

0.1 Expoziční doba

0.1.1 Jaký signál lze očekávat při dané expoziční době?

Mějme V_{MPC} jako standardní zjevnou hvězdnou velikost planetky v oboru V (dle efemerid MPC), h' výšku planetky nad obzorem, X_v extinkční koeficient atmosféry v oboru V. Vzdušná hmota (pro planparalelní atmosféru) je:

$$M_{\text{air}} \doteq \sec z = \frac{1}{\sin h'}.$$

Instrumentální zjevná hvězdná velikost po započtení extinkce:¹

$$v = V_{\text{MPC}} + X_v M_{\text{air}}.$$

Pro kalibraci nulového bodu využijeme hvězdu Vegu (spektrální typ A0 V), mající $V^{\text{Vega}} = 0,03$ mag a monochromatický tok na 548 nm [4]:

$$F_{548}^{\text{Vega}} = 3,64 \cdot 10^{-9} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{\AA}^{-1} = 3,64 \cdot 10^{-11} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1}.$$

V Johnosonově filtru V s propustností $f_V(\lambda)$ by bylo:

$$F_V^{\text{Vega}} = \int_{\lambda} f_V(\lambda) F_{\lambda}^{\text{Vega}} d\lambda \doteq 88 \text{ nm } F_{548}^{\text{Vega}} = 3,20 \cdot 10^{-9} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Dle Pogsonovy rovnice:

$$v - V^{\text{Vega}} = -2,5 \log_{10} \frac{F_v}{F_V^{\text{Vega}}},$$

vypočteme tok od planetky v (instrumentálním) oboru v :

$$F_v = F_V^{\text{Vega}} 10^{0,4(V^{\text{Vega}} - v)}. \quad (1)$$

Označme D průměr zrcadla dalekohledu, $S_d = \pi D^2/4$ plochu zrcadla a t_{exp} expoziční dobu. Energie dopadá na zrcadlo, potažmo detektor pak je:

$$E = F_v t_{\text{exp}} S_d.$$

¹ za předpokladu, že barevný koeficient $A_v = 0$ mag nebo $v - r = 0$ mag

Typická energie jednoho fotonu (kvanta), s $\lambda \simeq 548$ nm:

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$$

a očekávaný počet fotonů:

$$n_\gamma = \frac{E}{E_\gamma}.$$

Při kvantové účinnosti Q detektoru je odpovídající počet elektronů:²

$$n_{e^-} = Qn_\gamma,$$

Při účinnosti η A/D převodníku je očekávaný (celkový) signál od planety:

$$S_{\text{star}} = \eta n_{e^-}.$$

0.1.2 Signál ve filtru R

Pro určitý (předpokládaný) barevný index planety, $v - r = +0,3$ mag, resp. $r = v - (v - r)$, je příslušný tok:

$$F_r = F_V^{\text{Vega}} 10^{0,4(V^{\text{Vega}} - r)}$$

a pro fotony s $\lambda_R \simeq 597$ nm vychází signál ve filtru r :

$$S_{\text{star}}^r = \eta Q_R \frac{F_r t_{\text{exp}} S_d}{hc/\lambda_R}.$$

0.1.3 Velikost obrazu hvězdy

Úhlový rozměr pixelu je dán:

$$\phi_p = 2 \arctg \frac{d_p/2}{f} \doteq \frac{d_p}{f},$$

kde f označuje ohniskovou vzdálenost dalekohledu a d_p rozměr jednoho pixelu CCD čipu.

² Do Q lze zahrnout i propustnost $T_{\text{telescope}} \simeq 0,96^5 \doteq 0,82$ optického systému dalekohledu a propustnost $T_{\text{filter}} \simeq 0,7$ fotometrického filtru.

Úhlový rozměr difrakčního obrazce (první minimum):

$$\phi_D = \frac{2r_1}{f}, \quad r_1 = \frac{3,832}{b}, \quad b = \frac{D\pi}{\lambda f},$$

kde r_1 je vzdálenost prvního minima difrakčního obrazce v ohniskové rovině.

Úhlový rozměr (FWHM) seeingu:

$$\phi_S = \frac{2\sqrt{2\ln 2} s_0}{f},$$

kde s_0 je parametr gaussovské funkce popisující seeing (taktéž v ohniskové rovině).

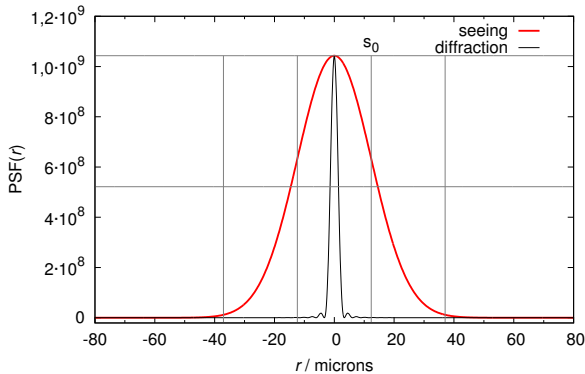
Funkce rozptylu pro difrakci na kruhovém otvoru:

$$\text{PSF}_D(r) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{J_1(br)}{r} \right]^2,$$

kde J_1 označuje Besselovu funkci 1. řádu. Funkce rozptylu pro seeing (při dlouhé expozici):

$$\text{PSF}_S(r) = \frac{1}{2\pi s_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2s_0^2}\right).$$

Dalekohled Stellare Officina RiLA 600 F5 [3] má malé aberace v celém zorném poli, kreslí blízko difrakčního limitu. Z obr. 1 je zřejmé, že seeing dominuje nad difrakcí.



Obr. 1 — Funkce rozptylu $\text{PSF}_S(r)$ a $\text{PSF}_D(r)$ pro seeing a difrakci, za předpokladů: $f = 3$ m, $D = 0,6$ m, $\phi_S = 2''$.

0.1.4 Rozměr fotometrické clonky

Při aperturní fotometrii je nutné volit velikost clonky takovou, aby zahrnovala určitou (nezanedbatelnou) část obrazu hvězdy. Velká clonka zahrnující celou hvězdu zřejmě nemusí být optimální, a to z důvodu vzrůstajícího šumu od oblohy, temného proudu a vyčítání.

Rozměr clonky v pixelech můžeme například volit:

$$d_{\text{aperture}} = \frac{6s_0}{d_p},$$

a pak počet pixelů ve clonce:

$$n_{\text{pixels}} = \frac{\pi}{4} d_{\text{aperture}}^2.$$

Do clonky ovšem dopadne jen část záření od hvězdy. Při poloměru clonky (vyjádřeném v metrech) $R = d_p d_{\text{aperture}}/2$ je inkriminovaný faktor:

$$\int_0^R \text{PSF}_S(r) 2\pi r dr = 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2s_0^2}\right)$$

a signál:

$$S_{\text{aperture}} = S_{\text{star}} \left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2s_0^2}\right) \right].$$

0.1.5 Signál od oblohy

Při bezměsíčné noci, bez světelného znečištění (na Jizerce), lze očekávat plošnou jasnost (v oboru V) $m'_{\text{sky}} = 21,3 \text{ mag} \cdot \text{arcsec}^{-2}$. Pro úhel odpovídající jednomu pixelu je pak zjevná hvězdná velikost:

$$v'_{\text{sky}} = m'_{\text{sky}} - 5 \log_{10}[\phi_p]_{\text{arcsec}}.$$

Obdobně jako v rovnici (1) máme:

$$F'_{\text{sky}} = F_V^{\text{Vega}} 10^{0,4(V^{\text{Vega}} - v'_{\text{sky}})}$$

a

$$E_{\text{sky}} = F'_{\text{sky}} t_{\text{exp}}.$$

Signál od oblohy, připadající na 1 pixel, je tedy:

$$S_{\text{sky}} = \eta Q \frac{E_{\text{sky}}}{E_\gamma}.$$

0.1.6 Temný proud

Pro kameru Andor iKon-L 936 při teplotě $T = -70^\circ\text{C}$ je udávána hodnota $\text{DC} = 0,00040 \text{ e}^- \text{ pxl}^{-1} \text{ s}^{-1}$ [1]. Signál od temného proudu, na 1 pixel, je tedy:

$$S_{\text{dark}} = \text{DC} t_{\text{exp}} \eta.$$

0.1.7 Poměr signál/šum

Poissonovský fotonový šum vypočteme ze signálu [2]:³

$$N_{\text{aperture}} = \sqrt{\eta S_{\text{aperture}}}.$$

Podobně se chová šum od oblohy, $N_{\text{sky}} = \sqrt{\eta S_{\text{sky}}}$, i šum od temného proudu, $N_{\text{dark}} = \sqrt{\eta S_{\text{dark}}}$.

Kamera Andor iKon-L 936 při vyčítací frekvenci 3 MHz, High Sensitivity Output má hodnotu $\text{RO} = 11,7 \text{ e}^- \text{ pxl}^{-1}$ [1]. Její vyčítací šum je:

$$N_{\text{readout}} = \text{RO} \eta.$$

Za diskretizační šum lze dosadit prostě $N_{\text{discrete}} = 1 \text{ ADU}$.

Celkový šum jest dán jako:

$$N = \sqrt{N_{\text{aperture}}^2 + n_{\text{pixels}}(N_{\text{sky}}^2 + N_{\text{dark}}^2 + N_{\text{readout}}^2 + N_{\text{discrete}}^2)}$$

a nakonec zbývá spočítat poměr ‘signál od planetky’ lomeno ‘šum od všeho’:

$$\frac{S_{\text{aperture}}}{N} = \frac{S_{\text{aperture}}}{\sqrt{S_{\text{aperture}} + n_{\text{pixels}}(S_{\text{sky}} + S_{\text{dark}} + N_{\text{readout}}^2 + N_{\text{discrete}}^2)}}.$$

0.1.8 Očekávaná střední kvadratická odchylka hvězdné velikosti

Budeme-li při určitém poměru S/N pořizovat řadu pozorování, nebude světelná křivka srovnávacích hvězd konstantní, nýbrž bude mít určitou střední hodnotu hvězdné velikosti \bar{m} a střední kvadratickou odchylku σ . Dle Pogsonovy rovnice:

$$(\bar{m} - \sigma) - \bar{m} = -2,5 \log_{10} \frac{S + N}{S},$$

³ Faktor η zde používáme proto, že „fyzicky“ počítáme elektrony, nikoli ADU, čili $[N]_{\text{e}^-} = \sqrt{[S]_{\text{e}^-}}$ a $[N]_{\text{ADU}} = \eta [N]_{\text{e}^-}$, $[S]_{\text{ADU}} = \eta [S]_{\text{e}^-}$.

je tedy:

$$\sigma = 2,5 \log_{10} \left(1 + \frac{1}{\frac{S}{N}} \right).$$

Reálná data často (vždy!) vykazují hodnotu σ větší než očekávanou, neboť zde nejsou započtené různé *systematické chyby* (např. vliv oblačnosti, proměnnost extinkce, parazitní světlo, kosmické záření, poruchy hardwaru, chyby v identifikaci objektu, slabé hvězdy ve clonce, aj.)

0.1.9 Jakou maximální expoziční dobu zvolit?

Integrál funkce rozptylu přes jeden (prostřední) pixel:

$$f_1 = 4 \int_0^{\frac{d_p}{2}} \int_0^{\frac{d_p}{2}} \text{PSF}_S(x, y) \, dx dy.$$

Jeho hodnotu můžeme spočítat numericky (např. pomocí Reduce, Numerical Recipes, scipy.dblquad). Maximální signál v jednom pixelu je pak:⁴

$$S_1 = f_1 S_{\text{star}} + S_{\text{sky}} + S_{\text{dark}}.$$

Je-li úroveň saturace $S_{\text{sat}} = 65\,535$ ADU a chceme-li dosáhnout určitého signálu S' pod saturací, musíme expoziční dobu prodloužit na:

$$t'_{\text{exp}} = t_{\text{exp}} \frac{S'}{S_1}.$$

⁴ Není-li hvězda centrována, nýbrž posunuta na rozhraní čtyř pixelů, je faktor:

$$f_2 = \int_0^{d_p} \int_0^{d_p} \text{PSF}_S(x, y) \, dx dy < f_1$$

a odpovídající signál S_2 jest pochopitelně menší.

Literatura

Učebnice

Reference

- [1] *Andor iKon-L 936 Specifications*. [online] [cit. 2013-08-20], <<http://www.andor.com/>>.
- [2] BROŽ, M., ŠOLC, M. *Fyzika sluneční soustavy*. Praha: MatfyzPress, 2013. ISBN ???.
<http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/fyzika_malych_teles/>.
- [3] *Officina Stellare* [online] [cit. 2013-08-20],
<http://www.officinastellare.com/products_scheda.php?idProd=29>.
- [4] OKE, J. B., SCHILD, R. E. *The absolute spectral energy distribution of Alpha Lyrae*. *Astrophys. J.*, **161**, s. 1015–1023, 1970.