdy (45 a $90 M_{\odot}$) s vyznačenými polohami svítivých modrých proměnných v klidné fázi. Převzato z práce Stothers a China (1995).

ním plynové obálky, která byla v některých případech následně i pozorována jako plošný útvar.

Stothers a Chin (1995) předložili důkazy ve prospěch hypotézy, že cyklická zjasnění jsou projevem opakující se dynamické nestability těchto hvězd v pozdních vývojových stádiích a spočetli i příslušné vývojové modely na podporu této hypotézy. Ukázali, že pro střední cykly pozorovaných zjasnění existuje slušně definovaný vztah perioda – svítivost ve tvaru

$$M_{\text{bol}} = (-12,9 \pm 0,5) + (2,4 \pm 0,5) \log P. \quad (17.1)$$

17.3 Hvězdy spektrálních typů A a F

Hvězdy spektrálního typu A se vyznačují optickými spektry, v nichž dominují silné čáry vodíku, chybí již čáry helia a jsou přítomny čáry mnoha ionizovaných kovů (Fe II, Ti II, Cr II atd.). Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od $1,5$ do $2,2 M_{\odot}$, poloměrů od $1,6$ do $2,1 R_{\odot}$ a efektivních teplot od 6950 do 9400 K.

Hvězdy spektrálního typu F se vyznačují optickými spektry, u nichž jsou čáry vodíku podstatně slabší, než u A hvězd, i když stále ve spektrech dominují. V jejich spektrech se pozoruje oproti A hvězdám také daleko více čar kovů. Pro objekty na

hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 1,15 do 1,5 M_{\odot} , poloměrů od 1,25 do 1,6 R_{\odot} a efektivních teplot od 5900 do 6950 K. Rozsah těchto parametrů pro hvězdy tříd A a F je tedy ve srovnání s teplejšími hvězdami B a O podstatně menší.

Mezi hvězdami typu A nalézáme kromě normálních hvězd hlavní posloupnosti hvězdy výrazně chemicky pekulární a také významné třídy pulsačně nestabilních hvězd, které mají přesah i do spektrálního typu F. Velmi dobrý přehled fenomenologicky zavedených tříd a jejich vzájemné souvislosti publikoval Kurtz (2000).

17.3.1 Chemicky pekulární Am hvězdy

Am hvězdy či metalické A hvězdy (podle dřívějšího označení CP1) představují jednu z významných skupin *chemicky pekulárních hvězd*. Jejich výskyt je omezen právě na spektrální typ A a jejich charakteristikou je, že zatímco čáry ionizovaného vápníku Ca II odpovídají rané spektrální podtřídě A, ostatní čáry kovů odpovídají pozdní A podtřídě nebo dokonce spektrálnímu typu F a čáry vodíku odpovídají nějaké střední podtřídě mezi oběma extrémly. Barevné indexy Am hvězd v $(U - B)$ vs. $(B - V)$ diagramu odpovídají zhruba stejné podtřídě jako čáry vodíku a rovněž efektivní teplota Am hvězd odpovídá nejlépe jejich spektrálnímu typu podle H I čar. Am hvězdy tvoří skupinu pekulárních hvězd, pro něž se nepozoruje přítomnost globálního magnetického pole. Při studiu vysokodispersních spekter bylo zjištěno, že „horkou Am“ hvězdou je také Sirius A se spektrálním typem A0.

Někteří autoři zavedli rovněž popisný typ δ Del hvězdy k označení vývojově starších Am hvězd s luminositními třídami IV a III. Jiní badatelé upozornili na to, že tato třída je značně nehomogenní. Vyskytuje se rovněž označení ρ Pup hvězdy pro podobří a obří A5m až F5m hvězdy. U některých z těchto hvězd byly nalezeny změny jasnosti svědčící o pulsacích.

Conti (1970) shrnul vlastnosti Am hvězd a navrhl použít fyzikálnější definici. Podle něj se jedná o hvězdy chemicky pekulární a to takové, které mají ve svých atmosférách buď nedostatek Ca (či také Sc) nebo přebytek prvků skupiny železa a těžších. Jedná se zásadně o objekty na hlavní posloupnosti a bylo rovněž zjištěno, že u nich nedochází k žádným fyzikálním změnám jasnosti. Zejména díky Abtovým systematickým studiím bylo rovněž zjištěno, že většina, a možná i všechny Am hvězdy jsou dvojhvězdami. Naopak všechny dvojhvězdy se složkami spektrálního typu A a s periodami pod 2^d_5 jsou Am hvězdami. Debernardi a spol. (2000) systematicky hledali spektroskopické dvojhvězdy mezi Am hvězdami ve hvězdokupách Hyády a Praesepe a publikovali pro celou řadu z nich dráhové elementy. Dvojhvězdy s oběžnými periodami pod 8^d_5 mají všechny kruhové dráhy. Je také zajímavé, že v HR diagramu leží všechny Am hvězdy z těchto hvězdokup v dobře definovaném pásu nad hlavní posloupností samotné hvězdokupy. Am hvězdy vesměs pomalu rotují, což může být v řadě případů způsobeno právě jejich podvojností.

Zatím nejslibnějším vysvětlením jejich vzniku se zdá *teorie zářivé difuze* publikovaná Michaudem (1970). Michaud ukázal, že v atmosférách hvězd s velmi sta-

bilními atmosférami může během vývojově krátké doby (asi 10^4 až 10^6 let) dojít k diferenciální separaci chemických elementů. Ty ionty, jejichž zrychlení tlakem záření je větší než jejich váha v dané atmosféře, se udržují na povrchu hvězdy, zatímco jiné, např. helium, klesnou do nitra hvězdy. Obecně řečeno jsou gradientem tlaku záření nadlehčovány těžší prvky s velkým počtem spektrálních čar a naopak lehké a relativně hodně v atmosféře zastoupené prvky s malým počtem čar v atmosféře postupně klesají. Tomu, aby se zářivá difuze mohla uplatnit, může u Am hvězd napomoci jejich pomalá rotace a fakt, že u nich neexistují hluboké podpovrchové konvektivní zóny, tedy procesy, které v jiných případech vedou k systematickému promíchávání chemických elementů.

K vysvětlení pulsací ρ Pup hvězd se předpokládá, že během vývoje od hlavní posloupnosti nulového věku se i přes vliv zářivé difuze dostala postupně zóna ionizace He II do oblastí, kde znovu mohla vyvolat dostatečně účinné pulsační nestabilitu.

17.3.2 Magnetické Ap hvězdy

Toto označení se používá pro hvězdy spektrálního typu A na hlavní posloupnosti, které mají neobvykle silné čáry některých kovů a zpravidla též měřitelné globální (často zhruba dipólové) magnetické pole o síle stovek až desetitisíc Gauss. Jsou známy Ap SrCrEu hvězdy, které se vyskytují v rozsahu spektrálních typů od A3 do F0, a Ap Si hvězdy, pozorované mezi B8 a A2. Pro tyto hvězdy se obvykle pozorují periodické, ale obecně nesinusové změny jasnosti, intenzity magnetického pole a intenzity čar kovů s periodou rovnou rotační periodě dané hvězdy. Metodami dopplerovské tomografie pro ně bylo zjištěno nerovnoměrné rozložení chemických elementů po povrchu hvězdy, a to ve vazbě na magnetické pole. Je zajímavé, že orientace magnetického dipólu je obecně jiná, než orientace rotační osy hvězdy. Modelováním změn s rotační periodou je možno zjišťovat základní fyzikální vlastnosti Ap hvězd. Jejich anomální chemické složení bývá nejčastěji opět vysvětlováno vlivem zářivé difuze při stabilizujícím účinku globálního magnetického pole. Hypotéza zářivé difuze vysvětluje i to, že Ap hvězdy nejsou zpravidla pulsačně nestabilní, helium totiž klesne hluboko do nitra hvězdy a opacitní mechanismus vzniku pulsací v zónách ionizace helia tak ztrácí svou účinnost.

Kurtz (1982) však přišel s objevem tak zvaných *roAp hvězd*, chladných Ap Sr-CrEu hvězd, které pulsují s velmi krátkými periodami mezi asi 6 až 15 minutami a s malými amplitudami světelných změn pod 0^m016 . U některých z nich jsou tyto pulsace multiperiodické. Jde o neradiální pulsace vysokých harmonických módů podél osy magnetického pole. V důsledku toho jsou pozorované amplitudy pulsací modulovány s rotační periodou hvězdy. Tyto pulsace jsou pravděpodobně vybuzeny v zóně ionizace vodíku.

Nověji zavedenou skupinou chemicky pekuliárních hvězd jsou λ Boo hvězdy, které mají spektrální typ podle čar vodíku mezi A0 a F0, čára vápníku Ca II K odpovídá typu A0 nebo o něco pozdějšímu, a čáry kovů, zejména Mg II 448,1 nm, jsou velmi slabé. Nízké zastoupení mají prvky skupiny železa, zatímco lehké ele-

menty mají prakticky normální poměrné zastoupení. Detailní NLTE studie ukazují, že uhlík je zastoupen méně než kyslík a že existuje antikorelace mezi zastoupením uhlíku a kyslíku na jedné, a křemíku na druhé straně. To se zdá být ve shodě s teorií difuze obohacené o myšlenku akrece mezihvězdné látky. Na druhé straně bylo ale zjištěno, že mnoho λ Boo hvězd patří mezi pulsující δ Sct hvězdy — viz níže.

17.3.3 Pulsující δ Scuti hvězdy

Jednotné označení pro skupinu pulsujících hvězd spektrálních typů A a F, které se nacházejí v pásu *nestability* v HR diagramu a mají pulsační periody kratší než 0^d_3 , zavedl Breger (1979), který ukázal, že rozlišování na různé dříve zavedené a popisně definované kategorie nemá fyzikální opodstatnění.¹ Vzhledem ke krátkosti period těchto hvězd a malé jasnosti většiny z nich nebylo snadné pro ně v éře fotografické spektroskopie pořídit spektra s dostatečným fázovým rozlišením a proto byla většina z nich objevena díky fotometricky nalezeným změnám jasnosti. Amplitudy změn jasnosti se pohybují v širokém rozmezí od prahu detekce (asi 0^m_{01}) až po 0^m_8 a někdy jsou v čase proměnné. Světelné křivky jsou buď zhruba sinusové nebo s více maximy. Pro mnohé δ Sct hvězdy byla nalezena multiperiodicitata — pozorované změny jsou výslednicí více periodických změn s různými periodami. V případech, kdy se podařilo pozorovat i změny radiální rychlosti, existuje mezi maximem světelné křivky a minimem křivky radiální rychlosti fázový posun asi 0^p_1 . typický poměr amplitud obou křivek činí $92 \text{ km s}^{-1} \text{ mag}^{-1}$. δ Sct hvězdy na hlavní posloupnosti mají periody kolem 1 hodiny a amplitudy jejich světelných křivek jsou malé, 0^m_{02} nebo menší. δ Sct hvězdy s větší svítivostí, podobří a obří, mají delší periody a často i větší amplitudy světelných změn.

Je ovšem třeba říci, že pouze asi jedna třetina hvězd, které se nacházejí v dolní části pásu pulsační nestability v HR diagramu jsou δ Sct hvězdy. Detekce pulsační závisí i na rotační rychlosti a chemickém složení hvězd, přesto se zdá, že musí existovat ještě další faktory, které ovlivňují, zda daná hvězda bude pozorovatelným způsobem pulsačně nestabilní nebo ne, abychom pozorovaný poměr mezi pulsujícími a nepulsujícími hvězdy v pásu nestability mohli beze zbytku vysvětlit. Meze pásu nestability v efektivní teplotě jsou 7500 až 8800 K na hlavní posloupnosti nulového věku a 6950 K pro $M_V = 1^m_7$ až 8400 K pro $M_V = 0^m_{65}$.

Breger (1979) a Breger, Stockenhuber (1983) a nejnověji Rodríguez a Breger (2001) shromáždili údaje o jasnostech, pulsačních periodách a dalších fyzikálních vlastnostech δ Sct hvězd a příbuzných objektů. Nalezli m.j. dobře definovaný vztah

¹V literatuře existovala v této oblasti dosti značná pestrost pojmosloví. Někteří autoři nazývali krátkoperiodické proměnné *trpasličími cefeidami*, jiní tento název užívali pouze pro proměnné s amplitudou změn větší než 0^m_3 . Jiní označovali proměnné s velkými amplitudami jako RRs hvězdy či hvězdy typu AI Vel. Objevilo se i označení ultrakrátkoperiodické proměnné, to ale vede k nedorozumění, neboť tak jsou označovány proměnné se sekundovými periodami změn. Původní označení trpasličí cefeidy se také nezdá vhodné, neboť jde v řadě případů o podobří či obří hvězdy.

zářivý výkon – barva – perioda ve tvaru

$$M_V = -3,052 \log P + 8,456(b - y) - 3,121. \quad (17.2)$$

S použitím podobného pozorovacího materiálu odvodili López de Coca a spol. (1990) empirický vztah pro periodu základního módu ve tvaru

$$\log P = -0,300 M_{\text{bol}} - 3,195 \log T_{\text{eff}} + 11,90. \quad (17.3)$$

Odhadneme-li pulsační periodu A5 hvězdy na hlavní posloupnosti podle základního vztahu (14.24), dostaneme hodnotu 1,98 hodiny, podle zpřesněného vztahu (14.31) vyjde 1,10 hodiny, opět ve velmi dobré shodě s pozorováním.

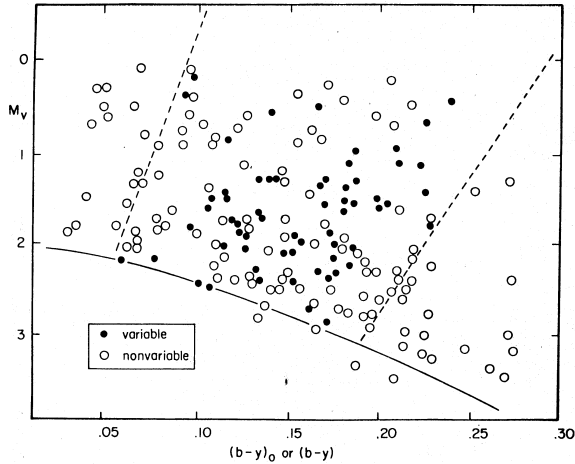
Breger (1983) došel rovněž k závěru, že ve statistickém smyslu existuje dobrá shoda mezi pozorováními δ Sct hvězd ve hvězdokupách o známém vývojovém stáří a jejich průměrnými periodami. Jak totiž plyne z rovnic (14.24) či (14.31), je pulsační perioda přímo úměrná poloměru pulsující hvězdy. Protože během vývoje na hlavní posloupnosti poloměr hvězdy pozvolna roste, lze očekávat, že průměrné pulsační periody δ Sct hvězd v jednotlivých kupách budou tím delší, čím je hvězdokupa starší. To se statisticky skutečně pozoruje.

Breger a Pamyatnykh (1998) se pokusili zjistit, zda lze nalézt shodu mezi předpovědí teorie hvězdného vývoje a pozorováním *sekulárních změn period* jednotlivých δ Sct hvězd. Zjistili, že pozorované změny period vykazují statisticky podobný počet pozvolného narůstání a pozvolného poklesu pulsační periody, přičemž rychlost změny je asi o řád vyšší, než očekávaný sekulární růst periody v důsledku vývojových změn. Jinak řečeno, pozorované změny jsou důsledkem jiných procesů, které patrně nesouvisí s vývojem δ Sct hvězd a na podobný test vývojové teorie jsou stávající řady pozorování ještě příliš krátké.

Celkově můžeme říci, že δ Sct hvězdy lze při současných znalostech kvalitativně dobře vysvětlit jako objekty vyvíjející se od hlavní posloupnosti v dolní části pásu nestability, který souvisí s ionizačními zónami vodíku a helia. Jistou část z nich mohou tvořit i hvězdy, které teprve kontrahují k hlavní posloupnosti nulového věku. To však nemůže plně vysvětlit, proč se v příslušné části HR diagramu pozoruje kromě δ Sct hvězd také tak velký počet nepulsujících A a F hvězd. Konkrétně pro δ Sct hvězdy je podle nejnovějších studií pro vznik pulsací rozhodující zóna ionizace He II.

17.3.4 SX Phe hvězdy

Hvězdy typu SX Phe jsou patrně analogií δ Sct hvězd pro objekty populace II, t.j. starší generace hvězd. Mají nižší obsah těžkých prvků, patří ke kulové složce Galaxie a vyznačují se velkými prostorovými rychlostmi. Jejich pulsační periody jsou krátké, ve většině případů kratší než 0^d08. Jejich vývojové stadium však v současnosti zůstává záhadou. Takto staré hvězdy s efektivními teplotami kolem 8500 K by totiž měly být už dávno vyvinuty mimo oblast hlavní posloupnosti v HR diagramu. Existují proto dohady, že může jít o objekty ve vývojovém stadiu pozdějším než stadium obrů nebo že se jedná o dvojhvězdy, které se slily v jednu hvězdu.



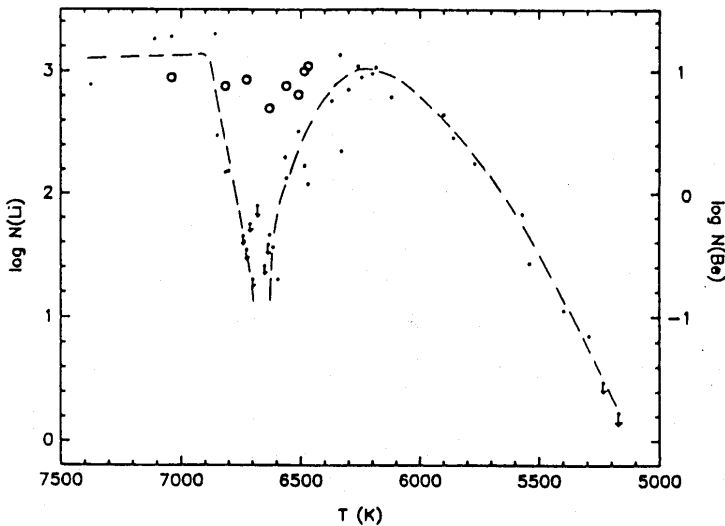
Obrázek 17.11: Polohy proměnných hvězd typu δ Scu na HR diagramu. Ve stejné oblasti se však nacházejí také hvězdy neproměnné. Převzato z práce Bregera (1979).

17.3.5 γ Dor hvězdy

γ Dor hvězdy jsou velmi nově objevenou skupinou hvězd. Jde o hvězdy spektrálního typu F, které vykazují změny jasnosti a radiálních rychlostí s periodami delšími, než δ Sct hvězdy: od 0^d3 do 2^d0 , přičemž obě křivky jsou prakticky ve fázi. Amplituda světelných změn je zpravidla pouze několik málo setin hvězdné velikosti. γ Dor hvězdy se nacházejí zčásti na chladném konci dolní části pásu nestability, zčásti vně něj směrem k nižším efektivním teplotám. Spektrálně jde o hvězdy luminositních tříd V–IV. Většina badatelů se nyní kloní k tomu, že se jedná o pulsující hvězdy, neboť u některých byly nalezeny multiperiodické změny, mechanismus vzniku pulsací však dosud nebyl objasněn.

17.3.6 Lithium a berylium u F a G hvězd

Lithium a berylium jsou velmi citlivým indikátorem toho, jak hluboko směrem do centra hvězdy zasahují podpovrchové konvektivní zóny u F a G hvězd. Slučovací reakce lithia probíhají již při teplotě asi $2,5 \cdot 10^6$ K, berylia při asi $3,5 \cdot 10^6$ K. Pokud tedy konvektivní zóna dosahuje až do hloubek, kde jsou ve hvězdě potřebně vysoké teploty, bude obsah Li a Be v atmosférách takových hvězd značně nízký. K analýze ve spektrech se nejčastěji užívají rezonanční dvojice čar Li I 670,776 a 670,791 nm a Be II 313,042 a 313,107 nm. V atmosféře Slunce je poměrný obsah Li nízký, $\text{Li}/\text{H} = 10^{-11}$, zatímco typické maximum pro hvězdy populace I je $\text{Li}/\text{H} = 10^{-9}$. Poměrný obsah berylia je nízký shodně pro Slunce i hvězdy populace I: $\text{Be}/\text{H} \sim 10^{-11}$.



Obrázek 17.12: Abundance lithia (levá osa, tečky) a berylia (pravá osa, kroužky) v závislosti na teplotě, pro členy hvězdokupy Hyády. Čárkovanou čarou je vyneseno teoreticky spočtená teplotní závislost pro lithium.

Studium obsahu lithia ve hvězdokupách ukazuje některé zajímavé souvislosti. Pro celou řadu hvězdokup byla nalezena zřetelná závislost obsahu lithia na efektivní teplotě, pro hvězdy kolem F5 je patrný silný pokles s minimem u efektivní teploty asi 6700 K, poté růst k nižším teplotám s maximem kolem 6300 K a poté opět plynulý pokles směrem ke chladnějším hvězdám. Lokální minimum kolem 6700 K se však nevyskytuje u mladých hvězdokup jako jsou Plejády či α Per a zdá se tak, že k dramatickému poklesu v obsahu lithia v atmosférách F hvězd kolem podtřídy F5 dochází mezi vývojovým věkem $5 \cdot 10^7$ a $5 \cdot 10^8$ let. Celá věc je ale zřejmě složitější, neboť asi pro polovinu F hvězd, které se nenacházejí ve hvězdokupách, je obsah lithia $\text{Li}/\text{H} = 10^{-9}$ a k žádnému poklesu u nich nedochází, ačkoliv jejich vývojový věk se odhaduje asi na $1-2 \cdot 10^9$ let. To znamená, že na rozsah konvektivní zóny musí mít vliv ještě jiné faktory, než jen vývojový věk. Pro Hyády existuje náznak souvislosti mezi vyčerpáním lithia a rotační rychlostí příslušných F hvězd. Michaud se snažil objasnit nedostatek lithia kolem spektrálního typu F5 teorií zářivé difuze. Jeho výpočty skutečně ukazují, že u těchto hvězd může docházet ke klesání lithia směrem do nitra hvězdy, ale celý proces probíhá příliš pomalu, než aby se mohl projevit už v Hyádách. Existují též úvahy o možné roli malé ztráty hmoty z atmosfér F hvězd a o roli meridionální cirkulace.

Studium berylia u stejných F hvězd v Hyádách ukázalo shodný a normální obsah berylia, z čehož lze vyvodit, že dolní hranice konvektivních zón u těchto hvězd zasahuje do oblastí s teplotami nad $2,5 \cdot 10^6$ K, ale nedosahují až k teplotám $3,5 \cdot 10^6$ K.

17.4 Chladné G, K a M hvězdy

Společným znakem chladných hvězd spektrálních typů G, K a M je existence hlubokých podpovrchových *konvektivních zón*, které vedou m.j. ke vzniku chromosfér a korón. Rozsah základních charakteristik pro hvězdy v polovině pobytu na hlavní posloupnosti je přibližně následující:

- G hvězdy: $M = 0,91\text{--}1,16 M_{\odot}$, $R = 1,01\text{--}1,25 R_{\odot}$, $T_{\text{eff}} = 5\,200\text{--}5\,900\text{ K}$;
- K hvězdy: $M = 0,45\text{--}0,91 M_{\odot}$, $R = 0,52\text{--}1,01 R_{\odot}$, $T_{\text{eff}} = 3\,900\text{--}5\,200\text{ K}$;
- M hvězdy: $M = 0,10\text{--}0,45 M_{\odot}$, $R = 0,12\text{--}0,52 R_{\odot}$, $T_{\text{eff}} = 2\,600\text{--}3\,900\text{ K}$.

17.4.1 Chromosféricky aktivní hvězdy: UV Cet, BY Dra, RS CVn, W UMa, FK Com

Chromosféra byla objevena nejprve u Slunce a později na základě různých typů pozorování i u chladných hvězd. Jedná se o poměrně řídkou vrstvu, a alespoň v případě Slunce i nepříliš rozsáhlou, která se vyznačuje vyšší teplotou, než je teplota pod ní ležící fotosféry. Tloušťka sluneční chromosféry činí asi 10^4 km. Vzhledem k vyšší teplotě se chromosféra projevuje podobně jako rozsáhlé plynové závoje horkých hvězd: přítomností emisních čar ve spektru. Nad chromosférou se nachází ještě mnohem řidší a geometricky rozsáhlejší koróna, která plynule přechází do prostoru. Záření koróny je nepatrné proti záření slunečního disku a proto lze korónu přímo pozorovat zejména při úplných slunečních zatměních nebo z kosmického prostoru. V části sluneční koróny se pozorují emisní čáry železa a dalších prvků ve velmi vysokých stupních ionizace, což svědčí o tom, že teplota v koróně dosahuje až 10^6 K.

Existence teplotní inverze s rostoucí vzdáleností od středu hvězdy se vysvětluje dynamickým zahříváním v důsledku mohutných konvektivních pohybů. Konvektivní proudy vyvolávají rázové zvukové vlny, jejichž kinetická energie je úměrná hustotě a čtverci rychlosti. Hustota se vzdáleností klesá, rychlost roste a do chromosféry a koróny se tak dostává velké množství kinetické energie, z níž se jen nepatrná část vyzáří a většina se použije na silné zvýšení teploty.

Experimentální důkazy existence chromosfér a korón lze podle rostoucí vzdálenosti od středu hvězdy shrnout takto:

1. *Na I D čáry 588,9 a 589,5 nm*: V této dvojici absorpčních čar lze ve slunečním spektru pozorovat rychlostní strukturu spodní části chromosféry. Také u některých jasných veleobrů třídy G a K se pozorují dodatečné, do fialova posunuté absorpce u této dvojice sodíkových čar, svědčící o jejich okolohvězdném původu.
2. *Trojice Ca II čar v infračervené oblasti u 849,8, 854,2 a 866,2 nm*: V této trojici absorpčních čar se u hvězd s chromosférami pozorují asymetrie či slabé

zaplnění jader čar emisí. Radiální rychlost se liší od radiální rychlosti fotosferických čar. (Pro zajímavost: tato trojice čar se pozoruje v emisi pro řadu silně interagujících dvojhvězd, jejichž primáry jsou hvězdy se závojem.)

3. *Čáry vodíku Balmerovy serie:* U chladných hvězd s chromosférami se pozorují nečekaně silné a široké čáry vodíku, odpovídající vyšší teplotě než je efektivní teplota příslušných hvězd. Kromě toho je např. u MIIa hvězdy α Ori profil $H\alpha$ posunut vůči fotosféře do fialova. U veleobrů třídy K a zvláště jasných veleobrů tříd F a G se pozoruje i do fialova posunutá a časově proměnná $H\alpha$ emise. U obřích hvězd populace II se pozorují asymetrické dvojitě $H\alpha$ emise.
4. *Emisní jádra čar Ca II K a H u 393,3 a 396,8 nm:* Čáry ionizovaného vápníku jsou u chladných hvězd silné a široké a v jejich jádru lze i na fotografických spektrech pozorovat emisní složku, zpravidla u hvězd, které se v HR diagramu nacházejí vpravo od pásu nestability cefeid. Pozorují se u hvězd spektrálního typu F a chladnějších.
5. *Emisní jádra dvojic čar Mg II u 279,55 a 280,27 nm a u 279,08 a 279,80 nm:* Čáry ionizovaného hořčíku v blízké ultrafialové oblasti mají obvykle vůči fotosféře lepší kontrast a emise v jejich jádrech jsou tak lépe patrné. Pozorují se prakticky pro všechny hvězdy hlavní posloupnosti chladnější než F2 a dokonce pro Altair se spektrem A7IV–V a pro všechny obry a veleobry vpravo od pásu nestability.
6. *Emisní jádra čáry Ly α u 121,57 nm:* Emisní profily vodíkové čáry Ly α byly poprvé pozorovány pomocí družice OAO3 – jde opět o centrální emisní jádro.
7. *Emisní čáry O I, C II, C IV a Si IV v UV oboru:* Emisní profily těchto čar se pozorují pro řadu chladných hvězd a svědčí o teplotách 10^4 až $2 \cdot 10^5$ K.
8. *Měřitelné záření v rentgenovém oboru spektra:* Rentgenové záření bylo družicí Einstein (HEAO-2) zjištěno pro hvězdy hlavní posloupnosti všech spektrálních typů a pro některé G a K obry. Naprosto se ale nedaří nalézt měřitelné rentgenové záření pro nejchladnější obry a veleobry v pravé horní části HR diagramu, pro G až M veleobry a obry chladnější než K2. Zdá se spíše, že tyto hvězdy nemají horké koróny. Zároveň bylo ale zjištěno, že intenzita záření v rentgenovém oboru není jednoznačně dána spektrálním typem a luminositní třídou dané hvězdy. Zdá se, že rentgenové záření souvisí s přítomností magnetických polí podobných slunečním. Vznik magnetických polí u Slunce a chladných hvězd se vysvětluje obvykle mechanismem dynama působícího v konvektivních zonách. Cirkulace může být přirozeně ovlivněna i rotací hvězd. Pozorování svědčící o zřetelné korelaci mezi intenzitou rentgenového záření a rotační rychlostí hvězd v rozmezí spektrálních typů F7 až M5 se zdají tuto domněnku potvrzovat.

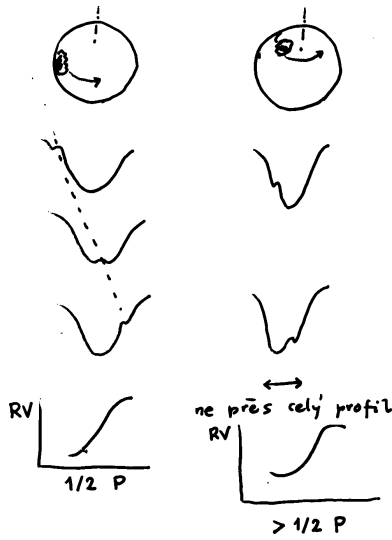
Hvězdy typu BY Dra. Tyto hvězdy byly definovány jako podskupina hvězd typu UV Cet (v obecnějším pojetí). Zařazují se mezi ně hvězdy hlavní posloupnosti spektrálních typů K a M s emisemi jak v čarách vodíku, tak v čarách Ca II a s periodickými světelnými změnami o malé amplitudě do 0^m_1 a s periodami několik dní. Je známo asi 20 takových hvězd. Bopp a Fekel (1977) zjistili, že u zhruba poloviny všech známých BY Dra hvězd (včetně BY Dra samotné) lze prokázat, že se jedná o spektroskopické dvojhvězdy, ve většině případů s oběma složkami pozorovatelnými ve spektru. U většiny známých dvojhvězd je perioda rotace a oběhu synchronizována. BY Dra sama se pohybuje ve výstředné dráze a pozoruje se u ní *pseudosynchronizace* vlivem větší přitažlivé síly v periastru.

Skvrnitě hvězdy typu RS CVn. Jedná se o dvojhvězdy s oběžnými periodami od 1 do 14 dnů se synchronizovanými periodami rotace a oběhu a s teplejšími složkami spektrálních typů F či G v blízkosti hlavní posloupnosti, u kterých se aspoň mimo zákryty pozorují silné emisní čáry Ca II a světelné změny s rotační periodou způsobené přítomností skvrn na jejich povrchu. V případě zákrytových dvojhvězd se tyto světelné změny sčítají se změnami v důsledku zákrytů a projevují se deformacemi zákrytových křivek. Dlouhodobá pozorování těchto hvězd prokázala, že skvrny postupně migrují jako u Slunce, takže fázování i sám vzhled světelných křivek se dlouhodobě mění.

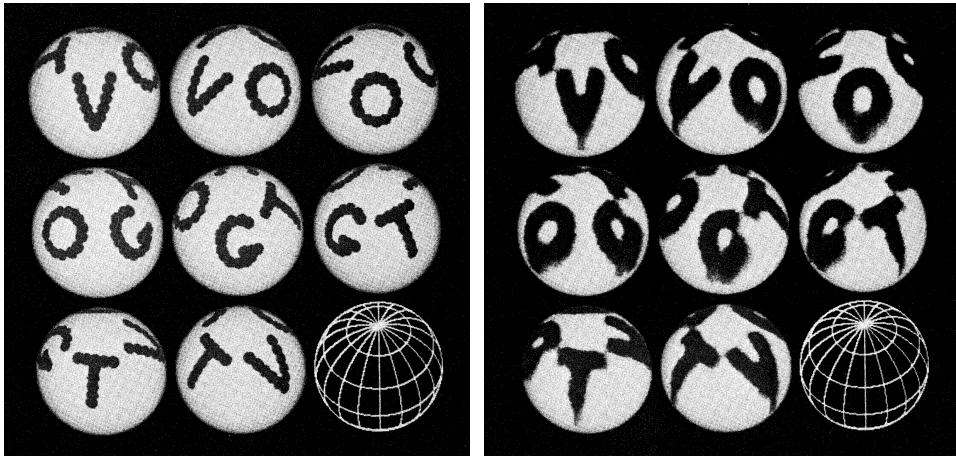
Jednou z nejvíce studovaných RS CVn hvězd je zákrytová dvojhvězda AR Lac, u které se chromosferická aktivita pozoruje pro obě složky dvojhvězdy, jejichž spektrální typy jsou K0IV a G2IV. Existují i velmi detailní pozorování rentgenového záření z obou složek a model lokalizace korón u nich. Jinou hojně studovanou RS CVn hvězdou je V711 Tau, pro níž byly objeveny rychlé změny profilů čar, podobné putujícím vlnkám u horkých hvězd, a pro níž byla poprvé použita metoda dopplerovské inverze pozorovaných změn profilů čar (Doppler imaging). Pomocí ní lze nezávisle v různých obdobích sledovat migraci skvrn na povrchu podobných hvězd.

Těsné dvojhvězdy typu W UMa. Jedná se o dotykové dvojhvězdy s krátkými oběžnými periodami a se složkami obvykle podobných a pozdních spektrálních typů a se světelnými křivkami, které se mění plynule během celé oběžné periody.

Hvězdy typu FK Com. Jedná se o osamocené hvězdy spektrálních typů G až K s promítnutými rotačními rychlostmi kolem 100 km s^{-1} , což je u tak chladných hvězd velice vysoká hodnota. Jejich hlavní charakteristikou je přítomnost emisních čar, často silnějších, než jaké se pozorují pro dvojhvězdy RS CVn. Pozorují se u nich rovněž světelné změny s amplitudou 0^m_1 – 0^m_2 a s periodami několik dnů, patrně opět způsobené jejich rotačními periodami. Nevykazují žádné změny radiální rychlosti. Změny jejich dvojitých H α emisních profilů vykazují V/R změny s periodou světelných změn, čímž se podobají horkým hvězdám se závojem. Vzájemné fázování změn naznačuje, že fotometrické změny mohou souviset spíše s horkou, než s chlad-



Obrázek 17.14: Schematicky znázorněné putování „vlnky“ ve spektrální čáře, v závislosti na poloze tmavé skvrny na povrchu hvězdy.



Obrázek 17.15: Uměle vytvořený povrch hvězdy s nápisem „VOGT“ a vpravo jeho úspěšná rekonstrukce z dopplerovských měření syntetických profilů čar. Převzato z práce Vogt, Penrod a Hatzes (1987).

nou skvrnou. Při studiu vysokodispersních spekter byly u FK Com nalezeny malé změny radiálních rychlostí $H\alpha$ emise s periodou světelných změn a po jistou dobu byl proto zvažován model interagující dvojhvězdy s velmi rozdílnými složkami. Vývojové stadium zůstává záhadou, snad by mohlo jít o hvězdy, které vznikly postupným slitím dvojhvězdy typu W UMa v jediné těleso. To by vysvětlovalo velkou rotační rychlost.

17.4.2 Pulsující hvězdy: Cefeidy, Miry, R CrB a AGB hvězdy

Cefeidy. Cefeidy dostaly svůj název podle druhé objevené proměnné tohoto typu, δ Cep, jejíž změny jasnosti objevil roku 1784 anglický amatér John Goodricke. (Vůbec první objevenou cefeidou byla η Aql, kterou 10. září 1784 objevil Edward Pigott.) Jsou to veleobří spektrálních tříd F, G a K s periodickými změnami jasnosti a radiálních rychlostí (viz obr. 17.16, 17.17). Jejich periody se pohybují v rozmezí od několika dní do skoro 100 dní a amplitudy světelných změn činí 0^m1-2^m0 . Jedná se o vyvinuté hvězdy v *pásu pulsační nestability* (obr. 17.18), které již spálily i helium ve svých jádrech. Podle stáří se rozlišují cefeidy třídy I a II, což odpovídá objektům první a druhé populace hvězd. Typickým představitelem třídy I je právě δ Cep (spektrální typ F5Iab).

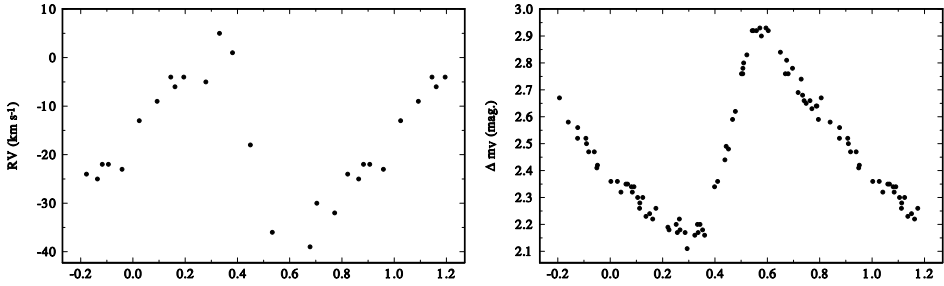
Kervella a kol. (2004) využili interferometrická určení poloměrů sedmi klasických cefeid k nové kalibraci nulového bodu vztahu perioda – zářivý výkon, přičemž sklon přímky přijali z dřívější studie Gierena a kol. (1998) založené na cefeidách z Velkého Magellanova mráčka. Jejich nejnovější vztah má tedy tvar

$$M_V = -(2,769 \pm 0,073) \log[P]_d - (1,440 \pm 0,075) \text{ mag}. \quad (17.4)$$

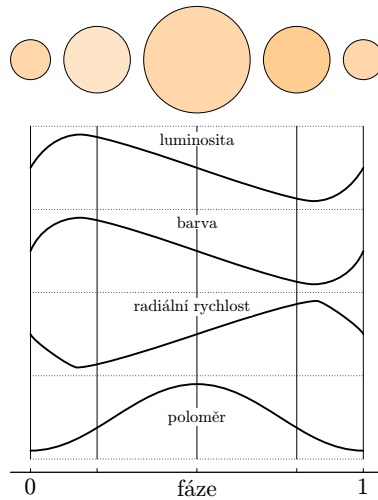
Hvězdy typu W Vir. Cefeidám populace II se podle typické představitelky říká také hvězdy W Virginis. Vztah perioda – zářivý výkon se pro cefeidy typu I a II liší, cefeidy typu I jsou pro danou pulsační periodu asi o 1^m5 jasnější než cefeidy typu II.

Hvězdy typu RR Lyr. Hvězdy typu RR Lyr jsou slabší *krátkoperiodické cefeidy*, s periodami 0,2 až 1,2 dne a amplitudou 0,2 až 2 mag ve V. Jde o radiálně pulsující obry typů AIII až FIII. Stejně jako u cefeid maximum RV odpovídá maximu světelné křivky. Patří mezi hvězdy populace II a všechny mají přibližně stejnou absolutní hvězdnou velikost $M_V \doteq 0,7$ mag, čili je lze používat jako indikátory vzdálenosti. Dlouhoperiodické modulace světelné křivky se nazývají Blazhkův jev.

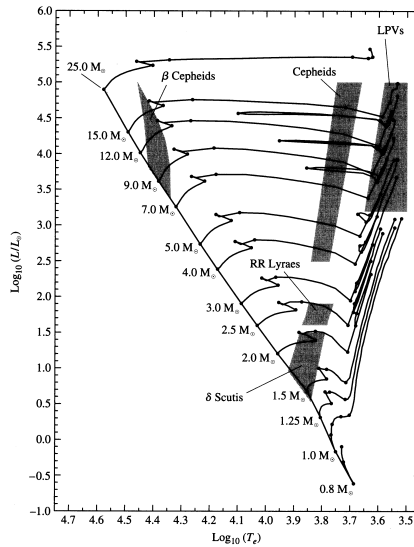
Miry. Miry patří k nejnápadnějším proměnným hvězdám. Jejich periody změn jasnosti a radiálních rychlostí jsou vesměs delší než 100 dní a amplitudy světelných změn jsou větší než 1^m0 a nezřídka dosahují i více než 10^m0 ! Ve spektrech těchto hvězd se vyskytují i silné emisní čáry. Klasické vysvětlení je, že se jedná o obří hvězdy v pozdních vývojových stadiích.



Obrázek 17.16: Srovnání první křivky radiálních rychlostí δ Cep (Bélopolsky 1895) s její první fotoelektrickou světelnou křivkou (Stebbins 1908). Na ose x je fáze od minima jasnosti s periodou $5^d 366316$ a libovolnou, ale shodnou referenční epochou HJD = 2400000.0. Světelná křivka je udána relativně ve smyslu srovnávací – δ Cep, takže minimum křivky odpovídá minimu jasnosti.



Obrázek 17.17: Schema pulsací cefeidy a odpovídajících změn luminosity, barvy, radiální rychlosti a poloměru.



Obrázek 17.18: HR diagram s vyznačeným pásem nestability, ve kterém se vyskytují cefeidy, i hvězdy RR Lyr a δ Sct. Převzato z Carrol a Ostlie (2007).

Prototyp skupiny Mira Ceti (omikron Ceti) je hvězdou spektrální třídy M7IIIe, jejíž jasnost se mění s periodou 331^d65 od 2^m0 do 10^m1 . Sekundární složkou Miry Ceti je bílý trpaslík a snímky z Hubbleova kosmického dalekohledu naznačují interakci mezi oběma hvězdami a vedou k odhadu poloměru Miry: $700 R_{\odot}$.

Hvězdy typu R CrB. Hvězdy nazvané podle prototypu R CrB jsou vysoce svítivé, typu FI nebo GI, a chemicky pekulární — významně ochuzené o vodík a bohaté na hélium a uhlík ($H/He \simeq 10^{-3}$ až 10^{-6} ; ve spektru je velmi slabá Balmerova série). Jsou zároveň eruptivní i pulsující a navíc vykazují pomalá neperiodická zeslabení o 1 až 9 mag ve V, trvající několik měsíců. Pravděpodobně jsou způsobena kondenzací uhlíku v atmosféře na prachová zrna, která účinně absorbují v oboru V (ale nikoli v IR). Chování se podobá inverzní korelaci pro hvězdy se závojem. Pulsace se projevují změnami o řádově 0,1 mag, s periodami 30 až 100 dní.

Hvězdy asymptotické větve obrů (Asymptotic Giant Branch Stars, AGB). Jedná se o relativně krátké pozdní vývojové stadium cyklických tepelných pulsů souvisejících s hořením helia v heliové slupce a s hluboko zasahující povrchovou konvektivní zónou. Tímto stadiem projdou hvězdy o počátečních hmotnostech asi $0,8$ až $8 M_{\odot}$. Vyvine se u nich i silný hvězdný vítr, který vede k odvrhování hmoty do prostoru rychlostmi 10^{-8} až $10^{-4} M_{\odot}$ za rok a v chladných obálkách kolem nich se tvoří komplexní molekuly. Následující vývoj vede ke vzniku planetárních mlhovin a končí stadiem bílého trpaslíka. Existuje ale i domněnka, že jev souvisí s pod-

vojností těchto objektů a konkrétně s pohybem sekundární složky uvnitř atmosféry obra. Mezi AGB hvězdy se zahrnují i Míry, polopravidelné a nepravidelné proměnné.

Hvězdy typu RV Tau. Jako hvězdy RV Tau se označují radiálně pulsující veleobří (ve fázi post-AGB), spektrálních typů F až G v maximu a K až M v minimu, pro které se na světelné křivce mění hloubky primárních a sekundárních minim, takže se mohou minima „vyměnit“. Periody se pohybují v rozmezí 30 až 150 dní. Jde patrně dvojhvězdné systémy s prachovým diskem (de Ruyter a spol. 2005).

17.5 Hvězdy v raných vývojových stadiích

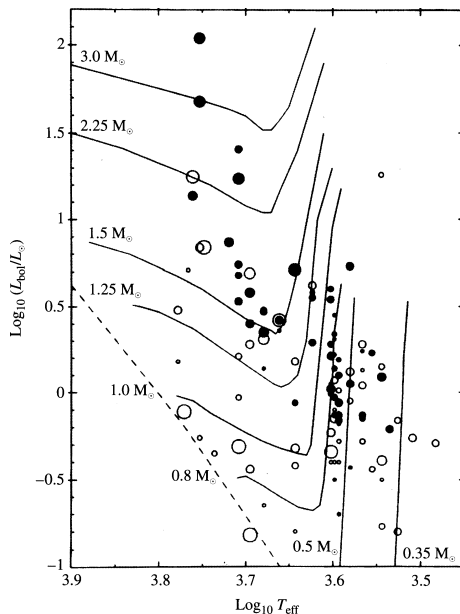
Upozorníme, že může být obtížné rozlišit kontrahující objekty od objektů vyvinutých od hlavní posloupnosti — nacházejí se totiž na stejném místě na HR diagramu. Napovědět může členství ve hvězdokupě známého věku nebo chemické složení atmosfér, například čára lithia (na 670,7 nm), jakožto prvku, který se spotřebuje ještě během smršťování.²

17.5.1 T Tauri hvězdy

Hvězdy T Tau jsou osamocené hvězdy spektrálních typů F5 až G5, u nichž se pozorují chromosferické emisní čáry (zejména Ca II) a rychlé a zcela nepravidelné změny jasnosti s amplitudami až 3^m0. Mají nízký zářivý výkon a zpravidla se vyskytují uvnitř zářící či temné mlhoviny. Později se ukázalo, že v případech, kdy se u těchto hvězd pozoruje absorbní čárové spektrum, odpovídá zpravidla spektrálním typům mezi pozdním typem F a typem M, přičemž je ve spektru přítomna silná absorbní čára lithia 670,7 nm. Poměrně nedávno se podařilo prokázat, že mnohé T Tau hvězdy jsou složkami visuálních dvojhvězd s dlouhými oběžnými periodami.

Dnes se většina badatelů shoduje v názoru, že hvězdy T Tau jsou mladé hvězdy, které teprve kontrahují k hlavní posloupnosti nulového věku (obr. 17.19) a dosud u nich probíhá i akrece hmoty z okolní mlhoviny (rychlostí $\dot{M} \leq 10^{-7} M_{\odot}/\text{rok}$). Tomu odpovídá i přítomnost silné čáry lithia. Jejich nepravidelné světelné změny se vysvětlují nehomogenitami v rozsáhlých obálkách, které je obklopují. Jejich trvání se odhaduje na 10⁶ až 10⁷ roků. V okolí těchto mladých hvězd se často vyskytují *Herbigovy–Harovy objekty* — zhuštění vznikající při interakci výtrysků s okolní mezihvězdnou látkou.

²Další z možností je molekula ¹³CO pozorovaná v emisi v cirkumstelární látce. Obohacení tímto izotopem uhlíku má totiž původ v termonukleárních reakcích vyvinutých objektů, kdežto objekty před dosažením hlavní posloupnosti mají poměr ¹²C/¹³C stejný jako mezihvězdná látka.



Obrázek 17.19: Polohy hvězd T Tauri na HR diagramu. Velikosti symbolů odpovídají rychlosti rotace. Plné symboly zvýrazňují hvězdy se silnými emisními čarami. Křivky jsou teoretické vývojové stopy (před hlavní posloupností). Převzato z práce Bertout (1989).

17.5.2 FU Ori hvězdy

Mezi mladé hvězdné objekty (angl. Young Stellar Objects, YSO) patří také hvězdy FU Orionis (nazývané též fuory). Objevují se u nich opakovaná vzplanutí o 6 mag, trvající asi 10 roků, mezi vzplanutími bývají intervaly klidu, trvající 100 roků. V maximu je spektrum typu A až G, po poklesu se vyvíjejí emise a typ se stává pozdější. Všechny známé objekty FU Ori jsou spojené s reflekcí mlhovinami.

Jejich velká proměnnost se interpretuje tak, že na hvězdu ještě padá jádro velkého molekulového mračka, s $\dot{M} \geq 10^{-6} M_{\odot}/\text{rok}$. V systému je přítomen horký disk, s teplotou asi 1000 K na 1 AU. Celkem fáze FU Ori trvá řádově 10^5 roků.

17.6 Hvězdy v pozdních vývojových stádiích

17.6.1 Bílí trpaslíci a ZZ Ceti hvězdy

Bílí trpaslíci. Bílí trpaslíci se v dvourozměrné klasifikaci popisují luminositní třídou VII, mnohem častěji se však v astronomické literatuře objevuje označení DA, DB, DO a podobně, označující bílé trpaslíky se spektry spektrálních tříd A, B, O atd. Třída DA je charakterizována přítomností čar vodíku v atmosféře přísluš-

ných hvězd, u třídy DB jsou přítomny čáry neutrálního helia. Podrobnějším studiem se ukázalo, že DA a DB trpaslíci tvoří dvě odlišné skupiny objektů a dvě sekvence v HR diagramu. Relativní obsah helia v atmosférách DA trpaslíků je nepatrný ($\text{He}/\text{H} < 10^{-3}$). Naopak v atmosférách DB hvězd prakticky chybí vodík ($\text{He}/\text{H} > 10^5$). Byly nalezeny i některé přechodné případy DB hvězd, označované DBA, u nichž lze slabé čáry vodíku ve spektrech pozorovat ($\text{He}/\text{H} \sim 3$ až $10 \cdot 10^3$). Bílí trpaslíci klasifikovaní DO jsou pokračováním sekvence DB směrem k vyšším teplotám. Statistické studie relativní četnosti obou sekvencí ukazují, že trpaslíci typu DA převažují, je jich asi 80 %. Pomocí modelů atmosfér složených buď z čistého vodíku nebo helia byl odhadnut rozsah efektivních teplot DA trpaslíků v rozmezí od 7 000 do 30 000 K, pro DB hvězdy je to 12 000 až 30 000 K.

Rozložení prostorových rychlostí ukazuje, že naprostá většina bílých trpaslíků pochází ze starší populace II. Existence dvou sekvencí se vysvětluje tím, že u některých objektů dojde na konci stadia asymptotické větve obrů k tak mohutným *tepelným pulsům*, že se při nich nukleárním hořením spotřebuje zbyváající atmosferický vodík a zbudou jen těžší prvky. U trpaslíků typu DA, kde se vodík taktó nespotřebuje, dojde ke zmizení helia v důsledku zářivé difuze.

ZZ Cet hvězdy. Hvězdy typu ZZ Cet jsou bílí trpaslíci typu DA, u nichž dochází k měřitelným změnám jejich jasnosti. Změny jasnosti jsou zřejmě periodické a často multiperiodické, a velmi rychlé. Periody známých ZZ Cet hvězd jsou mezi 100 a 1 200 sekundami, což je ale o hodně delší, než by odpovídalo jejich radiálním pulsacím, takže se dosti všeobecně soudí, že pozorované změny jasnosti jsou projevem pulsací neradiálních. Byla nalezena určitá korelace mezi amplitudou pozorovaných změn a složitostí světelných křivek. ZZ Cet hvězdy s malými amplitudami do 0^m05 mají zpravidla periodické sinusové změny jasnosti, jejichž perioda je velmi stálá. V posledních desetiletích je pulsacím ZZ Cet hvězd věnována značná pozornost, neboť existuje oprávněná naděje, že se s jejich pomocí lze dozvědět hodně o skutečné vnitřní stavbě bílých trpaslíků, podobně jako v případě našeho Slunce. Soudí se, že možná všichni bílí trpaslíci typu DA se stávají pulsačně nestabilními, když se během svého vývoje a postupného chladnutí dostávají do oblasti s efektivní teplotou mezi 13 000 a 11 000 K.

Pulsace byly ovšem objeveny a studovány i u několika trpaslíků DB a jejich analýzou a porovnáním s modely prokázali Metcalfe a kol. (2005), že čistě heliová atmosféra DB trpaslíků je patrně důsledkem zářivé difuze. Na přechodu od hvězd asymptotické větve obrů k bílým trpaslíkům existují teplejší hvězdy typu PG 1159, které mají v atmosféře zastoupení helia, uhlíku i kyslíku, coby zbytku jádra původní hvězdy. Výpočty ukázaly, že zářivá difuze vynese helium k povrchu, a nechá tak vzniknout čistě heliové horní atmosféře.

K lepšímu pochopení vývojového stadia bílých trpaslíků a souvislosti s hvězdami asymptotické větve obrů a novami (viz níže) pomáhá i studium bílých trpaslíků, kteří jsou složkami dvojhvězd. Např. Kawka a Vennes (2003) určili dráhové elementy a studovali i elipsoidální proměnnost dvojice BMP 71214 složené s bílého trpaslíka DA a červeného trpaslíka dMe, který téměř zaplňuje Rocheovu mez. V této

dvojhvězdě zřejmě v budoucnu nastane přenos hmoty a eruptivní zjasnění. Drahové elementy několika horkých bílých trpaslíků určili Kawka a kol. (2008) na dalekých UV spektrech z družice FUSE. Jde vesměs o soustavy, které prošly stadiem asymptotické větve obrů se společnou obálkou. Analýza chemického složení ukazuje, že dochází k akreci hmoty na povrchu bílých trpaslíků z hvězdného větru jejich průvodců. O tom, že se jedná skutečně o kompaktní objekty, svědčí i výrazný rozdíl ve střední (systémové) radiální rychlosti bílých trpaslíků a jejich průvodců způsobený větším gravitačním rudým posuvem bílých trpaslíků.

17.6.2 Novy, kataklyzmatické proměnné a polary

Pokud je bílý trpaslík složkou dvojhvězdy a dojde k *přenosu hmoty* bohaté na vodík z druhé složky na povrch bílého trpaslíka, může docházet k velmi nápadným zjasněním soustavy o 6 až 19 mag. Na povrchu bílého trpaslíka může nastat velmi bouřlivé jaderné slučování vodíku na helium, což vede k výbuchu a odvržení obálky do okolního prostoru. Pohyb hmoty velkými rychlostmi se skutečně u nov po výbuchu pozoruje, prostřednictvím dopplerovského rozšíření čar. Orbitální periody jsou rozmanité, od 0,05 do 230 dní. Rozlišují se rychlé a pomalé novy (s poklesem jasnosti větším, respektive menším než 3 mag za 100 d). Zdá se jisté, že výbuchy nov vedou jen k relativně *malé* ztrátě hmoty ze soustavy, poměřováno celkovou hmotností hvězd.

Rekurentní novy. Některé novy vykazují slabší zjasnění o 4 až 9 mag, ale opakující se po 10 až 80 letech. Jde například o hvězdy RS Oph, T Pyx. U některých trpasličích nov s mnoha pozorovanými zjasněními byla nalezena korelace mezi mohutností zjasnění a dobou do následujícího zjasnění.

Trpasličí novy. Známý jsou rovněž trpasličí novy, neboli hvězdy typu *U Geminorum*, dvojhvězdy složené z bílého trpaslíka a červeného trpaslíka (normální hvězdy), jejichž oběžné periody činí jen několik hodin a u nichž dochází k opakovaným zjasněním o 3 až 5 hvězdných velikostí během týdnů až několika let. Soudí se, že i tyto objekty se zjasňují v důsledku přenosu hmoty mezi složkami, mechanismus ale patrně nesouvisí s nukleárním hořením, ale s *nestabilitou akrečního disku* kolem bílého trpaslíka, jehož opacita se v důsledku akrece po dosažení určité kritické hodnoty může velmi prudce změnit. Tyto novy dělíme na tři podtypy:

1. *SS Cyg* — se zjasněním o 2 až 6 mag za 1 až 2 dny, návrat na původní jasnosti probíhá několik dní (obr. 17.20);
2. *SU UMa* — vykazují kromě normálních zjasnění i jasnější a déle trvající (superoutbursty), během nichž jsou na světelné křivce patrné periodické oscilace 0,2 až 0,3 mag (superhumpy), odpovídající zřejmě precesi eliptického disku;
3. *Z Cam* — charakteristické zastavením poklesu jasnosti pod maximem.

Polary typu AM Her. Hvězdy, které vykazují změny 4 až 5 mag a silnou lineární i kruhovou polarizaci záření ve viditelném a blízkém IR oboru, nazýváme polary. Pokud změřená intenzita magnetického pole dosahuje 10 až 80 MG, jde o typ AM Her. Dvojhvězda je tvořena trpaslíkem K až M a magnetickým bílým trpaslíkem. Pole určuje tok hmoty, žádný disk v soustavě nevzniká, materiál je veden siločárami na jeden nebo oba magnetické póly. Rotační perioda bílého trpaslíka je synchronní s oběhem.

Intermediální polary DQ Her. Intermediální polar (s intenzitou 1 až 10 MG), jehož prototypem je hvězda DQ Her, mívá okolo bílého trpaslíka akreční disk, ale pouze ve větší vzdálenosti, blíže se nachází „záclona“, vytvořená magnetickým polem (obr. 17.21). Poměr rotační a orbitální periody bývá řádově 1/10.

Hvězdy typu AM CVn. Ve hvězdách AM CVn, s charakteristickou periodou kratší než 70 minut, se vyskytuje dvojice bílých trpaslíků. Poznáme je také podle neustávajících superhumpů, souvisejících s heliovým akrečním diskem.

17.6.3 Supernovy

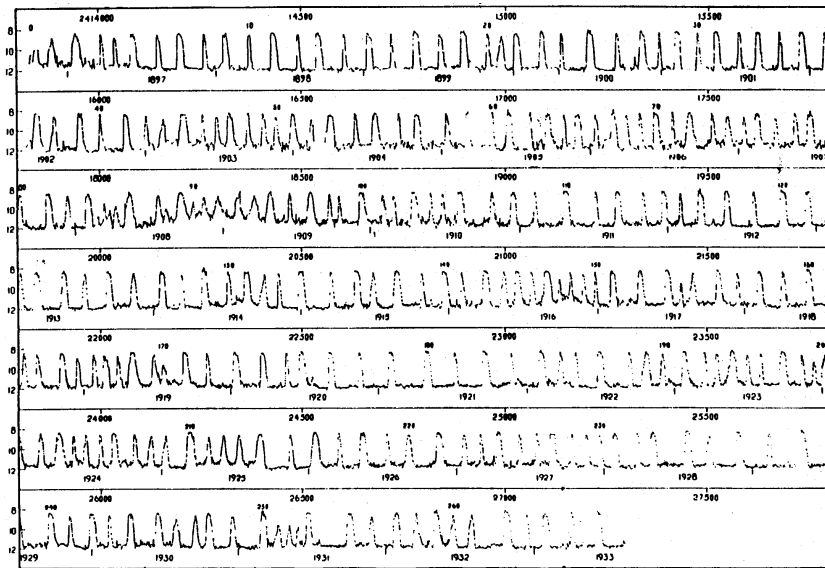
Klasifikace supernov je tradičně závislá na jejich spektrech. Spektrální čáry mívají profily typu P Cygni, což svědčí o rozpínající se obálce, a jsou silně rozšířené díky radiálním rychlostem řádu 10^3 až 10^4 km/s; příklady typických spekter uvádí obr. 17.22.

V tab. 17.1 vidíme základní kritérium klasifikace, kterým je přítomnost spektrálních čar vodíku. Jestliže jsou patrné, jedná se o typ II, v opačném případě typ I. Další rozdělení SN II je podle intenzity čar hélia na typy IIa a IIb a nakonec se typ IIa dělí podle tvaru světelné křivky na typy IIP (s přítomností plata po maximu) a IIL (s přibližně lineárním poklesem v magnitudách). Supernovy SN I se dále třídí podle přítomnosti čar křemíku a hélia na podtypy Ia, Ib, Ic.

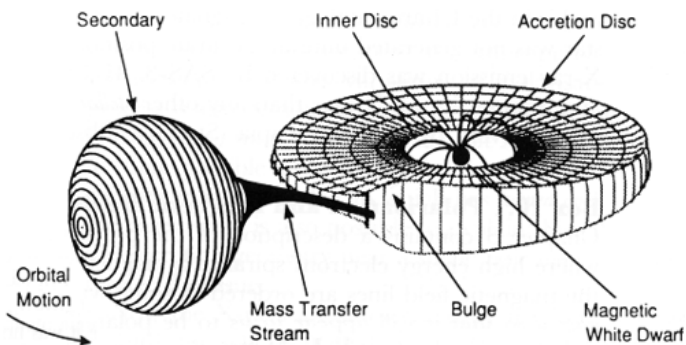
Ve spektrech samozřejmě nejsou pouze zmiňované diagnostické čáry, ale i další. Například supernovy SNIa mají v raném spektru čáry Si II, Ca II, Mg II, S II, O II, po 2 týdnech se objevují dovolené čáry Fe II a zhruba po šesti měsících, v *nebulární* fázi, zakázané čáry [Fe II], [Fe III], [Co III]. Relativní intenzita [Co III]/[Fe III] přitom klesá s časem, což naznačuje radioaktivní rozpad kobaltu. Spektra supernov SNIa jsou v maximu často téměř spojitá, bez spektrálních čar, později se objevují emisní čáry vodíku a ještě později zakázané čáry kovů (obr. 17.23).

Světelné křivky vykazují velmi rychlý vzestup, většinou během několika dní. Následný pokles je pozorovatelný po dva roky. Rozdíly mezi jednotlivými typy jsou patrné na obr. 17.24. Svítivost je největší pro typ Ia, v maximu jasnosti dosahuje

$$M_V \simeq -19,30 \text{ mag} + 5 \log \left(\frac{H_0}{60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \right), \quad (17.5)$$



Obrázek 17.20: Světelná křivka rekurentní trpasličí novy SS Cyg, od roku 1897 do roku 1933; jasnost se polopravidelně mění mezi 12 mag a 8 mag. Převzato z práce Bath a van Paradijs (1983).



Obrázek 17.21: Schéma intermediálního polaru DQ Her s částečným akrečním diskem. Převzato z <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/objects/cvs/cvstext.html>.

Tabulka 17.1: Klasifikace supernov podle spekter. Horní tabulka je pro spektra pořízená v maximu, dolní pro pozdní — pořízená 6 měsíců po maximu (supernebulární spektra). Kurzívou jsou vždy vyznačena kritéria (přítomnost nebo nepřítomnost spektrálních čar určitých prvků, příp. tvar světelné křivky), antikvou je označení typů.

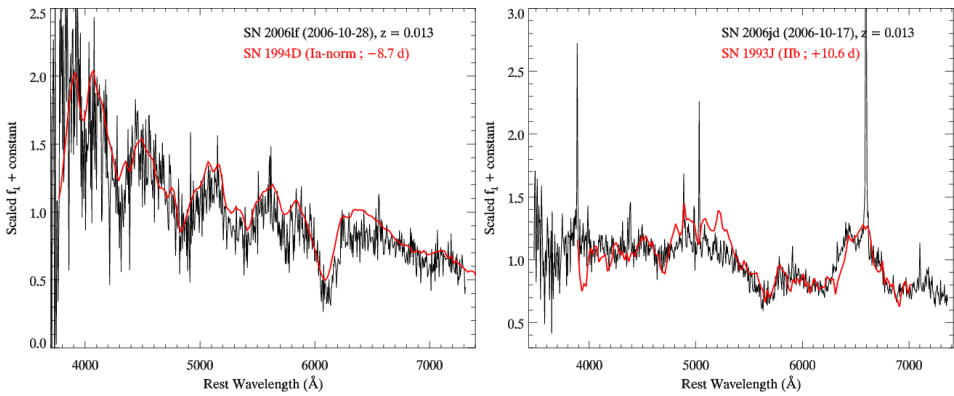
<i>H / bez H</i>			
SN II		SN I	
<i>převažuje H / He</i>		<i>Si / bez Si</i>	
IIn	IIf	Ia	<i>mnoho He / málo He</i>
<i>sv. křivka lineární / plato</i>		Ib	Ic
IIL	IIP		

<i>H / bez H</i>			
SN II		SN I	
<i>převažuje H / O</i>		<i>O / bez O</i>	
IIn (H, Ca)	IIf (H, O, Ca)	Ib, c (O, Ca)	Ia (Fe, Co)

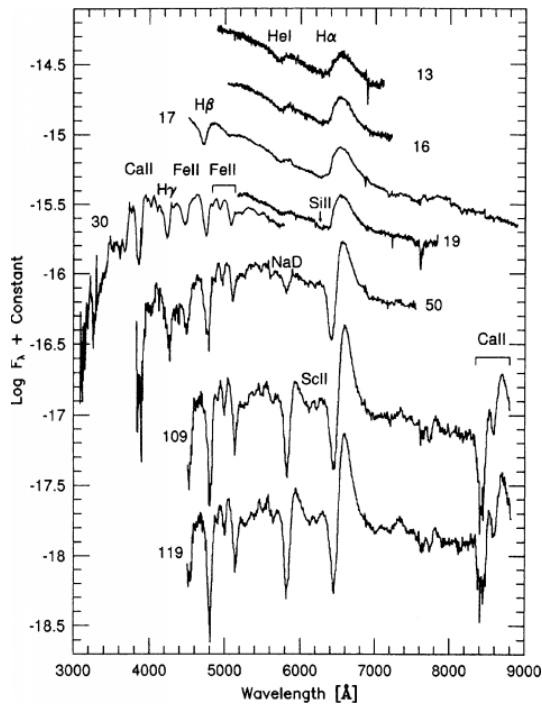
kde H_0 je hodnota Hubbleova parametru. Rozptyl této závislosti je velmi malý ($\sigma_M \simeq 0,3$ mag) a může být ještě zlepšen parametrizací šířky maxima a rychlosti poklesu světelné křivky (široké, resp. pomalu klesající vycházejí jasnější; Perlmutter a spol. 1997). Supernovy tohoto typu jsou tedy vhodné jako „standardní svíčky“ pro určování vzdáleností ve vesmíru. Typy Ib a Ic jsou asi čtyřikrát (o 1 až 2 mag) slabší. Pro typ II je charakteristický velký rozptyl svítivosti, nejčastěji se však pohybuje na úrovni typů Ib a Ic.

Typy Ib, Ic a II se vždy nacházejí ve spirálních nebo nepravidelných galaxiích, obvykle ve spirálních ramenech v blízkosti oblastí H II, tj. v místech intenzivního zrodu hvězd. Odtud plyne, že progenitory jsou mladé masivní hvězdy, které na hlavní posloupnosti setrvávají přibližně deset miliónů let. Supernovy Ia jsou však pozorovány ve všech typech galaxií, nevykazují koncentraci do spirálních ramen. Vznikají tedy z hvězd starších, méně hmotných.

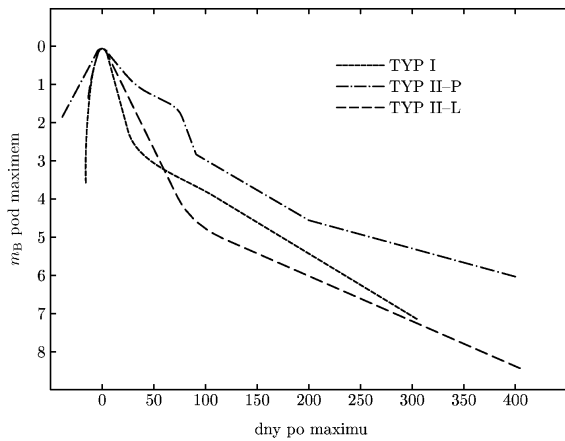
Pozorování předcházející výbuchům supernov svědčí o tom, že původci supernov typů II, Ib a Ic jsou červení veleobří, svítivé modré proměnné nebo Wolfovy–Rayetovy hvězdy (Langer a kol. 1994, Meynet a Maeder 2003, Kotak a Vink 2006). Progenitory supernov Ia se nepodařilo přímo identifikovat.



Obrázek 17.22: Spektra supernov typu Ia (SN 2006 LF, vlevo) a IIB (SN 2006 JD, vpravo). Zřetelný je především rozdíl v přítomnosti vodíkové čáry H_{α} (na vlnové délce $\lambda = 653 \text{ nm}$). Převzato z <http://www.cfa.harvard.edu/supernova/RecentSN.html>.



Obrázek 17.23: Příklad raného spektra supernovy typu II v oboru 300 až 900 nm, zachycen je časový vývoj spektra od 13 do 119 dní po explozi (SN 1992 H v galaxii NGC 5377). Šířky čar dosahují $2\Delta\lambda \simeq 50 \text{ nm}$, což odpovídá dopplerovským rychlostem řádu $v/c = \Delta\lambda/\lambda \simeq 0,1$. Převzato z práce Clocchiatti a spol. (1996).



Obrázek 17.24: Světelné křivky tří typů supernov (normalizované na maximum jasnosti). Na vodorovné ose jsou dny po maximu, na svislé hvězdné velikosti pod maximumem.

A Jednotky a veličiny používané v astronomii

A.1 Soustavy fyzikálních jednotek

Soustava SI. Mezinárodní astronomická unie již před delší dobou rozhodla, že se mají používat *jednotky soustavy SI*, vycházející z následujících základních jednotek: kilogram (kg) pro hmotnost, sekunda (s) pro čas, metr (m) pro délku a kelvin (K) pro absolutní teplotu. V soustavě SI jsou dovoleny pouze ty odvozené jednotky pro větší či menší množství, které jsou vůči základním jednotkám soudělné tisícem, tedy např. nanometr, milimetr nebo kilometr.

Soustava cgs. Je třeba ovšem říci, že zmíněná reforma „na povel“ se příliš nevěžila a právě v oblasti záření jsou ve světové astronomické literatuře i nadále používány (a redakcemi časopisů tolerovány) jednotky starší *soustavy cgs* (centimetr–gram–sekunda). Je to vcelku pochopitelné, neboť jednotky SI nejsou někdy praktické a kromě toho existuje spousta rozsáhlých souborů dat, např. modely hvězdných atmosfér či tabulky vlnových délek spektrálních čar, které jsou uvedeny ve starších jednotkách. Základními jednotkami soustavy cgs jsou:

cm (centimetr)	pro délku ($1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$),
g (gram)	pro hmotnost ($1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$),
s (sekunda)	pro čas,
K (kelvin)	pro absolutní teplotu.

Užitečná je znalost odvozených jednotek:

dyn	=	$\text{g cm s}^{-2} = 10^{-5} \text{ N}$	pro sílu,
erg	=	$\text{g cm}^2 \text{ s}^{-2} = 10^{-7} \text{ J}$	pro energii či práci,
G (Gauss)	=	10^{-4} T	pro magnetickou indukci.

Používají se též některé starší tradiční jednotky, jako jednotka délky:

$$\text{\AA} (\text{Angström}) = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-1} \text{ nm}.$$

V astronomii se běžně používají i jednotky odvozené ze základních fyzikálních vlastností Země, Slunce a sluneční soustavy.

A.2 Astronomické jednotky času

S rostoucí přesností astronomických a obecněji fyzikálních měření narůstají i požadavky na přesné měření času. Konkrétně v astronomii vyvstává taková potřeba např. při analýze dlouhých časových řad. Je totiž třeba mít jistotu, že nějaká malá změna periody pravidelně se opakujícího děje je reálná a není jen důsledkem ne zcela přesného měření času pro jednotlivá pozorování.

Základní časovou škálou je rovnoměrně plynoucí **mezinárodní atomový čas TAI**, definovaný chodem souboru nejpřesnějších atomových hodin. Současná přesnost měření atomového času je lepší než 1 nanosekunda. Z něj se přímo odvozuje **terestrický čas TT**, používaný v geocentrických efemeridách těles sluneční soustavy. Platí vztah

$$TT = TAI + 32,184 \text{ s.} \quad (\text{A.1})$$

Světový čas (Universal time) UT1 je vztažen k rotaci Země, která však není zcela rovnoměrná. Přibližně odpovídá místnímu střednímu slunečnímu času na zeměpisné délce nula, tedy na greenwichském poledníku.¹ Přesně se měří natočení Země vzhledem k Mezinárodní nebeské souřadnicové soustavě (International Celestial Reference Frame, ICRF) pomocí interferometrie vzdálených kvasarů. Vztah mezi úhlem natočení Země (Earth Rotation Angle, ERA) a časem UT1 je definovaný jako

$$ERA = 2\pi (0,779\,057\,273\,2640 + 1,002\,737\,811\,911\,354\,48 T_u) \text{ rad} \quad (\text{A.2})$$

kde $T_u = (\text{Juliánské datum}^2 \text{ UT1} - 2\,451\,545,0)$.

Okamžiky astronomických pozorování jsou obvykle udávány ve **světovém koordinovaném čase (Universal Time Coordinated) UTC**. Platí, že UTC se od atomového času TAI liší vždy o *celý počet sekund*, a to tak, aby rozdíl mezi UTC a UT1 nebyl nikdy větší než 0,9 sekundy. V praxi to znamená, že zpravidla jedenkrát za rok až rok a půl se vkládá přestupná sekunda nebo se vypouští. V posledních několika letech však tato korekce nebyla nutná. UTC je čas, který je šířen systémem GPS a rozhlasovými stanicemi, spolu s aktuálním rozdílem mezi UTC a UT1.

Pokud potřebujeme analyzovat časové řady s vysokými požadavky na přesnost, je dobré převést světový čas UTC na čas terestrický, a to podle vztahu

$$TT = UTC + \Delta T, \quad (\text{A.3})$$

kde ΔT je pravidelně zveřejňovaná korekce, dosahující zhruba 63 s na začátku roku 1998 a 65 s na začátku roku 2007.

¹Je dobře vědět, že do konce roku 1924 používali astronomové greenwichský střední čas (Greenwich Mean Time) GMT, ve kterém začínal den vždy v poledne.

²Juliánské datum, zkratka JD, se používá v astronomii všude, kde je třeba provádět početní operace s časovými údaji. Jedná se o počet dní od poledne 1. ledna roku 4713 před naším letopočtem, což je rok -4712 astronomického letopočtu. Např. Juliánské datum 1. ledna 2004 v 0 hodin UTC je JD 2453005,5 UTC.

A.3 Astronomické jednotky vzdálenosti

Astronomická jednotka. V pracích, zabývajících se objekty sluneční soustavy se často za jednotku vzdálenosti přijímá *astronomická jednotka* (zkratka AU, angl. astronomical unit), což přibližně odpovídá střední vzdálenosti středu Země od středu Slunce. Podle definice Mezinárodní astronomické unie se astronomická jednotka chápe jako poloměr ničím nerušené kruhové dráhy, po které obíhá tělísko o zanedbatelné hmotnosti kolem Slunce úhlovou rychlostí $0,01720209895$ radiánu za den. Její v současnosti nej přesnější hodnota je stanovena resolucí Mezinárodní astronomické unie z r. 2009

$$1 \text{ AU} = (1,495\,978\,707\,00 \cdot 10^{11} \pm 3) \text{ m} . \quad (\text{A.4})$$

Parsek. Astronomická jednotka se někdy užívá i ve hvězdné astronomii. Z ní také vychází jednotka vzdálenosti hvězd a dalších kosmických těles od nás, zvaná *parsek* (zkratka pc). Je to vzdálenost, ze které by se střední poloměr zemské dráhy kolem Slunce (1 AU) jevil pod úhlem jedné obloukové vteřiny. Je tedy

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{\sin 1''} = (3,085\,677\,581\,503 \pm 0,000\,000\,000\,062) \cdot 10^{16} \text{ m} . \quad (\text{A.5})$$

Důvodem zavedení této jednotky bylo, že trigonometricky určovaná hvězdná paralaxa p je právě úhel, pod kterým je vidět z dané hvězdy poloměr zemské dráhy. Vzhledem k obrovským vzdálenostem hvězd od nás jsou jejich paralaxy velmi malé a udávají se v obloukových vteřinách. Mezi vzdáleností a paralaxou platí jednoduchý vztah

$$[d]_{\text{pc}} = \frac{1}{[p]''} . \quad (\text{A.6})$$

Světelný rok. Pro úplnost ještě dodejme, že ve sdělovacích prostředcích a při popularizaci astronomie se často užívá jednotka *vzdálenosti* s poněkud matoucím názvem *světelný rok*. Rozumí se tím dráha, kterou urazí světlo ve vakuu za 1 rok. Nejde o oficiálně uznanou a řádně definovanou jednotku, takže se lze setkat s hodnotami světelného roku odvozenými od tropického i od siderického roku. Nejčastěji se ale světelným rokem rozumí dráha, kterou urazí ve vakuu elektromagnetické záření za 1 Juliánský rok (365,25 dne)

$$1 \text{ světelný rok} \doteq 9,460\,730\,5 \cdot 10^{15} \text{ m} , \quad 1 \text{ pc} \doteq 3,261\,56 \text{ světelného roku} . \quad (\text{A.7})$$

A.4 Hmotnosti a rozměry hvězd

Hmotnosti a rozměry hvězd se obvykle vyjadřují v jednotkách hmotnosti Slunce M_{\odot} a rovníkového poloměru Slunce R_{\odot} . To ale vzhledem k rostoucí přesnosti našich pozorování začíná být určitým problémem, neboť znalost hmotnosti i poloměru Slunce se s postupem doby zpřesňuje a každý autor používá trochu jiné hodnoty. Kromě toho je zřejmé, že nejde o konstanty v pravém slova smyslu: hmotnost Slunce se v důsledku ztráty hmoty dlouhodobě poněkud zmenšuje, zatímco jeho poloměr se mírně mění např. během jedenáctiletého slunečního cyklu (jak ukazují přesná interferometrická měření) a sekulárně z vývojových důvodů zvolna roste.

Velmi dlouho se např. užívala hodnota $R_{\odot} = 696\,260$ km, zatímco současná pozorování vedou na střední hodnotu $R_{\odot} = 695\,508$ km (Brown a Christensen-Dalsgaard, 1998). Zdálo by se, že rozdíl mezi oběma uvedenými hodnotami je zanedbatelný. Nemusí tomu ale tak být. Uvažme například, že rotační rychlosti hvězd se udávají v absolutních jednotkách km s^{-1} a pro pomaleji rotující hvězdy je lze snadno určit s přesností na 1 km s^{-1} . Kdybychom určovali rotační periodu obří hvězdy s poloměrem $30 R_{\odot}$ a obvodovou rotační rychlostí 5 km s^{-1} , pak pro první výše uvedenou hodnotu slunečního poloměru dostaneme $303^{\text{d}},801$, zatímco pro druhou $303^{\text{d}},473$. Rozdíl mezi oběma hodnotami je již po několika cyklech snadno měřitelný. Bylo by proto žádoucí, aby se Mezinárodní astronomická unie dohodla na definici *nominálních* hodnot sluneční hmotnosti a slunečního poloměru, vyjádřených v kg a m, které by byly „uzákoněny“ jako skutečné konstanty, povinné všemi badateli používané.

Pro účely tohoto textu tak učiníme provizorně a přijmeme jako konstanty tyto nominální hodnoty hmotnosti a poloměru Slunce (Gundlach a Merkwitz 2000, Brown a Christensen-Dalsgaard 1998)

$$M_{\odot} = (1,988435 \pm 0,000027) \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad (\text{A.8})$$

$$R_{\odot} = (6,95508 \pm 0,00026) \cdot 10^8 \text{ m}. \quad (\text{A.9})$$

Rejstřík

- α Cen A, 222
- α Ori, 273
- α Vir A, 208
- β Lyr, 190
- β Cep hvězdy, 208, 254
- δ Cep, 277
- δ Del hvězdy, 266
- δ Scuti hvězdy, 268
- η Aql, 277
- γ Cas, 258
- γ Dor hvězdy, 270
- λ Boo hvězdy, 267
- μ Cen, 263
- o* Cet, 279
- ρ Pup hvězdy, 266
- ζ Pup, 251

- A0538–668, 202
- absolutně černé těleso, 31, 87
- absolutní hvězdná velikost, 130
- absolutní teplota, 56
- absorpční koeficient, 130
- absorpční kontinuum, 40
- absorpční spektrum, 39
- adiabatické přiblížení, 217
- adiabatický děj, 145, 230
- AGB, 118
- AGB hvězdy, 279
- akrece, 242
- akreční disk, 189, 239, 283
- akustické vlny, 219
- AM CVn, 284
- AM Her, 284
- Am hvězdy, 266
- Anaxagorás, 9
- Angström, 289
- Ap hvězdy, 267

- apsidální pohyb, 140
- AR Lac, 275
- Arches, 233
- Archimédův zákon, 88
- asteroseismologie, 203
- astrofyzikální tok, 25
- astronomická jednotka, 291
- asymptotická větev obrů, 118, 168, 279
- atomová hmotnost, 53
- Atwoodovo číslo, 248
- Avogadrovo číslo, 53

- B hvězdy, 253
- Balmerova série, 42
- Be hvězdy, 256
- Bernoulliho rovnice, 162
- beryllium, 270
- bílý trpaslík, 121, 149, 154, 241, 281
- binární pulsar, 141, 202
- Blazhkův jev, 277
- bolometrická hvězdná velikost, 131
- bolometrická korekce, 131
- Boltzmannova konstanta, 58
- Boltzmannovo rozdělení, 37
- Boseho–Einsteinovo rozdělení, 32
- Boyleův–Mariottův zákon, 56
- Bp hvězdy, 253
- bremmstrahlung, 40
- Bruntova–Väisäläova frekvence, 220
- brzdné záření, 40
- BY Dra, 274

- CAK teorie, 164
- Carsonovy opacity, 208
- cefeidy, 68, 277
- cgs, 289

- CIR, 166
cirkumstelární čáry, 157
CNO cyklus, 73, 92
Comptonův rozptyl, 40
Coriolisova síla, 189
coulombovská bariéra, 70
Coxovy tabulky, 79
CP, 253
CP1 hvězdy, 266
CV Ser, 253
- částečná ionizace, 63
Čerenkovovo záření, 236
černá díra, 122, 239
červený veleobr, 286
- Daltonův zákon, 58
deflagrace, 242
deflagrační vlna, 243
degenerace, 59, 121
detonace, 242
deuterium, 227
deuteron, 70
diferenciální rotace, 176, 180
diferenční rovnice, 105
difuze, 87
diskretizace, 105
disociace, 225
disperzní vztah, 220, 221
Dopplerův jev, 20, 44
dosvit, 241
dotykové dvojhvězdy, 189
DQ Her, 284
druhý moment intenzity, 28
dusík, 74
dvojhvězdy, 136, 185
dvouhadinový atom, 39
dyn, 289
dynamická škála, 97, 206
dynamický model, 97
- Eddingtonova mez, 232
Eddingtonův tok, 25
efektivní teplota, 36
- efektivní tíhové zrychlení, 102
elektrické pole, 44
elektronová degenerace, 118
emisní koeficient, 30
emisní spektrum, 39
empirická kalibrace, 136
entropie, 77
ERA, 290
erg, 289
Eulerova integrace, 151, 162
eulerovská derivace, 217
EX Hydrae, 202
expandující obálka, 158
exploze, 242
- f-módy, 221
fázový prostor, 32
Fermiho–Diracovy funkce, 61
FK Com, 275
fotodisintegrace, 237
fotosféra, 102
fragmentace oblaku, 230
FU Ori, 281
fuory, 281
- g-módy, 14, 220
Gamowův vrchol, 70
Gauss, 289
Gaussův profil, 44, 46
Gayův–Lussacův zákon, 56
Goodricke, J., 277
gramatom, 53
grammolekula, 53
gravitační kolaps, 111, 225
gravitační konstanta, 174
gravitační potenciální energie, 10
GRB, 238
- harvardská klasifikace, 47
Hayashiho linie, 227
HD 200120, 261
Heisenbergův princip neurčitosti, 60
heliová slupka, 117
heliový záblesk, 121

- Helmholtz, H., 10
 Henyeova metoda, 105
 Herbigovy–Harovy objekty, 280
 Herschel, J., 9
 Hertzsprungův–Russellův diagram,
 114, 122, 132
 Hipparcos, 130
 hlavní posloupnost, 132
 hlavní posloupnost nulového věku,
 111, 126
 hmotnost Slunce, 292
 hmotový poměr, 185
 hnědý trpaslík, 120, 149
 homogenizace, 96
 horký pás, 189
 hrana série, 42
 Hubbleovy–Sandageovy proměnné,
 264
 Hubbleův parametr, 286
 hugoniota, 246
 hustota zářivé energie, 26
 hvězda se závojem, 182, 201
 hvězdný vítr, 13, 122, 157, 183, 239
 hvězdný vítr řízený zářením, 164
 hvězdokupy, 132, 134
 hvězdy se závojem, 256
 Hyády, 271
 hydrodynamické rovnice, 161, 217
 hydrostatická rovnováha, 95
 hyperjemné rozštěpení, 42
 hypernova, 238

 Chandrasekharova mez, 154, 235, 241
 Chapmanova–Jouguetova rychlost,
 246
 chemické složení, 136
 chemicky pekulární hvězdy, 253, 266,
 279
 chladnutí, 9
 chromosféra, 272

 ideální plyn, 55
 integrální intenzita, 23
 integrální tok, 26

 intenzita, 21
 interferometrie, 132
 intermediální polar, 284
 ionizace, 10, 36, 63, 77, 92, 205, 225
 isobarický děj, 145
 isochorický děj, 145
 isothermální atmosféra, 161
 isothermický děj, 145, 230
 isotropaní záření, 25

 Jeansovo kritérium, 111, 230, 237
 Johnsonův systém *UBV*, 129
 Juliánské datum, 290
 Jupiter, 120

 Kamiokande II, 236
 kataklyzmatické proměnné, 242, 283
 Kelvinova–Helmholtzova kontrakce,
 226
 Kelvinova–Helmholtzova nestabilita,
 249
 Kelvinova–Helmholtzova škála, 10,
 226
 Keplerova rychlost, 174
 Keplerův zákon, 97
 Kirchhoffův zákon, 31, 84
 koeficient opacity, 28
 konvekce, 12
 konvektivní nestabilita, 220, 238
 konvektivní přestřelování, 12, 121
 konvektivní zóna, 96, 112, 115, 136,
 272
 konvoluce, 45
 korotující interakční oblast, 166
 Krabí mlhovina, 236
 Kramersovy opacity, 205
 krátkoperiodické cefeidy, 277
 kvantování energie, 42

 lagrangeovská derivace, 217
 laminární rychlost deflagrace, 243
 látkové množství, 53
 LBV, 264
 Legendrův polynom, 176

- linearizace, 107
 lineární koeficient opacity, 28
 linie konstantní částicové rychlosti, 245
 lithiový problém, 13
 lithium, 228, 270
 lokální termodynamická rovnováha, 31, 84
 Lorentzův faktor, 239
 Lorentzův profil, 43, 46
 luminozitní třídy, 48
 Lymanova série, 42

 M 1, 236
 magická jádra, 69
 magnetické pole, 44
 magnetický polar, 202
 Malé Magellanovo mračno, 100, 165
 matematické kyvadlo, 222
 Maxwellovo rozdělení, 70
 Mayer, J. R., 10
 mechanická síla, 29
 meridionální cirkulace, 176
 metalicita, 165, 239
 metastabilní hladina, 40
 metoda úplné linearizace, 105
 mezihvězdná absorpce, 130
 mezinárodní atomový čas, 290
 Mieho rozptyl, 40
 Mira Ceti, 279
 miry, 277
 mladé hvězdné objekty, 281
 modul vzdálenosti, 134
 mol, 53
 molární hmotnost, 54
 molekulová hmotnost, 54
 monochromatická intenzita, 21
 Morganova–Keenenova klasifikace, 48
 myšlenkový experiment, 42

 nebulární čáry, 284
 nepravá absorpce, 40
 neradiální pulsace, 210
 neutrino, 70, 235, 236

 neutrinový problém, 16
 neutronizace, 235
 neutronová degenerace, 237
 neutronová hvězda, 122, 149, 235, 238
 novy, 283
 nukleární škála, 11
 nukleosyntéza, 239
 nultý moment intenzity, 23

 O hvězdy, 251
 obálková rotace, 178
 obří molekulová mračna, 111, 231
 oddělené dvojhvězdy, 189
 ochlazování, 225
 okrajové podmínky na povrchu, 101
 okrajové podmínky v centru, 100
 opacita, 28, 45, 78, 241
 opacitní mechanismus, 205, 254
 optická hloubka, 102
 optická tloušťka, 29
 oscilace, 44
 osová symetrie, 23

 P Cyg, 264
 p-módy, 14, 219
 parametr degenerace, 61
 Parkerova rovnice, 162
 parsek, 291
 pás nestability, 205, 268, 277
 Paschenova série, 42
 Pauliho vylučovací princip, 59
 Piggot, E., 277
 Planckova funkce, 31, 85
 Planckova konstanta, 19
 Plejády, 134, 271
 plynová konstanta, 57
 počáteční podmínky, 100
 podfotosférické vrstvy, 101
 Pogsonova rovnice, 130, 236
 pohybová rovnice, 68, 162
 Poissonova rovnice, 176, 217
 polar, 202, 284
 polodotykové dvojhvězdy, 189, 201
 poloměr Slunce, 292

- polytropický plyn, 246
polytropní děj, 145
polytropní model, 151
Popperovy tabulky, 235
populace I, 100
populace II, 100
populace III, 100, 231
povrchové gravitační vlny, 221
pravá absorpce, 40
primární složka, 195
profil P Cygni, 158, 264, 284
program EZ, 15
prostorový úhel, 82
protohvězda, 10, 225
proton–protonový řetězec, 69
protoneutronová hvězda, 237
první moment intenzity, 25
přechody v atomech, 41
případ A výměny hmoty, 195, 197
případ B, 195
přirozená šířka, 43
pseudosynchronizace, 275
PSR 1913+16, 141
pulsace, 203
pulsací konstanta, 208
pulsací nestabilita, 252, 254, 256,
268, 277
pulsací perioda, 207
pulsar, 141, 202, 241

R CrB hvězdy, 279
r-proces, 239, 240
R Geminorum, 139
radiální pulsace, 203
radioaktivita, 139
radioaktivní rozpad, 284
Rankinovy–Hugoniotovy rovnice, 244
Rayleighova přímka, 245
Rayleighova–Taylorova nestabilita,
247, 249
Rayleighův rozptyl, 40
Rayleighův–Jeansův zákon, 35
rázová vlna, 237, 242
reakce 3α , 74

Reimersův vítr, 168
rekombinace, 10
rekurentní novy, 283
relativistický apsidální pohyb, 141
roAp hvězdy, 267
Rocheova mez, 188
Rocheův model, 171, 185
Rosselandova střední opacita, 85
rotace, 44, 171
rovnice hydrostatické rovnováhy, 68,
176, 177
rovnice kontinuity, 162, 176
rovnice přenosu záření, 30, 81
rovnice tepelné rovnováhy, 69, 176
rovnice zachování hmoty, 67
rovnice zářivého přenosu energie, 78,
176
rozšíření, 43
RR Lyr hvězdy, 277
RS CVn, 275
RS Oph, 283
RV Tau, 280
rychlost zvuku, 206, 219

S Dor, 264
Sahova ionizační rovnice, 36, 64
Salpeterova reakce, 74
samoabsorpce, 231
sektorální módy, 212
semiempirická teorie konvekce, 92
semikonvektivní zóna, 121
setrvačný člen, 97
sférické funkce, 210
Sirius A, 266
Sirius B, 208
Slunce, 208, 220, 222
sluneční vítr, 157
SN 1987 A, 236
SN 1992 H, 287
SN 2006 JD, 287
SN 2006 LF, 287
Snellův zákon lomu, 220
SNR, 241
SOHO, 222

- soustava cgs, 289
soustava SI, 289
SPB hvězdy, 254
specifický objem, 56
spektrální čáry, 43
spektrální klasifikace, 47
spektrální série, 42
spektroskopická paralaxa, 131
Spika, 208
spojité spektrum, 39
SS Cyg, 283, 285
stacionární model, 95
standardní model Slunce, 13, 154
Starkův jev, 44
stavová rovnice, 53
Stefanova–Boltzmannova konstanta, 33
Strömgrenův systém *ubvy*, 129
střední intenzita, 23
střední molekulová hmotnost, 54
střední volná dráha, 86
SU UMa, 283
superadiabatická vrstva, 92
superiterace, 193
supernova, 122, 235, 284
supervítr, 168
světelný rok, 291
světový čas, 290
svítivé modré proměnné, 264, 286
SX Phe hvězdy, 269

T Pyx, 283
T Tau, 280
TAI, 290
TAMS, 138
technecium, 139
tepelná škála, 226
tepelná vodivost, 242
teplotní škála, 56
terestrický čas, 290
termodynamická rovnováha, 31
teserální módy, 212
Thomsonův rozptyl, 40
tlak záření, 27
tlaková škála, 12
tlakové rozšíření, 44
tok, 24
TOV rovnice, 65
trpasličí cefeidy, 268
trpasličí novy, 283
TT, 290
tunelový jev, 70
turbulence, 44, 242

U Gem, 283
účinný průřez, 236
úhel natočení Země, 290
úniková rychlost, 158
universální plynová konstanta, 57
úplná degenerace, 63
UT1, 290
UTC, 290
UV Cet, 274

V/R změny, 257
V1046 Ori, 254
V711 Tau, 275
V832 Cyg, 261
vektorový tok záření, 176
Velké Magellanovo mračno, 236
velké molekulové mračno, 281
virialový teorém, 10, 207, 226, 230
visuální hvězdná velikost, 130
vlnová rovnice, 219
vnitřní gravitační vlny, 220
vodíková slupka, 115, 197
Voigtův profil, 45
volné parametry, 99
volný pád, 97, 230
vynesení, 139
vývojový model, 96
vývojový paradox, 201
vztlková síla, 88, 220

W UMa, 275
W Vir hvězdy, 277
WC hvězdy, 252
Wienova aproximace, 35

Wienův posunovací zákon, 34
WN hvězdy, 252
Wolfovy–Rayetovy hvězdy, 286
WR hvězdy, 239, 252

YSO, 281

Z Cam, 283
záblesk záření gama, 238
zakázaná čára, 40
zakázaná oblast, 227
zákrytové dvojhvězdy, 132
zářivá difuze, 266
zbytek po výbuchu supernovy, 241
zčervenání, 130
zdánlivá hvězdná velikost, 130
Zeemanův jev, 44
zóna zářivé rovnováhy, 136
zonální módy, 212
ZZ Cet hvězdy, 282

Literatura

Obecná literatura, učebnice

- [1] Carrol, B.W., Ostlie, D.A. 2007 An Introduction to Modern Astrophysics, Pearson, Addison Wesley, San Francisco, ISBN 0-321-44284-9
- [2] de Loore C.W.H., Doom C. 1992 Structure and Evolution of of Single and Binary Stars, Astrophysics and Space Science Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 0-7923-1768-8
- [3] Kippenhahn R., Weigert A. 1990 Stellar Structure and Evolution, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-50211-4
- [4] Kleczek J. 1957 Nitro hvězd, Nakladatelství Československé akademie věd
- [5] Rose, W.K. 1998 Advanced Stellar Astrophysics, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0-521-58833-2
- [6] Schatzman E.L., Praderie F. 1993 The Stars, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-54196-9
- [7] Shore, S.N. 2003 The Tapestry of Modern Astrophysics, John Wiley & Sons, New Jersey
- [8] Stix, M. 2002 The Sun. An Introduction, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-53796-1
- [9] Švestka Z. 1954 Hvězdné atmosféry, Nakladatelství Československé akademie věd
- [10] Vanýsek V. 1980 Základy astronomie a astrofyziky, Academia Praha

Reference

- [11] Abell T., Bryan G.L., Norman M.L. 2002 Science 295, 93
- [12] Adams W.S., Kohlschütter A. 1914 Astrophys. J. 40, 385
- [13] Adelberger E.G., Austin S.M., Bahcall J.N. a kol. 1998 Rev. Mod. Phys. 70, 4, 1265
- [14] Aerts C., Waelkens C. 1993 Astron. Astrophys. 273, 135
- [15] Aerts C., Lamers H.J., Molenbergh G. 2004 Astron. Astrophys. 418, 639

-
- [16] Aller L.H. 1953 *Astrophysics: The Atmospheres of the Sun and Stars*, Ronald Press Co., New York
- [17] Aller L.H. 1963 *Astrophysics: The Atmospheres of the Sun and Stars*, 2nd Edition, Ronald Press Co., New York
- [18] Andersen J. 1991 *Astron. Astrophys. Rev.* 3, 91
- [19] Ando H., Osaki Y. 1975, *Publ. Astron. Soc. Japan* 27, 581
- [20] Angulo C., Arnould M., Rayet M. (NACRE collaboration) 1999 *Nuclear Physics A* 656, 1, <http://pntpm.ulb.ac.be/Nacre/nacre.htm>
- [21] Baade W., Zwicky F. 1934 *Proc. Nat. Acad. Sci.* 20, 254
- [22] Barker P.K. 1982 *Astrophys. J. Suppl.* 49, 89
- [23] Bath G.T., van Paradijs J. 1983 *Nature* 305, 33
- [24] Bedding T.R. a spol. 2010 *Astrophys. J. Lett.* 713, 2, L176
- [25] B elopolsky A. 1895 *Astrophys. J.* 1, 160
- [26] Bernasconi P.A., Maeder A. 1996 *Astron. Astrophys.* 307, 829
- [27] Bertotti B., Farinella P., Vokrouhlick y D. 2003 *Physics of the Solar System. Dynamics and Evolution, Space Physics and Spacetime Structure*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 1-4020-1428-7
- [28] Bertout C. 1989 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 27, 351
- [29] Bethe H. 1939 *Phys. Rev.* 55, 434
- [30] Bethe H., Critchfield C.L. 1938 *Phys. Rev.* 54, 248
- [31] Biermann L. 1951 *Z. Astrophys.* 29, 274
- [32] Bionta R.M. a spol. 1987 *Phys. Rev. Lett.* 58, 1494
- [33] Bjorkman J.E., Cassinelli J.P. 1993 *Astrophys. J.* 409, 429
- [34] B ohm-Vitense E. 1958 *Z. Astrophys.* 46, 108
- [35] Bopp B.W., Fekel F., Jr. 1977 *Astron. J.* 82, 490
- [36] Bouchy F., Carrier F. 2001 *Astron. Astrophys.* 374, 5
- [37] Breger M. 1979 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 91, 5
- [38] Breger M., Pamyatnykh A.A. 1998 *Astron. Astrophys.* 332, 958
- [39] Breger M., Stockenhuber H. 1983 *Hvar Obs. Bull.* 7, 283
- [40] Briquet M., Hubrig S., De Cat P., Aerts C., North P., Sch oller M. 2007 *Astron. Astrophys.* 466, 269
- [41] Burgay M., D'Amico N., Possenti A., Manchester R.N., Lyne A.G., Joshi B.C., McLaughlin M.A., Kramer M., Sarkisian J.M., Camilo F., Kalogera V., Kim C., Lorimer D.R. 2003 *Nature* 426, 531
- [42] Burgasser A.J., Kirkpatrick J.D., Brown M.E., Reid I.N., Gizis J.E., Dahn C.C., Monet D.G., Beichman C.A., Liebert J., Cutri R.M., Skrutskie M.F. 1999 *Astrophys. J.* 522, L65
- [43] Castor J.I., Abbott D.C., Klein R.I. 1975 *Astrophys. J.* 195, 157
- [44] Caughlan G.R., Fowler W.A. 1988 *Atomic data and Nuclear Data Tables* 40,

- [45] Claret A. 2004 *Astron. Astrophys.* 424, 919
- [46] Claret A., Giménez A. 1992 *Astron. Astrophys. Suppl.* 96, 255
- [47] Clocchiatti A. a spol. 1996 *Astron. J.* 111, 3, 1286
- [48] Code A.D., Davis J., Bless R.C., & Hanbury Brown R. 1976 *Astrophys. J.* 203, 417
- [49] Conti P.S. 1970 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 82, 781
- [50] Conti P.S. 1974 *Astrophys. J.* 187, 539
- [51] Conti P.S., Niemela V.S. 1976 *Astrophys. J.* 209, L37
- [52] Cox A.N., Stewart J.N., Eilers D.D. 1965 *Astrophys. J. Suppl.* 11, 1
- [53] Cranmer S.R., Owocki S.P. 1996 *Astrophys. J.* 462, 469
- [54] Crawford J.A. 1955 *Astrophys. J.* 121, 71
- [55] Debernardi Y., Mermilliod J.-C., Carquillat J.-M., Ginestet N. 2000 *Astron. Astrophys.* 354, 881
- [56] de Loore C., De Greve J.P. 1992 *Astron. Astrophys. Suppl.* 94, 453
- [57] Dziembowski W.A., Pamyatnykh A.A. 1993 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 262, 204
- [58] Dziembowski W.A., Moskalik P., Pamyatnykh A.A. 1993 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 265, 588
- [59] Eddington A.S. 1918 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 79, 2
- [60] Emerson D. 1996 *Interpreting Astronomical Spectra*, John Wiley & Sons, Chichester, ISBN 0-471-97679-2
- [61] Endal A.S., Sofia S. 1976 *Astrophys. J.* 210, 184
- [62] Endal A.S., Sofia S. 1978 *Astrophys. J.* 220, 279
- [63] Endal A.S., Sofia S. 1979 *Astrophys. J.* 232, 531
- [64] Faulkner J., Roxburgh I.W., Strittmatter P.A. 1968 *Astrophys. J.* 151, 203
- [65] Fickett W., Davis W.C. 2000 *Detonation: Theory and Experiment*, Courier Dover Publications, ISBN 0-486-41456-6
- [66] Figer D. 2005 *Nature*, 434, 192
- [67] Flower P.J. 1996 *Astrophys. J.* 496, 355
- [68] Frost S.A., Conti P.S. 1976 in *Be and Shell Stars*, IAU Symp. 70, Ed. by A. Slettebak, Dordrecht, Reidel, 139
- [69] Gieren W.P., Fouqué P., Gómez M. 1998 *Astrophys. J.* 496, 17
- [70] Graboske H.C., Harwood D.J., Rogers F.J. 1969 *Phys. Rev.* 186, 210
- [71] Gray R.O. 2010 *A Digital Spectral Classification Atlas*, <http://nedwww.ipac.caltech.edu/level15/Gray/Gray1.html>
- [72] Gribov V.N., Pontecorvo B.M. 1969 *Phys. Lett. B* 28, 493
- [73] Groenewegen M., Decin L., Salaris M., De Cat P. 2007 *Astron. Astrophys.* 463, 579

-
- [74] Gundlach J.H., Merkwowitz S.M. 2000 Phys. Rev. Lett. 85, 2869
- [75] Habets G.M.H.J. 1987 Physics of Be Stars, IAU Col. 92, Ed. A.Slettebak a T.P. Snow, Cambridge Univ. Press, 509
- [76] Harmanec P. 1970 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 21, 113
- [77] Harmanec P. 1981 Binaries Among B Stars, Workshop on Pulsating B Stars, Ed. by G.E.V.O.N. and C. Sterken, Nice Obs. Publ., 99
- [78] Harmanec P. 1987 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 38, 52
- [79] Harmanec P. 1988 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 39, 329
- [80] Harmanec P. 1990 Astron. Astrophys. 237, 91
- [81] Harmanec P. 1991 in Rapid Variability of OB Stars: Nature and Diagnostic Value, ESO Conf. and Workshop Proc. No. 36, 265
- [82] Harmanec P. 1998 Astron. Astrophys. 335, 173
- [83] Harmanec P. 2002a in New Directions for Close Binary Studies: The Royal Road to the Stars, Publ. Cannakale Onsekiz Mart University, 2, 221
- [84] Harmanec P. 2002b Astron. Nachr. 323, 2, 87
- [85] Harmanec P. 2002c in Proc. IAU Col. 187 Exotic Stars as Challenges to evolution, Ed. by A. Tout and W. Van Hamme, ASP Conf. Ser. 279, 221
- [86] Harmanec P., Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A., Kuznetsov O.A. 2002 Astron. Astrophys. 396, 937
- [87] Hayashi C. 1961 Publ. Astron. Soc. Japan 13, 450
- [88] Hearnshaw J.B. 1999 New Astronomy Reviews 43, 403
- [89] Henrichs H.F., Hammerschlag-Hensberge G., Howarth I.D., Barr P. 1983 Astrophys. J. 268, 807
- [90] Henyey L.G., Wilets L., Böhm K.H., Le Levier R., Levee R.D. 1959 Astrophys. J. 129, 628
- [91] Herbison–Evans D., Hanbury Brown R., Davis J., Allen L.R. 1971 Mon. Not. R. Astron. Soc. 151, 161
- [92] Hillebrandt W., Niemeyer J.C. 2000 Annu. Rev. Astron. Astrophys. 38, 191
- [93] Hirata K. a spol. 1987 Phys. Rev. Let. 58, 1490
- [94] Chandrasekhar S. 1938 Stellar Structure, Univ. of Chicago Press
- [95] Christensen-Dalsgaard J. 2003 Stellar Oscilations, <http://www.eneas.info/>
- [96] Jurcsik J., Montesinos B. 1999 New Astronomy Reviews 43, 415
- [97] Kambe E., Osaki Y. 1988 Publ. Astron. Soc. Japan 40, 313
- [98] Kaper L., van der Meer A., van Kerkwijk M., van den Heuvel E. 2006 The Messenger, ESO, No. 126, 27
- [99] Kato S. 1966 Publ. Astron. Soc. Japan 18, 374
- [100] Kawka A., Vennes S. 2003 Astrophys. J. 125, 1444
- [101] Kawka A., Vennes S., Dupuis J., Chayer P., Lanz T. 2008 Astrophys. J. 675, 1518

- [102] Kervella P., Bersier D., Mourard D., Nardetto N., Coudé du Foresto V. 2004 *Astron. Astrophys.* 423, 327
- [103] Kippenhahn R., Weigert A. 1967 *Z. Astrophys.* 65, 251
- [104] Kippenhahn R., Meyer-Hofmeister E., Thomas H.C. 1970 *Astron. Astrophys.* 5, 155
- [105] Kirkpatrick J.D., Reid I.N., Liebert J., Cutri R.M., Nelson B., Beichman C.A., Dahn C.C., Monet D.G., Gizis J.E., Skrutskie M.F. 1999 *Astrophys. J.* 519, 802
- [106] Kleczek J. 2002 *Velká encyklopedie vesmíru*, Academia, Praha, ISBN 80-200-0906-X
- [107] Kotak R., Vink J.S. 2006 *Astron. Astrophys.* 460, L5
- [108] de Koter A., Heap S.R., Hubený I. 1997 *Astrophys. J.* 477, 792
- [109] Kříž S., Harmanec P. 1975 *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 26, 65
- [110] Kurtz D. 1982 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 200, 807
- [111] Kurtz D. 2000 *ASP Conf. Ser.* 210, 287
- [112] Kvasnica J. 1965 *Termodynamika*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha
- [113] Lagadec E., Zijlstra A.A. 2008 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 390, 59
- [114] Langer N., Hamann W.-R., Lennon M., Najarro F., Pauldrach A. W. A., Puls J., 1994 *Astron. Astrophys.* 290, 819
- [115] Larson R.B., Demarque P.R. 1964 *Astrophys. J.* 140, 524
- [116] Lebzelter T., Hron J. 2003 *Astron. Astrophys.* 411, 533
- [117] Ledoux P. 1951 *Astrophys. J.* 114, 373
- [118] van Leeuwen F. 1999 *Astron. Astrophys.* 341, L71
- [119] Levi-Civita T. 1937 *Amer. J. Math.* 59, 225
- [120] Li C., Junliang Z. 1999 *Harmonizing Cosmic Distance Scales in a Post-Hipparcos Era*, Ed. by D. Egret a A. Heck, *ASP Conf. Series* 167, 259
- [121] Lucy L.B., Solomon P.M. 1970 *Astrophys. J.* 159, 879
- [122] Maeder A. 1997 *Astron. Astrophys.* 321, 134 (paper 2)
- [123] Maeder A. 1999 *Astron. Astrophys.* 347, 185 (paper 4)
- [124] Maeder A. 2009 *Formation and Evolution of Rotating Stars: From the First Stars to the Sun*, Springer, ISBN 3-540-76948-X
- [125] Maeder A., Meynet G. 2000a *The Evolution of Rotating Stars*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 38, 143
- [126] Maeder A., Meynet G. 2000b *Astron. Astrophys.* 361, 159 (paper 6)
- [127] Maeder A., Meynet G. 2001 *Astron. Astrophys.* 373, 555 (paper 7)
- [128] Maeder A., Zahn J.-P. 1998 *Astron. Astrophys.* 334, 1000 (paper 3)
- [129] McAlister H.A. a spol. 2005 *Astrophys. J.* 628, 439
- [130] Mayer P. 1984 *Observatory* 104, 77

-
- [131] Metcalfe T.S., Nather R.E., Watson T.K., Kim S.-L., Park B.-G., Handler G. 2005 *Astron. Astrophys.* 435, 649
- [132] Merrill P.W. 1952 *Astrophys. J.* 116, 21
- [133] Meynet G., Maeder A. 1997 *Astron. Astrophys.* 321, 465 (paper 1)
- [134] Meynet G., Maeder A. 2000 *Astron. Astrophys.* 361, 101 (paper 5)
- [135] Meynet G., Maeder A. 2003, *Astron. Astrophys.* 404, 975
- [136] Mihalas D. 1970 *Stellar Atmospheres*. W.H. Freeman & Company, San Francisco
- [137] Michaud G. 1970 *Astrophys. J.* 160, 641
- [138] Mikulášek Z. 2000 *Úvod do fyziky hvězd a hvězdných soustav*, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Katedra teoretické fyziky a astrofyziky, Brno
- [139] Miller C. 2010 *Radiative Processes*,
<http://www.astro.umd.edu/~miller/teaching/astr601/>
- [140] Misner C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A 1973 *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, ISBN 0-7167-0344-0
- [141] Montes M. 1997 <http://rsd-www.nrl.navy.mil/7212/montes/sne.html>
- [142] Morel P., Pichon B., Provost J., Berthomieu G. 1999 *Astron. Astrophys.* 350, 275
- [143] Morgan W.W., Keenan P.C. 1973 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 11, 29
- [144] Morton, D.C., Underhill, A.B. 1977 *Astrophys. J. Suppl.* 33, 83
- [145] Moultaqa J., Ilovaiski S.A., Pruguiel P., Soubrian C. 2004 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 116, 693
- [146] Mullan D.J. 1984 *Astrophys. J.* 283, 303
- [147] Munari U., Dallaporta S., Siviero A., Soubiran C., Fiorucci M., Girard P. 2004 *Astron. Astrophys.* 418, L31
- [148] Murdin P., Murdin L. 1985 *Supernovae*, Cambridge University Press, Cambridge
- [149] Narayanan V.K., Gould A. 1999 *Astrophys. J.* 523, 328
- [150] Norton A.J., Wynn G.A., Somerscales R.V. 2004 *Astrophys. J.* 614, 349
- [151] Osaki Y. 1986 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 98, 30
- [152] Osaki Y., Shibahashi H. 1986 *Astrophys. Space Sci.* 118, 195
- [153] Owocki S.P., Cranmer S.R., Fullerton A.W. 1995 *Astrophys. J.* 453, L37
- [154] Paczyński, B. 1971 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 9, 183
- [155] Pan X., Shao M., Kulkarni S.R. 2004 *Nature* 427, 326
- [156] Parker E.N. 1958 *Astrophys. J.* 128, 664
- [157] de Pater I., Lissauer J.J. 2001 *Planetary Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0-521-48219-4
- [158] Perlmutter, S. a spol. 1997 *Astrophys. J.* 483, 565
- [159] Petersen J.O., Christensen-Dalsgaard J. 1999 *Astron. Astrophys.* 352, 547

- [160] Petschek G.A. 1990 *Supernovae*, Springer-Verlag, New York
- [161] Pinsonneault M.H., Stauffer J., Soderblom D.R., King J.R., Hanson R.B. 1998 *Astrophys. J.* 504, 170
- [162] Plavec M. *Advan. Astron. Astrophys.*, Ed by Z. Kopal, Academic Press, New York, 6, 201
- [163] Popper D.M. 1980 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 18, 115
- [164] Porter J.M. 1996 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 280, L31
- [165] Preston G.W. 1974 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 12, 257
- [166] Rivinius Th., Baade D., Štefl S., Stahl O., Wolf B., Kaufer A. 1998 in *A half century of stellar pulsations interpretations*, Ed. by P.A. Bradley and J.A. Guzik, *ASP Conf. Ser.* 135, 343
- [167] Robertson H.P. 1938 *Annals of Mathem.* 39, 101
- [168] Robichon N., Arenou F., Mermilliod J.-C., Turon C. 1999 *Astron. Astrophys.* 345, 471
- [169] Rodríguez E., Breger M. 2001 *Astron. Astrophys.* 366, 178
- [170] Rogers F.J., Iglesias C.A. 1992 *Astrophys. J. Suppl.* 79, 507
- [171] Rogers F.J., Swenson F.J., Iglesias C.A. 1996 *Astrophys. J.* 456, 902
- [172] de Ruyter S., van Winckel H., Dominik C., Waters L.B.F.M., Dejonghe H. 2005 *Astron. Astrophys.* 435, 1, 161
- [173] Sackmann I.-J., Anand S.P.S. 1970 *Astrophys. J.* 162, 105
- [174] Salpeter E.E. 1952 *Astrophys. J.* 115, 326
- [175] Sandage A. 1957 *Astrophys. J.* 125, 435
- [176] Shapley H. 1914 *Astrophys. J.* 40, 443
- [177] Shindo M., Hashimoto M., Eriguchi Y., Müller E. 1997 *Astron. Astrophys.* 326, 177
- [178] Shu, F.H. 1982 *The Physical Universe: an Introduction to Astronomy*, Univ. Science Books, Sausalito
- [179] Schaller G., Schaefer D., Meynet G., Maeder A. 1992 *Astron. Astrophys. Suppl.* 96, 269
- [180] Schnurr O., Moffat A.F.J., Villar-Sbaffi A., St-Louis N., Morrell N.I. 2009 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 395, 823
- [181] Schrijvers C. 1999, PhD disertace, Universiteit van Amsterdam, Holandsko
- [182] Schwarzschild M. 1958 *Structure and Evolution of the Stars*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey
- [183] Southworth J., Maxted P.F.L., Smalley B. 2005 *Astron. Astrophys.* 429, 645
- [184] Stark J. 1914 *Annalen der Physik* 43, 965
- [185] Stebbins J. 1908 *Astrophys. J.* 27, 188
- [186] Stothers R.B., Chin C.-W. 1995 *Astrophys. J.* 451, L61
- [187] Struve O. 1931 *Astrophys. J.* 73, 94

-
- [188] Thaller M.L. 1997 *Astrophys. J.* 487, 380
- [189] Thorne A.P., Litzén U., Johansson S. 1999 *Spectrophysics: principles and applications*, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-65117-9
- [190] Townsend R.H.D. 1997 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 284, 839
- [191] Truscott, A.G. a spol. 2001 *Science* 291, 5513, 2570
- [192] Unsöld A. 1955 *Physik der Sternatmosphären*, Berlin, 2. vydání
- [193] Uytterhoeven, K. 2004, PhD disertace, Katholieke Universiteit Leuven, Belgie
- [194] Vemury S.K., Stothers R. 1978 *Astrophys. J.* 225, 939
- [195] Vogt S.S., Penrod D.G. 1983 *Astrophys. J.* 275, 661
- [196] Walborn N.R., Howarth I.D., Lennon D.J. a kol. 2002 *Astron. J.* 123, 2754
- [197] Weizsäcker C.F. 1937 *Phys. Zeit.* 38, 176
- [198] Wolf C.J.E., Rayet G. 1867 *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* 65, 292
- [199] Woosley S., Janka H.-T. 2006 *Nat. Phys.* 1, 3, 147
- [200] Wuchterl G., Tscharnuter W.M. 2003 *Astron. Astrophys.* 398, 1081
- [201] Zeeman P. 1897 *Nature* 55, 347
- [202] Zwahlen N., North P., Debernardi Y., Eyer L., Galland F., Groenewegen M.A.T., Hummel C.A. 2004 *Astron. Astrophys.* 425, L45