

DVOJHVĚZDY

*Petr Harmanec, Pavel Mayer * & Petr Zasche*
Astronomický ústav Univerzity Karlovy

Verze 10 13. února 2023

Obsah

1	Obecně o dvojhvězdách	4
1.1	Proč studovat dvojhvězdy a zdroje informací o nich	4
1.2	Pojem dvojhvězdy a rozsah fyzikálních vlastností	6
1.3	Rocheův model	7
1.4	Klasifikace dvojhvězd	12
1.4.1	Klasifikace podle metody pozorování	12
1.4.2	Klasifikace podle dynamické stability	15
2	Určování kvantitativních vlastností dvojhvězd a vícenásobných soustav	15
2.1	Úvodní úvahy	15
2.2	Určování okamžiků minim zákrytové proměnné či jiných referenčních bodů na světelné či jiné fázové křivce:	17
2.2.1	Kwee-van Woerdenova metoda a její zobecnění	18
2.3	$O-C$ diagramy a změna oběžných period dvojhvězd	20
2.4	Určování elementů spektroskopických dvojhvězd	22
2.4.1	Odhad velké poloosy oběžné dráhy dvojhvězdy	22
2.4.2	Případ, kdy pozorujeme obě spektra	22
2.4.3	Případ, kdy pozorujeme pouze jedno spektrum	26
2.4.4	Hudba budoucnosti...	28
2.4.5	Lucyho a Sweenyho test, zda je malá výstřednost dráhy reálná	28
2.5	Určování elementů zákrytových dvojhvězd	30
2.5.1	Zákryty v kruhové dráze při sklonu 90°	30
2.5.2	Úplné zákryty při sklonu menším než 90°	31
2.5.3	Okrajové ztemnění	34
2.6	Periodické změny oběžné periody	36
2.6.1	Efekt rozdílné dráhy světla	36
2.6.2	Dynamické efekty	40
2.6.3	Rotace přímky apsid	45
2.7	Neperiodické změny periody	49
2.8	Určování elementů vizuálních dvojhvězd	50
2.9	Vícenásobné soustavy	53

*Dr. Mayer zemřel na své 86. narozeniny 7.11.2018

3	Metody určování radiálních rychlostí, profilů spektrálních čar jednotlivých složek a dráhových elementů pomocí digitalizovaných spekter	57
3.1	Klasická měření na fotografických spektrech	57
3.2	Analogový spektrometr	58
3.3	Základní úvahy o elektronických spektrech	58
3.4	Porovnání profilů čar s Gaussovými funkcemi	60
3.5	Něco matematiky na připomenutí	60
3.6	Radiální rychlosti s použitím kroskorelační funkce	63
3.7	Určování radiálních rychlostí pomocí rozšiřovací funkce	64
3.8	Dopplerovská tomografie	65
3.9	Oddělení spekter individuálních složek (spectra disentangling)	66
3.10	Programy na řešení křivek radiálních rychlostí a světelných křivek	69
3.10.1	Woodův program WINK	69
3.10.2	Program WD Wilsona a Devinneyho	69
3.10.3	Programy PHOEBE 1 a PHOEBE 2	70
3.10.4	Program BINSYN A.P. Linnella and I. Hubeného	70
3.10.5	Program SPEL	71
3.10.6	Program FOTEL	72
3.10.7	Některé další programy	72
3.10.8	Na co je třeba při řešení dávat pozor	72
4	Vlastnosti a vývoj dvojhvězd	73
4.1	Statistiky dvojhvězd a vícenásobných systémů	73
4.2	Formy přenosu a ztráty hmoty ve dvojhvězdách	76
4.3	Cirkumstelární a akreční disky	80
4.4	Dynamické jevy ve dvojhvězdách, cirkularizace a synchronizace	81
5	Dvojhvězdy s komplikacemi	84
5.1	Falešná výstřednost dráhy z křivek radiálních rychlostí	84
5.1.1	Barrův jev	85
5.1.2	Alternativní Barrův jev	87
5.1.3	Vliv slapové deformace tvaru hvězd	87
5.2	Nesprávně určená amplituda křivky radiálních rychlostí	87
5.2.1	Vliv průmětu plynového proudu	87
5.2.2	Chybná amplituda křivky radiálních rychlostí v důsledku fázově vázaných V/R změn dvojitého emisního čar z disku kolem jedné ze složek	89
5.2.3	Chybné amplitudy křivek radiálních rychlostí způsobené nízkou rozlišovací schopností nebo blendováním čar	91
5.2.4	Chybné amplitudy křivek radiálních rychlostí z absorpčních čar pocházejících z obálky kolem celé dvojhvězdy	93
5.3	Vliv plynového obalu kolem jedné ze složek na pozorované změny jasnosti soustavy	94
5.4	Jak si lze s některými problémy poradit	94
6	Různé konkrétní typy dvojhvězd	96
6.1	Dvojhvězdy typu Algol	97
6.2	Dvojhvězdy s hvězdou se závojem	97
6.2.1	Symbiotické dvojhvězdy	97
6.3	Dvojhvězdy s veleobry	98
6.3.1	Hvězdy typu ζ Aurigae a VV Cephei	99

6.4	Dvojhvězdy s Wolfovou-Rayetovou hvězdou	99
6.5	Hvězdy chemicky pekuliární	99
6.6	Hvězdy typu RS CVn	100
6.7	Dvojhvězdy typu W UMa	100
6.8	Kataklysmické proměnné (CV; novy, trpasličí novy a rentgenovské dvojhvězdy o malé hmotnosti) . . .	100
6.8.1	Oběžné periody CV	101
6.8.2	Trpasličí novy (DN)	102
6.8.3	Magnetické kataklysmické proměnné (MCV)	102
6.8.4	Novám podobné proměnné (NL)	102
6.8.5	Předchůdci supernov typu Ia	102
6.9	Dvojhvězdy v posledním tažení	104
6.9.1	Vývoj dvojhvězdy se společnou obálkou	105
6.9.2	Rentgenové dvojhvězdy	105
6.9.3	Dvojhvězdné pulsary	106
6.10	Dvojhvězdy mezi hvězdami PMS (pre-main sequence)	107
6.11	Dvojhvězdy mezi cefeidami	108
6.12	Dvojhvězdy s podtrpaslíky	108
6.13	Dvojhvězdy v kulových hvězdokupách	108
6.14	Dvojhvězdy v jiných galaxiích	109
7	Vznik dvojhvězd	109
8	Apendix: Použité fyzikální a astronomické jednotky	112
8.1	Základní fyzikální jednotky	113
8.2	Základní astronomické jednotky	113
9	Poděkování	115

1 Obecně o dvojhvězdách

1.1 Proč studovat dvojhvězdy a zdroje informací o nich

Dvojhvězdami se obvykle nazývají dvojice hvězd, které jsou k sobě v prostoru gravitačně vázány a obíhají kolem společného těžiště. Jak si v tomto textu vysvětlíme podrobněji, studium dvojhvězd a zvláštností jejich vzájemného ovlivňování, které může ovlivnit i vývoj jejich složek, je zajímavé samo o sobě. Dvojhvězdy jsou však užitečné pro astrofyziku obecně. V řadě případů totiž představují unikátní fyzikální laboratoře a s jejich pomocí lze dosud nejpřesněji určit základní fyzikální vlastnosti hvězd jako jsou hmotnosti, poloměry či zářivé výkony. Pomocí dvojhvězd lze zpřesňovat i základní škálu vzdáleností a kalibrovat jiné metody určování vzdáleností. Dnes se díky rostoucí výkonnosti velkých optických dalekohledů tato možnost stále více aplikuje i na blízké cizí galaxie.

Obě základní role dvojhvězd jsou podrobně diskutovány v příspěvcích, které zazněly na symposiu 240 IAU roku 2006 v Praze (viz Hartkopf, Guinan a Harmanec 2007), na IAU symposiu 282 konaném roku 2011 v Tatrách (Richards a Hubeny 2012) a na řadě dalších konferencí.

Studium dvojhvězd má dlouhou tradici a v Mezinárodní astronomické unii (dále IAU dle anglického International Astronomical Union) až do roku 2015 existovaly dokonce dvě různé komise, které se jejich výzkumu věnovaly:

komise 26 *Dvojhvězdy a vícenásobné soustavy (Double and Multiple Stars)*

a

komise 42 *Těsné dvojhvězdy (Close Binaries)*.

Na Valném shromáždění IAU roku 2015 byla schválena rozsáhlá reorganizace celé organizační struktury IAU, byly vytvořeny tzv. divize a pod jejich působností vznikly nové, často větší komise. Dvojhvězdy nyní patří pod divizi G *Hvězdy a hvězdná fyzika (Stars and Stellar Physics)* a nová komise G1 s názvem

Dvojhvězdy a vícenásobné hvězdné soustavy (Binary and Multiple Star Systems)

vznikla spojením dřívějších komisí 26 a 42. Webová stránka divize G je

https://www.iau.org/science/scientific_bodies/divisions/G/

a na ní lze najít i odkaz na web komise G1, kde je seznam všech současných členů komise. Komise 42 vydávala po mnoho let bibliografii dvojhvězd, kde jsou obvykle i informace o probíhajících pozorovacích programech. Novější výtisky jsou zatím stále k dispozici elektronicky na adrese

<http://www.konkoly.hu/IAUC42/bcb.html> .

Pro každou hvězdu si lze vyhledat řadu užitečných informací o existujících pozorováních a o publikované literatuře na webu Centra astronomických dat na universitě ve Strasbourgu, které původně založili manželé Jaschekovi

<http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-fid>

Obecné vyhledávání publikovaných článků pak umožňuje ADS/NASA systém, buď podle autora či autorů práce

http://adsabs.harvard.edu/abstract_service.html

nebo podle citace práce

http://adsabs.harvard.edu/bib_abs.html.

Velmi užitečný je také odkaz na starší publikace různých observatoří a pracovišť, které v hlavním systému nejsou dostupné. Tuto historickou literaturu lze hledat na adrese

<http://adsabs.harvard.edu/historical.html>.

Značnou revoluci v našich znalostech vlastností dvojhvězd způsobila astronomická družice kosmické agentury NASA *KEPLER*, která byla úspěšně vypuštěna v březnu 2009. Ačkoliv hlavním cílem této družice je pořizovat velmi přesná měření změn jasností různých hvězd s cílem najít nové exoplanety, posloužila také k objevu více než 2000 nových zákrytových dvojhvězd a dokonce vícenásobně se zakrývajících soustav více hvězd. Katalog těchto systémů publikovali Slawson, Prša, Welsch a kol. (2011) a na webové stránce

<http://keplerEBs.villanova.edu>

si lze prohlížet nejen samotný katalog, ale i získané světelné křivky.

Od dubna 2018 získává velmi přesnou fotometrii další astronomická družice: TESS (Transiting Exoplanet Survey Satellite).

Díky fotometrickým přehlídkám oblohy bylo rovněž objeveno velké množství zákrytových dvojhvězd v Magellanových mračnách. I tyto přehlídky byly zpravidla motivovány primárně jinými záměry, než je studium a objevování nových dvojhvězd.

Katalog z přehlídky MACHO (The Massive Compact Halo Object Project) je k dispozici na webové adrese

<http://researchdata.anders.org.au/massive-compact-halo-star-catalog/61954>

a katalog proměnných hvězd objevených v projektu OGLE (The Optical Gravitational Lensing Experiment) na adrese

<http://ogledb.astrouw.edu.pl/ogle/CSV/>

Určitým problémem je ovšem to, že vzhledem k obvyklé malé jasnosti nově objevených systémů lze jejich soustavnou spektroskopii získávat většinou jen s pomocí největších současných optických dalekohledů. Přesto ale již byla celá řada podrobných studií konkrétních zajímavých soustav publikována.

Fotometrická, spektroskopická i další pozorování získaná astronomickými družicemi jsou systematicky archivována v databázi MAST (Barbara A. Mikulski Archive for Space Telescopes) na webové adrese

<https://mast.stsci.edu/portal/Mashup/Clients/Mast/Portal.html> ,

kde jsou volně dostupná. Je ovšem třeba upozornit na to, že dobrá redukce družicové fotometrie není vždy jednoduchá a nulový bod přístrojů není dostatečně monitorován, takže se často ztrácí informace o proměnnosti objektů na delších časových škálách.

1.2 Pojem dvojhvězdy a rozsah fyzikálních vlastností

Jak již bylo řečeno, dvojhvězdou nazýváme dvojici hvězd, které jsou k sobě gravitačně vázány a obíhají kolem společného těžiště po eliptické nebo kruhové dráze. Hvězdám, které takovou dvojici tvoří, říkáme složky dvojhvězdy. Pojmem *primární složka* nebo jednoduše *primár* se obvykle označuje jasnější z obou hvězd. V teoretických úvahách se však označuje tímto pojmem hvězda hmotnější. Její partnerce se pak říká *sekundární složka* nebo *sekundár*.

Někdy jsou na obloze pozorovány v těsné blízkosti u sebe dvě hvězdy, pro něž však podrobnější studium ukáže, že jde o dvě tělesa ve zcela různých vzdálenostech od nás a nijak spolu nesouvisejících. Těm se říká *optické dvojhvězdy*. Z hlediska našeho výkladu jsou nezajímavé a za dvojhvězdy je nebudeme považovat.

Ačkoliv dosavadní znalosti musíme stále pokládat za značně neúplné, je zřejmé, že ve dvojhvězdách se vyskytuje velké procento hvězd. Vzácné nejsou ani trojhvězdy, čtyřhvězdy a vícenásobné systémy. Vzhledem k tomu, že kosmické sondy při průletu kolem velkých planet sluneční soustavy, Jupitera a Saturna, zjistily, že jistá část záření těchto těles pochází z jejich gravitačního smršťování a není pouhým odraženým slunečním světlem, lze ostatně s trochou nadsázky označit za trojhvězdu i naši sluneční soustavu.

Pozorování dvojhvězd a určování jejich fyzikálních vlastností ukazuje, že se mohou vyskytovat velmi pestré a snad skoro všechny myslitelné kombinace. Za teoretickou dolní mez můžeme na základě našich současných znalostí považovat v této době kombinaci dvou podobných neutronových hvězd o hmotnostech $1,4 \mathcal{M}_{\odot}^N$ a poloměrech 10 km, které obíhají po kruhové dráze tak, že se jejich povrchy prakticky dotýkají, tedy, že vzdálenost jejich středů $a = 20$ km. Jestliže vyjdeme ze 3. Keplerova zákona ve tvaru

$$a^3 = \frac{G}{4\pi^2} P^2 (M_1 + M_2) \quad (1)$$

a upravíme jej numericky tak, abychom mohli hmotnosti primáru M_1 a sekundáru M_2 udávat v *nominálních* hmotnostech našeho Slunce $\mathcal{M}_{\odot}^N$, oběžnou periodu P ve dnech a velkou poloosu dráhy a v *nominálních* slunečních poloměrech $\mathcal{R}_{\odot}^N$,¹ dostaneme užitečný pracovní vztah

$$\begin{aligned} a &= 86400^{2/3} \left(\frac{(\mathcal{G}\mathcal{M})_{\odot}^N}{4\pi^2 (\mathcal{R}_{\odot}^N)^3} \right)^{1/3} (P^2 (M_1 + M_2))^{1/3} \\ &= \frac{86400^{2/3} \cdot (1,3271244 \times 10^{20})^{1/3}}{(4\pi^2)^{1/3} \cdot 6957000000} (P^2 (M_1 + M_2))^{1/3} \\ &= 4,2082783458... (P^2 (M_1 + M_2))^{1/3}, \end{aligned} \quad (2)$$

a můžeme si snadno spočítat, že oběžná perioda výše uvažované dvojhvězdy by činila pouhých 0,00092 sekundy.²

¹Nominální hodnoty slouží k přesnému převodu do SI soustavy a byly zavedeny resolucí B3 Mezinárodní astronomické unie roku 2015 – podrobněji viz apendix na konci tohoto textu.

²Všechny numerické konstanty použité v těchto skriptech vycházejí z hodnot fyzikálních a astronomických jednotek shrnutých v apendixu na konci skriptu.

Prohlídkou katalogu kataklyzmických dvojhvězd a rentgenovských dvojhvězd o malé hmotnosti – viz Ritter and Kolb (1998) – lze zjistit, že jednu z nejkratších oběžných period mezi dosud známými systémy má rentgenovská dvojhvězda 4U1820-30, a to 11,4 minuty. Začátkem roku 2000 byla potvrzena ještě kratší oběžná perioda, 9,5 minuty, pro rentgenovskou dvojhvězdu RX J1914.4+2456 – viz Ramsay a spol. (2000). Israel a kol. (2002) oznámili objev dvojice degenerovaných hvězd typu AM CVn s označením HM Cnc = RX J0806.3+1527 s ještě kratší oběžnou periodou 5,35 minuty. Podvojnost tohoto objektu byla potvrzena Roelofsem a kol. (2010), kteří získali spektroskopickou oběžnou dráhu.

Maximální dosud zjištěná hmotnost složek se pohybuje někde kolem $60 \mathcal{M}_{\odot}^N$, povrchové teploty od asi 1000 K do teplot řádu 100000 K a nejdelší oběžná perioda je asi 32000 let. V zásadě lze říci, že dvojhvězdy se mohou vyskytovat v kombinacích od těles, která se dotýkají až po vzdálenosti, souměřitelné se středními vzájemnými vzdálenostmi hvězd v dané části prostoru od sebe.

1.3 Rocheův model

Vzhledem k výrazné koncentraci hmoty směrem k centru hvězdy lze ke studiu dvojhvězd velmi úspěšně využít Rocheův model (Roche 1859). Předpokládáme opět, že hmotnost primární i sekundární složky je soustředěna do hmotných bodů o hmotnostech M_1 a M_2 , $\omega = 2\pi/P$ označuje úhlovou oběžnou rychlost soustavy v kruhové dráze s oběžnou periodou P a $q = M_2/M_1$ je hmotový poměr.

Zvolme pravoúhlou souřadnou soustavu pevně spojenou se soustavou, která má počátek v bodě M_1 a jejíž osa X míří od M_1 k M_2 , osa Y je na ni kolmá a leží v oběžné rovině a osa Z je kolmá na oběžnou rovinu, přičemž vzdálenost a mezi oběma hmotnými body zvolíme za jednotku vzdálenosti. Označme vzdálenost těžiště od bodů M_1 a M_2 jako x_1 a x_2 . Platí zřejmě $x_1/x_2 = M_2/M_1$ a $x_2 = 1 - x_1$, z čehož dostaneme $x_1 = M_2/(M_1 + M_2)$ (viz obr. 1).

Na infinitesimální tělísko o hmotnosti m nacházející se v obecném bodě (x, y, z) budou působit tři síly: přitažlivosti obou hmotných bodů a odstředivá síla oběžného pohybu. Tyto síly mají tvar:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{M_1} &= -G \frac{mM_1}{|\vec{r}_1|^3} \vec{r}_1, \quad \vec{F}_{M_2} = -G \frac{mM_2}{|\vec{r}_2|^3} \vec{r}_2, \quad \vec{F}_{\omega} = m\omega^2 \vec{r}_3, \\ \vec{r}_1 &= (x, y, z), \quad \vec{r}_2 = (x - 1, y, z), \\ \vec{r}_3 &= (x - \frac{M_2}{M_1 + M_2}, y, 0) = (x - \frac{q}{1 + q}, y, 0).\end{aligned}\tag{3}$$

Označíme-li ještě

$$r_1 = |\vec{r}_1|, \quad r_2 = |\vec{r}_2|, \quad r_3 = |\vec{r}_3|\tag{4}$$

lze celkový potenciál oněch tří sil zapsat ve tvaru

$$W = \frac{GM_1}{r_1} + \frac{GM_2}{r_2} + \frac{1}{2}\omega^2 r_3^2.\tag{5}$$

Jestliže pro zjednodušení zápisu vyjádříme úhlovou oběžnou rychlost pomocí 3. Keplerova zákona

$$\omega^2 = G(M_1 + M_2)a^{-3}, \quad a = 1 \rightarrow \omega^2 = G(M_1 + M_2) = GM_1(1 + q),\tag{6}$$

a zavedeme poměr hmot q , můžeme dále psát

$$\begin{aligned}\frac{W(x, y, z)}{GM_1} &= \frac{1}{r_1} + \frac{q}{r_2} + \frac{1}{2}(1+q)r_3^2 = \\ &= \frac{1}{r_1} + \frac{q}{r_2} + \frac{1+q}{2}(x^2 + y^2) - qx + \frac{q^2}{2(1+q)}.\end{aligned}\quad (7)$$

Všimněme si, že potenciál je funkcí jediné proměnné, poměru hmot q . Jak si uvědomil Kopal (1959), lze proto poslední člen závisující pouze na q při vyšetřování tvaru ekvipotenciálních ploch vynechat a zavést nový potenciál

$$\Omega = \frac{W}{GM_1} - \frac{q^2}{2(1+q)} = C, \quad (8)$$

kde C je konstanta odpovídající konkrétní ekvipotenciální ploše.

Pro poloměry sekundární složky je třeba uvažovat souřadnou soustavu s počátkem ve středu sekundáru, což vede i na jiný výraz pro potenciál. Souřadnice vektorů $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ zůstanou stejné (viz rovnice 3), zatímco pro $\vec{r}_3$ bude platit

$$\vec{r}_3 = \left(x - \frac{M_1}{M_1 + M_2}, y, 0\right) = \left(x - \frac{1}{1+q}, y, 0\right).$$

a vztah pro úhlovou rychlost bude

$$\omega^2 = G(M_1 + M_2) = GM_2(1+q)/q, \quad (9)$$

Fyzikální potenciál W' v této souřadné soustavě můžeme proto psát jako

$$W' = \frac{GM_2}{r_1} + \frac{GM_1}{r_2} + \frac{1}{2}\omega^2 r_3^2 \quad (10)$$

a po explicitním rozepsání absolutní hodnoty vektoru $\vec{r}_3$ je tedy

$$\begin{aligned}\frac{W'}{GM_2} &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{q r_2} + \frac{1}{2GM_2}\omega^2 r_3^2 \\ &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{q r_2} + (x^2 + y^2)\frac{1+q}{2q} - \frac{x}{q} + \frac{1}{2q(1+q)}.\end{aligned}\quad (11)$$

Kopalem zavedený potenciál pro sekundární složku Ω' proto bude

$$\Omega' = \frac{W'}{GM_2} - \frac{1}{2q(1+q)}. \quad (12)$$

Pro oba fyzikální potenciály W a W' můžeme proto psát

$$\begin{aligned} W &= GM_1 \left(\Omega + \frac{q^2}{2(1+q)} \right) \\ W' &= GM_2 \left(\Omega' + \frac{1}{2q(1+q)} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

a z požadavku, aby si oba fyzikální potenciály byly rovné ($W = W'$) pak plyne pro potenciál sekundární složky Ω' interně používaný např. v programu Wilsona a Devinneyho (viz podkapitola 3.10.2)

$$\Omega' = \Omega/q + (q-1)/2q. \quad (14)$$

Někdy se také přechází od pravoúhlých souřadnic (x, y, z) ke sférickým souřadnicím (r, φ, ϑ) , kde r je radiální vzdálenost od počátku souřadnic, úhel φ se měří od osy X v rovině XY v rozsahu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a úhel ϑ od osy z v rozsahu $\langle 0, \pi \rangle$, lze zavést směrové kosiny λ, μ a ν pomocí zřejmých vztahů

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta = r\lambda, \quad (15)$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta = r\mu, \quad (16)$$

$$z = r \cos \vartheta = r\nu \quad (17)$$

a pomocí nich přepsat potenciál Ω do tvaru

$$\Omega = r^{-1} + q \left(\frac{1}{(1+r^2-2r\lambda)^{1/2}} - r\lambda \right) + \frac{1+q}{2} r^2 (1-\nu^2). \quad (18)$$

Můžeme se ptát po místech, ve kterých je výsledná síla působící na testovací tělísko nulová. Pro ně platí

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0. \quad (19)$$

Z konkrétních výrazů pro uvedené derivace rovnice (8) plyne, že uvedená podmínka je pro druhé dvě rovnice splněna na ose X . Z první podmínky dostáváme rovnici

$$\frac{\partial \Omega(x, 0, 0)}{\partial x} = -\frac{x}{|x|^3} + \frac{q(1-x)}{|1-x|^3} + (1+q)x - q = 0. \quad (20)$$

V každém z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ lze odstranit absolutní hodnoty a přepsat rovnici (20) jako algebraickou rovnici 5. stupně v x s parametrem q . Dá se ukázat, že v každém z uvedených intervalů existuje právě jedno reálné řešení, takže na ose existují tři místa s nulovou výslednou silou. Těm se obvykle říká Lagrangeovy body L_1 – bod $(x_1, 0, 0)$ na spojnici mezi oběma hmotnými body, L_2 – bod $(x_2, 0, 0)$ ležící vně méně hmotného bodu M_2 , a L_3 – bod $(x_3, 0, 0)$ ležící vně hmotnějšího bodu M_1 . Rozborem druhých dvou rovnic lze zjistit, že další dva Lagrangeovy body L_4 a L_5 leží pro libovolný poměr hmot v oběžné rovině na vrcholech rovnostranného trojúhelníka s oběma hmotnými body.

Význam ekvipotenciálních ploch spočívá v tom, že rovnovážná hvězda zaujme tvar některé z nich. Zvláště významná je kritická plocha obsahující bod L_1 – často zvaná Rocheova mez – která představuje mez dynamické stability dvojhvězdy. Ekvipotenciální plochy Rocheova modelu jsou též známy jako plochy nulové rychlosti z prací Hilla (1902).

Podrobnější matematickou formulaci Rocheova modelu lze nalézt např. v monografiích Kopal (1959, 1989) či česky v diplomové práci Kratochvíla (1964). Podrobné tabulky rozměrů kritických ekvipotenciálních ploch Rocheova modelu v závislosti na hmotovém poměru publikovali Plavec a Kratochvíl (1964) a návod na přesný výpočet základních rozměrů Rocheovy meze lze najít v appendixu práce Harmanec (1990).

Vztah (18) platí v případě, že obě složky rotují synchronně a dráha je kruhová; Wilson (1979) uvádí složitější výraz pro obecný případ. Pro dané Ω lze spočítat r např. Newton-Raphsonovou metodou.

Výsledkem některých programů na řešení světelných křivek dvojhvězd (viz kapitola 3.10) jsou právě hodnoty potenciálů Ω a Ω' a ty je třeba převést na odpovídající poloměry složek (viz obr. 2):

- $r_{\text{pole}} \dots$ polární poloměr ve směru osy Z,
- $r_{\text{side}} \dots$ rovníkový poloměr ve směru osy Y,
- $r_{\text{point}} \dots$ poloměr ve směru ke druhé složce podél osy X a
- $r_{\text{back}} \dots$ poloměr podél osy X na straně odvrácené od druhé složky.

Dosazením odpovídajících souřadnic do výrazu pro potenciál (18) (např. pro polární poloměr r_{pole} je $x = y = 0$ a $z = r_{\text{pole}}$) dostáváme pro primární složku

$$\Omega = \frac{1}{r_{\text{pole}}} + \frac{q}{(1 + r_{\text{pole}}^2)^{1/2}} \quad (21)$$

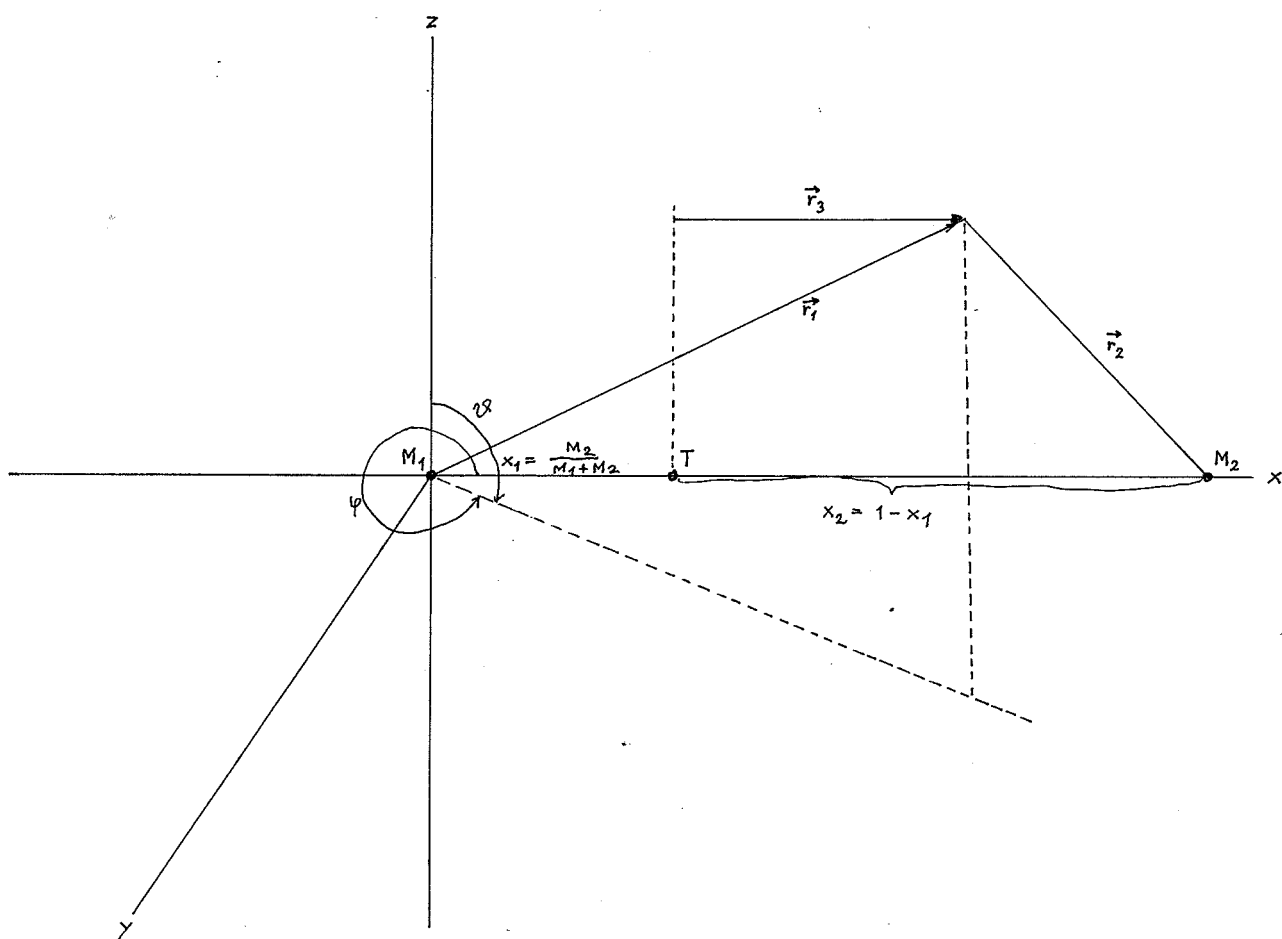
$$\Omega = \frac{1}{r_{\text{point}}} + q \left(\frac{1}{1 - r_{\text{point}}} - r_{\text{point}} \right) + \frac{1 + q}{2} r_{\text{point}}^2 \quad (22)$$

$$\Omega = \frac{1}{r_{\text{side}}} + \frac{q}{(1 + r_{\text{side}}^2)^{1/2}} + \frac{1 + q}{2} r_{\text{side}}^2 \quad (23)$$

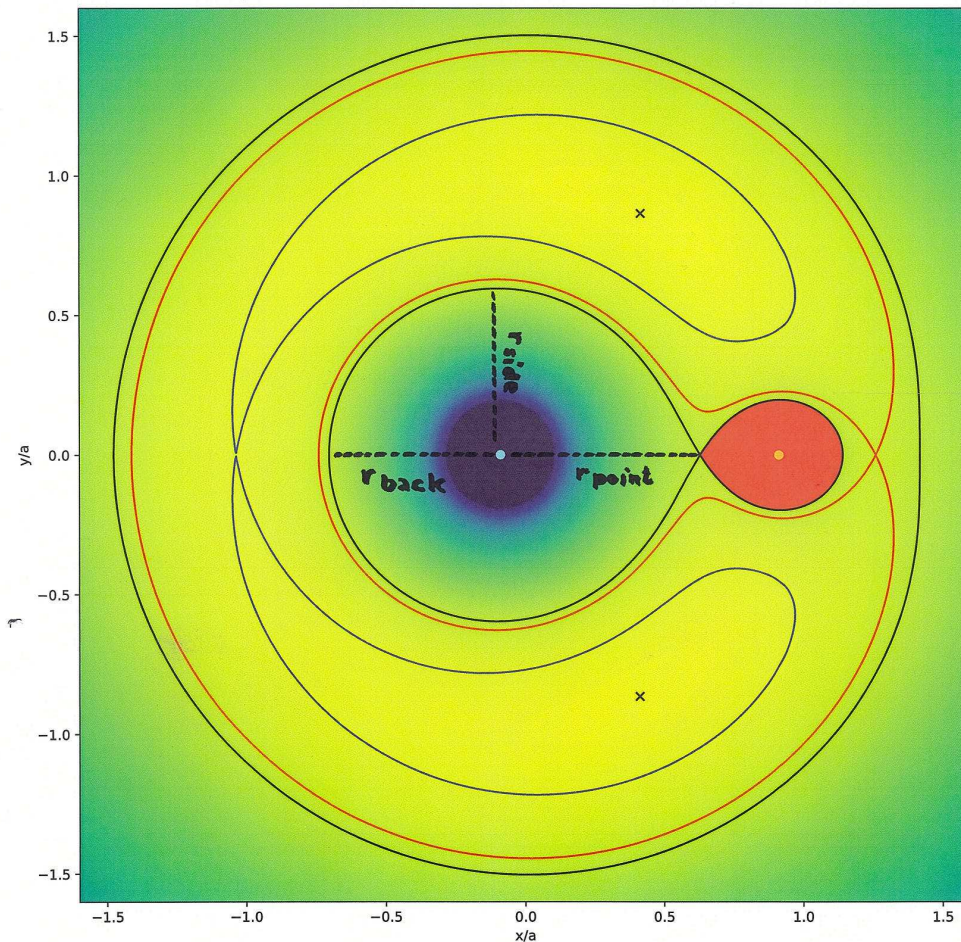
$$\Omega = \frac{1}{r_{\text{back}}} + q \left(\frac{1}{1 + r_{\text{back}}} + r_{\text{back}} \right) + \frac{1 + q}{2} r_{\text{back}}^2. \quad (24)$$

Pro Newton-Raphsonovu metodu je třeba znát i derivace těchto vztahů (Wilson 1979).

Střední poloměr složky dvojhvězdy se určuje jako poloměr koule o stejném objemu, jako má odpovídající ekvipotenciální plocha. Výpočet objemu ekvipotenciální plochy se získá pomocí rozvoje příslušných integrálů do řad. Vhodné rozvoje podrobně shrnuli Pathania a Medupe (2012).



Obrázek 1: Ilustrační schema k odvozování vztahů popisujících Rocheův model.



Obrázek 2: $O-C$ Obrázek ekvipotenciálních ploch Rocheova modelu v oběžné rovině s vyznačením fotometrických poloměrů v jednotlivých směrech. Tento obrázek byl vytvořen s použitím Python programu poskytnutého Mgr. Janem Károu.

1.4 Klasifikace dvojhvězd

1.4.1 Klasifikace podle metody pozorování

Vzhledem k obrovským vzdálenostem mezi jednotlivými hvězdami v Galaxii vidíme v dalekohledu jen malé procento dvojhvězd jako dva oddělené světelné body. Jde obvykle o tělesa hodně vzájemně vzdálená, s oběžnými periodami nejméně několik let. Takovým dvojhvězdám se říká *visuální dvojhvězdy* a při jejich trpělivém pozorování můžeme časem přímo vidět v průmětu na oblohu jejich vzájemný oběžný pohyb. Pro visuální či fotografická pozorování je praktickou dolní hranicí, do které můžeme ještě dvojhvězdu pozorovat jako visuální, úhlová vzdálenost na obloze asi $0,1'' - 0,2''$. Nověji používaná metoda skvrnkové interferometrie (speckle interferometry) umožňuje s existujícími optickými dalekohledy o průměru zrcadel 4 m pozorovat jako visuální dvojhvězdy i méně vzdálené dvojice až

do hranice asi $0{''}03$ a pro nové interferometry sestávající z celé sítě několika dalekohledů spojených optickými vlákny se tato mez v posledních letech trvale snižuje. Např. Davis a kol. (2005) zobrazili s pomocí interferometru SUSI (Sydney University Stellar Interferometer) oběžnou dráhu dvojhvězdy β Cen, která má oběžnou periodu 357 dní, pohybuje se ve velmi výstředné dráze a průmět velké poloosy její dráhy činí pouhých $0{''}02530$. Pro vizuální dvojhvězdy se měřeními v různých časech obvykle určuje jejich okamžitá úhlová vzdálenost, poziční úhel jejich vzájemné polohy v průmětu na nebeskou sféru a někdy i jasnost jednotlivých složek. Elektronické katalogy s údaji o pozorováních vizuálních dvojhvězd metodou skvrnkové interferometrie i vizuálními metodami, které jsou průběžně doplňovány o nová měření, lze nalézt na adrese

<http://ad.usno.navy.mil/wds>

observatoře amerického námořnictva.

Pokud je sekundární složka vizuální dvojhvězdy mnohem méně jasná než složka primární, její světlo nepozorujeme a na přítomnost druhého tělesa můžeme usoudit pouze z rozboru periodických poruch jejího prostorového pohybu za delší období, hovoříme o *dvojhvězdě astrometrické*.

Většina dvojhvězd však zůstává i v nejsilnějších dalekohledech nerozlišena a jeví se jako jediný světelný bod. Jejich dvojhvězdnou povahu pak nejčastěji zjistíme ze spektroskopických pozorování, neboť v důsledku oběžného pohybu dochází k periodickým změnám radiální rychlosti čar. Takovým dvojhvězdám se říká *spektroskopické dvojhvězdy*. V ideálním případě jsou ve spektru pozorovatelné spektrální čáry obou složek, které se pravidelně od sebe vzdalují a zase se k sobě přibližují. V grafu radiální rychlosti v závislosti na čase definují dvě protínající se sinusovky, které se mění v protifázi, jde-li o dvojhvězdu v kruhové dráze, nebo o dvě asymetrické, ale jednoduše periodické křivky, jde-li o eliptický pohyb. Hodnota radiální rychlosti odpovídající průsečíku obou křivek pak definuje radiální rychlost pohybu celé soustavy vůči nám. Pokud jsou složky dvojhvězdy hodně odlišné jasností či povrchovou teplotou, vidíme ve spektru obvykle pouze čáry jasnější z obou hvězd. Někdy se čáry druhé slabší složky podaří nalézt v jiném spektrálním oboru, např. v červeném či infračerveném, jde-li o chladný sekundár, nebo naopak v UV oboru, jde-li o malou horkou sekundární složku. Pro fotografická spektra se obvykle udává, že čáry sekundární složky lze pozorovat, pokud je rozdíl jasností mezi oběma hvězdami menší než 1-2 hvězdné velikosti. Pro elektronická spektra a moderní metody rozkladu spekter: kroskorelace (viz např. Hill 1993) či oddělení spekter (anglicky disentangling; viz Simon a Sturm 1994, Hadrava 1995, 1997) se tato mez výrazně posunula. Např. Holmgren a spol. (1999) měřili spolehlivě čáry sekundární složky AR Cas, která je o plné 4 magnitudy méně jasná než složka primární. Fekel a Tomkin (1993) oznámili pravděpodobnou detekci sekundární složky dvojhvězdy γ Geminorum, která je slabší o plných 6 magnitud než primár, ale jejich měření je poněkud nejisté a mělo by být potvrzeno.

Existuje celá řada katalogů spektroskopických dvojhvězd. Systematicky tyto katalogy vydával Alan H. Batten z Kanady a v současnosti je interaktivně vytvářen devátý katalog spektroskopických dvojhvězd, ve kterém jsou shromážděna i individuální pozorování radiálních rychlostí. Tento katalog redigoval do své smrti D. Pourbaix z Belgie a nyní jej udržují jeho kolegové. Lze jej získat na webové adrese

<http://sb9.astro.ulb.ac.be> .

Pokud je oběžná rovina dvojhvězdy v prostoru orientována tak, že v ní naše sluneční soustava zhruba leží, budeme pozorovat vzájemné zákryty obou složek dvojhvězdy a hovoříme o *dvojhvězdě zákrytové*. Zákryty se projeví především při fotometrických pozorováních, a to pravidelně se opakujícími poklesy jasnosti. Historicky byly rozlišovány tři typy světelných křivek:

- *Světelná křivka typu Algol* se označuje podle první objevené zákrytové dvojhvězdy Algol (β Persei). Vyznačuje se zcela konstantním světlem mimo zákryty a během totálních částí zákrytu.
- *Světelná křivka typu β Lyrae* je shodou okolností nazvána podle druhé objevené zákrytové dvojhvězdy a je pro ni příznačné, že jasnost soustavy se plynule mění ve všech orbitálních fázích, i mimo vlastní zákryty, přičemž hloubka minim je výrazně odlišná.
- *Světelná křivka typu W UMa* je charakterizována dvěma podobnými minimy, krátkou oběžnou periodou a rovněž plynulými změnami ve všech fázích orbitální periody.

Efekty zákrytů ve spektrech jsou složitější. Budou-li se např. složky dvojhvězdy lišit svou povrchovou teplotou, může se stát, že během zákrytu zesílí čáry jedné nebo druhé složky a vzhled spektra se výrazně změní. Pokud některá z hvězd rychle rotuje, lze ve fázích na začátku a na konci zákrytu pozorovat tzv. rotační efekt. Při začátku zákrytu je totiž postupně zakrýván disk jedné ze složek, takže nakonec vidíme světlo jen z jednoho okraje. Pokud je směr rotace shodný se směrem oběhu složek (a tak tomu zpravidla bývá), projeví se část nezakrytého disku rotující hvězdy na začátku zákrytu vzrůstem radiální rychlosti nad normální křivku radiální rychlosti. Na konci zákrytu vidíme naopak přibližující se část disku a pozorujeme anomální pokles radiální rychlosti.

V některých případech se stává, že pozorujeme nepříliš velké plynulé světelné změny definující dvojitou vlnu s oběžnou periodou dvojhvězdy, tedy něco jako světelnou křivku typu β Lyrae, ale s malou amplitudou (pod 0^m1). Ukazuje se, že to je případ hvězd, které jsou slapově deformovány a nemají sférický tvar, takže se během jejich vzájemného oběhu mění plocha jejich disků promítnutá na nebeskou sféru a tudíž i jejich jasnost. Takovým dvojhvězdám se říká *elipsoidální proměnné*. Nedochozí u nich ke geometrickým zákrytům a sklon jejich dráhy je zpravidla někde mezi asi 30° a 70° .

Posledním typem světelné křivky je *světelná křivka s výrazným vlivem reflexe (odrazu světla od druhé složky)*. Takový jev je zřetelně pozorovatelný při velkém rozdílu povrchových teplot složek, pokud nejsou daleko od sebe (tj. u krátkoperiodických dvojhvězd) a může se pozorovat jako pro zákrytové, tak nezákrytové soustavy. Zpravidla se takový jev pozoruje pro kombinaci velké chladné složky a horké složky, která svým zařením ohřeje povrch chladné hvězdy na straně k ní přivrácené. To se projeví zjasněním chladné složky ve fázích její horní konjunkce.

1.4.2 Klasifikace podle dynamické stability

Již Kuiper (1941) poukázal na to, že k úvahám o dynamické stabilitě konkrétní dvojhvězdy se velmi dobře hodí Rocheův model krátce popsany výše. Jak už víme, tvar ekvipotenciálních ploch Rocheova modelu závisí pouze na poměru hmotností obou hmotných bodů. Příslušné ekvipotenciální plochy jsou nejprve uzavřené kolem obou hvězd, ale pro určitou kritickou hodnotu potenciálu se slévají v jakési brýle s úhlem velmi přibližně 57° vůči spojnici obou center. Další ekvipotenciální plochy již obklopují obě hvězdy, poté se postupně otvírají nejprve za méně hmotnou a poté za hmotnější složkou, a ve velké vzdálenosti se limitně blíží sférickým plochám kolem celé dvojhvězdy. Ona kritická „brýlovitá“ ekvipotenciála se nazývá Rocheova mez. Připomeňme také, že v oběžné rovině existuje celkem 5 bodů, nazývaných Lagrangeovy body, ve kterých je výsledná síla působící na testovací tělísko nulová. Jeden z nich, L_1 , leží na spojnici mezi oběma hmotnými body, další dva leží také na spojnici obou hmotných bodů, ale vně méně hmotné (L_2) a vně hmotnější (L_3) složky. Je jasné, že vzroste-li rozměr hvězdy tak, že hvězda zaplní Rocheovu mez, stane se dynamicky nestabilní a plyn z její atmosféry může volně přetékat směrem ke druhé složce. Klasifikace dvojhvězd podle polohy vůči Rocheově mezi, jejíž základy položili kromě Kuipera také Parenago a Wood, byla podrobně zpracována Kopalem. Dvojhvězdy se podle ní dělí na

- *oddělené systémy*, jejichž obě složky jsou spolehlivě uvnitř kritické Rocheovy meze, dále na
- *polodotykové systémy*, u kterých je jedna složka uvnitř Rocheovy meze a druhá ji právě vyplňuje, a na
- *kontaktní systémy*, pro něž obě složky vyplňují či spíše přesahují Rocheovu mez a mají společnou atmosféru.

Tato klasifikace se ukázala jako fyzikálně velmi užitečná a je dodnes hojně používána. O její další rozvoj se přičinili Wilson a Twigg (1980), kteří zavedli pojem dvojhvězd s dvojím kontaktem (double-contact systems). Jedná se o to, že pokud jedna ze složek dvojhvězdy rychle rotuje, leží mez její dynamické stability někdy i velmi hluboko pod Rocheovou mezí. Může se proto stát, že rychle rotující hvězda ve dvojhvězdě je dynamicky nestabilní i přesto, že její poloměr je mnohem menší, než odpovídající Rocheova mez. Vlastnosti ekvipotenciálních ploch pro případ rotace, která není synchronizována s oběhem složek dvojhvězdy, poprvé vyšetřoval Plavec (1958) a také Limber (1963). Ukazuje se, že i v těchto případech má kritická ekvipotenciála „brýlovitý“ tvar a k výtoku hmoty nedochází z celé oblasti rovníku, ale jen v okolí bodu přivráceného ke druhé složce.

2 Určování kvantitativních vlastností dvojhvězd a vícenásobných soustav

2.1 Úvodní úvahy

Definujme si nejprve základní pojmy, které se budou během celého výkladu často opakovat:

- Změna nějaké proměnné veličiny se nazývá periodickou, jestliže se hodnoty, jež veličina postupně nabývá, zcela pravidelně opakují podle určitého zákona (funkce). Délce opakovacího intervalu se říká perioda změn; budeme ji zde důsledně označovat symbolem P .
- Často je výhodné (z důvodů, které vyplynou z dalšího výkladu) pracovat s převrácenou hodnotou periody. Této veličině se říká frekvence a budeme ji označovat symbolem f . Platí tedy:

$$f = 1/P. \quad (25)$$

- Pro jednoduše periodické děje bývá výhodné měření zobrazit ve *fázovém diagramu*, tj. poskládat v čase rozložená data tak, jako by byla všechna získána během časového intervalu odpovídajícího délce jedné periody. Pro měření získané v čase t spočteme *cyklus a fázi* c a normovanou fázi φ vůči periodě P podle vztahů

$$c = (t - T_0)/P, \quad (26)$$

$$\varphi = \text{frac}(c). \quad (27)$$

(Funkce $\text{frac}(x)$ nabývá hodnoty zlomkové části x pro nezáporná x , a hodnoty $[1 - \text{absolutní hodnota zlomkové části } x]$ pro $x < 0$. Tedy např. pro $x = 3.77$, $\text{frac}(x)=0.77$; pro $x = -3.77$, $\text{frac}(x)=0.23$, atd.) T_0 označuje počátek fází: je to nějaký referenční časový bod, pro který se rozhodneme (např. okamžik maxima či minima studované změny); pokud nás takový okamžik nezajímá, lze pro jednoduchost zvolit $T_0 = 0$. Snadno uvážíme, že vztah (27) transformuje každý čas měření do intervalu hodnot od 0 do 1, a to tak, že stejné hodnoty proměnného děje s periodou P budou mít stejnou hodnotu fáze. Pro konkrétní případ proměnných hvězd se fázovému diagramu obvykle říká světelná křivka. Pro hvězdy s proměnnou radiální rychlostí hovoříme o křivce radiálních rychlostí.

Každé pozorování jasnosti, radiální rychlosti, centrální intenzity nebo kterékoli jiné fyzikální veličiny se zaznamenaným časem měření představuje jeden bod časové řady pozorování sledovaného objektu. Je to tedy dvojice čísel (t, m) , kde m označuje jasnost změřenou v čase t . Pokud se jasnost mění, bude nás přirozeně zajímat, zda jsou tyto změny pravidelné či nepravidelné a vůbec, jaký je jejich charakter. V případě pravidelných změn je prvním úkolem nalézt periodu, se kterou se změny jasnosti opakují. Vzhledem k povaze astronomických pozorování v optickém oboru to nemusí vždy být snadný úkol. Rotace Země (opakování dne a noci) a nepravidelné změny oblačnosti způsobují, že časové řady astronomických pozorování mají své charakteristické zvláštnosti:

- Při pozorování z jednoho místa nutně obsahují ‘vzorkovací periodu’ jednoho hvězdného dne.
- Jsou velice nepravidelně rozložena v čase (dvě měření mohou po sobě následovat za 1 minutu, ale také třeba za 2 roky).

Správná a úplná analýza časových řad astronomických pozorování je proto i v době výkonných počítačů činností, kterou nelze dělat zcela mechanicky. Je třeba určitého citu pro věc a klidného zvážení, co lze z daných pozorovacích dat určit a co ne.

Prvním krokem analýzy by vždy mělo být grafické zobrazení studované proměnné veličiny v závislosti na čase. Z něj získáme prvotní představu o tom, co můžeme od analýzy dané časové řady očekávat a jakou strategii zvolit.

- Jestliže máme k dispozici bohatý soubor měření, která následují dostatečně hustě po sobě, může se dokonce stát, že již z tohoto grafu odhadneme skutečnou periodu změn. To je ovšem v praxi spíše výjimečný, než typický případ. Každopádně ale z grafu poznáme, zda nedochází k trvalému poklesu či růstu studované veličiny nebo zda nejvýraznější změny nejsou sice plynulé, ale zcela očividně neperiodické, nepravidelné.
- Pokud časová řada, kterou zkoumáme, sestává z měření, pořízených několika různými pozorovateli či přístroji, je vždy užitečné je v grafu odlišit různými symboly, abychom se přesvědčili, zda mezi jednotlivými pozorovateli neexistují *systematické rozdíly* v hodnotách měřené veličiny.

Uvedme několik dalších, skoro banálních, ale důležitých závěrů, které lze při prvotním zkoumání dané časové řady učinit:

1. Z dané řady měření nelze prokázat přítomnost periody, která je delší, než délka celé serie pozorování. Že je změna skutečně periodická, zjistíme teprve z dat, která budou pokrývat několik cyklů.
2. V principu lze zkoumat, zda v daných datech není přítomna perioda kratší než minimální časová vzdálenost dvou pozorování studovaných dat. Musíme si ale být vědomi, že i když nějakou takovou periodu nalezneme, může jít o periodu zdánlivou, vzniklou pouze v důsledku fázového skládání. Představme si pro ilustraci, že bychom pravidelně po 1 dni měřili konstantní jasnost. Lze snadno uvážit, že taková pozorování nevylučují, ale ani nedokazují přítomnost periodického děje s periodou 0^d5 , $0^d333333$, atd.) Abychom přítomnost takové periody prokázali, musíme získat nové řady pozorování s daty, jejichž časový rozestup bude alespoň o jeden řád menší než je hledaná perioda. Na potřebnou hustotu měření bude mít vliv i to, zda křivka s domnělou periodou má pouze jedno maximum a minimum nebo zda je složitější (jako např. světelná křivka zákrytové nebo elipsoidální proměnné). To znamená, že např. k prokázání přítomnosti periody 0^d1 bychom měli získat alespoň jednu serii pozorování s hustotou měření po 0^d01 , jde-li o zhruba sinusovou křivku, či 0^d005 , jde-li o křivku se 2 minimy a maximy.

Z toho, co bylo řečeno, vyplývá, že začínáme-li zkoumat proměnnost nějakého objektu, o jehož změnách není dosud nic známo, měli bychom začít pozorování nejprve hustými celonočními řadami měření, abychom si učinili prvotní představu o tom, jaké *nejkratší měřitelné* změny jasnosti můžeme pro zkoumaný objekt očekávat. Pokud na př. spolehlivě vyloučíme měřitelné změny během noci, bude nadále stačit získávat 1–3 měření za noc, atd.

2.2 Určování okamžiků minim zákrytové proměnné či jiných referenčních bodů na světelné či jiné fázové křivce:

K určování či zpřesňování hodnoty oběžné periody a k vyšetřování jejích případných časových změn potřebujeme z pozorovacích dat získat nějaké referenční body. Pro zákrytové dvojhvězdy bývá zvykem určovat okamžiky středů zákrytů. Pro křivky radiálních rychlostí jsou dobrými referenčními

body okamžiky maxima či minima radiální rychlosti. Ty můžeme získat třeba porovnáním s nějakou modelovou křivkou. Pro středy zákrytů by bylo možné použít třeba parabolu s osou kolmou k časové přímce. Zvláštní pozornost si ovšem zaslouží metoda Kwee-van Woerdenova.

2.2.1 Kwee-van Woerdenova metoda a její zobecnění

I v současnosti velmi často užívanou metodou přesného určování okamžiků minim z pozorování konkrétního zákrytu nějaké zákrytové proměnné je metoda, kterou publikovali holandsí astronomové Kwee a van Woerden (1956). Její podstata je následující: Předpokládejme, že, jsme získali N pozorování během sestupné i vzestupné fáze minima, tedy N uspořádaných dvojic (t_j, m_j) ($j = 1, 2..N$) měření hvězdných velikostí m_j v časech t_j . Lineární interpolací z nich vytvoříme $(2n + 1)$ nových uspořádaných dvojic s ekvidistantním časovým krokem Δt , a to tak, aby $(2n + 1)$ bylo přibližně rovno počtu původních měření N a aby jeden z ekvidistantních bodů, řekněme k -tý, odpovídal předběžnému odhadu času minima T (který můžeme vzít např. jako bod s nejnižší měřenou jasností nebo odhadnout z grafického zobrazení minima). Poté pro všechny ekvidistantní body minima symetricky vůči zvolenému odhadu středu minima počítáme rozdíly magnitud odpovídajících bodů

$$\Delta m_j = m_{(k+j)} - m_{(k-j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

a sumu jejich čtverců

$$S(T) = \sum_{j=1}^n (\Delta m_j)^2. \quad (29)$$

Poté zvolíme ještě dva další odhady středu minima v časech $T - \Delta t$ a $T + \Delta t$, kde Δt je nějaký rozumně zvolený časový interval, např. časový rozdíl mezi dvěma ekvidistantně interpolovanými body nebo jeho celočíselný násobek, a spočteme odpovídající sumy čtverců $S(T - \Delta t)$ a $S(T + \Delta t)$ pro tyto nové středy symetrie.

Pokud byl původní odhad okamžiku minima dobrý, mělo by platit

$$S(T) < S(T - \Delta t) \quad \text{a} \quad S(T) < S(T + \Delta t). \quad (30)$$

Pokud tomu tak není, zvolíme za odhad okamžiku minima čas odpovídající nejmenší sumě čtverců a celý postup opakujeme.

Jakmile získáme tři sumy čtverců, z nichž časově střední je nejmenší, aproximujeme skutečný průběh funkce $S(T)$ polynomem druhého stupně

$$S(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c, \quad (31)$$

jehož koeficienty a , b a c spočteme ze třech hodnot sumy čtverců, které jsme získali.

Za hledaný okamžik minima T_0 přijmeme poté minimum této funkce dané řešením kvadratické rovnice:

$$T_0 = -\frac{b}{2a} \quad (32)$$

Kwee a van Woerden udávají také odhad střední chyby σ takto určeného minima:

$$\sigma^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2(Z - 1)}, \quad (33)$$

kde Z označuje maximální počet nezávislých párů magnitud, které byly použity. Podle jejich analýzy je správné zvolit $Z = 0,25N$ v případě lineárně interpolovaných bodů a $Z = 0,5N$ pokud již měření sama byla získávána v ekvidistantních časových intervalech.

Harmanec (nepublikováno) zjistil, že přesnost odhadu minima se výrazně zvýší, pokud sumy čtverců spočteme ne pouze ve třech, ale více, třeba i 50 okamžicích považovaných za odhady středu minima a koeficienty a , b a c v rovnici (31) spočteme metodou nejmenších čtverců. Tento postup je aplikován v programu HEC 34, který lze získat na webové adrese

<http://astro.troja.mff.cuni.cz/ftp/hec/HEC34>.

Jiří Horn a Petr Harmanec rovněž prakticky ověřili, že metodu lze úspěšně aplikovat i na jiné problémy, např. k určování středu spektrálních čar.

Deeg (2021) publikoval vylepšení Kwee-van Woerdenovy metody, neboť zjistil, že pro velmi přesná družicová pozorování, konkrétně z družice TESS, může dojít k tomu, že minimum sumy $S(T)$ vyjde maličko záporné a záporný vyjde i člen $4ac - b^2$, takže při odmocňování při výpočtu σ z rovnice (33) dojde k numerické chybě.

Deeg proto doporučuje z pozorovacích dat odhadnout průměrnou pozorovací chybu individuálních měření magnitudy či toku μ a místo funkce $S(T)$ použít obvyklou χ^2 statistiku pro páry měření, tedy

$$\chi^2(T) = \frac{S(T)}{2\mu^2}. \quad (34)$$

Za předpokladu, že tok ze studované dvojhvězdy bude dokonale symetrický vůči okamžiku minima T_0 , bude suma v minimu v zásadě dána pozorovacími chybami. Deeg dovozuje, že minimální hodnota $\chi^2(T)$ pro $T = T_0$ je určena počtem stupňů volnosti Z tak, že

$$\chi^2(T_0) = Z - 1. \quad (35)$$

Z rovnice (34) pak plyne vztah

$$S(T_0) = 2\mu^2(Z - 1). \quad (36)$$

V Deegem navržené modifikované metodě se po prvotním určení koeficientů a , b a c suma $S(T_0)$ přijme dle rovnice (36) a hodnota c

$$c = 2\mu^2(Z - 1) + \frac{b^2}{4a}. \quad (37)$$

Po dosazení této revidované hodnoty c do původního vztahu (33) pro chybu minima dostaneme jednoduchý vztah.

$$\sigma_{T_0}^2 = \frac{2\mu^2}{a}. \quad (38)$$

Deeg rovněž nezávisle došel ke stejnému závěru jako Harmanec, tedy že přesnost určení okamžiku minima se zvýší, když se použije větší počet posuvů na obě strany od odhadnutého okamžiku minima.

2.3 $O-C$ diagramy a změna oběžných period dvojhvězd

Samostatným a zpravidla prvním úkolem při studiu konkrétní dvojhvězdy bývá z pozorovaných změn její jasnosti nebo radiální rychlosti určit dostatečně přesnou a spolehlivou hodnotu její oběžné periody P . K samotnému nalezení periody můžeme v zásadě použít některou z metod, které jsme si vyložili v základním kurzu AST007. Je to přímočaré, pokud máme měření jasnosti zákrytové nebo elipsoidální proměnné. Pokud ale ve spektru pozorujeme čáry dvou složek dvojhvězdy podobných spektrálních typů, nemusí být celá věc jednoduchá, neboť na počátku nevíme, která čára které složce náleží.

Pokud se již zdařilo nějaký odhad periody nalézt, můžeme zjištěnou periodu zpřesňovat pomocí dalších pozorování, případně s využitím starších, dříve publikovaných pozorování. Je zřejmé, že periodu určíme tím přesněji, čím delší pozorovací řada bude při dané přesnosti pozorování k dispozici. Uvažme například jednoduchý případ pozorování křivky radiálních rychlostí dvojhvězdy s konstantní oběžnou periodou 2,5 dne. Pokud máme pozorování radiálních rychlostí např. z období 50 dní, pak mezi prvním a posledním pozorováním vykonala dvojhvězda právě $50/2,5=20$ oběhů. Fázový posuv o 0.03 ve fázi mezi prvním a posledním bodem bude tedy představovat změnu periody o $2,5-(50/20.03)=0,00374$ dne. Budou-li pozorování pokrývat třeba 500 dní, tedy 200 oběhů, bude stejný fázový rozdíl na konci intervalu pokrytého daty představovat již jen $2,5-(500/200.03)=0,000375$ dne.

Klasickou metodou, jak zpřesňovat hodnotu oběžné periody (ostatně i periody fyzikálních proměnných hvězd) a jak se přesvědčit, že perioda je dlouhodobě stálá nebo se nějakým způsobem mění, je konstruovat tzv. $O-C$ (z anglického ‘observed – computed’; pozorovaný – vypočtený) diagram okamžiků minim či maxim, maxim radiální rychlosti a podobně. Pro stručnost budu dále mluvit o okamžicích minim, ale vše stejným způsobem platí i pro jiné definované body světelné křivky či křivky radiální rychlosti. Okamžiky minim se určují lokálně, pokud je to možné, přímo z pozorování jednoho konkrétního minima, jak o tom bude řeč níže, nebo alespoň ze složení dat z jednoho kratšího období do fázového diagramu s nejlepší známou hodnotou periody P .

Konstrukce $O-C$ diagramu je ovšem možná pouze tehdy, známe-li hodnotu periody s dostatečnou přesností a máme-li k dispozici dostatečně hustou řadu okamžiků minim. Jinak totiž narazíme na problém ročních aliasů a námi konstruovaný $O-C$ diagram může být chybný a zavádějící. Příklady takových omylů lze nalézt i v publikovaných pracech.

Pokud o dlouhodobém chování periody námi studované proměnné nemáme žádné dřívější informace, začínáme obvykle s lineární efemeridou

$$T_{\min} = T_0 + P \cdot E, \quad (39)$$

kde T_0 je zvolený referenční okamžik minima. Pro každý z pozorování určený okamžik minima O

odhadneme odpovídající číslo cyklu neboli epochu E podle vztahu

$$E = \text{int} \left(\frac{O - T_0}{P} \right) \quad (40)$$

a očekávaný okamžik minima poté spočteme ze vztahu

$$C = T_0 + P \cdot E. \quad (41)$$

Pro všechny okamžiky minim, které takto získáme, poté nakreslíme to, čemu se říká $O-C$ diagram, totiž průběh funkční závislosti $O-C = f(E)$ a ten vyhodnotíme.

Pokud je hodnota periody, kterou jsme při konstrukci $O-C$ diagramu použili, stálá a v mezích chyb pozorování i dostatečně přesná, budou body v $O-C$ diagramu ležet v okolí přímky rovnoběžné s osou X a rozptyl bodů bude odpovídat chybám určení jednotlivých okamžiků minim.

Je-li perioda stálá, ale je-li její hodnota poněkud delší než ta, kterou jsme při konstrukci diagramu použili, budou se pozorované body v $O-C$ diagramu kupit opět kolem přímky, která ale bude s rostoucím E stoupat, tj. bude mít kladnou směrnici. Analogicky je-li skutečná perioda kratší než ta, kterou jsme použili, budou se body v $O-C$ diagramu kupit kolem přímky se zápornou směrnici.

V obou těchto případech lze $O-C$ diagram využít ke zpřesnění hodnoty periody. Předpokládejme pro jednoduchost, že určení okamžiků minim není zatíženo žádnými chybami a předpokládejme dále, že zatímco jsme $O-C$ diagram konstruovali pro periodu P , správná hodnota periody je $P + \Delta P$. Pro danou epochu E bude pak

$$O - C = (T_0 + (P + \Delta P) \cdot E) - (T_0 + P \cdot E) = \Delta P \cdot E. \quad (42)$$

Jinými slovy: směrnice přímky v $O-C$ diagramu, kterou můžeme určit třeba metodou nejmenších čtverců, je algebraicky rovna hodnotě opravy ΔP námi použité periody P .

Jiný $O-C$ diagram dostaneme, pokud se perioda studovaného objektu s časem mění. Typickým případem je parabolický průběh odchylek, přičemž osa paraboly je rovnoběžná s osou Y . Pokud má parabola minimum pro $E = 0$, jedná se o prodlužování periody, dosahuje-li pro $E = 0$ maxima, perioda se zkracuje.

Velmi často se lze v podobných případech dočíst, že parabolický průběh $O-C$ diagramu znamená *lineární* změnu periody. To je pravda jen přibližně. Pro okamžiky minim totiž platí vztah

$$T = T_0 + P_0 \cdot E + a \cdot E^2, \quad (43)$$

kde P_0 je perioda v čase referenčního minima T_0 , tj. pro $E = 0$. Pokud budeme epochu E chápat jako *reálné číslo* charakterizující cykl a fázi, pak T bude čas odpovídající příslušné fázi v daném cyklu. Okamžitá perioda pak zřejmě bude

$$P = \frac{dT}{dE} = P_0 + 2aE \quad (44)$$

a změna periody v daném čase $\dot{P}$ bude

$$\dot{P} = 2a \frac{dE}{dT} = \frac{2a}{P}. \quad (45)$$

Vidíme tedy, že pro kvadratickou efemeridu se perioda mění lineárně s epochou E , ale nikoliv s časem. Pro kladná a rychlost změny periody s časem klesá.

To je ovšem situace, se kterou se podle současných představ setkáváme u dvojhvězd ve stádiu výměny hmoty poté, co se již role složek vyměnila. Kvadratická efemerida je proto velmi dobrým popisem reálné situace v podobných případech.

V astronomické literatuře můžeme najít příklady popisu změn periody ve formě polynomicke závislosti na epoše do třetího i vyššího stupně polynomu, viz např. práci Wooda a Forbese (1963). Význam podobných efemerid je ale poněkud sporný, neboť představují pouze matematicky popis konečné řady pozorování a zkušenost ukazuje, že jejich predikční hodnota je zpravidla velmi malá.

Jinou možností je, že $O-C$ diagram ukazuje periodické změny. Z toho lze usoudit na přítomnost třetího tělesa v soustavě nebo na postupné stáčení výstředné oběžné dráhy v prostoru, jak o tom bude ještě řeč později.

Posledním typem $O-C$ diagramu je nespojitý průběh odchylek s výrazným skokem. V principu jistě nelze vyloučit situace, kdy se např. po období stability perioda v důsledku nějakého eruptivního procesu (třeba krátkodobé ztráty hmoty ze soustavy či chvilkové výměny hmoty mezi složkami) prakticky skokově změní. Než však podobný závěr učiníme, je dobré se i v těchto případech přesvědčit, zda nedošlo k chybě v počítání jednotlivých daty pokrytých cyklů. Dobře doložený případ skokové změny oběžné periody ukazaný na obr. 3 je převzat z práce Mayer, Harmanec, Wolf a kol. (2016).

2.4 Určování elementů spektroskopických dvojhvězd

2.4.1 Odhad velké poloosy oběžné dráhy dvojhvězdy

Povšimněme si nejprve, že již znalost oběžné periody a představa o hmotnosti primární složky nám pro libovolnou dvojhvězdu dovoluje učinit si docela dobrou představu o rozměrech celé soustavy. Protože předpokládáme $M_2 \leq M_1$, platí, že

$$M_1 \leq (M_1 + M_2) \leq 2M_1, \quad (46)$$

takže dostáváme s pomocí 3. Keplerova zákona (2) odhad velké poloosy soustavy ve tvaru

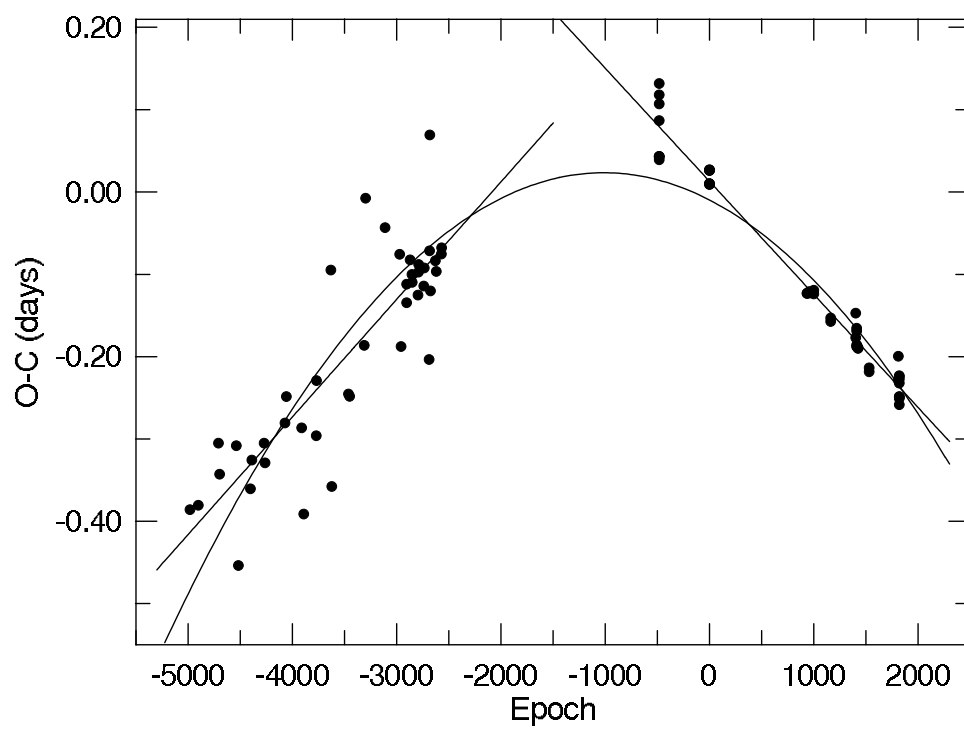
$$4,208278(P^2(M_1))^{1/3} \leq a \leq 4,208278(2P^2(M_1))^{1/3} \quad (47)$$

Jestliže tedy např. podle vzhledu spektra či podle barvy primární složky můžeme zhruba odhadnout hmotnost primáru, vidíme, že nerovnost (47) dává velmi slušný odhad rozměru soustavy, neboť horní a dolní mez velké poloosy soustavy se liší pouze o $2^{1/3} \doteq 1,26$.

2.4.2 Případ, kdy pozorujeme obě spektra

Pokud ve spektru pozorujeme spektra obou složek (v novější literatuře se lze pro takové dvojhvězdy občas setkat se zkratkou SB2: a spectroscopic binary with two components visible), získáme dvě křivky radiálních rychlostí a jejich poloviční amplitudy K_1 a K_2 . Z toho hned můžeme určit poměr hmotností obou těles, neboť platí, že

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{K_1}{K_2}. \quad (48)$$



Obrázek 3: $O-C$ diagram okamžiků minim zákrytové dvojhvězdy V346 Cen naznačující skokovou změnu oběžné periody.

Určení dalších veličin není už tak jednoduché. Poloviční pozorovaná amplituda křivky radiálních rychlostí je totiž součinem skutečné oběžné rychlosti příslušné složky dvojhvězdy se sinem sklonu oběžné dráhy i .

V dalším textu budeme využívat vztahy odvozené v nebeské mechanice (viz např. Klioner 2016). Pro obecný případ eliptické dráhy s výstředností (excentricitou) e se obvykle předpokládá, že složky dvojhvězdy obíhají kolem společného těžiště po drahách odpovídajících řešení problému dvou těles, tedy s průvodičem

$$r_{1,2} = \frac{a_{1,2}(1 - e^2)}{1 + e \cos v(t)}, \quad (49)$$

z čehož lze pro radiální rychlost j -té složky dvojhvězdy RV_j , $j = 1, 2$ jako funkci času t odvodit vztah

$$RV_j = \gamma + (3 - 2j)K_j(\cos(\omega_j + v(t)) + e \cos \omega_j), \quad (50)$$

kde γ je radiální rychlost celé soustavy vůči nám a ω_j je délka periastra j -té složky měřená od výstupného uzlu dráhy.³ Platí přirozeně, že $\omega_2 = \omega_1 + 180^\circ$. Pro pravou anomálii $v(t)$ jako funkci excentrické anomálie $E(t)$ platí

$$\operatorname{tg} \frac{v(t)}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E(t)}{2}. \quad (51)$$

Excentrickou anomálii vypočteme z času pozorování pomocí Keplerovy rovnice

$$E(t) = \frac{2\pi}{P}(t - T_0) + e \sin E(t), \quad (52)$$

kde T_0 je čas průchodu hvězd periastrum a P siderická oběžná perioda dvojhvězdy.

Pro úplnost ještě dodejme, že rovnoměrný úhlový pohyb bývá často označován výrazem *střední anomálie* $M(t)$. Platí tedy

$$M(t) = \frac{2\pi}{P}(t - T_0), \quad (53)$$

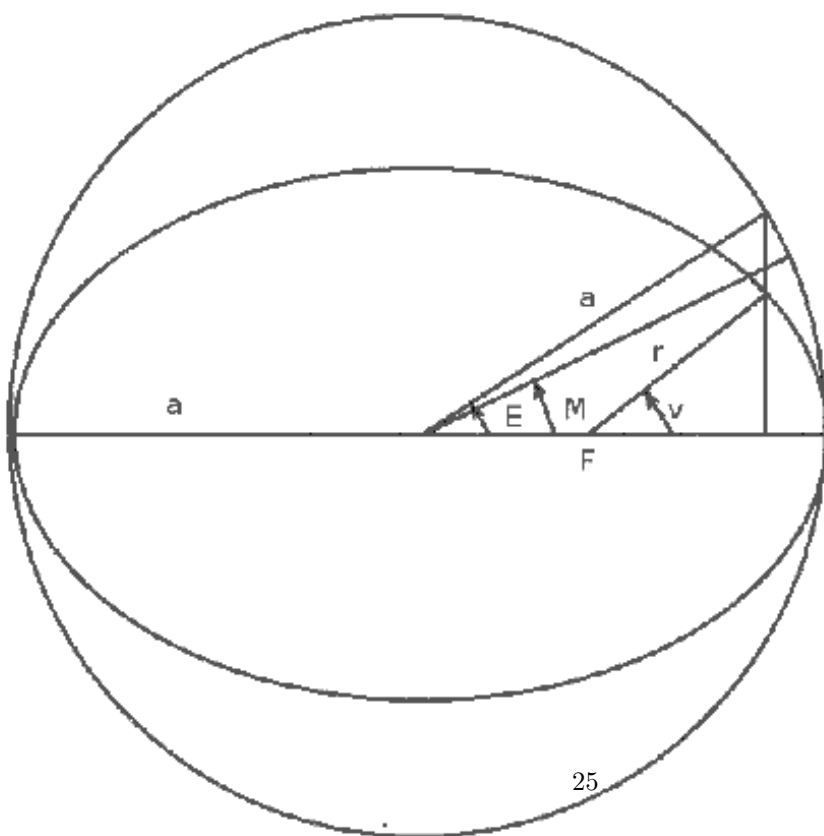
a Keplerovu rovnici (52) lze formálně přepsat do tvaru

$$E(t) = M(t) + e \sin E(t), \quad (54)$$

Poznamenejme, že Keplerovu rovnici lze docela snadno řešit iteračně. Zvolíme počáteční hodnotu $E(t) = M(t)$ a z rovnice (54) vypočteme nový odhad $E(t)$ a tak pokračujeme až do dosažení požadované přesnosti.

Geometrický význam pravé, střední a excentrické anomálie je ilustrován obrázkem 4.

³Prakticky ve veškeré světové literatuře týkající se elementů *dvojhvězd* se délkou periastra nazývá úhel mezi výstupným uzlem dráhy při průřezu oběžné dráhy na nebeskou sféru a polohou periastra dráhy; v učebnicích nebeské mechaniky se ovšem tomuto úhlu říká argument periastra, zatímco délkou periastra $\tilde{\omega}$ se rozumí složený úhel měřený jednak v referenční rovině (Ω) a poté v oběžné rovině (ω), tedy $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$. Proto pozor na možnou záměnu při konkrétním použití!



Obrázek 4: Diagram vysvětlující geometrický význam pravé (v), excentrické (E) a střední (M) anomálie při pobybu tělesa vůči ohnisku elipsy.

Všechny parametry rovnic (50) – konkrétně K_j , e , P , T_0 , ω_1 a γ – se z pozorovaných měření radiálních rychlostí určí metodou nejmenších čtverců. Z nich pak už můžeme spočítat dolní odhad vzdáleností složek od těžiště soustavy a_j z 2. Keplerova zákona

$$a_j \sin i = \frac{P}{2\pi} K_j (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (55)$$

Pokud budeme opět i vzdálenosti od těžiště udávat v nominálních poloměrech Slunce, amplitudy křivek radiální rychlosti v km s^{-1} a periodu ve dnech, lze rovnice (55) přepsat do tvaru

$$a_j \sin i = \frac{86400 \cdot 1000}{2\pi \cdot 695700000} K_j P (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = 0,01976569 K_j P (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (56)$$

Sečtením obou rovnic (55) dostáváme také

$$a \sin i = (a_1 + a_2) \sin i = \frac{P}{2\pi} (K_1 + K_2) (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = 0,01976569 (K_1 + K_2) P (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (57)$$

Z definice těžiště a s použitím 3. Keplerova zákona (2) můžeme dále psát

$$\begin{aligned} M_j &= \frac{a_{3-j}}{a} (M_1 + M_2) = \frac{P K_{3-j} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi a \sin i} \frac{4\pi^2 a^3}{G P^2} = \\ &= \frac{2\pi a^2 K_{3-j} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{G P \sin i} = \frac{2\pi K_{3-j} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{G P \sin i} \frac{P^2 (1 - e^2) (K_1 + K_2)^2}{4\pi^2 \sin^2 i}, \end{aligned} \quad (58)$$

takže pro hmotnosti obou složek dostáváme vztahy

$$M_j \sin^3 i = \frac{1}{2\pi G} K_{3-j} (K_1 + K_2)^2 P (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (59)$$

Pro hmotnosti vyjádřené v nominálních hmotnostech Slunce $\mathcal{M}_{\odot}^N$, periodu ve dnech a poloviční amplitudy křivek radiálních rychlostí v km s^{-1} dostaneme numerickou konstantu v rovnicích (59) ve tvaru

$$\frac{86400 \cdot 1000^3}{2\pi \cdot 1,3271244 \times 10^{20}} = 1,036149... \times 10^{-7} \quad (60)$$

a tedy

$$M_j \sin^3 i = 1,036149... \times 10^{-7} K_{3-j} (K_1 + K_2)^2 P (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (61)$$

2.4.3 Příklad, kdy pozorujeme pouze jedno spektrum

Pokud pozorujeme křivku radiálních rychlostí pouze jasnější složky dvojhvězdy, např. složky 1, můžeme z parametrů popisujících křivku získat pouze $a_1 \sin i$ a veličinu, které se říká funkce hmoty $f(M)$, a která je definována vztahem

$$f_j(M) = \frac{4\pi^2 a_j^3 \sin^3 i}{G P^2} = \frac{M_{3-j}^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{q^3}{(1 + q)^2} M_j \sin^3 i, \quad (62)$$

kde $q = M_{3-j}/M_j$ označuje poměr hmot.

Všimněme si, že pro $q \leq 1$ nám funkce hmoty dává horní odhad největší možné hmotnosti soustavy. Platí totiž zřejmě (pro $q = 1$ a tedy $M_1 = M_2$ a pro $i = 90^\circ$), že

$$f(M) \leq \frac{1}{4}M_1 = \frac{1}{8}(M_1 + M_2). \quad (63)$$

Z veličin, které určíme přímo z křivky radiálních rychlostí primáru, se funkce hmoty vypočte pomocí vztahu

$$f_j(M) = \frac{1}{2\pi G} K_j^3 P (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (64)$$

Pro jednotky použité výše, bude opět numericky

$$f_j(M) = 1,036149... \times 10^{-7} K_j^3 P (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (65)$$

Můžeme-li nějak, např. podle vzhledu spektra odhadnout hmotnost ve spektru pozorované složky, lze pomocí funkce hmotnosti odhadnout pro daný sklon dráhy i hmotnost sekundární složky. Porovnání rovnic (62) a (65) vede na vztah

$$M_{3-j} \sin i = \left(\frac{1}{2\pi G} \right)^{1/3} K_j (M_1 + M_2)^{2/3} P^{1/3} (1 - e^2)^{1/2}. \quad (66)$$

Pro oběžnou periodu ve dnech, poloviční amplitudu křivky radiálních rychlostí v km s^{-1} a hmotnosti složek v nominální sluneční hmotnosti $\mathcal{M}_\odot^N$ lze tento vztah přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} M_{3-j} \sin i &= 1000 \left(\frac{86400}{2\pi(\mathcal{G}\mathcal{M}_\odot^N)} \right)^{1/3} K_j (M_1 + M_2)^{2/3} P^{1/3} (1 - e^2)^{1/2} \\ &= 0,004696858.. K_j (M_1 + M_2)^{2/3} P^{1/3} (1 - e^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (67)$$

Rovnici (67) můžeme snadno pro zvolený sklon dráhy řešit iteračně s tím, že zvolíme nějakou počáteční hmotnost M_{3-j} , třeba velmi malou nebo i nulovou, což se zejména hodí pro aplikace na extrasolární planety.

Existuje ještě jedna zajímavá možnost, jak využít funkci hmoty k určení individuálních hmotností obou složek. Pokud je pro dvojhvězdu známa paralaxa p a pokud byla dvojhvězda rozlišena jako vizuální a bylo možno pro tuto dráhu určit *úhlový rozměr* velké poloosy dráhy a'' a sklon dráhy i (jak je vysvětleno v dalším výkladu), je možno využít vztah mezi paralaxou, úhlovým a lineárním rozměrem ve tvaru

$$a'' = \frac{a(\mathcal{R}_\odot^N) p}{215,0322...} \quad (68)$$

k určení velikosti velké poloosy dráhy v nominálních slunečních poloměrech $a(\mathcal{R}_{\odot}^N)$. Ze 3. Keplerova zákona (2) dostaneme celkovou hmotnost

$$M_1 + M_2 = \left(\frac{a}{4,208278\dots} \right)^3 \frac{1}{P^2}, \quad (69)$$

ze vztahu (62) lze pak vypočítat hmotnost

$$M_{3-j} = \frac{(f_j(M)(M_1 + M_2)^2)^{\frac{1}{3}}}{\sin i} \quad (70)$$

a pomocí vztahu (69) tedy i druhou individuální hmotnost. Je třeba ovšem upozornit na to, že tento postup povede na určení realistických hmotností pouze v případě, že je k dispozici dostatečně přesná paralaxa i parametry visuální dráhy.

Všimněme si, že uvedený postup lze také obrátit. Pokud můžeme rozumně odhadnout hmotnost složky, pro kterou je k dispozici křivka radiálních rychlostí a tedy funkce hmoty, je možné z hmotností složek a parametrů visuální dráhy naopak odhadnout paralaxu a tedy vzdálenost soustavy od nás.

2.4.4 Hudba budoucnosti...

Zucker a Tal (2007) publikovali studii, ve které poukázali na to, že pokud bude možno měřit radiální rychlosti složek dvojhvězdy s přesností 1 m s^{-1} a lepší, projeví se již měřitelně relativistické efekty a pomocí nich bude možné určit sklon dráhy i pro nezářivé soustavy a tím získat i jejich skutečné hmotnosti. Dosažení potřebné přesnosti ale nebude snadným technickým problémem, i když není pochyb, že se přesnost měření radiálních rychlostí i díky velkému zájmu o výzkum extrasolárních planet rychle vyvíjí.

2.4.5 Lucyho a Sweeneyho test, zda je malá výstřednost dráhy reálná

Lucy a Sweeney (1971) upozornili na to, že v katalogu spektroskopických dvojhvězd se vyskytuje mnoho dvojhvězd s výstřednými drahami o velmi malé výstřednosti pod 0,1. To je vedlo k podezření, že mnohé tyto dvojhvězdy mají ve skutečnosti kruhové dráhy, a že zjištěná výstřednost dráhy je jen důsledkem pozorovacích chyb v kombinaci s omezeným počtem pozorování. Provedli proto podrobnou statistickou analýzu, aby zjistili, jaká je pravděpodobnost toho, že metodou nejmenších čtverců bude pro kruhovou dráhu nalezena nenulová výstřednost. Předpokládali, že pozorování ve všech oběžných fázích mají stejnou váhu a odvodili pravděpodobnost toho, že řešením pozorovaného kruhového oběžného pohybu bude zjištěna zdánlivá výstřednost dráhy s hodnotou $\hat{e}$. Z pravděpodobnostního rozložení zjistili, že očekávaná hodnota zdánlivé výstřednosti $\hat{e}_0$ je dána vztahem

$$\hat{e}_0 = \frac{\sigma}{K} \sqrt{\frac{\pi}{N}}, \quad (71)$$

kde σ označuje střední kvadratickou chybu jednoho pozorování radiální rychlosti o jednotkové váze, N je počet měření, K poloviční amplituda křivky radiálních rychlostí a π Ludolfovo číslo. Budeme-li např. předpokládat vcelku typickou situaci, že bylo pořízeno 30 měření radiální rychlosti, $K = 40 \text{ km s}^{-1}$ a chyba jednoho měření činí 5 km s^{-1} , zjistíme ze vztahu (71) hodnotu $\hat{e}_0 = 0,04$.

Pravděpodobnost toho, že při řešení pohybu po kruhové dráze dostaneme metodou nejmenších čtverců výstřednost převyšující hodnotu $\hat{e}$ lze vyjádřit vztahem

$$P(e > \hat{e}) = \exp\left(-\frac{\hat{e}^2}{2\sigma_e^2}\right), \quad (72)$$

kde střední kvadratická chyba určení hodnoty výstřednosti σ_e je dána vztahem

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{K} \sqrt{\left(\frac{2}{N}\right)}. \quad (73)$$

Pokud – jak Lucy a Sweeney doporučují – přijmeme pětiprocentní hladinu významnosti, pak z rovnice (72) vyplývá, že

$$P(e > \hat{e}) = 0,05 \quad \text{pro} \quad \hat{e} = 2,45\sigma_e. \quad (74)$$

To tedy znamená, že podle tohoto testu můžeme výstřednost dráhy považovat za reálnou pouze když $\hat{e} > 2,45\sigma_e$. To je mnohem přísnější kritérium, než kritérium $\hat{e} = \sigma_e$, které bývalo v některých starších studiích používáno a které odpovídá pravděpodobnosti $P(e > \hat{e}) = 0,61$.

Určitý problém je ovšem v tom, že chyba jednoho měření radiální rychlosti není předem známa. Při použití metody nejmenších čtverců dostaneme pouze její odhad podle vztahu

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N w_n (O_n - C_n)^2}{N - M}}, \quad (75)$$

kde M je počet elementů určovaných v případě kruhové dráhy ($M=6$, konvergujeme-li i periodu) a w_n je váha n -tého měření.

S použitím statistických metod navrhli Lucy a Sweeney proto následující statistický test významnosti nenulové výstřednosti dráhy, který není na odhadu chyby závislý:

Nechť S je váhovaná suma čtverců odchylek od řešení metodou nejmenších čtverců, tedy

$$S = \frac{\sum_{n=1}^N w_n (O_n - C_n)^2}{N - M}. \quad (76)$$

Označme $S = S_k$ pro kruhovou a $S = S_e$ pro výstřednou dráhu. Účinnost, s jakou dva dodatečné elementy, $e \cos \omega$ a $e \sin \omega$, přispívají ke zmenšení S_e vzhledem k $S = S_k$ lze měřit parametrem

$$F = \frac{N - M}{2} \frac{S_k - S_e}{S_e}. \quad (77)$$

Označíme-li $\beta = \frac{1}{2}(N - M)$, pak statistická pravděpodobnost p toho, že hodnota parametru F dosáhne hodnoty $\hat{F}$ je dána výrazem

$$p = \left(1 + \frac{\hat{F}}{\beta}\right)^{-\beta}. \quad (78)$$

Pokud opět přijmeme pětiprocentní hladinu význačnosti a z řešení pro výstřednou dráhu určíme výstřednost $\hat{e}$, pak jako správné řešení přijmeme

$$e = \hat{e} \text{ pokud } p < 0,05 \text{ a} \quad (79)$$

$$e = 0 \text{ pokud } p \geq 0,05. \quad (80)$$

Lucy a Sweeney ilustrovali aplikaci jejich metody na příkladu dvojhvězdy μ UMa, pro kterou bylo publikováno dráhové řešení s výstřednou dráhou a $e = 0,063 \pm 0,033$. Bylo konvergováno všech šest elementů a dráha byla určena ze 34 pozorování radiálních rychlostí.

Již aplikace prvního testu naznačuje, že výstřednost nemusí být reálná, neboť hodnota výstřednosti je pouze dvakrát větší, než střední kvadratická chyba jejího určení. Lucy a Sweeney proto aplikovali druhý test. Pro kruhovou dráhu dostali $S_k = 21.7 \text{ (km s}^{-1}\text{)}^2$ a pro dráhu výstřednou $S_e = 18.8 \text{ (km s}^{-1}\text{)}^2$. V daném případě je zřejmě $\beta = 14$. Z toho tedy plyne $F = 2,160$ a po dosazení do rovnice (78) vychází $p = 0,134$. Pokud tedy přijmeme pětiprocentní hladinu význačnosti, je nalezená výstřednost dráhy zcela jistě nereálná a dráha uvažované dvojhvězdy je ve skutečnosti kruhová.

2.5 Určování elementů zákrytových dvojhvězd

Určování kvantitativních údajů ze světelné křivky je dosti složitá úloha a příslušné postupy a metody řešení jsou i v současnosti nadále vyvíjeny a vylepšovány. Zde se proto omezíme jen na některé jednodušší principy a vztahy, abychom si vysvětlili, jaké informace a díky čemu lze ze světelné křivky získat.

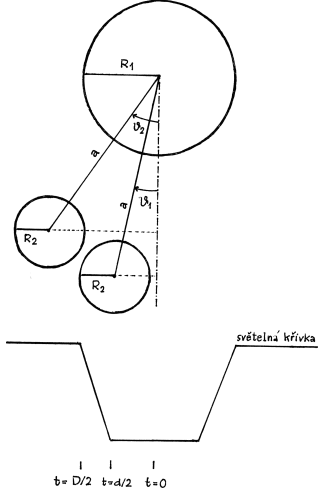
2.5.1 Zákryty v kruhové dráze při sklonu 90°

Uvažujme nejprve nejjednodušší případ dvojhvězdy se sklonem dráhy $i = 90^\circ$, tj. takové, jejíž oběžná rovina přesně prochází sluneční soustavou. Budeme dále předpokládat, že složky dvojhvězdy jsou kulová tělesa s rovnoměrným rozložením jasu po celém povrchu, která kolem sebe obíhají po kruhových drahách. Budeme-li uvažovat relativní dráhu složky 2 kolem složky 1, pak je zřejmé, že složka 2 urazí za jeden oběh dráhu $2\pi a$. Označme R_1 a R_2 poloměry obou hvězd, D celkovou dobu trvání zákrytu a d dobu trvání úplného zákrytu neboli totality, kdy hvězda 2 celou plochou svého disku zakrývá část disku hvězdy 1 – viz obr. 5. Budeme-li čas t měřit od středu primárního zákrytu a zavedeme-li tzv. fázový úhel

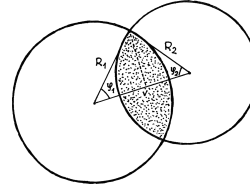
$$\vartheta = \frac{2\pi}{P}t, \quad (81)$$

pak zřejmě platí

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= a \sin \vartheta_2 = a \sin\left(\frac{2\pi}{P} \frac{D}{2}\right), \\ R_1 - R_2 &= a \sin \vartheta_1 = a \sin\left(\frac{2\pi}{P} \frac{d}{2}\right). \end{aligned} \quad (82)$$



Obrázek 5: Geometrie úplného zákrytu při sklonu $i = 90^\circ$.



Obrázek 6: Ilustrace k výpočtu zakrývané plochy při úplném zákrytu.

Úpravou těchto vztahů dostáváme

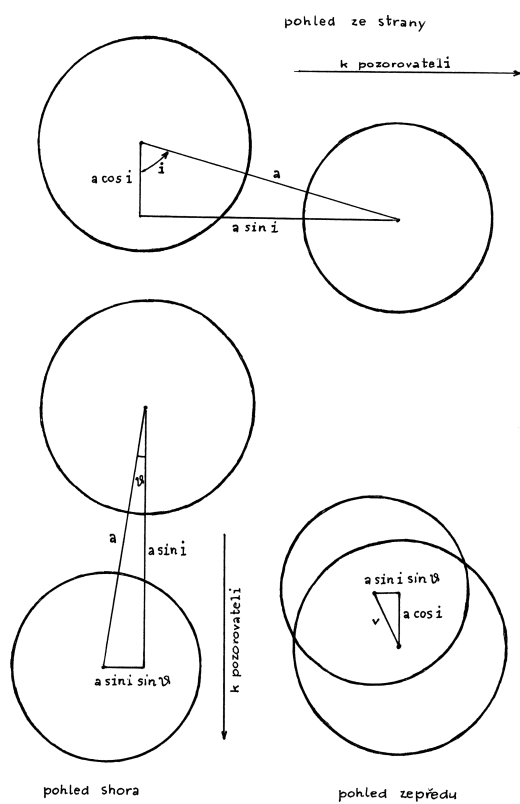
$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{R_1}{a} = \frac{1}{2}(\sin(\frac{\pi D}{P}) + \sin(\frac{\pi d}{P})), \\ r_2 &= \frac{R_2}{a} = \frac{1}{2}(\sin(\frac{\pi D}{P}) - \sin(\frac{\pi d}{P})). \end{aligned} \tag{83}$$

Je tedy zřejmé, že z námi uvažované světelné křivky lze určit oběžnou periodu a dobu trvání totality a celého zákrytu a pomocí nich pak spočítat relativní poloměry složek, tj. poloměry vyjádřené v jednotkách vzdálenosti mezi středy obou hvězd.

2.5.2 Úplné zákryty při sklonu menším než 90°

Výrazně složitější je již případ, kdy sice ještě dochází k úplnému zákrytu hvězdy 1 hvězdou 2, kdy ale $i \neq 90^\circ$. Nyní již musíme uvažovat světelnou křivku po dobu celého trvání zákrytu. Budeme chtít nalézt modelovou funkci, která popisuje změnu jasnosti soustavy v závislosti na čase. Označme L_1 a L_2 svítivosti složek, L_0 svítivost celé soustavy v době úplného zákrytu, $L = L(t)$ celkovou svítivost soustavy v obecném okamžiku během zákrytu a $S = S(t)$ plochu té části disku hvězdy 1, která je v daném okamžiku během zákrytu zakryta složkou 2. Platí zřejmě

$$L = L_1 + L_2 - \frac{S}{\pi R_1^2} L_1. \tag{84}$$



Obrázek 7: Geometrie úplného zákrytu při sklonu menším než 90° .

V době úplného zákrytu platí vztah

$$L_0 = L_1 + L_2 - \frac{\pi R_2^2}{\pi R_1^2} L_1. \quad (85)$$

Porovnáním obou rovnic a po zavedení relativní svítivosti, vyjádřené v jednotkách celkové svítivosti soustavy mimo zákryt

$$l = \frac{L}{L_1 + L_2}, \quad (86)$$

dostáváme vztah

$$1 - l = (1 - l_0) \frac{S}{\pi R_2^2}. \quad (87)$$

Zakrývanou plochu S lze vyjádřit pomocí vztahu

$$S = \frac{\varphi_1}{\pi} \pi R_1^2 - (R_1 \sin \varphi_1)(R_1 \cos \varphi_1) + \frac{\varphi_2}{\pi} \pi R_2^2 - (R_2 \sin \varphi_2)(R_2 \cos \varphi_2), \quad (88)$$

(viz obr. 6) přičemž zřejmě platí

$$R_1 \sin \varphi_1 = R_2 \sin \varphi_2. \quad (89)$$

Označíme-li ještě poměr poloměrů

$$k = \frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}, \quad (90)$$

můžeme pro okamžitou zdánlivou vzdálenost středů obou složek v psát

$$v = R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2 = R_1 (\cos \varphi_1 + k \cos \varphi_2). \quad (91)$$

Funkční závislost na čase můžeme zavést za pomoci fázového úhlu ϑ , který byl zaveden vztahem (81). Z geometrických úvah (viz obr. 7) plyne vztah

$$v^2 = a^2 (\sin^2 i \sin^2 \vartheta + \cos^2 i). \quad (92)$$

Kdybychom tedy znali relativní poloměry složek a sklon oběžné dráhy, mohli bychom teoretickou světelnou křivku během zákrytu počítat následovně: Pro zvolený čas t bychom úhly φ_1 a φ_2 vypočetli z rovnic

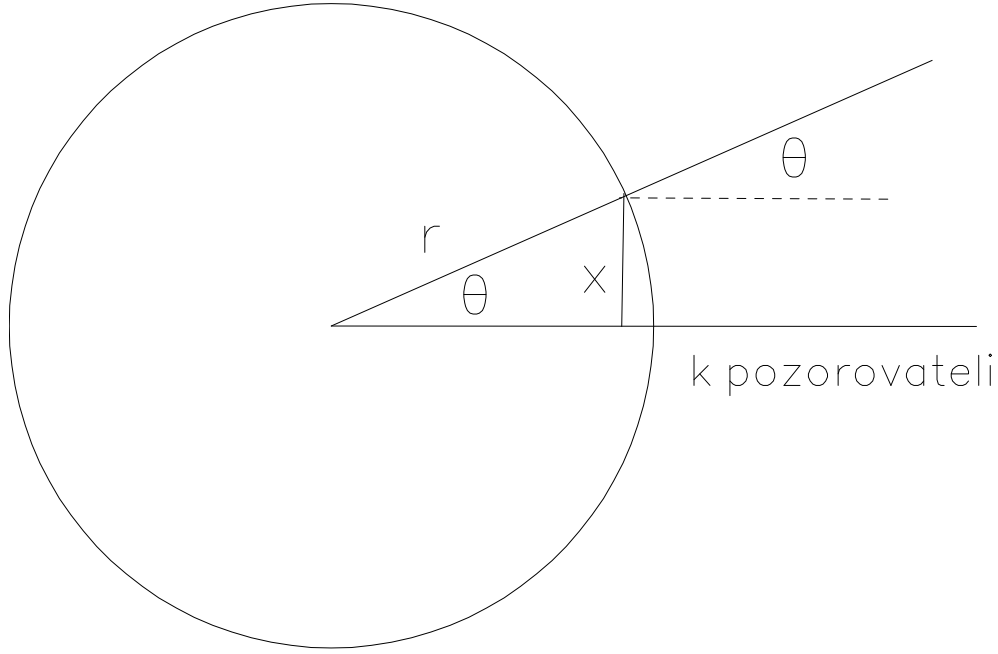
$$\begin{aligned} r_1 (\cos \varphi_1 + k \cos \varphi_2) &= \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \left(\frac{2\pi t}{P} \right)}, \\ \sin \varphi_1 &= k \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (93)$$

a z nich již pomocí vztahu

$$1 - l = \frac{1}{\pi} (1 - l_0) \left(\frac{\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{k^2} + \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \right) \quad (94)$$

bychom počítali teoretickou světelnou křivku.

Je samozřejmě možné tuto úlohu otočit a hledat parametry rovnic (93) a (94), tedy relativní poloměry složek r_1 a r_2 a sklon dráhy i tak, abychom dosáhli co nejlepší shody pozorované a vypočtené světelné křivky.



Obrázek 8: Ilustrace k výpočtu lineárního okrajového ztemnění

2.5.3 Okrajové ztemnění

Okrajové ztemnění popisuje, jak se mění intenzita v dané vlnové délce do směru k pozorovateli v závislosti na úhlu ϑ , který svírá normála k povrchu hvězdy v uvažovaném místě se směrem zorného paprsku.

Pro jednoduchý model atmosféry (Milne 1921) lze pokles intenzity spojitého záření ve vlnové délce λ jako funkci úhlu ϑ od středu směrem k okraji disku zapsat ve tvaru

$$I_\lambda(\vartheta) = I_\lambda(0)(1 - u_\lambda + u_\lambda \cos \vartheta). \quad (95)$$

To znamená, že mimo zákryty můžeme součet příspěvků z disku sférické hvězdy o relativním poloměru r vyjádřit jako integrál z příspěvků z infinitesimálních mezikruží o poloměru x a tloušťce dx vztahem

$$L_\lambda = \int_0^r 2\pi x I_\lambda(\vartheta) dx = \int_0^r 2\pi x I_\lambda(0)(1 - u_\lambda + u_\lambda \cos \vartheta) dx. \quad (96)$$

První dva členy lze integrovat přímo a třetí také, pokud si uvědomíme, že z geometrie plyne (viz obr. 8), že $x = r \sin \vartheta$ a tedy $dx = r \cos \vartheta d\vartheta$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} L_\lambda &= I_\lambda(0) \left(\pi r^2 - \pi r^2 u_\lambda + 2\pi r^2 u_\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \right) \\ &= I_\lambda(0) \left(\pi r^2 - \pi r^2 u_\lambda + \frac{2}{3} \pi r^2 u_\lambda \right) = \pi r^2 I_\lambda(0) \left(1 - \frac{u_\lambda}{3} \right). \end{aligned} \quad (97)$$

Se zlepšováním modelů atmosfér se ale postupně ukazovalo, že jednoduchý zákon lineárního okrajového ztemnění nevyhovuje. Objevovaly se proto další empirické zákony. Označíme-li, jak se často činí, $\mu = \cos \vartheta$, lze lineární zákon okrajového ztemnění (95) zapsat ve tvaru

$$I_\lambda(\vartheta) = I_\lambda(0)(1 - u_\lambda(1 - \mu)) \quad (98)$$

a kvadratický zákon použitý v rovněž často používaných tabulkách Wadeho a Ruciňského (1985) ve tvaru

$$I_\lambda(\vartheta) = I_\lambda(0)(1 - a_\lambda(1 - \mu) - b_\lambda(1 - \mu)^2). \quad (99)$$

Další autoři uvažovali vyšší člen s odmocninou ve tvaru

$$I_\lambda(\vartheta) = I_\lambda(0)(1 - c_\lambda(1 - \mu) - d_\lambda(1 - \mu^{\frac{1}{2}})) \quad (100)$$

a navržen byl i logaritmický zákon

$$I_\lambda(\vartheta) = I_\lambda(0)(1 - e_\lambda(1 - \mu) - f_\lambda \mu \ln \mu). \quad (101)$$

Ve své disertační práci dochází Díaz-Cordovés (1990) k závěru, že pro horké hvězdy lépe vyhovuje odmocninný zákon (100), zatímco pro chladnější se lépe hodí kvadratický zákon (99).

Nejnovější hodnoty koeficientů okrajového ztemnění pro různé zákony podrobně tabeloval Claret (2000) pro vlnové délky odpovídající měřením v *UBVRI* a *uvby* na základě nových modelů atmosfér. Hodnoty těchto koeficientů se pohybují asi kolem 0,8–0,9 pro chladné hvězdy spektrálních typů K a M, 0,5–0,6 pro hvězdy spektrálního typu A0 a 0,25–0,35 pro hvězdy B0, pokud hovoříme o jednoduchém lineárním zákonu a optickém oboru spektra. Claret ovšem navrhl nový vlastní zákon tak, aby dobře platil přes celý rozsah možných efektivních teplot hvězd. Tento zákon má 4 koeficienty $a_\lambda(1)$ až $a_\lambda(4)$ a lze jej zapsat ve tvaru

$$I_\lambda(\vartheta) = I_\lambda(0)(1 - \sum_{k=1}^4 a_\lambda(k)(1 - \mu^{\frac{k}{2}})). \quad (102)$$

Claret (2007) analyzoval možný vliv ozáření atmosféry druhou složkou dvojhvězdy na hodnoty okrajového ztemnění. Došel k závěru, že vliv je třeba uvažovat a určil, jaké korekce je v podobných situacích brát v úvahu a to v závislosti na relativním toku z druhé složky dvojhvězdy.

Je třeba upozornit, že někteří autoři stále používají koeficienty okrajového ztemnění tabelované Wadem a Ruciňským (1985), a to z toho důvodu, že jsou spočteny pro větší rozsah vlnových délek od 136 do 1650 nm. Ještě rozšířenější je používání tabulek, které publikoval Van Hamme (1993). Ten na základě Kuruczových modelů spočetl monochromatické koeficienty okrajového ztemnění pro lineární, logaritmický a odmocninný zákon ve 1221 hodnotách vlnových délek od 9,09 nm do 160 μm . V jeho práci jsou tabelovány koeficienty integrované pro různé standardně používané fotometrické filtry (Johnsonovy *UBVRIJKLMN*, Strömgrenovy *uvby*).

V poslední době se ovšem při řešení světelných křivek začínají používat předem spočtené modely atmosfér, z nichž se přímo bere intenzita do daného úhlu, čímž se použití koeficientů okrajového ztemnění zcela eliminuje.

2.6 Periodické změny oběžné periody

Při prohlídce $O-C$ diagramů můžeme objevit, že sama změna periody je periodická. Je pravda, že podstatné omezení v nalezení takových změn je dáno jednak délkou intervalu pokrytého daty, jednak přesností dat. Je jasné, že periodičnost je nepochybná jen tehdy, opakovala-li se v časovém průběhu $O-C$ změn vícekrát (a je-li amplituda změn bezpečně nad šumem). V řadě případů – probíhají-li změny periody podle určitých vztahů – se ale periodičnost může pokládat za velmi pravděpodobnou, i když je interval pokrytý daty jen o málo delší, než perioda sama. Data jsou obvykle k dispozici od objevu proměnné; studiem archivních dat (například fotografií) lze ovšem často interval prodloužit až ke konci 19. století. Mnohdy ale fotografické či vizuální odhady okamžiků minim nemají přesnost postačující k prokázání změny periody; podstatně průkaznější jsou data fotoelektrická nebo získaná CCD detektory. Ta jsou zpravidla o řád přesnější než vizuální či fotografická pozorování.

V současné době se lze v této problematice často setkat s obecným označením ETV (neboli **E**clipse **T**iming **V**ariations) označující jakékoli změny v okamžicích zákrytů. Toto označení se používá i při studiu tranzitujících exoplanet a zkoumání jejich změn periody.

Periodické změny periody mají v zásadě tři příčiny:

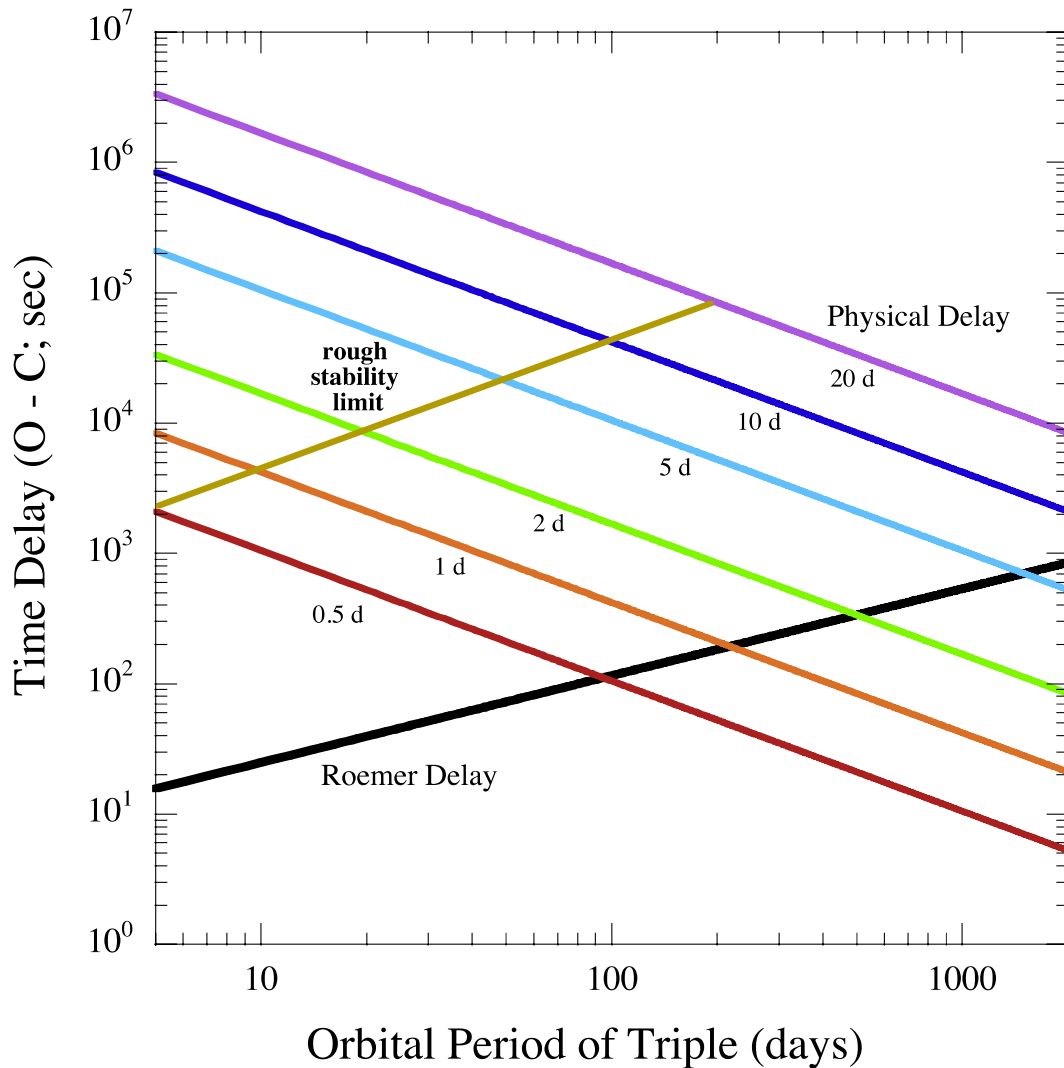
- *Efekt rozdílné dráhy světla (light-time effect, LITE, někdy též označován jako LTTE - light-travel time effect)*, který je obdobou efektu, využitého již O. Römerem v r. 1675 k určení rychlosti světla – skutečná oběžná perioda zůstává stejná, pozorovaná perioda je ale různá podle toho, zda se dvojhvězda při oběhu kolem společného těžiště s další složkou od nás vzdaluje nebo se k nám přibližuje. (Jde o čistě geometrický efekt.)
- *Dynamické efekty působení třetí složky na zákrytový pár.* Jde o skutečné dynamické působení na složky zákrytového páru. Celá škála těchto efektů má dvě periodicity – jednak tu shodnou s periodou oběhu třetí složky P_2 , a pak také mnohem delší úměrnou P_2^2/P_1 , viz níže.
- *Rotaci přímky apsid, k níž dochází u dvojhvězd s nekruhovou dráhou.* Stáčení přímky je jednak relativistické, jednak je způsobeno odchylkou tvaru složek dvojhvězdy od kulového tvaru a průběhem hustoty uvnitř tělesa.

Rozlišit tyto příčiny je poměrně snadné: v prvních dvou případech se primární i sekundární minima v $O-C$ diagramu chovají stejně, v posledním leží na různých křivkách. Ve skutečnosti často pozorujeme různé kombinace těchto efektů, jejichž příspěvky se sčítají.

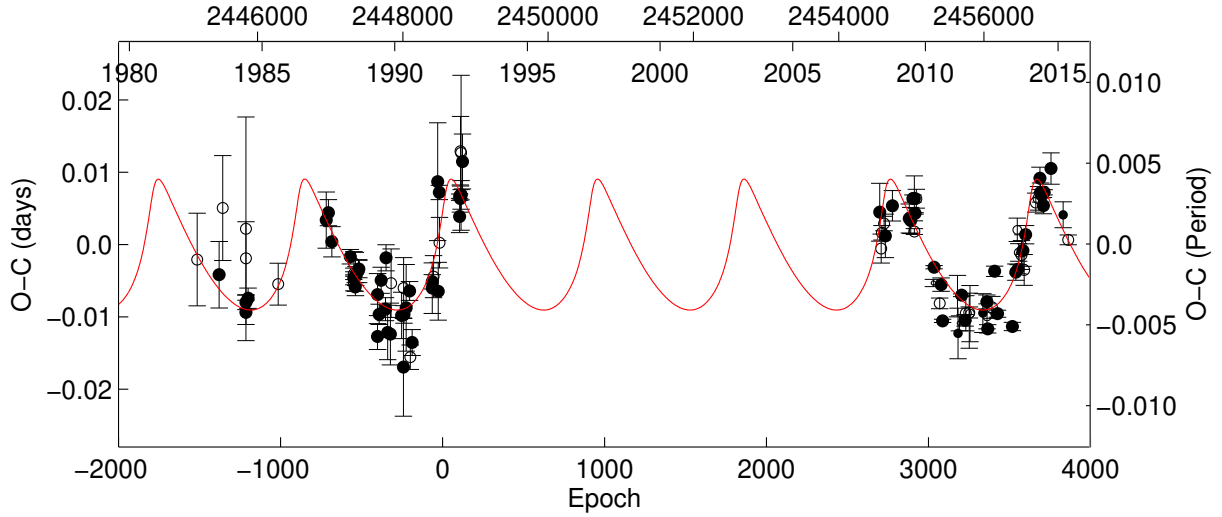
2.6.1 Efekt rozdílné dráhy světla

Efekt rozdílné dráhy světla (dále LITE) byl teoreticky popsán koncem 19. století, neboť tehdy už byla známa proměnnost periody některých dvojhvězd. Pozorován byl u hvězdy Algol, ale až poté, kdy trojhvězdnost tohoto systému byla zjištěna ze spektroskopie a astrometrie (další hvězdou pak byla až IU Aur, kde byl efekt objeven fotometricky).

Existence LITE tedy znamená, že “dvojhvězda” není dvojhvězdou, ale trojhvězdou (nebo má složek i více, například třetí člen může být též dvojhvězdou). Oběžná perioda třetího tělesa kolem společného těžiště je přitom zpravidla mnohonásobkem periody dvojhvězdy, často se proto mluví o “krátké” a “dlouhé” periodě či dráze. Nyní jsou již známy stovky hvězd, které vykazují LITE, s periodami od desítek dní do sta let (pro zajímavost uveďme, že stejného LITE efektu lze využít i pro jinou třídu hvězd s periodickým chováním – rychle pulsující hvězdy, které jsou složkami dvojhvězd, např. pulzary či hvězdy typu β Cep). Krátké periody lze velmi těžko detekovat, protože bychom potřebovali kontinuální pozorování dané hvězdy – což ovšem před časem umožnila např. družice Kepler (viz třeba Borkovits a kol. 2016). U pozemských pozorování je to mnohem obtížnější. Dobrým příkladem je zákrytová soustava λ Tau s nezákrytovou třetí složkou, jejíž dlouhá perioda (33,^{d1}) je jen osminá-



Obrázek 9: Porovnání Römerova efektu LITE a dynamického členu, viz Rappaport a kol. (2013).



Obrázek 10: $O-C$ diagram odchylek okamžiků minim zákrytové dvojhvězdy V819 Her, křivka znázorňuje model změn. Plné body označují primární minima a prázdné kroužky minima sekundární; dle Zasche a kol. (2014).

sobkem periody krátké ($3,^d953$). LITE u ní nelze objevit, protože přesnost určení okamžiků minim je nedostatečná. Naopak periody delší nežli stovky let by byly delší než časový interval pokrytý existujícími daty a jsou tedy zatím neprokazatelné.

Na obr. 10 je $O-C$ diagram soustavy označované jako V819 Her. Zdánlivá variace oběžné periody vnitřní dvojhvězdy má periodu 5,5 roku. Stejnou periodicitu ovšem vykazuje také její vizuální dráha, což je známo díky tomu, že existují interferometrická data již od jejího objevu roku 1980. Obě dvě hypotézy se tedy skvěle doplňují a ukazuje se, že právě takováto kombinace známé variace LITE současně s vizuální dráhou vede k nezávislému určení vzdálenosti daného systému. Ta je v tomto případě určena přesněji, nežli z družice Hipparcos.

Uvažujme základní rovinu kolmou k zornému paprsku a procházející těžištěm celého systému. Vzdálenost těžiště zákrytové dvojhvězdy od této roviny je

$$z(t) = r \sin i \sin(v(t) + \omega),$$

kde $v(t)$ je pravá anomálie (viz obr. 4).

Zavedme ještě rovinu rovnoběžnou se základní a jdoucí středem (obecně nekruhové) dráhy dvojhvězdy kolem těžiště systému. Vzdálenost obou rovin je

$$a_{12}e \sin \omega \sin i,$$

časový rozdíl v dráze světla je tedy

$$\tau = \frac{r \sin i \sin(v + \omega) + a_{12}e \sin \omega \sin i}{c}$$

a lze psát vztah

$$O - C = T - (T_0 + P_1 \cdot E) = \frac{a_{12} \sin i}{q} \left[\frac{1 - e^2}{1 + e \cos v} \sin(v + \omega) + e \sin \omega \right], \quad (103)$$

který popisuje chování hodnot $O - C$. Zde P_1 je střední perioda zákrytové dvojhvězdy ve dnech, a_{12} (v au), e , ω a i jsou parametry dráhy zákrytové dvojhvězdy kolem společného těžiště.

Tak zvaná semiamplituda (poloviční amplituda) tohoto LITE je potom

$$A_L = \frac{1}{2} [(O - C)_{max} - (O - C)_{min}] = \frac{a_{12} \sin i \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}}{q}$$

a udává nám rozměr dráhy dvojhvězdy (tedy její hlavní poloosu a_{12}) kolem společného těžiště v jednotkách "světelného dne". Proto onen koeficient

$$q = 86400 \cdot \frac{299792,458}{149597870,700} = 173,14463267..$$

pro převod na au. Můžeme zavést poměr hmotností $M_3/(M_1 + M_2)$, pak hlavní poloosa dráhy třetího tělesa je zřejmě $a_3 = a_{12} \cdot (M_1 + M_2)/M_3$.

Podobně jako u spektroskopické dráhy dvojhvězdy lze též definovat funkci hmotnosti třetího tělesa jako

$$f(M_3) = \frac{(a_{12} \sin i)^3}{P_2^2} = \frac{(M_3 \sin i)^3}{(M_1 + M_2 + M_3)^2} = \frac{1}{P_2^2} \cdot \left[\frac{q \cdot A_L}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \omega}} \right]^3,$$

kde P_2 je oběžná perioda třetí složky v rocích. Funkce hmotnosti třetího tělesa poskytuje také odhad jeho minimální hmotnosti. Známe-li totiž hmotnosti M_1 a M_2 a za předpokladu koplanární dráhy (tedy $i = 90^\circ$) lze M_3 získat řešením rovnice

$$f(M_3) = \frac{(M_3)^3}{(M_1 + M_2 + M_3)^2}.$$

Všechny elementy dané dráhy je nutno hledat metodou nejmenších čtverců, přičemž je potřeba zahrnout i oběžnou periodu dvojhvězdy a okamžik základního minima (dohromady tedy 7 neznámých). Pro výše zmíněný systém V819 Her vyšly následující elementy dráhy:

P_1	JD_0	P_2	A_L	e	ω	T_0
2.2296330 d	2448546.5954	5.519 roků	0.0090 d	0.687	223.8°	2452621.6

Z tohoto řešení potom můžeme vypočíst i hodnotu funkce hmotnosti $f(M_3)$, která zde vyjde $f(M_3) = 0.193 \mathcal{M}_\odot^N$, což při známém sklonu dráhy i vede k odvození hmotnosti třetího tělesa $M_3 = 1.86 \mathcal{M}_\odot^N$.

Oběh samotné dvojhvězdy kolem společného těžiště je doprovázen změnou rychlosti jejího těžiště:

$$v_\gamma = K [\cos(v + \omega) + e \cos \omega],$$

kde poloviční amplituda této variace $K[\text{km}\cdot\text{s}^{-1}]$ může být také spočítána z LITE parametrů $A_L[\text{d}]$, $p_3[\text{roky}]$, e a ω díky rovnici:

$$K = \frac{A_L}{P_2} \cdot \frac{Q}{\sqrt{(1 - e^2)(1 - e^2 \cos^2 \omega)}},$$

kde Q je jen koeficient převodu $Q = 2\pi c/365.24219 = 5157.2672\dots$. Platí samozřejmě také, že podobně jako těžiště zákrytové soustavy se mění i radiální rychlost třetího tělesa samotného. Vzorec výše lze použít i pro tuto složku, jen s tím rozdílem, že $\omega' = \omega + 180^\circ$ a amplituda bude jiná podle poměru hmotností $K_{12}/K_3 = M_3/M_{12}$.

Touto metodou klasického geometrického LITE bylo za posledních několik desetiletí objeveno již několik set kandidátů na vícenásobné systémy (LITE produkuje pouze kandidáty, konečné potvrzení musí přijít jinou metodou, nejčastěji spektroskopicky). Většina těchto systémů má periody v řádech let nebo desítek let. Díky moderním přehlídkám a družicovým měřením jsme dnes schopni detekovat i systémy s periodami pod 100 dní.

Pro úplnost dodejme, že daná metoda LITE se v dnešní době uplatňuje již i u hvězd mimo naší Galaxii. Navíc se ukazuje, že u výjimečných systémů s kvalitními daty a delším časovým pokrytím jsme dnes schopni detekovat vedle třetího i čtvrtá tělesa dvojitou aplikací LITE (potom je nutno řešit komplexně problém celkem $2+5+5=12$ parametrů).

Třetí těleso se v mnohých případech projevuje i jako "třetí světlo" (někdy je ale funkce hmotnosti velmi malá a proto je světelný příspěvek třetí složky zanedbatelný). Odečtením takového příspěvku se hloubka zákrytů zvětší, tedy vyjde i větší sklon dráhy dvojhvězdy. Třetí světlo ovšem může pocházet i od objektu, který není se systémem gravitačně vázán, nebo pro příliš krátkou či dlouhou periodu se LITE nepozoruje. Při řešení světelných křivek by tedy vždy měl být proveden test na možnou přítomnost třetího světla.

To, že pomocí LITE lze nalézt zejména trojhvězdy s dlouhou periodou od roků po desítky let má význam pro statistiku četnosti těchto period. Spektroskopicky lze spíše objevit kratší periody, vizuální dvojhvězdy pak mají převážně delší periody. Objevování vícenásobných soustav má význam i pro statistiku četnosti takových soustav, a tedy i pro úvahy o vzniku a vývoji dvojhvězd a vícenásobných soustav, viz níže kapitola 7.

2.6.2 Dynamické efekty

Jak již bylo ukázáno na obr. 9, pokud má třetí těleso kratší oběžnou periodu, nemůžeme zanedbat jeho dynamické působení na zákrytový pár a tento efekt dokonce převáží nad klasickým geometrickým efektem LITE. Zejména v poslední době díky kontinuálním přehlídkám oblohy a družicovým datům můžeme nalézat i takovéto dynamicky zajímavé systémy pouze za pomoci fotometrie.

Daná problematika pohybu a vlivu třetího tělesa na zákrytovou dvojhvězdu byla zkoumána v průběhu celého 20. století několikrát. Viz například práce Brown (1936), Söderhjelm (1975), nebo nověji práce Borkovits a kol. (2015). Jedná se o složitou problematiku, nicméně lze udělat některé obecné závěry i při použití mírnějších předpokladů o dráze či hmotnosti třetího tělesa. Již Brown ve své práci z roku 1936 rozdělil celkové působení vzdáleného tělesa na vnitřní pár na celkem 3 různé kategorie:

- Krátkoperiodické perturbace – typická perioda variací s oběžnou dobou dvojhvězdy P_1 a typickou amplitudou na úrovni $(P_1/P_2)^2$.
- Středněperiodické perturbace – typická periodičita s periodou oběhu třetí složky P_2 a amplitudou (P_1/P_2) .
- Dlouhoperiodické perturbace – periodičita úměrná P_2^2/P_1 a amplituda až 1.

Již při pohledu na výše uvedené je jasné, že efekty krátkoperiodické jsou prakticky nedetekovatelné díky jejich mizivé amplitudě. Středněperiodické jevy jsou dobře detekovatelné. A dlouhoperiodické jevy mají obvykle velice dlouhé periody (stovky let) a i přes svou vysokou amplitudu byly detekovány pouze u malého počtu hvězd díky nedostatku dat na dlouhé časové škále, viz níže v této kapitole.

Obecně platí, že perioda oběhu je delší pokud je v systému přítomno třetí těleso, nežli by tomu bylo v případě, že by byl systém izolovaný. Efekty prvního řádu jsou nulové pokud se třetí těleso pohybuje po kruhové dráze, která je koplanární s rovinou oběhu zákrytové dvojhvězdy. Pokud tomu tak ale není, mění se vzdálenost třetí složky od těžiště vnitřní dvojhvězdy a to způsobuje slapové síly a taktéž změny periody. Platí, že pokud je okamžitá vzdálenost třetí složky nejmenší, zákrytová perioda je nejdelší, a naopak. Obecně lze ale říci, že třetí těleso ovlivňuje všech šest orbitálních parametrů vnitřního páru.

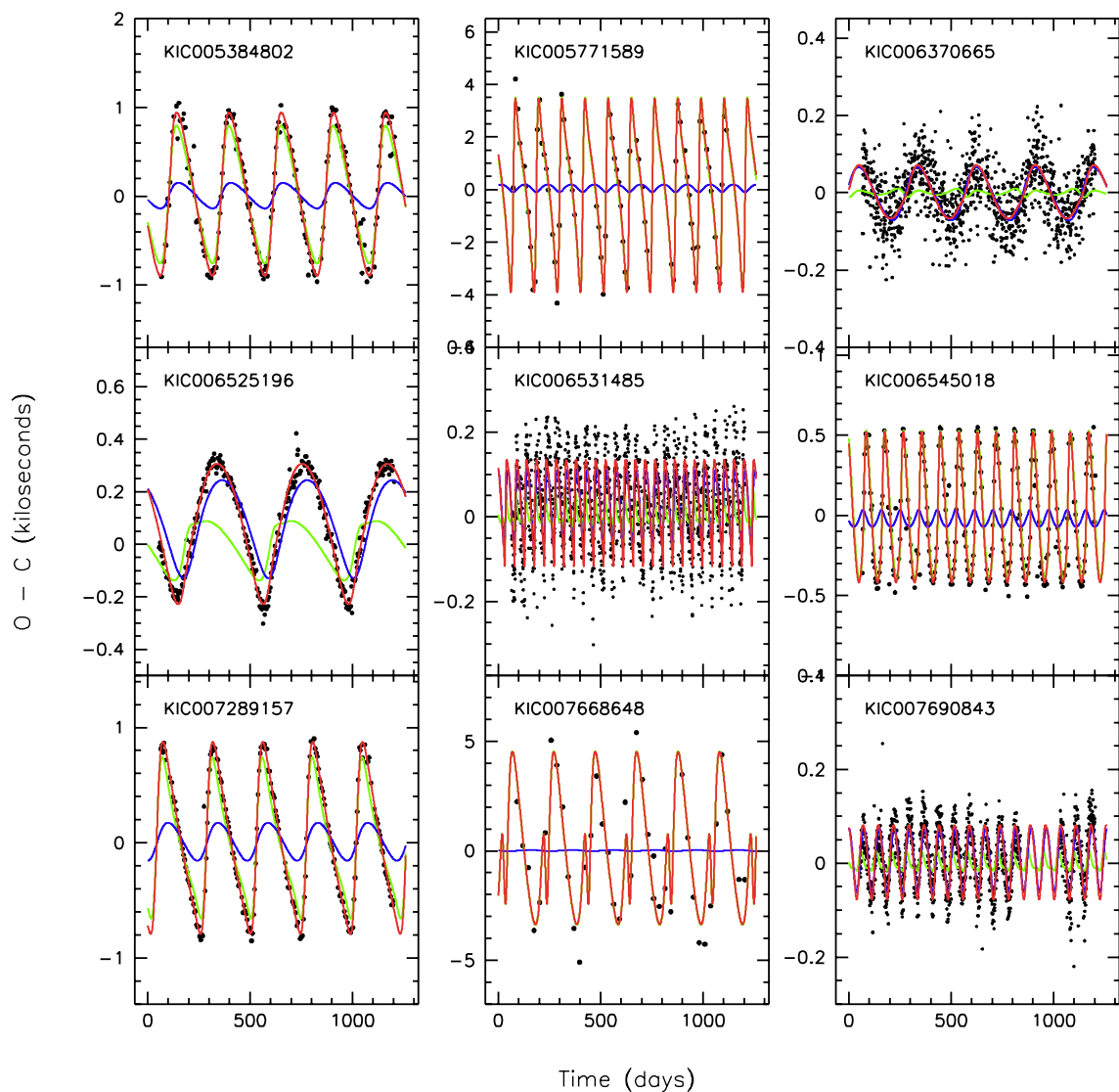
Podobně jako ve vzorci (103) lze i zde pro střednědobý efekt psát jeho vliv na zpoždění okamžiků minim (za předpokladu kruhové vnitřní dráhy) jako:

$$(O - C)_{dyn} = \frac{3}{4\pi} \frac{M_3}{M_1 + M_2 + M_3} \frac{P_1^2}{P_2} (1 - e^2)^{-3/2} \cdot \left[\left(\frac{2}{3} - \sin^2 i_M \right) \cdot \mathcal{M} + \frac{1}{2} \mathcal{S} \sin^2 i_M \right],$$

kde funkce $\mathcal{M}$ a $\mathcal{S}$ jsou pouze funkcemi v , ω a e až do požadované mocniny výstřednosti e a úhel i_M je vzájemný sklon roviny oběhu zákrytové dvojhvězdy a třetí složky (viz obr. 12). Za obecných předpokladů nekoplanárních drah, nekruhové vnitřní dráhy, atd. se dané vzorce velice komplikují a pro numerické výpočty je třeba brát pouze prvních několik členů rozvoje v excentricitě, viz např. Borkovits a kol. (2015). Nutno poznamenat, že dynamickým působením nedochází jen ke změně periody a dalších parametrů vnitřní dráhy, ale mění se také dráha vnější. Nicméně detekovat tyto změny je zatím většinou nemožné a prakticky vždy se uvažuje pouze vliv na orbitální elementy vnitřní dvojhvězdy.

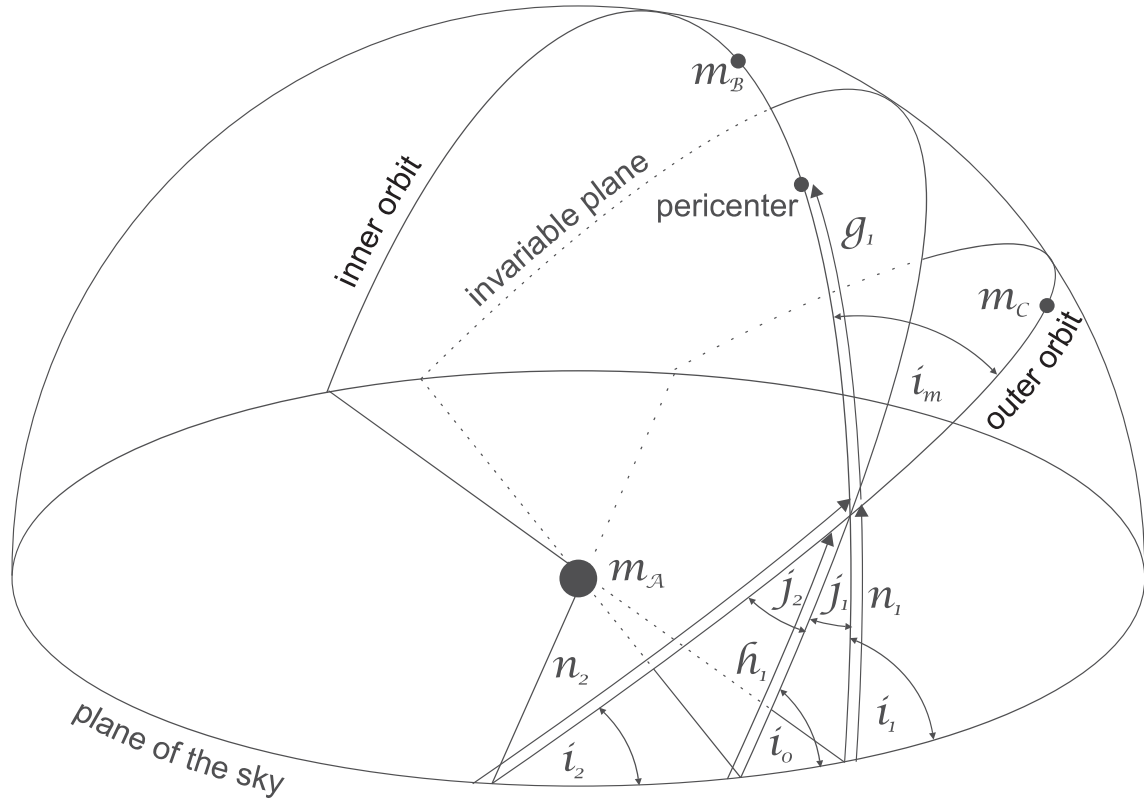
Oba dva efekty, jak klasický LITE, tak dynamický člen se projevují současně a je proto nutno pro systémy s kratší periodou P_2 zahrnout do analýzy oba dva jevy a sečíst, jak je ukázáno i na obr. 11.

Přítomnost třetího tělesa se projevuje i dalšími pozorovatelnými jevy, které spadají do třetí kategorie – tedy dlouhoperiodických úměrných P_2^2/P_1 . U několika objektů objevených jako zákrytové



Obrázek 11: Ukázka systémů se změnou periody detekovaných na datech z družice Kepler, červeně celkový fit, modře geometrický LITE, zeleně dynamický člen (Rappaport a kol. 2013).

dvojhvězdy se v novější době nepodařilo potvrdit změny jasnosti; možným vysvětlením je, že se změnil sklon dráhy a proto k zákrytům již nedochází. U několika objektů byly zjištěny systematické změny hloubek minim, vysvětlitelné jen změnou sklonu (změna jiného parametru soustavy – třeba poloměru nebo teploty jedné složky – pozorované změny vysvětlit nemůže, a změny obou složek jsou asi nemyslitelné). Změna sklonu je pak dobře pochopitelná jako precese drah; ta je nutně přítomná, pokud krátká a dlouhá dráha jsou nekoplanární. Jde tu tedy o jevy dobře známé v nebeské mechanice a pozorovatelné třeba v systému Země-Měsíc-Slunce. Mechaniku takového systému, jeho popis a příslušné vzorce lze nalézt např. v článku Söderhjelm (1975).



Obrázek 12: Geometrie trojnásobného systému.

V obecném trojném systému existuje neměnná fundamentální rovina (viz obr. 12), vůči níž jsou krátká a dlouhá dráha skloněny o úhly i_1 a i_2 , přitom $\sin i_1 / \sin i_2 = G_2 / G_1$, kde G_i jsou momenty hybnosti dané dráhy. Vzhledem k podstatně většímu rozměru dlouhé dráhy je $G_2 > G_1$, a tedy sklon krátké dráhy může být značný, kdežto rovina dlouhé dráhy se nemusí příliš lišit od fundamentální roviny. Kolem této invariantní roviny se obě dvě dráhy pomalu (s periodou P_2^2 / P_1) otáčejí a my můžeme detekovat některé projevy tohoto efektu.

Například nejznámějším jevem je perioda precese (rotace uzlu dráhy v rocích):

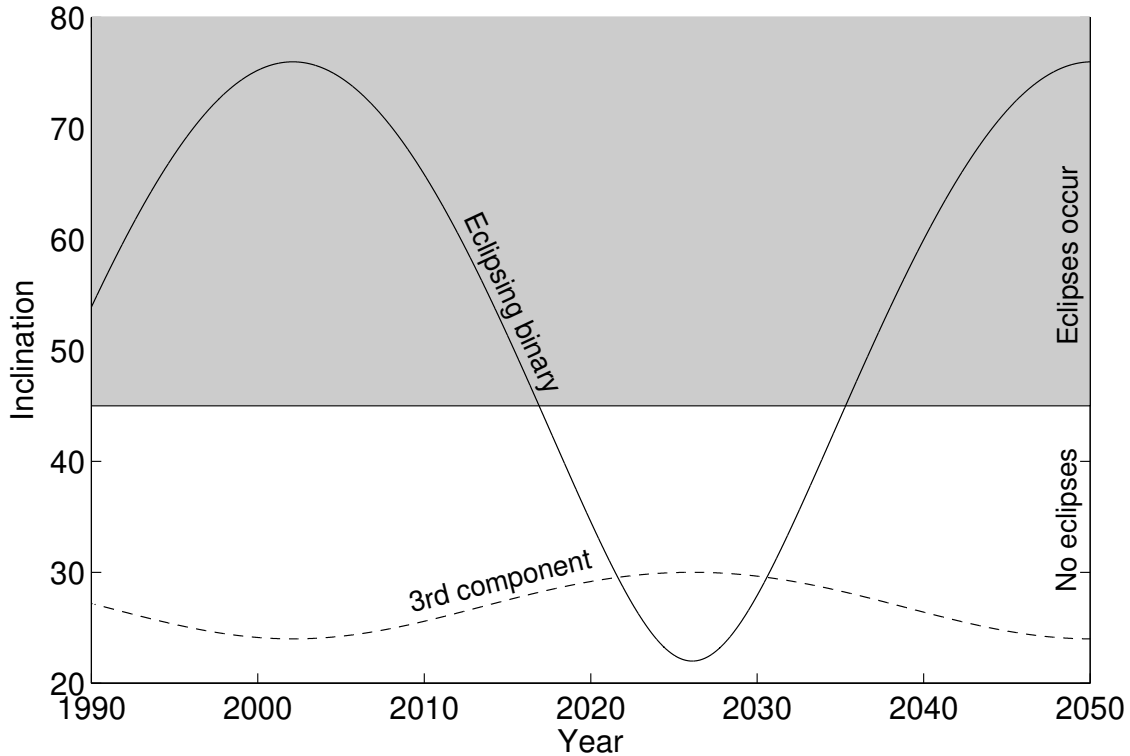
$$P_{\text{nodal}} = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{M_1 + M_2}{M_3} \right) \frac{P_2^2}{P_1} (1 - e^2)^{3/2} \left(\frac{C}{G_2} \cos j \right)^{-1},$$

kde $C = G_1 \cos i_1 + G_2 \cos i_2$ je celkový moment hybnosti systému a j je úhel mezi rovinami krátké a dlouhé dráhy $j = i_1 + i_2$. Nicméně většinou je sklon dlouhé dráhy neznámý, proto se častěji využívá zjednodušený tvar závislosti sklonu zákrytové dvojhvězdy na čase jako:

$$\cos i_1 = \cos i_0 \cdot \cos j_1 - \sin i_0 \cdot \sin j_1 \cdot \cos(2\pi(t - t_0) / P_{\text{nodal}}),$$

kde i_0 je sklon invariantní roviny vůči nebeské sféře, i_1 je pozorovaný sklon zákrytové dvojhvězdy a j_1 je úhel mezi invariantní rovinou a dráhou zákrytové dvojhvězdy (viz obr. 12). Perioda rotace uzlové

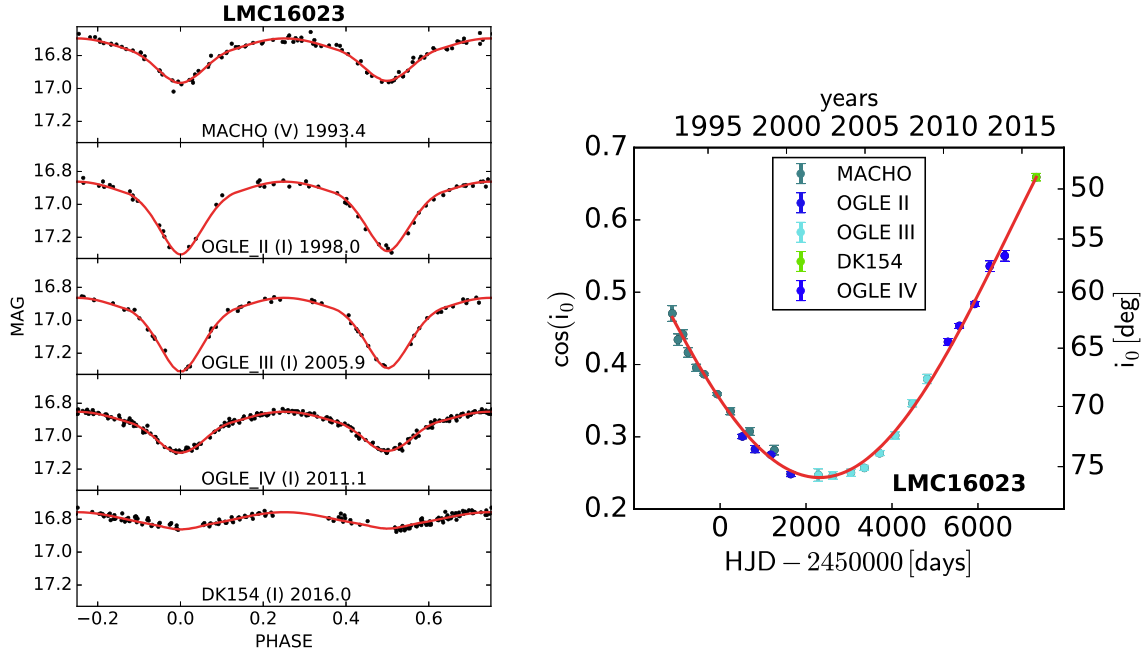
přímky P_{nodal} bývá ovšem velice dlouhá, a proto se tento jev zatím pozoruje jen u několika desítek systémů, viz obr. 14. S tím jak se mění sklon zákrytové dvojhvězdy, se také ovšem nutně (vzhledem k zákonu zachování celkového momentu hybnosti) mění i sklon dráhy třetího tělesa. Na obr. 13 je zobrazeno, jak se mění sklon zákrytové dvojhvězdy i třetí složky v systému.



Obrázek 13: Změna sklonu složek systému OGLE16023 v průběhu času.

Patrně nejznámějším objektem s pozorovanou změnou sklonu je dvojhvězda V907 Sco, která má vůbec nejkratší nodální periodu 68 let ze všech dosud známých systémů. Díky tomu již byla zachycena dvě období bez zákrytů a dvě se zákryty. LITE ale pozorován nebyl, neboť “dlouhá” perioda je příliš krátká (asi 100 dní) a amplituda LITE je proto malá.

S efektem působení třetí složky na samotný zákrytový pár také souvisí jev, který se obvykle označuje jako tzv. Kozaiovy cykly, nebo také Kozai-Lidovův mechanismus (Kozai 1962, Kiseleva a kol. 1998). Jeho podstata spočívá v tom, že při svém pohybu po velmi výstředné dráze se třetí složka může dostat natolik blízko k samotné dvojhvězdě, že při průchodu periastrém již nelze zanedbat vzájemné slapové působení složek. Tento proces pomalu vede k excitaci excentricity vnitřní dráhy, slapové působení sílí a dvojhvězda se brzdí a přibližuje, v důsledku čehož se při zachování celkového momentu hybnosti musí třetí složka vzdalovat. Aby k podstatnému slapovému působení při průchodu



Obrázek 14: Změna hloubky zákrytů (vlevo) a model změn sklonu zákrytové dvojhvězdy označené jako LMC16023 z blízké galaxie LMC (Velké Magellanovo mračno). Perioda precese vyšla necelých 50 let (Juryšek a kol. 2017).

periastrém došlo, je nutno aby byla splněna podmínka

$$a_3(1 - e) \geq 5a_1,$$

kde a_3 a a_1 jsou poloosy oběhu třetí složky a dvojhvězdy. Případně převedeno na periody to odpovídá

$$P_2(1 - e)^{3/2} \geq 14P_1.$$

Aby se vůbec tyto Kozaiovy cykly aktivovaly, je nutno aby orientace obou drah byly v určitém vzájemném nastavení, konkrétně, aby pro vzájemný sklon platilo, že $\sin^2 i_M > 2/5$, neboli aby

$$39^\circ 2' \leq i_M \leq 140^\circ 8'.$$

2.6.3 Rotace přímky apsid

U zákrytových proměnných poznáme nekruhovost dráhy většinou snadno, fáze sekundárního minima se liší od 0.5. Pokud by ale přímka apsid směřovala k pozorovateli, fáze by sice byla 0.5, ale lišilo by se trvání zákrytů (lze si ovšem představit případ, že i trvání zákrytů je stejné, pokud je sklon dráhy odlišný od 90° ; při sklonu $< 90^\circ$ v nekruhové dráze jedno z minim dokonce ani nemusí existovat). U spektroskopických dvojhvězd je nekruhovost obtížněji prokazatelná, též z důvodů vlivu okolohvězdné hmoty, viz dále.

Byly již uvedeny oba důvody rotace přímky apsid. Je třeba uvažovat dvě různé hodnoty oběžné periody: siderickou P_s , což je doba mezi dvěma shodnými polohami obou složek vzhledem ke hvězdám,

a anomalistickou P_a , což je doba mezi dvěma průchody periastrum. Vždy je $P_a > P_s$. Perioda rotace přímky apsid je $U = 360/\dot{\omega}$, kde $\dot{\omega}$ je změna délky periastra ve stupních, např. za jeden rok – pak U je těž v rocích. Snad obvyklejší je uvádět $\dot{\omega}$ v radiánech za dobu jedné periody, pak platí

$$P_s = P_a(1 - \dot{\omega}/2\pi). \quad (104)$$

Jak už bylo zmíněno výše, rychlost stáčení přímky apsid je dána jednak relativistickým členem $\dot{\omega}_r$ a jednak klasickým členem v důsledku nehomogenního rozložení hmoty ve hvězdách $\dot{\omega}_c$. Je $\dot{\omega} = \dot{\omega}_r + \dot{\omega}_c$; příslušné vzorce viz učební text P. Harmance AST014 (Stavba a vývoj hvězd). Zde je efekt ilustrován na obr. 15, ukazujícím $O-C$ pro dvojhvězdu Y Cyg, která má poměrně krátkou periodu apsidálního stáčení U . Nekruhové dráhy jsou běžné u oddělených dvojhvězd, a jen výjimečně se mohou vyskytovat u polodotykových dvojhvězd. Dlouho např. probíhal spor o to, zda dráha Algolu má či nemá malou excentricitu. Dnes se tato dráha pokládá za kruhovou. Existují katalogy dvojhvězd s apsidální rotací (Petrova & Orlov 1999, Bulut a Demircan 2007); u téměř poloviny objektů je ale zařazení do tohoto katalogu sporné. Periody rotace apsid u dvojhvězd s „normálními“ složkami (tj., nekompaktními) začínají u asi 20 roků a mohou ovšem být i velmi dlouhé a tedy neurčitelné.

Z $O-C$ diagramu je možné určit U, e, ω a T_0 . Ve vztazích vystupuje i sklon i , ten je zpravidla znám z řešení světelné křivky. Jsou dvě cesty k určení parametrů:

1. buď optimalizujeme parametry prostřednictvím Keplerovy rovnice, tj. pro dané parametry počítáme předpokládaný čas každého minima (podrobně viz Lacy 1992),
2. nebo použijeme rozvoj střední anomálie podle sinu pravé anomálie (který je běžně užíván v nebeské mechanice, viz Gimenez & Garcia-Pelayo 1983).

Jak je zřejmé z obr. 16, minimum nastává, když

$$v = \theta - \omega + \pi/2 \quad (105)$$

Pokud je $i = 90^\circ$, $\theta = 0$ v případě primárního minima a $\theta = \pi$ v případě sekundárního minima. Při $i \neq 90^\circ$ se okamžik minima – kdy je pozorovatelná vzdálenost středu obou složek dvojhvězdy nejmenší – poněkud liší od okamžiku konjunkce (příslušný výraz viz Gimenez & Garcia-Pelayo 1983).

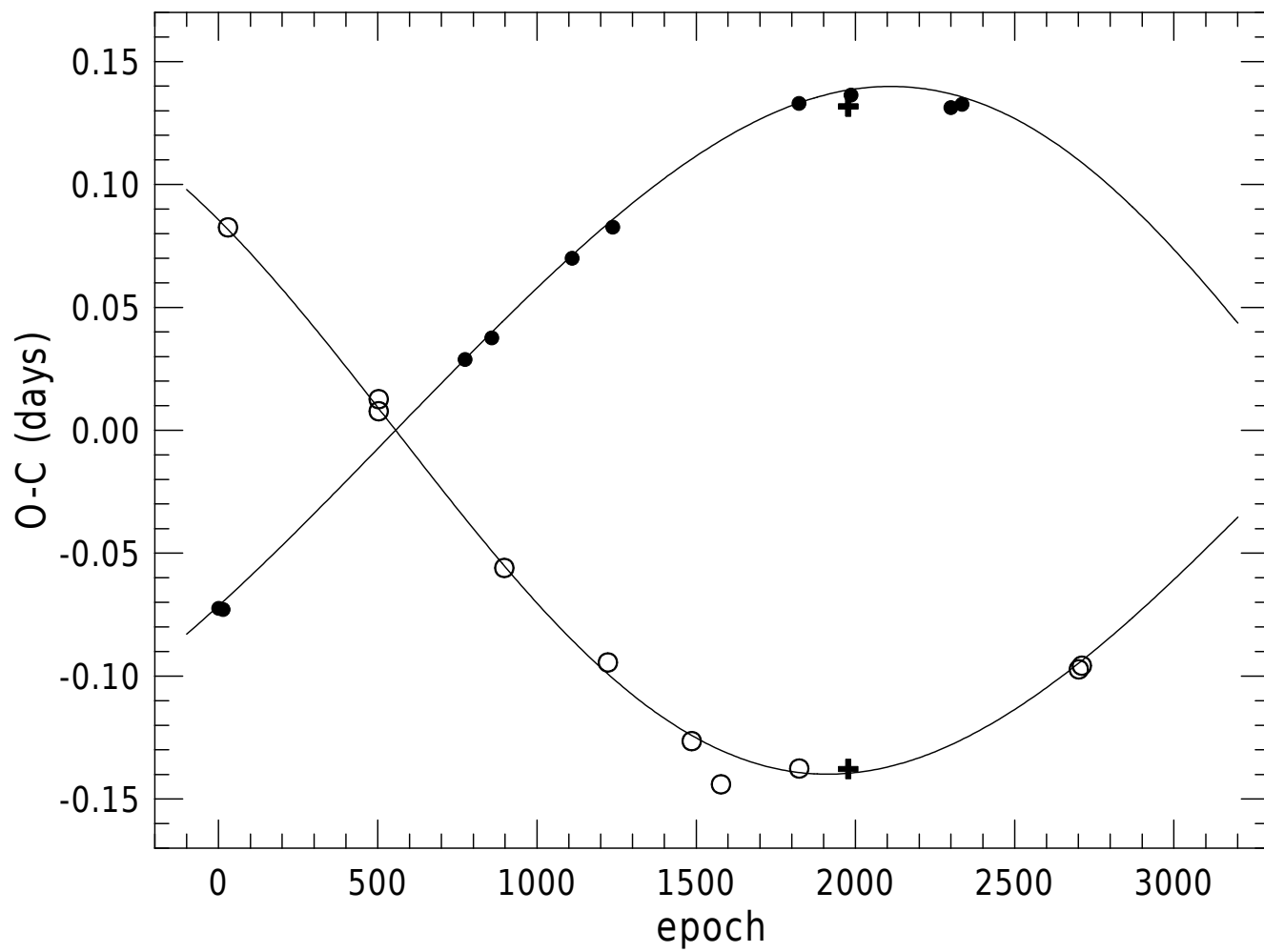
Je poučné uvažovat alespoň dva členy rozvoje (zde pro $i = 90^\circ$):

$$T_{\text{pri}} = T_0 + P_s E - \frac{eP_a}{\pi} \cos \omega + \frac{3e^2 P_a}{8\pi} \left(1 + \frac{e^2}{6}\right) \sin 2\omega \quad (106)$$

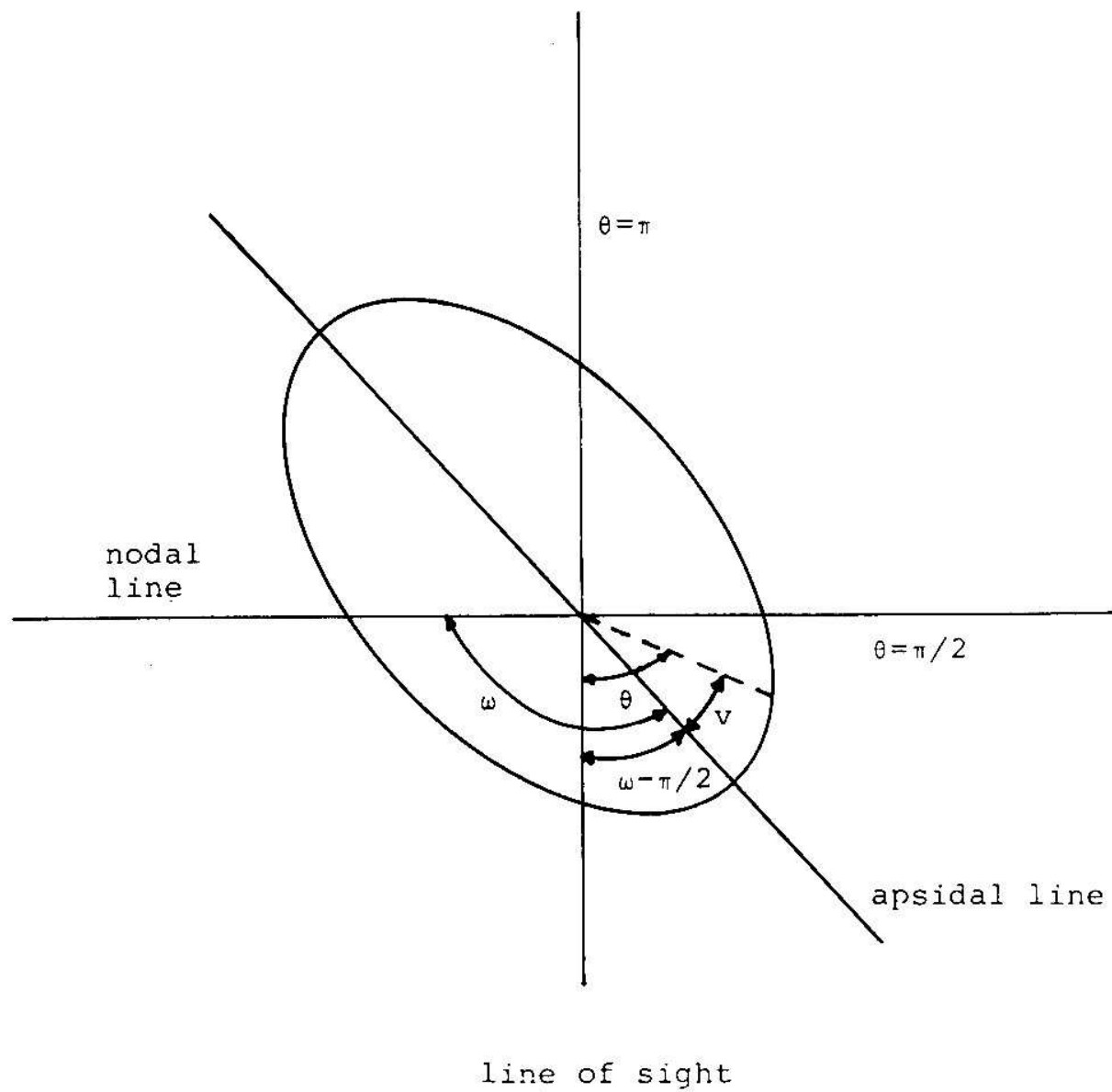
a

$$T_{\text{sec}} = T_0 + P_s E + \frac{P_a}{2} + \frac{eP_a}{\pi} \cos \omega + \frac{3e^2 P_a}{8\pi} \left(1 + \frac{e^2}{6}\right) \sin 2\omega. \quad (107)$$

Tato druhá metoda je užitečná hlavně u malých výstředností, kdy postačuje člen lineární v e a hodnota výstřednosti je okamžitě zřejmá z amplitudy eP_a/π . Je také zřejmé, že při malé výstřednosti jsou křivky v $O-C$ diagramu symetrické sinusovky, kdežto při větší výstřednosti se symetrie ztrácí, jak plyne ze znamének členů s e^2 .



Obrázek 15: Příklad $O-C$ odchylek pro okamžiky minim dvojhvězdy Y Cyg ukazující apsidální rotaci. Znáznorněna jsou jen novější minima.



Obrázek 16: Okamžiky minim v eliptické dráze (Gimenez & Garcia-Pelayo 1983).

Existují případy, kdy se u dvojhvězd s apsidálním pohybem nedaří popsat $O-C$ odchylky pouze apsidálním pohybem a kdy se pozoruje i LITE či jiné efekty. Příkladem může být soustava V346 Cen. Drobek a kol. (2013) využili toho, že rozdíl mezi blízkými primárními a sekundárními minimy daný vztahem

$$\Delta T = T_{\min.I} - T_{\min.II} + P_a/2 \quad (108)$$

není ovlivněn LITE a lze jej využít k separaci obou jevů. Podle rozvojų, které publikovali Giménez a Garcia-Pelayo (1983) a Giménez a Bastero (1995) závisí rozdíl v časech minim pouze na okamžité hodnotě délky periastra ω , apsidální periodě P_a , výstřednosti e a slabě na sklonu oběžné dráhy i . Platí, že

$$\Delta T = -A_1 \frac{eP_a}{\pi} \cos \omega + A_3 \frac{e^3 P_a}{4\pi} \cos(3\omega) - A_5 \frac{e^5 P_a}{16\pi} \cos(5\omega), \quad (109)$$

kde A_1 , A_3 a A_5 jsou složitými funkcemi sklonu dráhy i a výstřednosti e – viz rovnice (16), (18) a (20) v práci Giménez a Bastero (1995). (Pro případ $i = 90^\circ$ se ale výrazy redukuje na $A_1 = 2$, $A_3 = 4/3 + e^2/2$ a $A_5 = 6/5$.) Za předpokladu lineárně narůstající délky periastra s časem

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega} \times E \quad (110)$$

a pro sklon dráhy získaný řešením světelné křivky lze z funkce $\Delta T(E)$ určit ω_0 , $\dot{\omega}$ a e .

2.7 Neperiodické změny periody

Byly už uvedeny příklady např. trvale se prodlužující periody (β Lyr); různé změny periody jsou zřejmé mj. v databazi minim a $O-C$ diagramů průběžně udržovanou Sekcí pozorovatelů proměnných hvězd v Brně. Je dostupná na adrese

<http://var.astro.cz/ocgate>.

Bylo již uvedeno, že takové změny vysvětlujeme procesy přenosu nebo ztráty hmoty z jedné či obou složek. Pokud se při přenosu z jedné složky na druhou žádná hmota ze systému neztrácí a neztrácí se ani úhlový moment, mluvíme o konservativním přenosu. Pro kruhovou dráhu platí

$$\frac{\Delta P}{P} = 3 \frac{q}{1 - q^2} \frac{\Delta M}{M}, \quad (111)$$

kde $q = M_1/M_2$; hmota se přenáší z hvězdy 1 na hvězdu 2. Podobně se mění i velká poloosa dráhy, jen koeficient v rovnici je 2 místo 3. Numericky vycházejí největší hodnoty přenosu hmoty až $10^{-4} M_\odot$ za rok.

Zejména v počátečních rychlých stádiích dochází velmi pravděpodobně k nekonservativnímu přenosu hmoty a ztrátám hmoty a momentu hybnosti ze soustavy. U isotropní ztráty hmoty získá druhá složka jen malý díl hmoty, většina zmizí ze systému a oběžná perioda u tohoto typu ztráty hmoty trvale roste. Zřejmá je ztráta hmoty zářením, vliv na periodu je ale pod přesností pozorování. Výraznější je ztráta hmoty hvězdným větrem, k níž dochází hlavně u velmi hmotných hvězd. Ke ztrátě

hmoty víceméně náhle dochází u nov a supernov. Při takové náhlé ztrátě hmoty jedné složky dochází k růstu výstřednosti dráhy. Při výbuchu supernovy v soustavě se dráha může dokonce změnit na hyperbolickou a dojde tak k rozpadu dvojhvězdy. Druhá složka si přitom podrží svou orbitální rychlost, která může dosahovat stovky km s^{-1} ; tímto procesem se vysvětluje existence některých rychle se pohybujících hvězd (mj. pulsarů).

2.8 Určování elementů vizuálních dvojhvězd

K výpočtu dráhy je třeba mít měření (v podobě čas T , poziční úhel α , promítnutá úhlová vzdálenost ρ v úhlových vteřinách), která pokrývají pokud možno celou dráhu; z takových dat je zřejmá oběžná perioda. Není-li dráha pokryta celá, jsou perioda i další dráhové elementy nejisté a řešení může být víceznačné nebo neurčitelné. Pozorovaná dráha je průmětem skutečné dráhy do tečné roviny ke sféře. Běžná mikrometrická měření nebo měření skvrnkovou interferometrií poskytují relativní dráhu slabší složky kolem jasnější; mají-li složky podobnou jasnost a perioda je krátká, může být problém s identifikací složek. Pokud lze měřit absolutní dráhy, dostane se i poměr hmotností složek.

Pozorovaná dráha je (obecně) elipsa, jasnější složka ale není v jejím ohnisku. V průmětu se zachovává zákon ploch, a zachová se i střed elipsy jako střed (viz obr. 17). Přímkou spojující střed a jasnou složku je zřejmě průmětem hlavní osy. Z pozorované dráhy lze tedy určit okamžik průchodu periastrum. Z úseku na průmětu hlavní osy je také zřejmá excentricita. Zbývá tedy určit poziční úhel vzestupného uzlu, délku periastra a sklon dráhy. Z pozičních měření nezjistíme, zda jde o uzel vzestupný či sestupný (musela by existovat i měření radiální rychlosti), hodnota úhlu je tedy dvojnásobná, s rozdílem 180° .

Existuje řada metod, jak určit zbývající elementy, viz např. Heintz (1978). Je jistě možné jejich hodnoty odhadnout a pak všechny parametry optimalizovat. Vztahy parametrů jsou dány vzorci plynoucími z geometrie skutečné a promítnuté dráhy. Pojdme si uvést jednu možnou metodu, založenou právě na iteračním optimalizování daných orbitálních elementů. Výpočetní rychlost současných počítačů dovoluje použití optimalizačních metod i pro velké datové soubory či vysoké výstřednosti dráhy.

Na počátku mějme měření v čase T_0 . Stejně jako pro spektroskopické dvojhvězdy můžeme spočítat střední anomálii M pro každý čas pozorování t ze vzorce (53) a z ní řešením Keplerovy rovnice (52) excentrickou anomálii E . Tu pak použijeme pro výpočet pravé anomálie v ze vztahu (51). Pro úhlovou vzdálenost platí

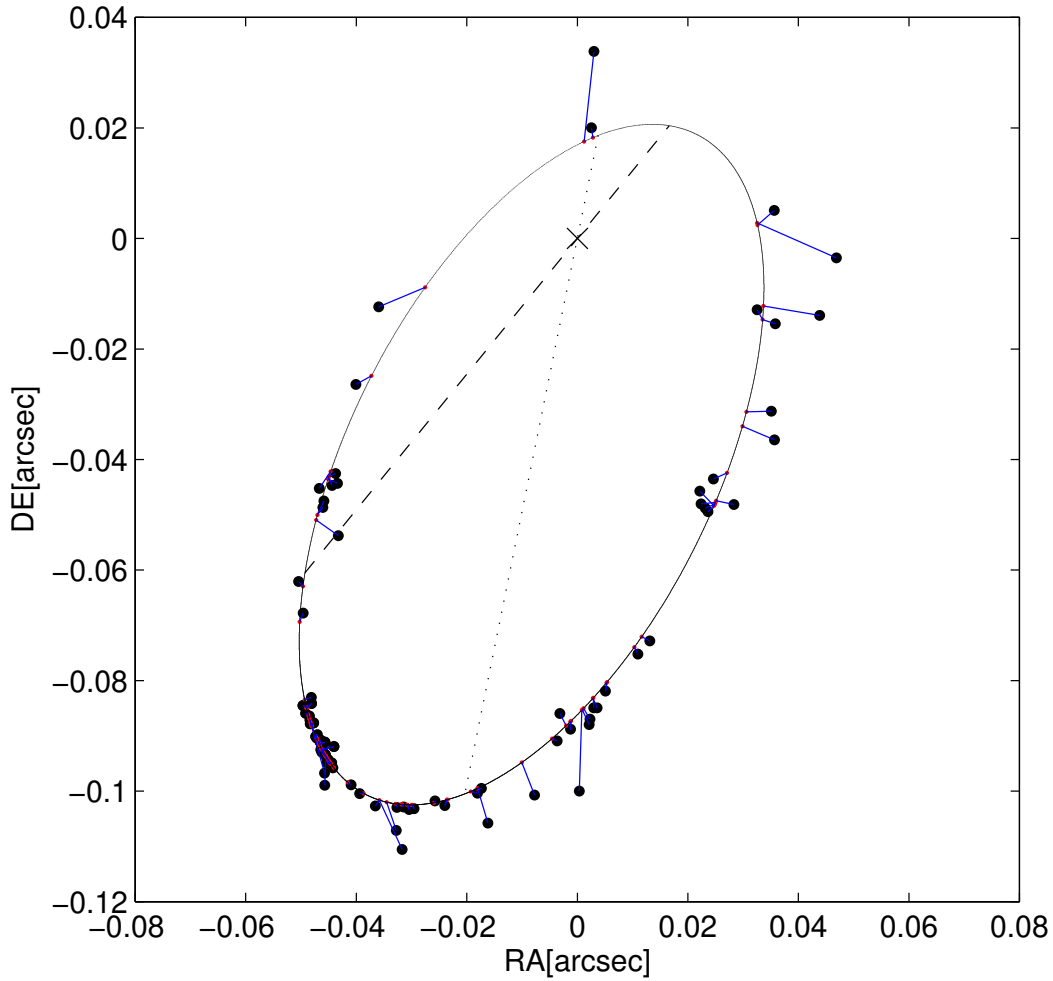
$$r = a \cdot \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v},$$

z čehož už lze vypočíst úhlovou polohu na obloze

$$\begin{aligned} \tan(\theta - \Omega) &= \tan(v + \omega) \cdot \cos i \\ \rho &= r \cdot \cos(v + \omega) \cdot \sec(\theta - \Omega). \end{aligned}$$

Tyto úhlové veličiny θ a ρ lze posléze převést na pravoúhlé souřadnice X a Y pomocí:

$$\begin{aligned} X &= A \cdot (\cos E - e) + F \cdot (\sqrt{1 - e^2} \sin E), \\ Y &= B \cdot (\cos E - e) + G \cdot (\sqrt{1 - e^2} \sin E). \end{aligned}$$



Obrázek 17: Vizuální dráha systému V819 Her. Jednotlivá měření (černě) jsou spojena s jejich teoretickými pozicemi na vizuální dráze, zákrytová dvojhvězda umístěna v bodě $[0,0]$ a čárkovaná a tečkovaná čára představují uzlovou přímku a přímku apsid.

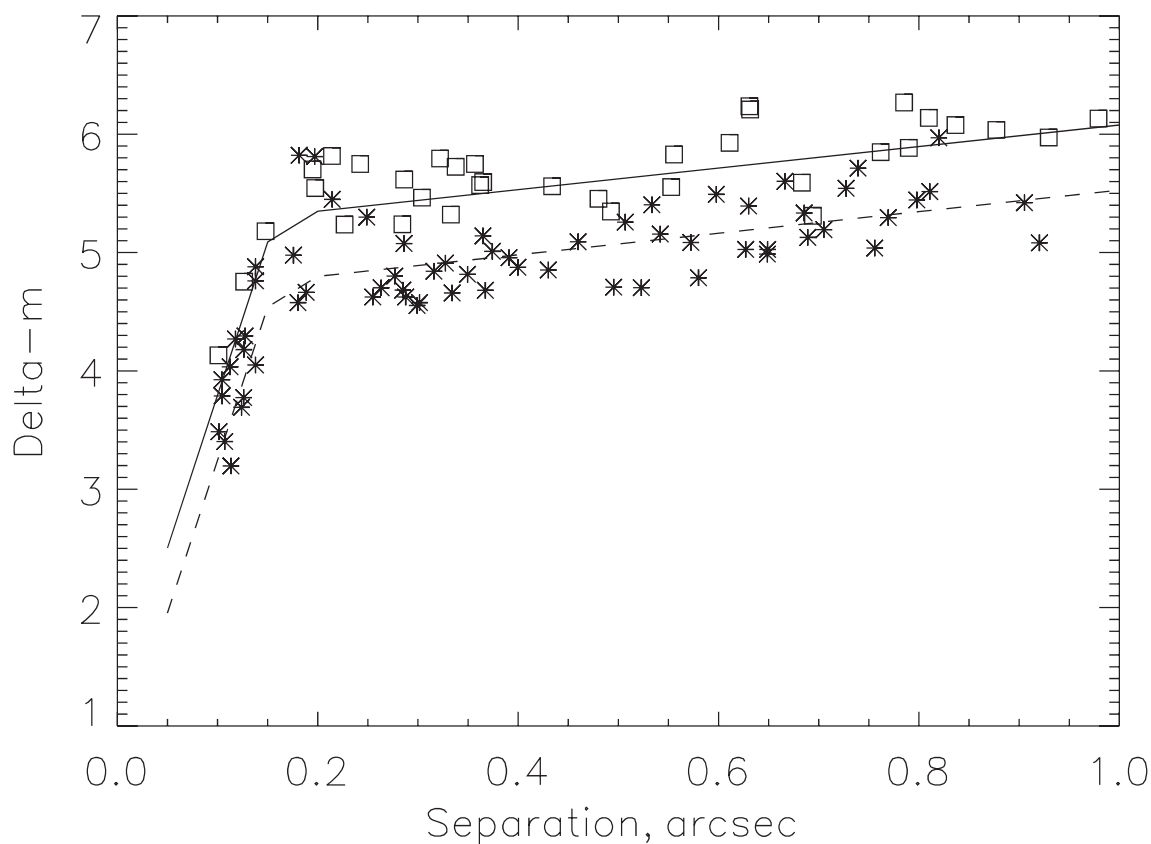
Konstanty A , B , F a G bývají také někdy označovány jako Thiele-Innes constants, a lze je jednoduše spočítat pomocí elementů dráhy ω , Ω , a a i . Touto metodou lze tedy iteračně spočítat orbitální elementy P_2 , a , T_0 , e , ω , Ω a i ze zadaných astrometrických měření.

Při řešení dráhy vizuální dvojhvězdy se tedy získá úhlový rozměr hlavní poloosy a/d a sklon dráhy. Víme ovšem, že z řešení křivky radiální rychlosti se – při známém sklonu dráhy – získá hlavní poloosa v lineární míře. Pokud tedy je pro vizuální dvojhvězdu měřitelná křivka radiálních rychlostí, dostáváme i paralaxu objektu. Problémem ale je, že pro dráhy s dlouhou

periodou nelze křivku radiálních rychlostí měřit příliš přesně (má malou amplitudu) a navíc potřebujeme pozorovat spektra po dlouhou dobu. V několika případech, kdy excentricita dosahuje vysokých hodnot ($e > 0.9$), lze ale měřit důležitou část křivky radiálních rychlostí v okolí průchodu

periastrum. Situace se změnila až s rostoucím úhlovým rozlišením současných interferometrů, která dovolila jako vizuálně rozlišit i dvojhvězdy s kratšími periodami. Stejnou možnost jako využití křivky radiálních rychlostí nabízí i použití LITE. Ten také poskytuje lineární rozměr hlavní poloosy. V současnosti je známo více než 10 případů, kdy objekt s LITE byl měřen i interferometricky – vedle V819 Her stojí za zmínku třeba ξ Tau (Nemravová, Harmanec, Brož a kol. 2016).

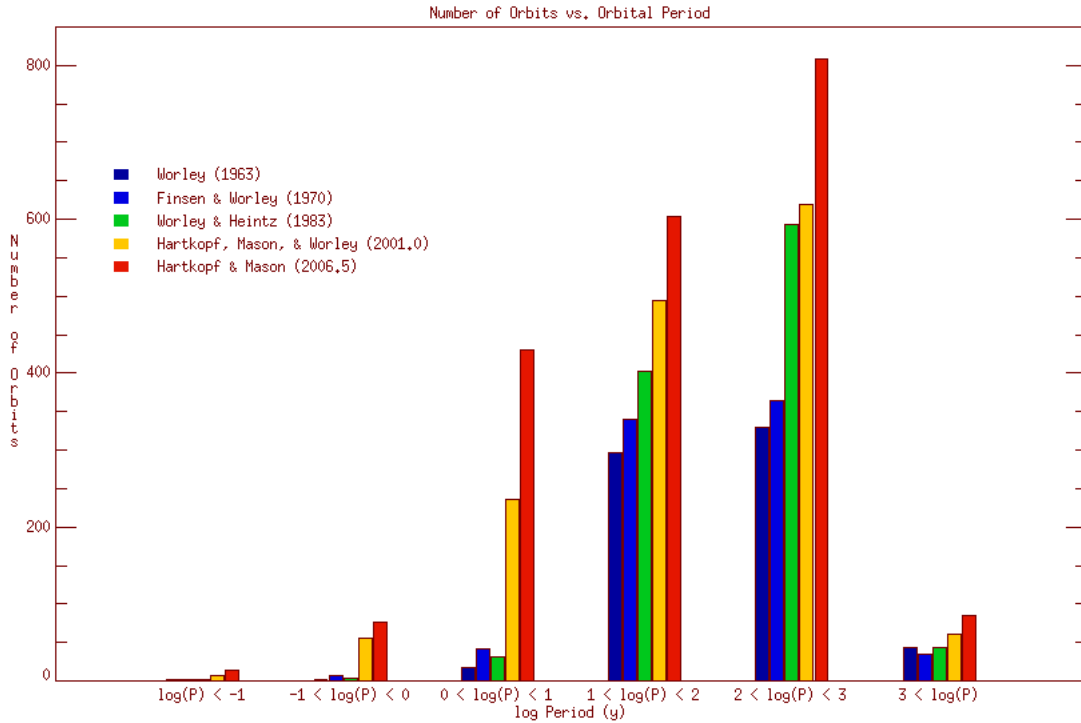
V dnešní době dosahuje rozlišení moderní interferometrie až k jednotkám miliarcsecond (mas), někdy dokonce i pod 1 mas. S tím se samozřejmě dostáváme ke kratším orbitálním periodám a tudíž častěji i do oblasti s dobrým pokrytím spektroskopickými pozorováními. Nicméně je nutno pamatovat na některá omezení. Vyšší přesnosti budeme dosahovat v tom případě, když se bude jednat o hvězdu dostatečně jasnou. Vyšší světelný tok hraje v interferometrii zásadní roli a jen opravdu jasné hvězdy (zatím asi do 10. hvězdné velikosti) lze dobře měřit. Dalším limitujícím faktorem je úhlová vzdálenost obou zdrojů. Nesmí být příliš blízko, ale ani daleko, vždy přitom závisí na použitém přístroji a metodě. Důležitým faktorem je také rozdíl magnitud obou blízkých složek. Jen ty, které mají srovnatelné jasnosti, budou detekovatelné i na menších úhlových vzdálenostech, viz například obr. (18).



Obrázek 18: Ukázka závislosti rozdílu magnitud na vzdálenosti složek pro 4 m dalekohled SOAR, viz Tokovinin a kol. (2010).

Dnes je díky dlouhodobému sběru astrometrických dat známo již více než 2000 systémů s vizu-

álními drahami. Některé z nich jsou stále zatím spíše nejisté, ale u velké části z nich je již jejich perioda známa s dostatečnou přesností. Všechny známé vizuální dvojhvězdy systematicky katalogizuje USNO (US Naval Observatory) ve svém orbitálním katalogu⁴, viz Hartkopf a kol. (2001). Na obrázku (19) je ukázáno statistické rozložení oběžných period pro dosud určené vizuální dráhy. Je vidět, že stále převažují dráhy s periodami desítek až stovek let, ale v poslední době je jasně patrný výrazný přírůstek krátkoperiodických drah díky zlepšující se technice.



Obrázek 19: Rozdělení četnosti period vizuálních dvojhvězd v celém orbitálním katalogu Hartkopfa a kol. (2001).

2.9 Vícenásobné soustavy

Mnohé dvojhvězdy jsou ve skutečnosti vícenásobnými soustavami. Např. jedna složka vizuální dvojhvězdy je spektroskopickou nebo i zákrytovou dvojhvězdou. Vícenásobnost je tedy běžná, kvantitativní určení četnosti je ale obtížné, neboť poznání vícenásobnosti je ovlivněno výběrovými efekty ještě více než objev samotné podvojnosti. Z publikovaných statistik se zdá, že nejméně jedna třetina dvojhvězd má třetí složku (ale může to být až polovina); podobně jedna čtvrtina až jedna třetina trojhvězd jsou vlastně čtyřhvězdy, atd. Vícenásobnost je tedy mezi hvězdami obecně velmi rozšířená. Rovněž se ukazuje, že procento vícenásobných soustav je různé podle spektrálního typu nebo hmotnosti primární hvězdy. Jak je ukázáno například v přehledovém článku Duchêne & Kraus (2013),

⁴<http://ad.usno.navy.mil/wds/orb6.html>

dvojhvězdy se složkou hmotnější než naše Slunce jsou daleko pravděpodobněji součástí vícenásobné soustavy než pouhými dvojhvězdami.

Co se týče jejich uspořádání či architektury, dělí se vícenásobné hvězdy do dvou základních skupin: soustavy typu Trapez a tzv. hierarchické systémy. V prvním případě platí, že jednotlivé objekty jsou ve srovnatelných vzájemných vzdálenostech (a mají tedy i podobné oběžné periody). Tak je tomu třeba u samotného prototypu - systému Trapez v Orionu. Daleko častější ale je, že dvojhvězda obíhá kolem společného těžiště se vzdálenou třetí složkou, neboli že poměr poloos oběžných drah vnitřní dvojhvězdy a třetí složky je velký.

Je jistě zajímavé vědět, v jakých poměrech period (nebo, což je velmi podobné, na jakých poměrech poloos oběhu) kolem sebe tělesa v trojhvězdě obíhají. Z teoretických úvah plyne, že existuje jisté omezení na poměr P_2/P_1 , má-li být takový systém stabilní. Mardling & Aarseth (2001) např. zjistili, že

$$\frac{P_2}{P_1} \geq 4.7 \left(\frac{M_1 + M_2 + M_3}{M_1 + M_2} \right)^{1/10} \frac{(1+e)^{3/5}}{(1-e)^s}, \quad (112)$$

kde faktor s udávají roven 1.8. Naproti tomu Sterzik & Tokovinin (2002) odvodili jeho hodnotu faktoru s rovnu 1.35 a Tokovinin (2007) došel k ještě přísnějšímu observačnímu kritériu $s = 3.0$.

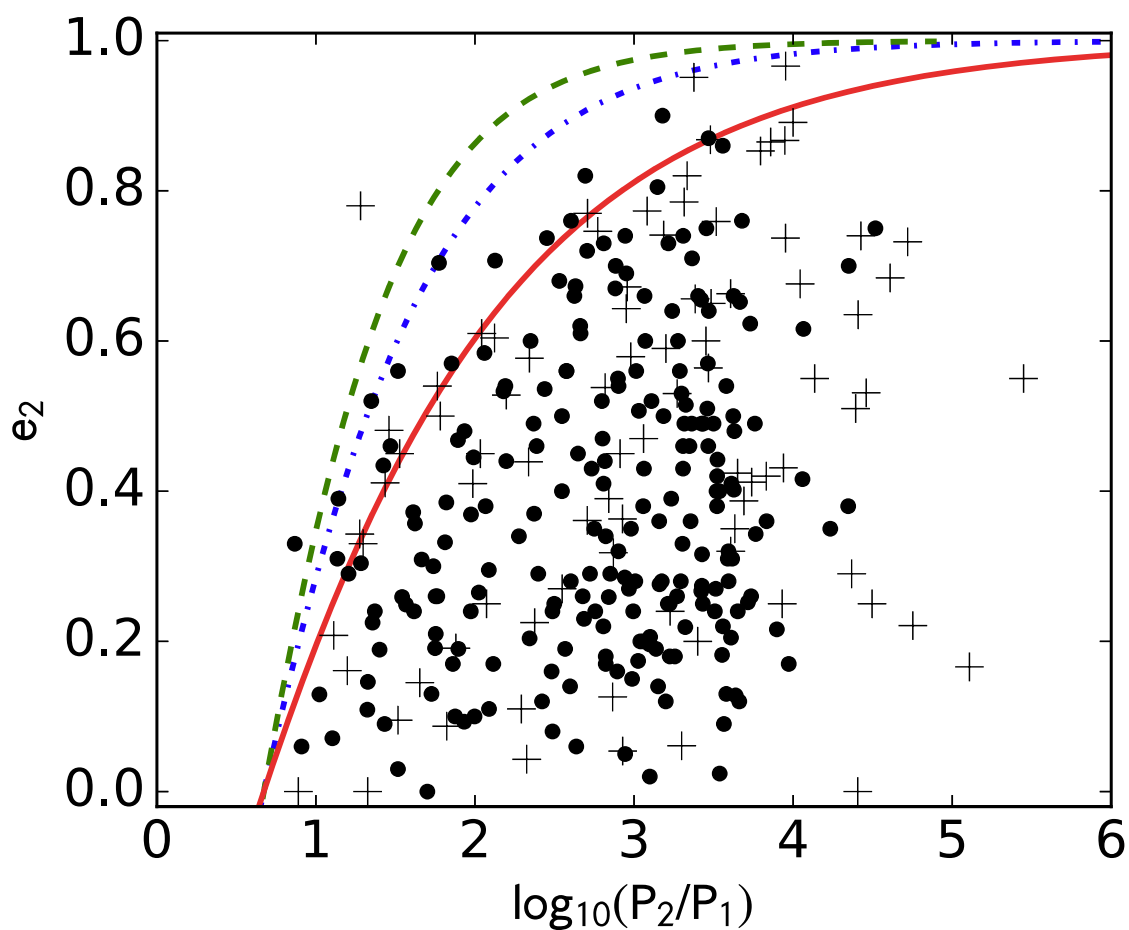
Objekty, které nesplňují tato kritéria jsou dlouhodobě nestabilní, tj. nemohou být starší než je určitá charakteristická doba oběhu; mezi objekty s P_2 kratší než asi 10000 let se takové objekty nepozorují, s delšími P_2 to jsou soustavy typu Trapez, jejichž stáří nemůže být velké. Modelové výpočty ukazují, že běžný vývoj takových soustav vede k úniku jedné ze složek ze systému a k tomu, že zbylá dvojice hvězd se stane kompaktnější.

Jinou zajímavou otázkou u vícenásobných soustav je, zda jejich oběžné dráhy leží nebo neleží všechny v jedné rovině, tj. zda jsou nebo nejsou koplanární. Viděli jsme u soustav vykazujících LITE, že u řady z nich se mění hloubka minim, tj. krátké a dlouhé dráhy nejsou koplanární. Koplanaritu lze studovat i u jiných vícenásobných soustav, např. pokud jedna složka vizuální dvojhvězdy s určenou drahou je sama spektroskopickou dvojhvězdou. Bohužel v současné době je známo jen asi 10 takovýchto vhodných systémů, pro něž byly s dostatečnou přesností určeny dráhové elementy obou drah, aby tak bylo možné zjistit jejich vzájemný sklon.

Uvedme si jeden pozoruhodný příklad:

Zajímavá je ζ Cnc (Griffin 2000) – jde o vizuální dvojhvězdu, vzdálenost složek je $6''$, oběžná doba 260 let. Obě složky jsou dvojhvězdy: jedna, se vzdáleností $1''$, má oběžnou dobu 20 let, druhá (u ní ale jedna ze složek není vidět) má oběžnou dobu 17 let. Pro druhou dvojhvězdu byla získána křivka radiálních rychlostí, semiamplituda je 4 km/s. Je známa přesná paralaxa (Hipparcos: $0.''0391$) a lze počítat hmotnosti; všechny tři viditelné složky jsou podobné Slunci, neviditelná složka (nedetekovaná ani v UV, ani v IR oboru) může být chladný bílý trpaslík.

Ve známém "Trapezu" jsou dobře viditelné čtyři hvězdy: θ^1 Ori A, B, C (ta je nejjasnější a nejranější, O6) a D. Z nich jsou θ^1 Ori A a B zákrytovými proměnnými V1016 Ori a BM Ori, pro θ^1 Ori A, B a C pak byly skvrnkovou interferometrií nalezeny další složky (u θ^1 Ori B dokonce dvě). Nejzajímavější je nález složky u θ^1 Ori C, neboť její úhlová vzdálenost je jen $0.''040$ a oběžná doba pravděpodobně 9 let; oběh se projevuje i měřitelnými změnami radiální rychlosti. Trapez má tedy minimálně 10 složek.



Obrázek 20: Rozdělení excentricit u vícenásobných systémů. Čerchovaná modrá čára označuje kritérium stability podle Mardlinga & Aarsetha (2001), čárkovaná zelená dle Sterzika & Tokovinina (2002) a plná červená dle empirického kritéria (Tokovinin 2007); více v článku Juryšek a kol. (2017).

Více k tomuto tématu čtenář nalezne také v kapitolách 4 a 7 níže.

Souborný přehled, jaké konkrétní elementy lze z daných dat získat je uveden v tabulce 1.

Tabulka 1: Schéma přímo odvoditelných parametrů.

	Pouze LC	Pouze RV SB1	Pouze RV SB2	LC RV SB1	LC RV SB2	Pouze $O - C$ LITE	Pouze $O - C$ Apsid.	Vizuální dráha	LITE + Vizuální dráha
$a_1 \sin i$ nebo $a_2 \sin i$		✓	✓	✓	✓				
$a \sin i, a_1 \sin i, a_2 \sin i, M_1 \sin^3 i, M_2 \sin^3 i$			✓		✓				
$a, a_1, a_2, M_1, M_2, R_1, R_2, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, d$				(✓)	✓				
$P, e, \omega, (\dot{\omega})$	✓	✓	✓	✓	✓		✓		
γ		✓	✓	✓	✓				
q	(✓)		✓	(✓)	✓				
$i, \frac{R_1}{a}, \frac{R_2}{a}, L_1/L_2, g_1, g_2, A_1, A_2, F_1, F_2, x_1, x_2, l_3$	✓			✓	✓				
T_2	✓	?	?	✓	✓				
JD_0, P	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓
$p_3, T_0, A_3, \omega_3, e_3, f(M_3), M_{3,\min}$						✓			✓
$p_3, T_0, \omega_3, e_3, i_3, \Omega_3, a_3''$								✓	✓
M_3, D									✓

Vysvětlivky: a_1 a a_2 jsou poloosy oběhu, i sklon dráhy, M_1 a M_2 hmotnosti, R_1 a R_2 poloměry složek, $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ bolometrické luminozity, a je vzdálenost složek, e excentricita, ω argument periastra, γ je rychlost těžiště, q hmotový poměr, L_1 a L_2 jsou monochromatické luminozity, g_1 a g_2 gravitační ztemnění, A_1 a A_2 albeda, F_1 a F_2 rotační parametry $F_i = \frac{\omega_i}{\omega}$, x_1 a x_2 jsou koeficienty okrajového ztemnění, l_3 třetí světlo, T_2 teplota sekundáru (T_1 fixováno) a D je vzdálenost systému.

3 Metody určování radiálních rychlostí, profilů spektrálních čar jednotlivých složek a dráhových elementů pomocí digitalizovaných spekter

3.1 Klasická měření na fotografických spektrech

V době fotografických spekter se radiální rychlosti měřily obvykle s pomocí komparátoru s mikrometrickým vláknem a přesným šroubem. Astronom nastavoval v mikroskopu střed čáry a odečítal lineární polohu na desce. Zkušený pracovník měřil jedno spektrum nejméně hodinu. Kromě časové náročnosti bylo nevýhodou i to, že nastavení bylo do určité míry subjektivní a provádělo se přirozeně na spektrech, která byla zaznamenána v densitách a nebyla rektifikována, což mohlo vnášet určité chyby.

Později se na některých hvězdárnách zvláště v USA začal používat komerčně vyráběný osciloskopický přístroj nazývaný *Grant machine*, který pomocí kmitajícího zrcátka a opticko-elektrického systému zobrazoval na obrazovce osciloskopu malý úsek přímého a zrcadlově převráceného spektra. V přístroji bylo opět fotografické spektrum uloženo na transportní podložce spojené s mikrometrickým šroubem. Ten dovoľoval pohybovat spektrem tak, aby přímý a převrácený obraz splynul. To umožnilo nastavovat mnohem objektivněji střed čáry a pokud byly ve spektru vidět čáry druhé složky dvojhvězdy, měřit lépe i je. Spektrum se ovšem opět zobrazovalo jako nerektifikované a v densitách, což vedlo k určitým chybám v místech s velkým gradientem v průběhu kontinua.

Princip toho přístroje v pozdější době dovedl k dokonalosti Ondřejovský astronom dr. Jiří Horn. Ten vytvořil program SPEFO umožňující (kromě kompletních redukci spektrogramů) měřit radiální rychlosti srovnáním přímého a převráceného obrazu spektra na *rektifikovaných spektrech zobrazených již v relativních tocích* na obrazovce stolního počítače. Pokud byl k dispozici i vhodný mikrodensitometer umožňující digitalizaci fotografických spekter, šlo podobným způsobem měřit i digitalizovaná fotografická spektra. Přístroj na digitalizaci spekter byl řadu let v provozu i na Ondřejovské observatoři, nyní je takové zařízení ve funkčním stavu pouze na Astronomickém ústavu SAV v Tatrách či na observatoři David Dunlap v Kanadě. Program SPEFO byl dále rozvíjen a zdokonalován Mgr. Jiřím Krpatou⁵ a je na Astronomickém ústavu UK k dispozici (<http://astro.troja.mff.cuni.cz/ftp/hec/SPEFO.263>). Z dnešního pohledu limituje další užívání tohoto programu to, že je napsán v jazyce Pascal a lze jej provozovat jen v prostředí DOSu.

Moderní náhradu tohoto programu v současnosti vyvíjí Bc. Adam Harmanec pod názvem reSPEFO. Jeho program je napsán v jazyce Java a lze jej provozovat na různých platformách, v Linuxu i ve Windows. Aktuální verze programu i s uživatelskými manuály jsou dostupné na adrese

<https://astro.troja.mff.cuni.cz/projects/respefo>.

Popis první funkční verze programu reSPEFO1 s ukázkami interaktivních obrazovek byl publikován v appendixu práce Harmanec a kol. (2020). K použití lze nyní doporučit verzi reSPEFO2, která nabízí větší škálu možností a uchovává informace o prováděné práci.

⁵ Až do jeho smrti 6. února 2009.

3.2 Analogový spektrometr

Když se objevily technické prostředky na získávání spektrů v digitalizovaném tvaru, začaly se objevovat i nové, objektivnější způsoby měření radiálních rychlostí. Za průkopníka v tomto směru lze označit britského astronoma Rogera Griffina, který již v šedesátých letech 20. století zkonstruoval a uvedl do provozu fotoelektrický spektrometr na měření radiálních rychlostí (Griffin 1967). Princip jeho přístroje spočíval v tom, že se spektrum studované hvězdy srovnávalo s maskou, na které bylo zaznamenáno spektrum hvězdy podobného spektrálního typu. Masku se mohla posouvat ve vlnové délce a fotoelektrický fotometr registroval světlo hvězdy prošlé maskou. Polohu masky, při které byl signál maximální, bylo možné kalibrovat tak, aby odpovídala rozdílu radiální rychlosti hvězdy vůči vzorovému spektru masky. Griffin se svým přístrojem dosahoval velmi dobré přesnosti v určení radiální rychlosti a do současné doby publikoval přes sto prací s nově měřenými křivkami radiálních rychlostí mnoha spektroskopických dvojhvězd.

Griffinův spektrometr byl ovšem ještě analogovým zařízením, nicméně jako první určoval radiální rychlost nikoliv pomocí měření polohy jednotlivých spektrálních čar, nýbrž s využitím celého úseku spektra.

3.3 Základní úvahy o elektronických spektrech

Elektronické detektory Reticon a CCD umožnily stabilní a nízkošumový záznam spekter ve zcela digitálním tvaru, což otevřelo cestu k použití nových objektivních metod měření radiálních rychlostí.

Digitalizovaná a plně redukováná a rektifikovaná spektra lze obvykle zapsat ve tvaru uspořádaných dvojic

$$\text{vlnová délka } \lambda \qquad \text{relativní tok } I(\lambda)$$

setříděných vzestupně ve vlnové délce. Někteří autoři doporučují použít místo vlnové délky λ jako nezávislou proměnnou její přirozený logaritmus $\ln \lambda$, a to z následujícího důvodu: Oběžné rychlosti naprosté většiny hvězd, které pozorujeme, jsou mnohem menší než rychlost světla ve vakuu a proto lze pro určení radiální rychlosti RV použít nerelativistický Dopplerův jev ve známém tvaru

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{RV}{c} \right). \quad (113)$$

Logaritmováním této rovnice dostaneme

$$\ln \lambda = \ln \lambda_0 + \ln \left(1 + \frac{RV}{c} \right). \quad (114)$$

Pro $RV \ll c$ lze druhý člen na pravé straně rovnice (114) nahradit Taylorovým rozvojem se zanedbáním všech vyšších členů a psát

$$\ln \left(1 + \frac{RV}{c} \right) \doteq \frac{RV}{c}. \quad (115)$$

Rovnici (114) můžeme pak přepsat do diferenciálního tvaru

$$c \cdot \Delta \ln \lambda \doteq \Delta RV, \quad (116)$$

ze kterého vyplývá, že posun v $\ln \lambda$ po vynásobení rychlostí světla je velmi přibližně přímo mírou rozdílu radiálních rychlostí mezi dvěma spektry.

Uvědomme si ale, co zanedbání vyšších členů Taylorova rozvoje představuje numericky pro praktické aplikace. Vlnová délka podle přibližného vztahu (115) $\lambda_{\text{approx.}}$ bude po dosazení z (115) do rovnice (114)

$$\lambda_{\text{approx.}} = \lambda_0 e^{\frac{RV}{c}}, \quad (117)$$

takže odpovídající rozdíl v radiálních rychlostech bude

$$RV - RV_{\text{approx.}} = RV - c \left(\frac{\lambda_{\text{approx.}} - \lambda_0}{\lambda_0} \right) = RV - c \left(e^{\frac{RV}{c}} - 1 \right). \quad (118)$$

Vidíme tedy, že chyba v radiální rychlosti, která takto vznikne, nezávisí na vlnové délce. Např. pro $RV = 400 \text{ km s}^{-1}$ činí tato chyba $0,267 \text{ km s}^{-1}$ a pro $RV = 1000 \text{ km s}^{-1}$ již $1,67 \text{ km s}^{-1}$. To pro opravdu přesné určování radiálních rychlostí nejsou zcela zanedbatelné hodnoty.

Bylo by přirozeně možné uvažovat i vyšší členy Taylorova rozvoje, ale lepší je následující postup: Uvědomme si, že původní spektrum bylo zaznamenáno na detektor, který má konstantní rozestup s mezi středy jednotlivých detekčních elementů. Disperzní element (mřížka či hranol) změní tuto škálu na nelineární škálu ve vlnových délkách. Tu je ale možné změnit na škálu, pro niž zůstane konstantní *rozlišovací schopnost* R daná vztahem

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{W \cdot s}, \quad (119)$$

kde W je lineární disperse a s vzdálenost středu sousedních elementů detektoru ve směru disperse. Tím bude přeskálované spektrum lineární v radiální rychlosti bez jakékoliv aproximace.

Čistě prakticky lze přeskálování provést tak, že první detekční element ve studovaném úseku spektra s vlnovou délkou λ_1 označíme jako z_1 . Zvolíme konstantní krok v radiální rychlosti ΔRV a ze vztahu (113) pak plyne, že vlnová délka n -tého přeskálovaného elementu z_n bude

$$\lambda_n = \lambda_1 \left(1 + \frac{\Delta RV}{c} \right)^{n-1}. \quad (120)$$

Je ovšem třeba, abychom vždy správně uvažili, jaký krok v radiální rychlosti zvolit, abychom nezhorsili rozlišovací schopnost původního spektra a na druhé straně, abychom nevolili krok příliš malý, neboť interpolací mnoha bodů mezi dva sousední elementy použitého detektoru již novou informaci nepřidáme a pouze prodloužíme čas případného dalšího zpracování.

Pro ilustraci: v coudé ohnisku 2-m dalekohledu v Ondřejově se v kameře s ohniskem 702 mm od roku 1992 do července 2000 používal detektor Reticon 1872RF, ze kterého bylo podél disperse využito pro záznam spektra 1696 detekčních elementů, jejichž středy byly od sebe vzdáleny o 0,015 mm. V současné době se ve stejném ohnisku používá CCD detektor SITE-005 o rozměru 2030×800 detekčních elementů, ze kterého se na zobrazení spektra podél disperse využívá 1997 elementů vzájemně od sebe vzdálených také o 0,015 mm. V nejčastěji používané červené oblasti spektra v rozsahu od 6255 do 6767 Å činí rozdíl mezi sousedními dvěma elementy ve vlnové délce asi 0,25 Å a rozdíl v radiálních

rychlostech klesá od krátkovlnného k dlouhovlnnému okraji spektra asi od 12,3 do 11,35 km s⁻¹. To platí v obou případech, ač je třeba upozornit na jeden rozdíl mezi oběma typy spekter. Spektra z detektoru Reticon byla plně redukována v programu SPEFO a hodnoty jejich relativních toků jsou uloženy pro původní detekční elementy. To znamená, že pokud si zobrazíme tato spektra ve vlnové délce, pak jednotlivé hodnoty vlnových délek přesně odpovídají vlnovým délkám jednotlivých detekčních elementů 1 až 1696 podle disperzního vztahu. Naproti tomu počáteční redukce nynějších CCD spekter (mj. kalibrace relativního toku, převedení na jednorozměrné spektrum a proložení disperzního polynomu) je prováděna v programu IRAF a v archivu pro uživatele jsou spektra uložena již ve *škále vlnových délek s ekvidistantním krokem* v λ . To se jeví jako poněkud nešťastné, neboť – v této chvíli zbytečně – je původní spektrum interpolováno do bodů ležících obecně mezi jednotlivými původními detekčními elementy a zřejmě tak, že se poněkud ztrácí původní rozlišení, neboť je uloženo opět spektrum obsahující pouze 1997 bodů. (Abychom původní rozlišení neztratili, měli bychom za ekvidistantní krok v λ přijmout nejmenší vzdálenost ve vlnové délce mezi dvěma sousedními elementy, což je na dlouhovlnném konci spektra.) Pro naše účely je ale užitečné si povšimnout, že použijeme-li vztah (120), budou oba typy spekter převedeny správně do škály ekvidistantní v radiální rychlosti.

3.4 Porovnání profilů čar s Gaussovými funkcemi

Ukazuje se, že pozorované profily spektrálních čar lze dobře modelovat Gaussovou funkcí

$$g(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}, \quad (121)$$

kde reálné konstanty a , b a c představují volitelné parametry. Parametr a představuje výšku vrcholku Gaussovy funkce (viz obr.21), parametr b definuje polohu vrcholu v souřadnici x a parametr c souvisí s šířkou Gaussovy funkce v poloviční výšce FWHM vztahem

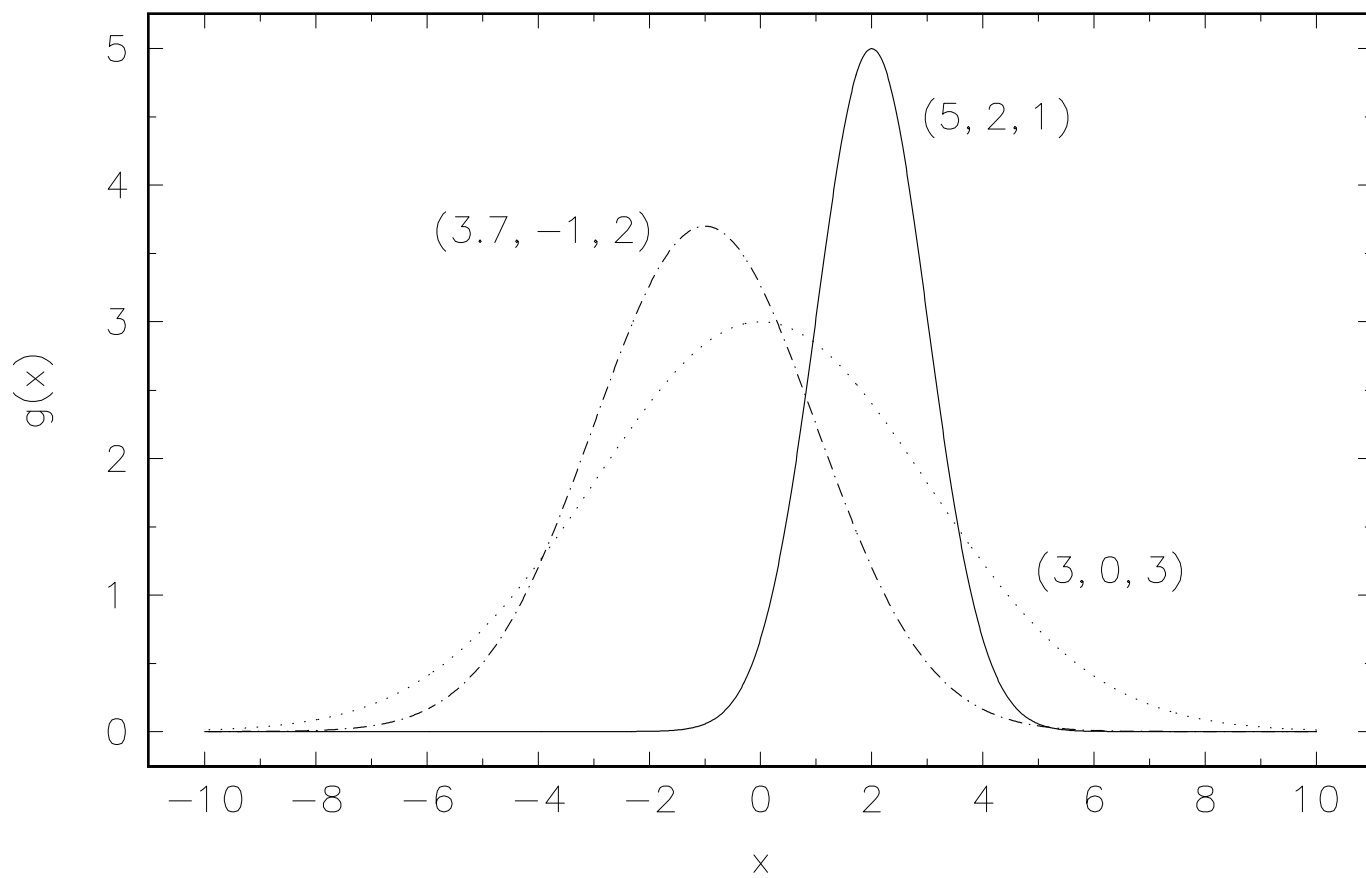
$$FWHM = 2\sqrt{2\ln 2} \cdot c. \quad (122)$$

Takto zapsaná funkce představuje emisní čáry, je ale jasné, že použitím záporného parametru a z intervalu (0,1) a přičtením konstanty 1 lze popsat absorpční profily v rektifikovaných spektrech.

V aplikaci na dvojhvězdy či vícenásobné soustavy lze postupovat tak, že pro spektra z fází, kdy je např. dvojhvězda v elongaci, určíme vhodné parametry Gaussových funkcí popisující dobře profily jednotlivých složek dvojhvězdy a ve fázích, kdy se profily překrývají (blendují) se snažíme vhodným posuvem ve vlnové délce nalézt nejlepší shody mezi pozorovaným spektrem a součtem zvolených Gaussových funkcí. Program na měření radiálních rychlostí dvou či více složek vícenásobného systému vytvořil a používal jeden z autorů tohoto textu Pavel Mayer.

3.5 Něco matematiky na připomenutí

Než budeme mluvit o různých metodách numerické manipulace se spektry, bude užitečné si připomenout několik faktů o Fourierově transformaci a souvisejících matematických operacích a zobrazeních.



Obrázek 21: Příklady průběhu Gaussovy funkce. Hodnoty parametrů a , b a c jsou uvedeny v závorkách u každé funkce

Obecně platí, že Fourierovou transformací funkce $F(x)$ proměnné x se nazývá funkce $f(y)$ nové proměnné y , která je dána vztahem

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{2\pi i x y} dx, \quad (123)$$

přičemž pro zpětnou transformaci platí

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i x y} dy. \quad (124)$$

Funkci $f(y)$ se někdy říkáva Fourierův obraz funkce $F(x)$.

Fourierova transformace je lineární a dá se také dokázat, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 dx. \quad (125)$$

Delta funkcí $\delta(x)$ proměnné x nazýváme speciální funkci, pro níž platí

$$\delta(x) = 0 \text{ pro všechna } x \neq 0 \quad (126)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (127)$$

Bude-li x_1 nějaký konkrétní bod na ose x , platí zřejmě, že funkce $\delta(x - x_1)$ bude nenulová pouze v bodě x_1 . Fourierova transformace delta funkce bude proto zřejmě

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_1) e^{2\pi i x y} dx = e^{2\pi i x_1 y} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_1) dx = e^{2\pi i x_1 y}. \quad (128)$$

Konvoluce $K(x)$ dvou funkcí $F(x)$ a $G(x)$ je definována vztahem

$$K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) G(x - u) du, \quad (129)$$

což se někdy zkráceně zapisuje ve tvaru

$$K(x) = F(x) * G(x). \quad (130)$$

Pro nás významnou vlastností konvoluce je to, že její Fourierův obraz $k(y)$ je prostým *součinem* Fourierových obrazů $f(y)$ a $g(y)$ uvažovaných funkcí $F(x)$ a $G(x)$, tedy

$$k(y) = \sqrt{2\pi} f(y) \cdot g(y). \quad (131)$$

3.6 Radiální rychlosti s použitím kroskorelační funkce

Použití kroskorelační funkce (cross-correlation function; c.c.f.), využívané delší dobu v jiných oborech, k měření radiálních rychlostí a rotačního rozšíření spektrálních čar jako první navrhl Simkin(ová) (1974) a dále je rozpracovali Da Costa a kol. (1977) a Tonry a Davis (1979). V jistém smyslu jde o jakousi digitální verzi analogového postupu použitého Griffinem. Spektrum studované hvězdy, v tomto případě ale již kompletně redukované (tj. rektifikované a v heliocentrické škále vlnových délek) se srovnává se vzorovým spektrem hvězdy podobného spektrálního typu. Mnoho autorů doporučuje spektrální čáry vzorového spektra rotačně rozšířit tak, aby se i šířkou co nejvíce podobaly čarám studované hvězdy. Oproti tomu např. kanadský astronom David Holmgren (soukromé sdělení) doporučuje pro lepší kontrast použít vzorové spektrum s úzkými čarami. Pokud jsou jak vzorové, tak studované spektrum na lineární škále v radiálních rychlostech (jak jsme to diskutovali dříve), pak je zřejmé, že takový vzájemný posuv obou spekter z , který povede k jejich nejlepší shodě, je přímo mírou rozdílu v radiálních rychlostech obou spekter. Za vzorové spektrum lze zvolit buď spektrum hvězdy podobného spektrálního typu jako má studovaná hvězda, které *bylo získáno stejným spektrografem* nebo syntetické spektrum v rozlišení, které použitému spektrografu odpovídá. Výhodou použití skutečného pozorovaného spektra je jeho nesporná blízká podobnost spektru studované hvězdy. Naopak syntetické spektrum je bez šumu, což se také může ukázat jako výhoda. Za vzorové spektrum můžeme v principu zvolit i jedno ze spekter studované hvězdy, pak ale musíme počítat s tím, že radiální rychlosti získáme jen relativně, bez určení jejich nulového bodu.

Označíme-li funkci popisující pozorované rektifikované spektrum hvězdy jako $I(x)$ a funkci popisující vzorové spektrum jako $V(x)$, kde souřadnice x je lineární v radiální rychlosti, pak jejich kroskorelační funkce je definována vztahem

$$C(z) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x)I(z+x)dx = V(z) \star I(z) \quad (132)$$

a dosahuje maxima pro hodnotu z_0 odpovídající rozdílu v radiálních rychlostech obou spekter. Pověsimně si, že kroskorelace je operace, která se od konvoluce liší pouze znaménkem integrační proměnné ve druhé funkci. Označuje se symbolicky podobně jako konvoluce, ale jiným typem hvězdičky (pěticípu).

Reálná elektronická spektra jsou ovšem souborem diskrétních hodnot

$$I(x_i) \ (i = 1, N) \text{ a } V(x_j) \ (j = 1, M)$$

rovnoměrně vzorkovaných v lineární škále radiálních rychlostí s krokem Δx . Kroskorelační funkce (132) se tak změní v soubor kroskorelačních koeficientů (kterým se ovšem někdy také říká kroskorelační funkce).

Pro diskrétní posuvy spektra vůči vzorovému spektru $z_l = l \Delta x$ (kde l může nabývat záporné i kladné hodnoty) jsou tyto koeficienty definovány vztahem

$$C_j(z_l) \equiv \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j V(x_i)I(x_i + z_l). \quad (133)$$

Maximum kroskorelační funkce můžeme určit některou numerickou metodou, třeba pomocí proložení vhodné funkce.

Ve většině praktických aplikací se ovšem kroskorelační funkce nepočítají přímo, ale provádí se Fourierova transformace, která i integraci v kroskorelační funkci změní na násobení Fourierových obrazů v prostoru frekvencí. Poté je provedena inverzní Fourierova transformace, což ovšem vzhledem k periodickému charakteru funkcí v prostoru frekvencí může vést při zpětné transformaci k falešným jevům. Bránit se lze dvěma vhodnými manipulacemi se spektry. Za prvé bývá zvykem místo původní funkce $I(x)$ použít novou funkci $F(x) = 1 - I(x)$, která z očekávaných absorpčních čar učiní čary emisní, ale hlavně bude mít úroveň kontinua v ideálním případě rovnou nule. Druhou manipulací je tzv. tapering. Může se totiž stát, že na okrajích spekter jsou spektrální čary, které by při dvou Fourierových transformacích mohly vést ke vzniku falešných vysokofrekvenčních artefaktů v kroskorelační funkci. Tapering znamená přidání asi 10 procent bodů na obou okrajích spektra tak, aby případné nenulové hodnoty funkce $F(x)$ na obou okrajích intervalu přešly spojitě na hodnoty nulové.

Zucker a Mazeh (1994) navrhli a prakticky testovali zobecnění kroskorelační metody na dvou-rozměrný případ, aby bylo možné touto technikou získat radiální rychlosti obou složek dvojhvězdy současně. Jejich program nazvaný TODCOR počítá korelaci pozorovaného spektra vůči kombinaci dvou vzorových spekter, jejichž spektrální typy jsou blízké očekávaným spektrům složek studované dvojhvězdy. Jejich zobecněná kroskorelační funkce je tak funkcí dvou nezávislých proměnných, které měří RV posuv jedné a druhé složky dvojhvězdy.

Program vytvořený na principu programu TODCOR nezávisle napsal belgický astronom Yves Frémat pod názvem **asTODCOR** a je na našem pracovišti k dispozici.

3.7 Určování radiálních rychlostí pomocí rozšiřovací funkce

Metodu využití rozšiřovací funkce navrhl a rozpracoval Rucinski(1992, 1998). Kdyby v atmosférách hvězd neexistovaly žádné procesy vedoucí k rozšíření spektrálních čar, byly by absorpční čary odpovídající vázaným atomárním přechodům souborem delta funkcí. Takové rektifikované spektrum $F_0(\lambda)$ upravené opět transformací $S_0(\lambda) = 1 - F(\lambda)$ by se tak dalo zapsat ve tvaru

$$S_0(\lambda) = \sum_j k_j \delta(\lambda_j), \quad (134)$$

kde sumace přes j zahrnuje všechny spektrální čary vyskytující se v uvažovaném úseku spektra. Ve skutečnosti jsou i čary nerotující hvězdy rozšířeny různými mikroskopickými atomárními procesy (tepelné rozšíření, mikroturbulence a podobně) a k určitému rozšíření dochází díky nenulové šířce štěrbin i v samotném spektrografu. Označíme-li všechny tyto procesy působící malé rozšíření spektrálních čar jako $T(\lambda)$, je zřejmé, že pozorované spektrum bude konvolucí spektra $S_0(\lambda)$ s rozšiřovací funkcí $T(\lambda)$:

$$S(\lambda) = S_0(\lambda) * T(\lambda). \quad (135)$$

Spektrum ovšem může být rozšířeno vnějšími vlivy, buď rotací hvězdy s nerovnoměrným rozložením jasů na povrchu ("hvězdné skvny") nebo pohybem v oběžné dráze kolem společného těžiště. Při rotaci osamocené hvězdy bez skvrn bude ovšem rozšiřovací funkce v čase konstantní, zatímco v ostatních

uvedených případech se bude měnit buď s časem nebo s fází oběžné periody a pro případ dvojhvězdy může v elongacích nabývat i podobu dvou oddělených vrcholů nebo dvou vrcholů, které se částečně překrývají. I v tomto případě budou šířky obou částí rozšiřovací funkce záviset na promítnutých rotačních rychlostech složek dvojhvězdy. Je ovšem jasné, že středy obou vrcholů rozšiřovací funkce budou opět pro daný čas odpovídat radiálním rychlostem složek dvojhvězdy.

Označíme-li právě diskutovanou rozšiřovací funkci symbolem $B(\lambda)$, lze výsledné pozorované spektrum $F(\lambda)$ v každém okamžiku zapsat jako konvoluci

$$F(\lambda) = S(\lambda) * B(\lambda) = S_0(\lambda) * T(\lambda) * B(\lambda). \quad (136)$$

Podobně jako u kroskorelační metody je možné spočítat kroskorelační funkci mezi spektrem nerozšířeným rozšiřovací funkcí $B(\lambda)$ a mezi spektrem pozorovaným (pozor opět na správné rozlišení a použití symbolů $\star$ a $*$). Dostaneme

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= S(\lambda) \star F(\lambda) \\ &= S(\lambda) \star (S(\lambda) * B(\lambda)). \end{aligned} \quad (137)$$

Označíme-li symbolicky operaci Fourierovy transformace symbolem $\mathcal{F}$ a inverzní Fourierovu transformaci symbolem $\mathcal{F}^{-1}$, platí zřejmě

$$\mathcal{F}[F(\lambda)] = \mathcal{F}[S(\lambda)] \cdot \mathcal{F}[B(\lambda)] \quad (138)$$

a odhad rozšiřovací funkce lze v principu získat z operace

$$B(\lambda) \sim \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[F(\lambda)]/\mathcal{F}[S(\lambda)]]. \quad (139)$$

Ve skutečnosti se ale ukazuje, že tento postup zavádí do úlohy velký šum a je třeba úlohu formulovat jako diskretní sumaci a řešení soustavy lineárních rovnic metodou nejmenších čtverců, přičemž je třeba využít důmyslné numerické metody.

Podrobný výklad o praktickém použití metody lze získat na webové stránce Dr. Rucinského

<http://www.astro.utoronto.ca/~rucinski>

a na této adrese lze nalézt i program v jazyce IDL či odkaz na realizaci programu Dr. Nelsonem v prostředí Windows.

3.8 Dopplerovská tomografie

Dopplerovská tomografie je metoda, pomocí které *nelze měřit radiální rychlosti složek*, ale která dovoluje na základě známých křivek radiálních rychlostí získat z pozorovaných spekter individuální spektra obou složek dvojhvězdy. Využití metody tomografie k tomuto účelu navrhli a prakticky vyzkoušeli Bagnuolo a Gies (1991). Jednotlivá pozorovaná spektra jsou chápána jako projekce spekter primáru a sekundáru do různých ‘směrů’ a metodou tomografické rekonstrukce lze získat individuální spektra primáru a sekundáru.

3.9 Oddělení spekter individuálních složek (spectra disentangling)

Matematické oddělení spekter primáru a sekundáru a současné získání dráhových elementů soustavy jako první navrhli Simon a Sturm (1994). Krátce poté publikoval Hadrava (1995) metodu oddělení spekter až pětinasobné soustavy hvězd ve Fourierově prostoru, což mu dovolilo výrazně zrychlit výpočetní rychlost metody. Svůj postup později ještě doplnil o možnost uvažovat změnu relativní intenzity spekter jednotlivých složek - viz Hadrava (1997). Metodu realizoval i formou výpočetního programu KOREL, který je podrobně popsán včetně návodu k použití v pracích Hadrava (2004b, 2009a, 2009b). Uživatelé mohou program v nejnovější verzi použít po přihlášení do virtuální observatoře jako VO KOREL na webové adrese

<https://stelweb.asu.cas.cz/vo-korel>.

Později podle Hadravova postupu vytvořil na základě stejných principů jiný podobný program nazvaný FDBINARY také Ilijić a kol. (2004). Jeho program dovoluje určovat dráhové elementy jen pro dvojhvězdu a v nejnovější verzi i pro trojhvězdu a nedovoluje automatické odstranění telurických čar. Pracuje také ve Fourierově prostoru a spočte celou řadu řešení a z nejlepších si lze vybrat ta, která jsou fyzikálně přijatelná. K dispozici je i program CRES, který umožňuje rozklad spekter přímo v prostoru vlnových délek, ten ale nepočítá dráhové elementy, nýbrž je musí dostat na vstupu zadané. Programy s podrobným návodem jsou na webové stránce

<http://sail.zpf.fer.hr/fdbinary>.

Předpokládejme, že pozorované spektrum $I(x, t)$ je funkcí relativního posuvu v radiální rychlosti x a času t a že vzniká skládáním spekter I_j ($j = 1, \dots, n$) pocházejících z n různých hvězd, která jsou sama o sobě neproměnná a pouze se vůči sobě posouvají v radiální rychlosti.

Pak zřejmě můžeme výsledné spektrum v libovolném čase vyjádřit jako konvoluci spekter jednotlivých hvězd s delta funkcí ve tvaru

$$I(x, t) = \sum_{j=1}^n I_j(x) * \delta(x - RV_j(t)). \quad (140)$$

(Tento zápis se může zdát jako poněkud samoučelný, protože by bylo jednodušší napsat

$$I(x, t) = \sum_{j=1}^n I_j(x - RV_j(t)). \quad (141)$$

Má to ale svůj dobrý význam, jak hned z dalšího výkladu vyplývá.)

Označme Fourierovu transformaci spektra I symbolem J a spekter I_j symboly J_j . Pro spektrum zapsané v souřadnici x pomocí rovnice (140) bude mít jeho Fourierova transformace v konkrétním bodě y tvar

$$J(y, t) = \sum_{j=1}^n J_j(y) e^{iyRV_j(t)}. \quad (142)$$

Povšimněme si, že Fourierův obraz je zde zapsán jako součin Fourierových obrazů obou funkcí a že faktor 2π v exponenciále je ‘zanedbán’, což je ale přípustné, neboť to pouze znamená jinou normalizaci proměnné y .

Jestliže pozorováním získáme k spekter ($k > n$) v časech t_i , ($i = 1, \dots, k$), která jsou složením spekter dvou nebo více spekter hvězd, tvořících soustavu, a posunutých vzájemně o různé radiální rychlosti $RV_j(t_i)$, můžeme se pokusit nalézt jak jednotlivá spektra, tak jejich odpovídající radiální rychlosti metodou nejmenších čtverců. Jak Simon a Sturm (1994), tak Hadrava (1995) určují při výpočtu místo samotných radiálních rychlostí přímo dráhové elementy soustavy.

Odpovídající suma čtverců odchylek, kterou je třeba minimalizovat, má tedy tvar

$$S = \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{+\infty} \left| J(y, t_i) - \sum_{j=1}^n J_j(y) e^{iyRV_j(t_i, p)} \right|^2 dy, \quad (143)$$

kde p schematicky označuje dráhové elementy P , T_0 , K_1 , M_2/M_1 , e , ω a případně časovou změnu periody $\dot{P}$ či změnu délky periastra $\dot{\omega}$ způsobenou apsidálním pohybem.

Abychom si uvědomili, proč je výhodné provádět řešení ve Fourierových obrazech původních funkcí, uvažujme případ, kdy výsledné spektrum vzniká pouze skládáním dvou spekter dvojhvězdy. Suma (143) bude mít v tom případě tvar

$$S = \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{+\infty} \left| J(y, t_i) - J_1(y) e^{iyRV_1(t_i, p)} - J_2(y) e^{iyRV_2(t_i, p)} \right|^2 dy, \quad (144)$$

Předpokládejme také, že dráhové elementy známe a že chceme získat pouze spektra obou složek dvojhvězdy. Číslo komplexně sdružené k číslu α označme $\tilde{\alpha}$. Protože absolutní hodnota součinu dvou komplexních čísel je rovna součinu jejich absolutních hodnot a protože absolutní hodnota komplexního čísla a čísla k němu komplexně sdruženého jsou si rovny, můžeme v rovnici (144) absolutní hodnotu psát explicitně ve tvaru

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{+\infty} (J(y, t_i) - J_1(y) e^{iyRV_1(t_i, p)} - J_2(y) e^{iyRV_2(t_i, p)}) \\ &\quad \times (\tilde{J}(y, t_i) - \tilde{J}_1(y) e^{-iyRV_1(t_i, p)} - \tilde{J}_2(y) e^{-iyRV_2(t_i, p)}) dy, \end{aligned} \quad (145)$$

Nyní můžeme napsat podmínkové rovnice pro konkrétní bod y Fourierova obrazu pozorovaného spektra. Derivujeme zvlášť v reálné a v imaginární části komplexních čísel a pro zestručnění zápisu označme ještě $J(y, t_i) = J$, $J_1(y) = J_1$ a $J_2(y) = J_2$. Podmínkové rovnice pak dostáváme ve tvaru

$$0 = \frac{\partial S}{\partial J_1^{re}} = -\tilde{J} e^{iyRV_1} + \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 e^{iy(RV_1 - RV_2)} - J e^{-iyRV_1} + J_1 + J_2 e^{iy(RV_2 - RV_1)}, \quad (146)$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial J_1^{im}} = -\tilde{J} e^{iyRV_1} + \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 e^{iy(RV_1 - RV_2)} + J e^{-iyRV_1} - J_1 - J_2 e^{iy(RV_2 - RV_1)}, \quad (147)$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial J_2^{re}} = -\tilde{J} e^{iyRV_2} + \tilde{J}_1 e^{iy(RV_2 - RV_1)} + \tilde{J}_2 - J e^{-iyRV_2} + J_1 e^{iy(RV_1 - RV_2)} + J_2, \quad (148)$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial J_2^{im}} = -\tilde{J} e^{iyRV_2} + \tilde{J}_1 e^{iy(RV_2 - RV_1)} + \tilde{J}_2 + J e^{-iyRV_2} - J_1 e^{iy(RV_1 - RV_2)} - J_2. \quad (149)$$

Sečteme-li ještě první dvě a druhé dvě podmínkové rovnice, dostaneme po krátké úpravě

$$\tilde{J} e^{iyRV_1} = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 e^{iy(RV_1 - RV_2)}, \quad (150)$$

$$\tilde{J} e^{iyRV_2} = \tilde{J}_1 e^{iy(RV_2 - RV_1)} + \tilde{J}_2. \quad (151)$$

Vidíme tedy, že pro daný bod Fourierova obrazu spektra se problém redukuje na řešení dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Kdybychom úlohu řešili přímo pro původní spektra, nedošlo by k podobné separaci proměnných a museli bychom řešit obrovskou soustavu rovnic o mnoha neznámých.

Hadrava (1997) metodu zobecnil ještě zavedením předpokladu, že intenzita kteréholiv spektra se může spektrum od spektra měnit. To se v reálných situacích často stává. U zákrytových dvojhvězd se tak děje v průběhu zákrytů. Zahrneme-li do řešení i telurické čáry, které během roku zdánlivě ve škále heliocentrických vlnových délek odrážejí oběh Země kolem Slunce, pak jejich intenzita se mění jak se stavem ovzduší, tak i se vzdušnou hmotou, ve které v dané chvíli objekt pozorujeme. Mírné zdánlivé změny intenzity čar mohou konečně nastávat i v případech ne zcela dokonalé rektifikace spektra.

Označíme-li intenzitu j -tého spektra v čase t symbolem $s_j(t)$, lze rovnice (140) a (142) zobecnit do tvaru

$$I(x, t) = \sum_{j=1}^n s_j(t) I_j(x) * \delta(x - RV_j(t)). \quad (152)$$

$$J(y, t) = \sum_{j=1}^n s_j(t) J_j(y) e^{iyRV_j(t)} \quad (153)$$

a příslušně upravit i podmínkové rovnice. Výsledkem řešení mohou tak být i uvažované intenzity spekter jednotlivých složek v časech expozic všech použitých spektrogramů.

Pozoruhodným důsledkem této možnosti je zjistit fázově vázané změny jasnosti složek dvojhvězdy či vícenásobné soustavy bez fotometrických měření, čistě ze spekter, která dokonce nejsou absolutně kalibrována v hodnotách toku. Lze rovněž jednoznačně rozhodnout, která hvězda je během daného zákrytu zakrývána.

KOREL – jak už bylo řečeno – může řešit hierarchickou soustavu až 5 hvězd a výsledkem řešení jsou i dráhové elementy soustavy. Pro takový případ se ovšem v sumě čtverců, kterou je třeba minimalizovat, vyskytují i nelineární členy a program k minimalizaci sumy čtverců v těchto nelineárních členech používá metodu simplexu publikovanou Kallrathem a Linnellem (1987). Ta pracuje tím způsobem, že v prostoru parametrů spočte sumu čtverců ve třech různých bodech a poté se čtyřmi možnými operacemi snaží nahradit bod s nejhorší sumou čtverců bodem jiným. Možné operace jsou následující:

A. Zrcadlení – Nový bod se zvolí na opačné straně vůči spojnici dvou bodů s lepší sumou čtverců a ve stejné vzdálenosti od ní.

B. Dělení – Nový bod se zvolí na stejné straně vůči spojnici dvou bodů s lepší sumou čtverců, ale v poloviční vzdálenosti od ní, než původní bod.

C. Násobení – Nový bod se zvolí na stejné straně vůči spojnici dvou bodů s lepší sumou čtverců, ale v dvojnásobné vzdálenosti od ní, než původní bod.

D. Stažení – Dva body s horší sumou se přiblíží na polovinu původní vzdálenosti k bodu s nejmenší sumou čtverců odchylek.

Program KOREL průběh konvergence může zobrazovat a jednotlivé operace identifikuje písmeny A až D podle právě uvedeného schématu.

3.10 Programy na řešení křivek radiálních rychlostí a světelných křivek

Při skutečném moderním řešení křivek radiálních rychlostí a světelných křivek se uvažuje celá řada různých dynamických a fyzikálních jevů: pohyb v obecně výstředné dráze, nesférický tvar hvězd a s ním spojený rozdíl mezi optickým a gravitačním težištěm obou těles, reflexe záření, tzv. Rossiterův či rotační jev (deformace křivky radiálních rychlostí v době začátku a konce zákrytu u zákrytových dvojhvězd s rychleji rotujícími složkami), případně nerovnoměrné rozložení jasů na povrchu ve formě hvězdných skvrn a další jevy. Výpočet je pak přirozeně mnohem složitější a také většinou náročný na výpočetní čas. Problémem může být i jednoznačnost řešení a silná korelace mezi některými určenými elementy.

Z toho, co jsme si dosud pověděli, je ovšem již zřejmé, že pokud zákrytovou dvojhvězdu současně pozorujeme spektroskopicky jako dvojhvězdu spektroskopickou, můžeme kombinací obou řešení získat všechny základní fyzikální vlastnosti obou složek dvojhvězdy i celé soustavy: jejich hmotnosti, poloměry, relativní tok záření jednotlivých složek v jednotkách celkového toku soustavy v maximu jasnosti v efektivních vlnových délkách, ve kterých byla světelná křivka získána a přirozeně i parametry popisující dráhu a její orientaci v prostoru. Pokud získáme buď z barevných indexů jednotlivých složek nebo z modelování profilů spektrálních čar spolehlivý odhad efektivních teplot obou těles, můžeme určit i jejich zářivé výkony a zářivý výkon celé soustavy. Jeho porovnáním s pozorovanou zdánlivou jasností soustavy nám v principu rovněž dovolí určit velmi přesně vzdálenost soustavy od nás, jak jsme ukázali již v kapitole o fotometrických měřeních.

Zákrytové dvojhvězdy jsou proto zdrojem našich nejpřesnějších znalostí o hmotnostech, poloměrech a zářivých výkonech hvězd.

Rozvoj programů na řešení světelných křivek s pomocí minimalizačních metod začal s nástupem elektronických počítačů a za zmínku stojí, že jeden z prvních takových programů vytvořil již zesnulý brněnský astronom Dr. Tomáš Horák (Horák 1966, 1970).

Zde se zmíníme jen o některých více používaných programech. Velmi důkladný přehled existujících počítačových programů mohou zájemci nalézt v česky psané disertační práci Zejda (2008).

3.10.1 Woodův program WINK

Program WINK (Wood 1971) je dalším z dosud používaných počítačových programů. Obě složky dvojhvězdy modeluje jako tříosé elipsoidy a je připraven i na modelování dvojhvězd ve výstředné dráze. Pracuje nejen s okrajovým ztemněním, ale i s gravitačním zjasněním a s reflexí.

3.10.2 Program WD Wilsona a Devinneyho

Dnes asi světově nejrozšířenější je výpočetní program amerických astronomů Dr. R.E. Wilsona a Dr. E.J. Devinneyho – viz např. Wilson a Devinney (1971) – který byl později dále rozvíjen i pro případ hvězd s diskem (Wilson 1974) i pro modelování dvojhvězd ve výstředné dráze, apsidální pohyb a simultanní řešení světelných křivek a křivek radiálních rychlostí (Wilson 1979, 1990, 1993) a Van Hamme a Wilson (2003). Program je založen na Rocheově geometrii a umožňuje i řešení světelných křivek elipsoidálních proměnných. V literatuře je označován nejčastěji jako WD program. Jde fakticky o dva samostatné programy, LC a DC. První počítá světelnou křivku, křivky radiálních

rychlostí, čárová spektra a grafy pro zadané elementy, zatímco druhý řeší inverzní úlohu určení nejlepší sady elementů metodou diferenciálních korekcí při minimalizaci sumy čtverců odchylek. Současná verze programu dovoluje kromě základních elementů počítat i časové změny oběžné periody, změnu délky periastra v důsledku apsidálního pohybu a také modelování hvězdných skvrn na povrchu hvězd. Program automaticky určuje nulové body jednotlivých světelných křivek, bohužel ale neumožňuje určování individuálních nulových bodů (γ rychlostí) pro RV data z různých spektrografů. K programu existuje i podrobný manuál.

Použití programu nebylo po dlouhou dobu úplně snadné, uživatel např. musel po každé iteraci znovu na klávesnici počítače napsat všechny konvergované údaje před započítáním další iterace. Program je ovšem trvale vyvíjen a jeho vývoj je dostatečně dokumentován.

3.10.3 Programy PHOEBE 1 a PHOEBE 2

Uživatelsky příjemnou nástavbu WD programu s grafickým rozhraním vytvořil po dohodě s Dr. Wilsonem slovinský astronom Andrej Prša ve spolupráci se svým původně školitelem Tomažem Zwitterem (viz Prša Zwitter 2005). Postupně program zdokonaloval jak z hlediska dobré konvergence, tak dodáváním nových možností, které původní WD program neposkytuje. Program je pod názvem

PHOEBE 1 (PHysics Of Eclipsing Binaries)

volně dostupný na webové stránce

<http://phoebe-project.org/1.0>

Na uvedené stránce je i webový odkaz na originální WD program R.E. Wilsona a několik dalších volně dostupných programů na řešení světelných křivek.

Dr. A. Prša po svém příchodu do USA začal postupně v týmové spolupráci s dalšími kolegy a kolegy budovat zcela nový program PHOEBE 2, který již není založen na WD programu. Program je psán v jazyce Python a je neustále vyvíjen. Díky zlepšené volbě sítě bodů na povrchu složek by měl vést k přesnějšímu řešení světelných křivek i křivek radiálních rychlostí. Měl by navíc poskytovat mnoho nových možností jako je modelování hierarchických soustav včetně apsidálního pohybu drah, modelování hvězdných oscilací, disků a možnost použít na vstupu i interferometrická pozorování. Beta verzi programu si lze nyní stáhnout i s podrobnou dokumentací a návodem na hlavní stránce projektu

<http://phoebe-project.org>

a autoři vyzývají zájemce, aby si nový program vyzkoušeli a sdělili jim své případné podněty, zkušenosti či kritiku. Základní principy, na kterých je nový program budován, jsou popsány v pracích Prša, Conroy, Horvat a kol. (2016) a Conroy a kol. (2020). Program je nadále vyvíjen a autoři opakovaně organizují výukové semináře pro zájemce.

3.10.4 Program BINSYN A.P. Linnella and I. Hubeného

Americký astronom A.P. Linnell vytvořil sadu navazujících programů, které dovolují pro zadané elementy spočítat syntetické světelné křivky dvojhvězdy až v 90 různých vlnových délkách - viz Linnell

(1984). Soubor programů pracuje s tvarem hvězd ve formě potenciálu Rocheova modelu, je připraven i na modelování kontaktních dvojhvězd se společnou atmosférou a umožňuje počítání reflexe. Jeho pozoruhodnou vlastností je, že každému bodu zvolené numerické sítě přiřazuje interpolací ve vlnové délce, fotosferické teplotě a tíhovém zrychlení vhodný model atmosféry, čímž se mj. řeší automaticky i okrajové ztemnění. Program je připraven na použití s různými modely atmosfér. Původní verze programu počítala pouze s dvojhvězdami v kruhové dráze. Linnell (1986) zobecnil program i na modelování hvězdných skvrn a jejich vlivu na světelné křivky.

Později navázal dr. Linnell spolupráci s astronomem českého původu dr. I. Hubeným. Vhodným propojením Linnellova souboru programů s Hubeného programy TLUSTY (modelování hvězdných atmosfér) a SYNSPEC (počítání syntetických spekter) vytvořili Linnell a Hubeny (1994) nástroj na modelování syntetických spekter dvojhvězd v libovolné oběžné fázi.

Linnell a Hubeny (1996) zobecnili ještě celou sadu programů o možnost modelovat i akreční disk kolem jedné ze složek dvojhvězdy a počítat jak vliv disku na světelnou křivku, tak i výsledné syntetické spektrum v různých oběžných fázích.

Při aplikaci na dvojhvězdu β Lyr Linnell (2002) doplnil program o možnost použít libovolné (třeba i tabulkově zadané) opticky tlusté disky včetně jednoduchého modelování absolutně černým tělesem.

Dr. Linnell svůj základní program doplnil i o možnost modelovat dvojhvězdy ve výstředné dráze a pro kruhovou dráhu vytvořil verzi dovolující elementy soustavy na základě pozorovaných světelných křivek konvergovat. Tato sada programu je na Astronomickém ústavu UK k dispozici i s manuálem k použití. Určité praktické zkušenosti s tímto programem má např. Mgr. Pavel Chadima a vlastní verzi programu v Linuxu s řešením inverzní úlohy vytvořil chorvatský astronom Dr. Davor Sudar ze Zagrebu.

Aplikace této sady programů při analýze konkrétních dvojhvězd lze nalézt mj. v pracích Linnell, Hubeny a Lacy (1996), Linnell, Hubeny a Harmanec (1998) či Linnell (2000, 2002).

Vývoj tohoto programu je bohužel pravděpodobně ukončen, neboť Dr. A.P. Linnell zemřel 20. ledna 2017 ve věku 94 let.

3.10.5 Program SPEL

Již zesnulý český astronom Dr. Jiří Horn vytvořil dobrý program na řešení křivek radiálních rychlostí a určení dráhových elementů spektroskopické dvojhvězdy s názvem SPEL (akronym pro SPektroskopické ELementy). Program dovoluje libovolné elementy buď počítat nebo fixovat, pracuje interaktivně a poskytuje fázový graf a chyby jednotlivých elementů. Program nebyl nikdy veřejně publikován, je na něm ale založena celá řada publikovaných prací a lze si jej vyžádat buď od Dr. Pavla Koubského ze stelárního oddělení v Ondřejově nebo od P. Harmance. Verze programu SPEL90 napsaná v jazyce Pascal je se svolením manželky Jiřího Horna a se stručným návodem k použití dostupná na adrese

<https://astro.troja.mff.cuni.cz/ftp/hec/SPEL90>

3.10.6 Program FOTEL

Českého původu je i velmi dobrý program FOTEL (akronym pro FOTometrické ELEmenty) (Hadrava 1990, 2004a), který byl již v době svého vzniku mimořádně koncepčně pokročilý a umožňoval věci, které se v ostatních programech objevily až mnohem později. FOTEL totiž počítá geometrické elementy ze světelných křivek ve všech fotometrických pásmech současně, umožňuje i určení změn oběžné periody soustavy, změn amplitudy křivky radiálních rychlostí, výpočet rychlosti stáčení přímky apsid a výpočet řešení pro trojhvězdu. Program dává uživateli i možnost modelovat změny poloměrů složek v důsledku měnící se vzájemné přitažlivosti při pohybu ve značně výstředné dráze.

FOTEL dovoluje i řešení křivky radiálních rychlostí a současné řešení obou křivek. Roku 2004 doplnil dr. Hadrava program FOTEL i o možnost konvergovat současně i astrometrická data (posiční úhel a promítnutou úhlovou vzdálenost složek vizuální dvojhvězdy) a také ke zpřesnění periody a jejich časových změn využít i pozorování okamžiků minim u zákrytových proměnných. To vše má tu velkou výhodu, že kritické elementy jako je perioda a její změna, čas průchodu periastrum, výstřednost dráhy či délka periastra a její sekulární změna jsou určeny přesněji a konsistentně.

Program FOTEL v současné verzi není založen na geometrii Rocheova modelu (třebaže tento model je zčásti rozpracován v čistě syntetické verzi programu a je i popsán v teoretické úvodní části návodu k programu), ale na modelu tříosých elipsoidů podobně jako program WINK. V současnosti také pracuje pouze s lineárním okrajovým ztemněním. Minimalizace sumy čtverců se ve FOTELu provádí pomocí simplexové metody, použité i pro program KOREL popisovaný výše.

3.10.7 Některé další programy

V literatuře se lze setkat i s dalšími programy. Jsou to např. program Mochnackého a Doughtyho (1972) založený také na Rocheově geometrii a budovaný s cílem modelovat světelné křivky kontaktních soustav typu W UMa, program LIGHT2 (Hill 1979) či program EBOP (Etzel 1981).

Existují také programy na simultánní řešení spektroskopických a vizuálních drah – viz např. Morbey (1975), Pourbaix (1998) či Gudehusův program BINARY dovolující simultánní řešení astrometrických dat, dat ze skvrnkové interferometrie a křivek radiálních rychlostí – viz

<http://www.chara.gsu.edu/~gudehus/binary.html> .

3.10.8 Na co je třeba při řešení dávat pozor

Závěrem několik praktických rad stran skutečných výpočtů s programy na řešení světelných křivek a křivek radiálních rychlostí.

1. Před samotným výpočtem je nezbytné, abychom určili dostatečně přesné vstupní hodnoty některých klíčových parametrů. Platí to především o oběžné periodě soustavy, ale také třeba o epoše průchodu periastrum a pokud dochází k sekulární změně periody, musíme odhadnout také její rychlost předem. *Programy na řešení světelných křivek či křivek radiálních rychlostí nelze použít k nalezení, ale pouze ke zpřesnění těchto veličin.* Periodu lze nalézt některou ze standardních metod hledání period. Změnu periody odhadneme tak, že pro časově odlehle a dostatečně bohaté soubory pozorovacích dat spočteme řešení s volnou konvergencí periody a epochy průchodu

periastrum. Pokud se hodnoty takto určené periody pro oba soubory liší nad rámec spočtených chyb, odhadneme změnu periody jednoduše jako

$$\dot{P} \sim \frac{P(T_2) - P(T_1)}{T_2 - T_1}. \quad (154)$$

Podobně lze odhadnout i případný apsidální pohyb ze změny délky periastra mezi časově odlehlými daty.

2. Výpočet pro data, pro něž neznáme dostatečně přesné elementy předem, nikdy nezačínáme volnou konvergencí všech uvažovaných elementů. Hodnotu délky periastra lze hledat pokusně, ale znamená to, že musíme pro takové výpočty zafixovat nejen periodu a výstřednost dráhy, ale i poloviční amplitudu křivky radiálních rychlostí nebo poloměry složek. Přitom nevadí, zvolíme-li nějakou nenulovou - byť třeba značně nepřesnou - hodnotu výstřednosti oběžné dráhy. Teprve když získáme hodnoty průchodu periastrum a délky periastra, odpovídající správnému kvadrantu, je možno postupně uvolňovat konvergenci dalších elementů.
3. Častou začátečnickou chybou bývá i to, že omylem dovolíme programu konvergenci elementů, které se z daných dat nedají určit, např. poloviční amplitudy křivky radiálních rychlostí pro fotometrická data. Program v tom případě havaruje a skončí chybovým hlášením.
4. Zvláštní pozornost vyžaduje současné řešení světelné křivky a křivky radiálních rychlostí. Pokud jsou oba typy dat dostatečně početné a kvalitní, je vhodné po počátečním zkusmém výpočtu změnit vzájemné váhy fotometrických dat a radiálních rychlostí tak, aby každý typ dat přispíval zhruba k polovině celkové sumy čtverců odchylek a měl tak srovnatelný vliv na výsledek.

4 Vlastnosti a vývoj dvojhvězd

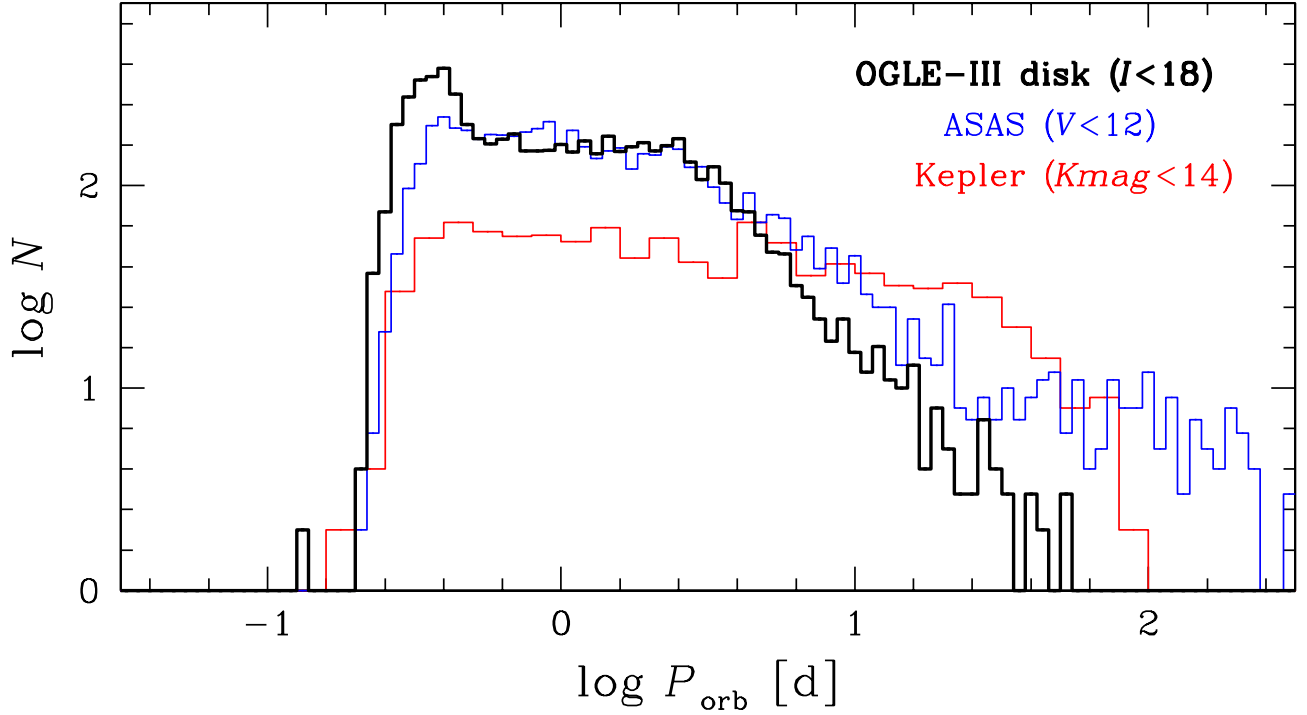
Viděli jsme, že dvojhvězdy se vyskytují v nejruznějších kombinacích a že mnoho hvězd se vyskytuje ve dvojhvězdách. Je proto zřejmé, že řada jevů, které u hvězd různých typů pozorujeme, tak či onak s jejich podvojností souvisí.

4.1 Statistiky dvojhvězd a vícenásobných systémů

Je přirozené vyšetřovat četnost výskytu rozsahu hodnot různých elementů dvojhvězd. Četnosti jsou samozřejmě velmi ovlivněny řadou výběrových jevů, Úplné soubory, např. do určité vzdálenosti od Slunce, či do určité zdánlivé hvězdné velikosti prakticky neexistují. Pravděpodobnost objevu dvojhvězdy závisí na velmi mnoha okolnostech, stále se např. objevují dvojhvězdy i mezi velmi jasnými hvězdami. Stejně tak dochází k novým objevům málo hmotných hvězd (jako jsou hnědí trpaslíci) i ve velmi blízkém slunečním okolí.

Na druhou stranu některé statistiky je možno zkoumat a jsou již poměrně dobře průkazné, ač i ty jsou stále zatíženy jistými výběrovými efekty. Zajímavým je např. diagram rozdělení oběžných period známých zákrytových dvojhvězd, viz obr. (22). Z něj je vidět jednak jakási spodní hranice možné orbitální periody dvojhvězdy na hlavní posloupnosti daný fyzikálně a jednak také neúplnost

pozorovacích dat a z toho pramenící omezení pro delší periody (díky omezenému časovému pokrytí daných přehlídek). Že se jedná o výběrový efekt také potvrzují zjištění z jiných studií potvrzujících rozdělení period u dvojhvězd s maximem u mnohem delších oběžných period, viz např. Duquennoy a Mayor (1991) nebo nověji Raghavan a kol. (2010).

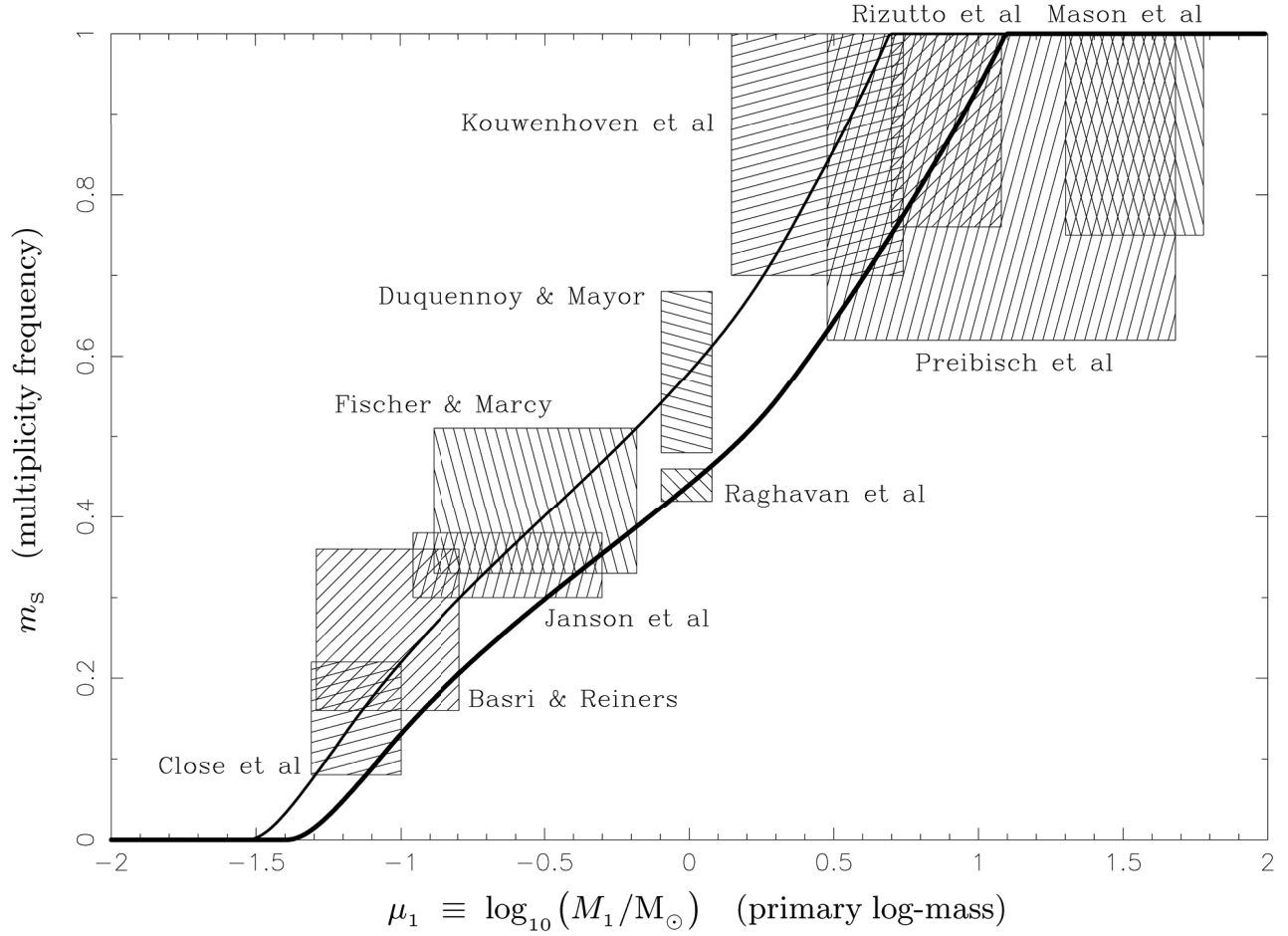


Obrázek 22: Rozdělení period pro zákrytové dvojhvězdy z přehlídek OGLE, ASAS a Kepler, viz Pietrukowicz a kol. (2013).

Zajímavou závislostí, která již byla zmíněna dříve, je vztah mezi multiplicitou a spektrálním typem, potažmo hmotností primáru. Multiplicitou máme na mysli, že daná hvězda je součástí vícenásobného systému. Takový diagram je ukázán na obr. (23).

Zřídka kdy ale máme dostatečně dobře pozorovaný vzorek hvězd, abychom mohli např. prohlásit, že jsme v něm našli všechny existující dvojhvězdy, a podobně. Ani v našem nejbližším slunečním okolí to do větší vzdálenosti neplatí. Proto hrají velkou roli výběrové efekty, které způsobují jisté omezení počtu námi detekovaných vícenásobných systémů. Je to předvedeno na obr. (24), kde byl naopak zkoumán vzorek těch (cca 4500) nejjasnějších hvězd oblohy a zaznamenávána četnost výskytu systémů s danou vícenásobností.

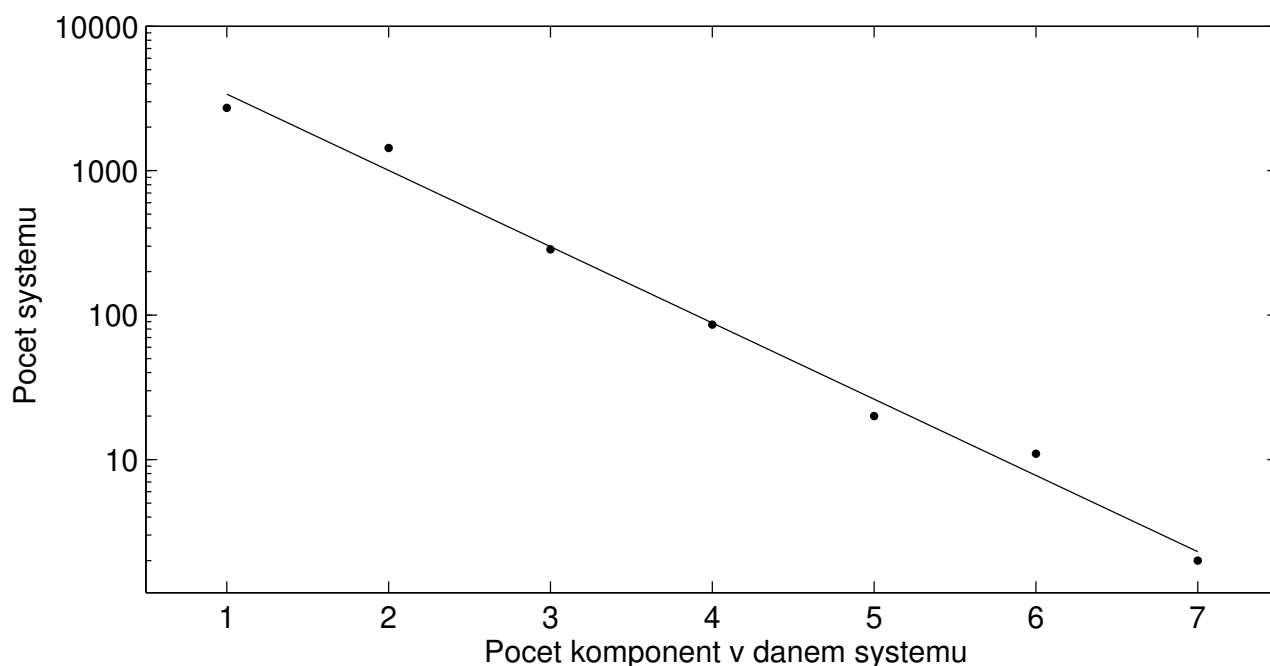
Jistě za pozornost stojí také nepřímý důkaz působení tzv. Kozaiových cyklů se slapovým třením (KCTF), které lze demonstrovat na zjištěném vzájemném sklonu oběžných rovin ve vícenásobných systémech. Bylo to demonstrováno např. na vzorku několika set zákrytových dvojhvězd se třetí složkou objevených družicí Kepler, kde je jasně vidět ostré maximum v oblasti vzájemných sklonů kolem 40° (viz obr. (27)), což je ve skvělé shodě s teorií (Kiseleva a kol. 1998).



Obrázek 23: Závislost četnosti vícenásobných systémů na hmotnosti primáru, viz Whitworth a Lomax (2015).

Ze stejné práce lze také vybrat zajímavou závislost mezi hmotnostmi jednotlivých složek takovýchto systémů. Lze jistě diskutovat o metodě detekce a různé pravděpodobnosti, že objevíme tělesa daných vlastností. Nicméně i tak se ukazuje – viz obr. (25) – že častěji nalézáme systémy s méně hmotnými třetími složkami. Lze dokonce říci, že vícenásobné systémy mají tendenci vznikat se všemi složkami podobné hmotnosti a jen malé procento z nich má dominantní třetí složku.

Za zmínku jistě stojí i tzv. diagram perioda-perioda (P-P), kde je zkoumán vztah mezi periodami vnitřní a vnější dráhy u trojnásobných systémů. Tento graf je na obr. (26) a je z něj jasně vidět několik věcí. Jednak striktní pravidlo přípustných hodnot period díky vztahu (112), aby byl systém stabilní. A také rozdělení nalezených period vícenásobných systémů s ohledem na použitou metodu. Krátké periody (do cca 100 dní) bývají nejčastěji objevovány spektroskopicky, zatímco dlouhé periody (nad asi 10000 dní) jsou nejčastěji objeveny díky interferometrii nebo obecně astrometrii či vlastním pohybům. Jistý nedostatek hvězd mezi nimi je dán neúplností pozorovacího materiálu, zejména jeho časovým omezením. Roli v tomto rozdělení také mohou hrát ony Kozaiovy cykly, které mimo jiné



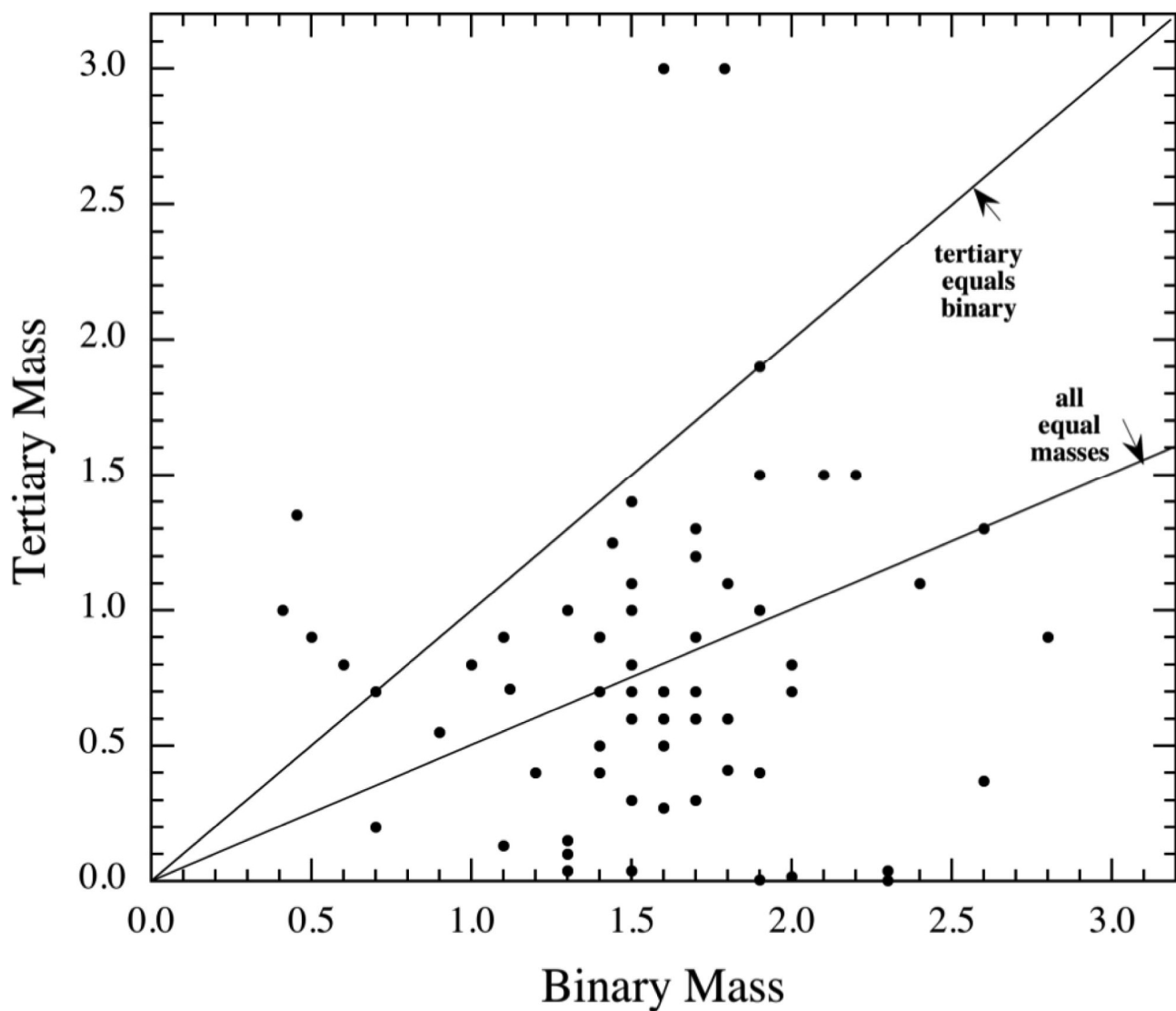
Obrázek 24: Počet známých hvězd s danou vícenásobností mezi nejjasnějšími hvězdami oblohy, podle Eggletona a Tokovininova (2008).

produkují právě páry s krátkými periodami oběhu. Za povšimnutí stojí i nedostatek systémů v samém levém spodním konci diagramu, kde téměř nenacházíme hvězdy s periodami vnější dráhy pod 100 dní (dnes se to díky družici Kepler trochu změnilo, nicméně i tak je v těchto oblastech zatím neobjasněný nedostatek systémů).

A konečně poslední zajímavá závislost by mohla být ta, která zobrazuje rozdělení hmotových poměrů v závislosti na periodě u vnitřních párů trojnásobných systémů. Tento graf je ukázán na obr. (28). Jak je vidět, pozoruje se velmi rozdílné zastoupení různých poměrů hmotností pro krátko-periodické a dlouhoperiodické systémy. Je otázkou, nakolik je něco takového jen výběrovým efektem způsobeným např. tím, že detekovat málo hmotného průvodce na dlouhých drahách je velmi obtížné. I závislosti tohoto typu musí simulace vzniku a vývoje dvojhvězd a vícenásobných systémů zohledňovat, viz kapitola 7.

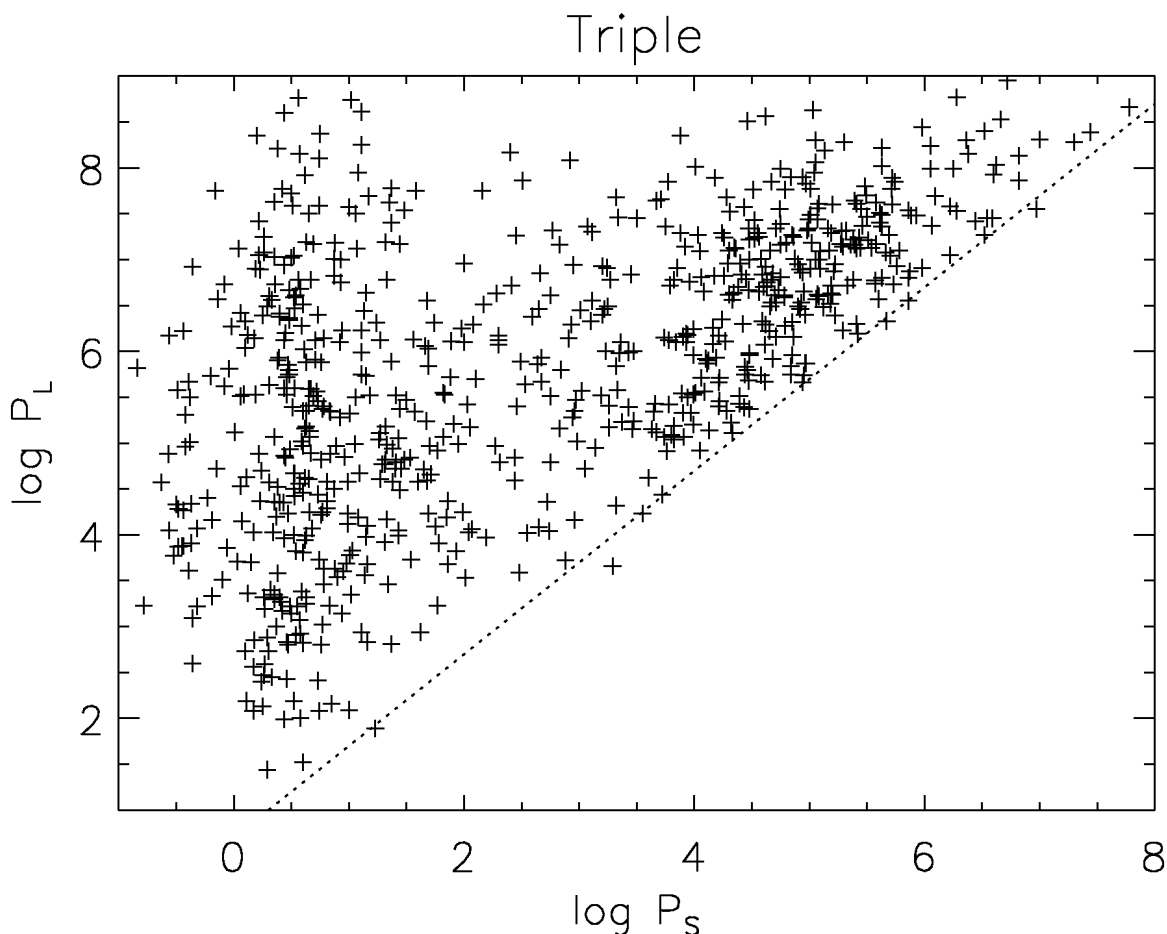
4.2 Formy přenosu a ztráty hmoty ve dvojhvězdách

Teorie vývoje dvojhvězd je podrobně probírána v přednášce AST014. Zde si proto něco o možném vývoji dvojhvězd řekneme jen stručně. Ukazuje se, že každá hvězda během svého nukleárního vývoje prodělá nejprve dlouhé, velmi stabilní období, kdy v jejím nitru dochází k přeměně vodíku na helium a kdy se její vlastnosti a zářivý výkon v čase mění jen nesmírně pomalu. Podstatné ale je to, že poloměr hvězdy s časem dlouhodobě roste, a tento růst se po vyčerpání zásob vodíku v jádru prudce zrychlí. Pokud je taková hvězda složkou dvojhvězdy s kratší oběžnou periodou, nemůže růst jejího poloměru



Obrázek 25: Hmotnost zákrytového páru versus třetí složky, viz Borkovits a kol. (2016).

pokračovat neomezeně. Hvězda totiž v určitém okamžiku zaplní celou Rocheovu mez a další narůstání jejího poloměru nezbytně vede k přenosu hmoty směrem ke druhé složce. Výpočty ukázaly, že při takovém procesu předá hmotu ztrácející hvězda třeba i 80 % své původní hmotnosti své partnerce. Celý proces se odehrává na škále desetitisíců až statisíců let, má ovšem jasné pozorovací důsledky. Mezi hvězdami existuje plyný proud, který je Coriolisovou silou strháván ve směru oběžného pohybu, takže často nedopadá na druhou hvězdu přímo, ale obléhá ji a vytváří kolem ní akreční disk, který se může projevit ve spektru přítomností emisních čar a dodatečných absorpčních čar v průmětu na disk hvězdy. U zákrytových dvojhvězd můžeme v oběžných fázích před začátkem zákrytu hvězdy, ke které proud plynu směřuje, pozorovat i absorpční čáry z tohoto proudu promítnutého na hvězdu. Protože

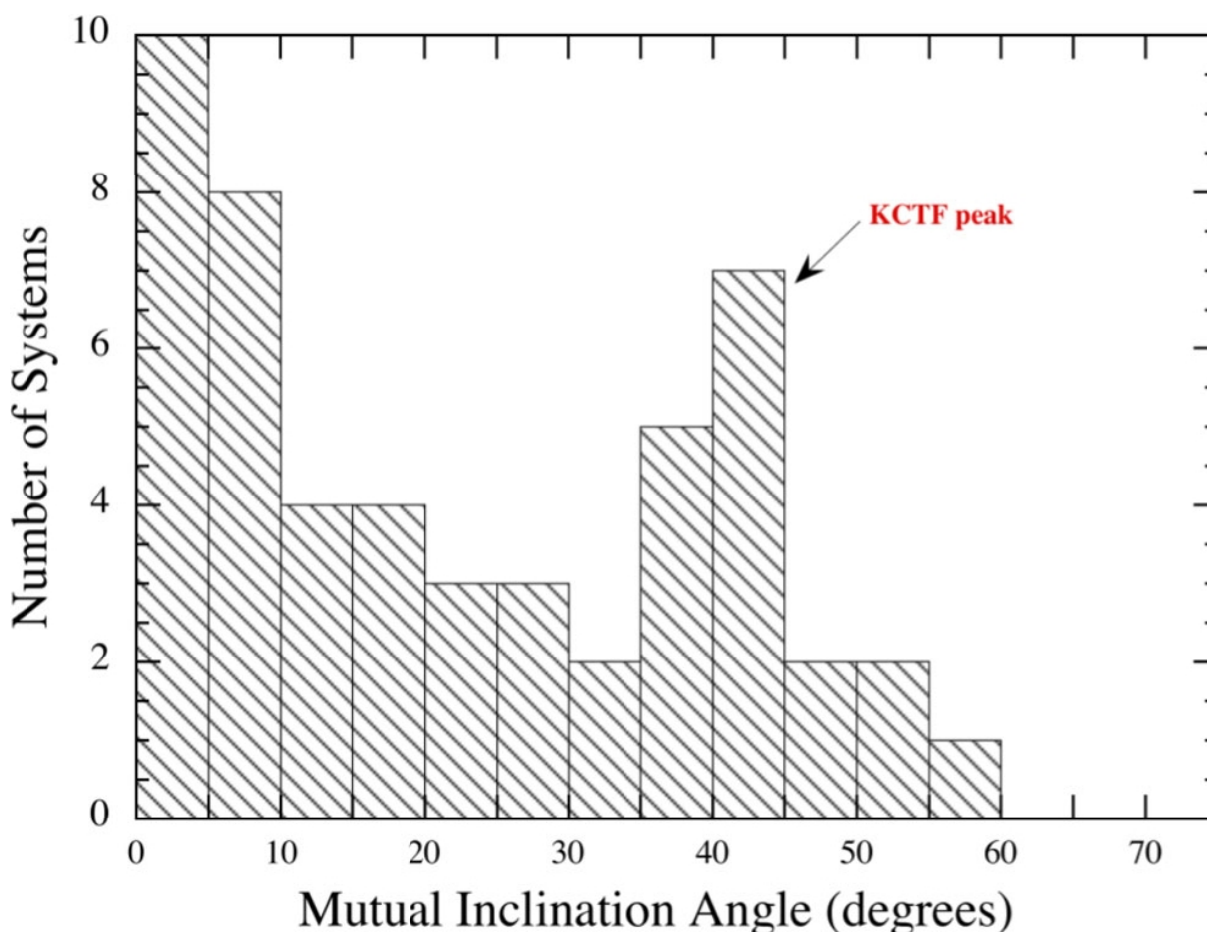


Obrázek 26: Tzv. P-P diagram, neboli vztah mezi dlouhou a krátkou periodou u trojhvězd, viz Tokovinin (2008).

průmět vidíme ve chvílích, kdy se plyn pohybuje směrem od nás, jsou čáry vznikající v plynném proudu posunuty i o několik set km s^{-1} do červené části spektra. Velmi dobře lze takové čáry pozorovat např. u dvojhvězd U Cep či S Equ.

Výměna hmoty nemusí probíhat pouze formou zaplnění Rocheovy meze. Jak jsme se již zmínili v oddíle o klasifikaci dvojhvězd, může se stát, že hvězda je rotačně nestabilní a může v oblasti rovníku přivrácené ke druhé složce ztrácet hmotu i když je hluboko pod Rocheovou mezí. Zde je ovšem třeba dodat, že tento únik hmoty může vést k vytvoření disku kolem hvězdy, ale patrně jen k velmi slabému přenosu hmoty. Je totiž třeba si připomenout, že úniková rychlost je asi 1,4-krát vyšší než rychlost kritické rotace. Unikát směrem ke druhé složce tedy v zásadě může pouze to malé procento hmoty, které v důsledku maxwellovského rozdělení rychlostí v plynu dosáhne únikové rychlosti: K úniku hmoty směrem k druhé hvězdě může rovněž dojít, pokud výron hmoty trvá dostatečně dlouho a dojde k zaplnění klasické Rocheovy meze.

U horkých hvězd a u chladných hvězd s hlubokými podpovrchovými konvektivními zónami může

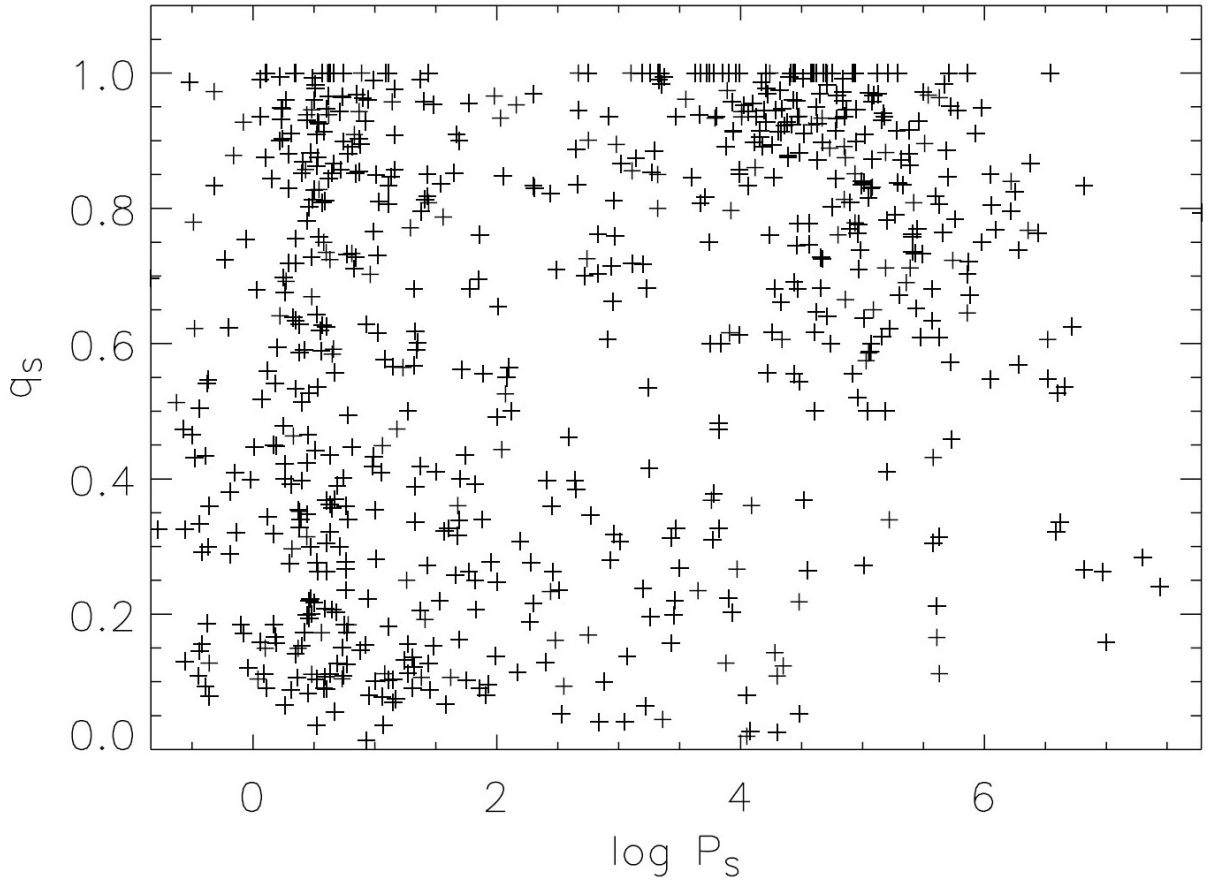


Obrázek 27: Vzájemný sklon oběžných rovin u trojhvězd objevených družicí Kepler, viz Borkovits a kol. (2016).

docházet k úniku hmoty formou hvězdného větru. Tento režim přenosu hmoty se často uvažuje u optických složek rentgenovských dvojhvězd, které mají vysokou svítivost. Rocheova geometrie vede i v takových případech k určité fokusaci normálně sféricky symetrického větru. Ve dvojicích hvězd o vysoké svítivosti dochází k současnému úniku hmoty hvězdným větrem z obou složek a tyto dva proudy spolu vzájemně kolidují a mohou také vést ke vzniku pozorovatelných emisních čar. Protože hvězdný vítr může dosahovat snadno nadúnikové rychlosti, vede u hvězd a dvojhvězd i ke ztrátě hmoty z celého systému.

Teoretické argumenty vedou k domněnce, že u dvojhvězd s velmi krátkými oběžnými periodami může docházet k významnému gravitačnímu záření, které odnáší část energie ze soustavy a mělo by se proto projevit pozvolným zkracováním oběžné periody.

Obecně řečeno – mechanismy ztráty a přenosu hmoty ve dvojhvězdách nejsou ještě zdaleka vyčerpávajícím způsobem prozkoumány. K jejich úplnému pochopení bude třeba ještě mnoho teoretického i observačního úsilí. Je třeba si uvědomit, že celá věc je komplikována tím, že kromě ztráty hmoty



Obrázek 28: Rozdělení hmotových poměrů v závislosti na oběžné periodě, viz Tokovinin (2008).

dochází také ke ztrátě úhlového momentu a tedy k vývoji oběžné dráhy dvojhvězdy, což má na ztrátu hmoty zpětný vliv.

4.3 Cirkumstelární a akreční disky

Úvodem chceme upozornit, že pojem cirkumstelárního disku je třeba odlišit od již dříve použitého termínu ‘disk’ ve smyslu do roviny promítnuté plochy kotouče samotné hvězdy, jak jsme o tom hovořili třeba u vzájemných zákrytů složek dvojhvězd.

Zde budeme chápat disk jako samostatnou entitu, plynovou strukturu obklopující hvězdu, která má zpravidla rozměry řádově větší než průměr samotné hvězdy. Jedním významným případem jsou disky kolem vznikajících hvězd, představující část materiálu, za kterého hvězda vznikla.

V souvislosti s naším tématem nás ale více budou zajímat disky vznikající během přenosu hmoty mezi složkami dvojhvězd. Jak to diskutoval již Kříž (1972), to zda během přenosu hmoty mezi složkami vznikne akreční disk nebo zda materiál bude přímo dopadat na hmotu přijímající složku, závisí na míře zaplnění odpovídající Rocheovy meze samotnou hvězdou, a tedy na poměru hmotností a

oběžné periodě. V soustavách s kratšími oběžnými periodami vznikají stabilní akreční disky obtížněji a pozoruje se spíše přímý dopad. Situaci dále studovala např. Peters(ová) (2007), u níž lze nalézt i diagram relativní poloměr hmoty přijímající složky versus hmotový poměr q se zakreslenými konkrétními systémy ve stadiu přenosu hmoty.

Existuje poměrně rozsáhlá teorie akrečních disků a byly prováděny i mnohé hydrodynamické výpočty - viz např. monografie Frank, King a Raine (1985) či přehledový referát Bisikalo a Matsuda (2007). Stávající teorie akrečních disků dobře vyhovuje pro objekty jako jsou kataklysmické proměnné (viz níže), neboť u těchto objektů je záření centrálních hvězd v disku skoro zanedbatelné a záření okraje akrečního disku je dáno rychlostí akrece hmoty. Jak ale ukázal např. pokus Hubeného a Plavce (1991), modelovat tímto modelem záření disku kolem normální hmotné hvězdy (v daném případě β Lyr) vedlo k rozporu s pozorováním, neboť podobný disk je nutně zahříván zářením centrální hvězdy, což stávající modely nepopisují.

Pozorovatelsky jsou cirkumstelární disky kolem normálních či kompaktních hvězd často velmi významné a mohou výrazně komplikovat snahu o určení základních fyzikálních vlastností takových dvojhvězd, jak je to diskutováno v dalších kapitolách.

Závěrem poznamenejme, že díky interakcím mezi dráhovým a rotačními momenty, viskozitě a dalším vlivům může docházet k přerozdělování momentu hybnosti a disky mohou v některých případech i odčerpávat hmotu hvězd. Jak ukázaly hydrodynamické výpočty, v místech interakce plynového proudu oblétaujícího hvězdu s původním hustším plynovým proudem mohou vznikat struktury podobné bipolárním výtryskům kolmým na oběžnou rovinu dvojhvězdy – viz např. Bisikalo a kol. (2000).

4.4 Dynamické jevy ve dvojhvězdách, cirkularizace a synchronizace

U dvojhvězd s kratšími periodami a s kruhovou oběžnou dráhou obvykle pozorujeme dokonalou synchronizaci mezi oběžnou úhlovou rychlostí a úhlovými rotačními rychlostmi obou složek dvojhvězdy. Tato situace, často nazývaná též vázaná rotace, se pozoruje rovněž pro složky dvojhvězdy, které vyplňují Rocheovu mez. Pro obvodovou rotační rychlost platí zřejmě

$$v_S = \frac{2\pi R}{P} \quad (155)$$

a pokud ji budeme udávat v km s^{-1} , periodu P ve dnech a poloměr hvězdy R ve slunečních poloměrech, dostaneme užitečný pracovní vztah

$$v_S = 50,58968 \frac{R}{P}. \quad (156)$$

Jestliže je dráha dvojhvězdy výstředná, mění se přirozeně úhlová oběžná rychlost. Největší je při průchodu periastru, kdy je také vzájemné slapové působení složek největší. Jak na příkladu dobře pozorovaných dvojhvězd se spolehlivě určenými vlastnostmi ukázal Harmanec (1988), dochází u mnoha takových dvojhvězd k synchronizaci úhlových rotačních rychlostí složek s úhlovou oběžnou rychlostí právě v periastru. Obvodovou rotační rychlost odpovídající synchronizaci v periastru lze

spočítat ze vztahu

$$v_{PS} \sin i = \frac{(1+e)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} v_S \sin i. \quad (157)$$

U některých dvojhvězd s hodně výstřednými drahami lépe vyhovuje pseudosynchronizace podle vztahu, který odvodil Hut (1981) a který vede na úhlové rychlosti odpovídající asi 80 % oběžné úhlové rychlosti v periastru.

Existují teoretické studie Zahna a Tassoula, ukazující, že zmíněné efekty vedou dlouhodobě k postupné cirkularizaci oběžné dráhy a k dosažení stavu vázané rotace.

U dvojhvězd s kratšími periodami, které se dosud pohybují ve výstředných drahách, vede periodická proměnnost úhlové rotace také k dalšímu jevu: ke stáčení přímky apsid ve směru oběžného pohybu. Rychlost stáčení souvisí s vnitřní strukturou hvězd a jev lze proto využít k testování modelů vnitřní stavby hvězd.

Dá se rovněž očekávat, že periodicky proměnné gravitační pole, kterým působí jedna složka dvojhvězdy ve výstředné dráze na druhou může vyvolat vynucené oscilace atmosféry. Několik skupin zabývajících se studiem dvojhvězd začalo hledat důkazy takových vynucených kmitů systematicky. Je zajímavé, že u několika dvojhvězd s mírně výstřednými drahami jako je např. Spica se zdá, že úhlová rotační rychlost složek je právě dvojnásobkem úhlové rychlosti oběhu, takže ve hře mohou být i efekty dráhových resonancí.

Na okraj poznamenejme, že přenos hmoty vede i ke vzniku některých méně obvyklých struktur, např. bipolárních výtrysků, kolmých na oběžnou rovinu či „horkých skvrn“ v místě interakce proudu plynu s diskem. Horké skvrny jsou typické pro kataklysmické proměnné, bipolární výtrysky byly nalezeny pro anomální hmotnou rentgenovskou dvojhvězdu SS 433, pro několik symbiotických hvězd jako CH Cyg a poměrně nedávno také pro systém β Lyr.

K vzájemnému ovlivnění složek dvojhvězdy dochází i při jejich značné vzdálenosti. Tvary složek jsou ovlivněny vzájemnou gravitací – slapovými silami; ty vedou systém do rovnovážného stavu, kdy je dosažena cirkularizace dráhy, synchronizace rotace složek (perioda rotace každé složky je rovna oběžné periodě) a koplanarizace (roviny rovníku obou složek splývají s rovinou dráhy). Udávají se doby, potřebné k dosažení $1/e$ -tiny (zde $e = 2.71828\dots$) původního stavu. Řekněme už nyní, že doba cirkularizace je zpravidla o dva či více řádů delší než obě zbývající doby. I když slapové působení počítal už Darwin (1879), až dosud nepanuje shoda, pokud jde o detaily procesu. Dvě konkurující si teorie vedou k řádovým rozdílům v odhadech zmíněných dob.

Není-li rotační perioda shodná s oběžnou, pak je slapové vzdutí odchýleno od spojnice středů složek, a vyvolává torsní složku v přitažlivosti obou hvězd. Tato vazba vede k výměně mezi rotačním a orbitálním momentem. Současně dochází k disipaci energie ve slapech, což snižuje celkovou energii rotace a dráhy. Výsledkem je asymptotické přibližování k rovnovážnému stavu, nebo zrychlený spirálovitý pohyb vedoucí ke kolapsu obou hvězd.

Detailní popis procesu může být komplikovaný vzhledem k možnosti, že složky budou oscilovat. Zavádí se tzv. model slabého tření, kdy se oscilace neuvažují, a předpokládá se, že odchylka mezi vzdutím a spojnicí hvězd je úměrná rozdílu rotační a oběžné úhlové frekvence $\Omega - n$. To dobře vyhovuje pro viskózní disipaci (k té ale ve hvězdné hmotě nedochází) a přibližně i pro turbulentní disipaci v konvektivních vrstvách méně hmotných hvězd.

V dalším odvozování se jedna z hvězd pokládá za hmotný bod, tj. slapy jsou jen na jedné složce – což je v pořádku, je-li jedna složka kompaktním objektem; není-li, pak se složky prohodí a výsledný efekt je aditivní. V úvaze je důležitý poměr orbitálního a rotačního momentu

$$\alpha = h_0/I\Omega_0 = \frac{q}{1+q} \frac{1}{r_g^2} \left(\frac{a_0}{R}\right)^2; \quad (158)$$

q je poměr hmotností M_2/M_1 , a je hlavní poloosa a hodnoty s indexem 0 platí pro rovnovážný stav. Celkový úhlový moment se při slapovém vývoji zachovává, a je

$$L = I\Omega + h = MR^2r_g^2\Omega + G^{1/2}Mm(M+m)^{-1/2}a^{1/2}(1-e)^{1/2}. \quad (159)$$

Zde je r_g tzv. gyrační poloměr, definovaný vztahem $I = M(r_g R)^2$, kde I je moment setrvačnosti primární složky. (Podobně jako k_2 , závisí r_g na rozdělení hustoty ve hvězdě a bývá uveden v tabulkách hvězdných modelů.)

Ukazuje se, že chování dvojhvězdy závisí na velikosti α . Rovnovážný stav může být dosažen jen při $\alpha > 3$, a nastávají tři případy:

1. $0 < \alpha - 3 \ll 1$: systém je na hranici stability, výstřednost a sklon rovníku jdou rychle k nule, synchronizace a změna hlavní poloosy probíhají dlouho;
2. $4 \leq \alpha \leq 10$: i zde je rotační úhlový moment ještě srovnatelný s dráhovým momentem (sekundární složka je buď málo hmotná, nebo obíhá těsně u povrchu primáru), a všechny parametry se mění zhruba stejně rychle;
3. $\alpha \gg 7$: dráhový moment je podstatně větší než rotační; sklon mizí a rotace se synchronizuje stejně rychle, výstřednost se ale zmenšuje jen pomalu (rotace se synchronizuje s úhlovou rychlostí v periastru).

Jak už bylo naznačeno, u hvězd s konvektivní (nutně turbulentní) vrstvou – což jsou hvězdy typu F a pozdější – je o proces vedoucí k efektivnímu působení slapů postaráno. Jak je to ale u hvězd ranějších? Tam Zahn (1977) zavádí radiační tlumení. Ukazuje se ale, že to je proces málo efektivní, zejména vadí jeho malá účinnost u vzdálenějších složek, neboť působí úměrně r^8 . Tassoul & Tassoul(ová) (1992) se domnívají, že ve složkách dvojhvězd existují meridionální proudy, jejichž turbulence znamená, že působení je úměrné $r^{6.125}$ a lze tak vysvětlit cirkularizaci i méně těsných dvojhvězd než při radiačním tlumení. Jejich vzorec pro cirkularizační dobu platí obecně, hodnota N je dána vlastnostmi struktury hvězdy: $N = 10$ u méně hmotných hvězd, $N = 4$ u raných hvězd.

Je jistě zajímavé zjistit, jak rychle synchronizace a cirkularizace mohou probíhat. Viskosita plynu je nepatrná a samotná by vedla k dobám řádu 10^{12-13} let. Tassoul (1988) uvádí vzorce pro synchronizaci a cirkularizaci:

$$t_{\text{syn}}(\text{roků}) = \frac{14,4 \times 10^{-N/4}}{q(1+q)^{3/8}} \left(\frac{L_\odot}{L}\right)^{1/4} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{1/8} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{9/8} \left(\frac{a}{R}\right)^{33/8}, \quad (160)$$

nebo s využitím 3. Keplerova zákona (2),

$$t_{\text{syn}}(\text{roků}) = 5,35 \times 10^{3-N/4} \frac{1+q}{q} \left(\frac{L_{\odot}}{L}\right)^{1/4} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{5/4} \left(\frac{R_{\odot}}{R}\right)^3 (P_0[\text{dní}])^{11/4}. \quad (161)$$

Odpovídající čas pro cirkularizaci je

$$t_{\text{cir}}(\text{roků}) = \frac{14,4 \times 10^{-N/4}}{r_g^2(1+q)^{11/8}} \left(\frac{L_{\odot}}{L}\right)^{1/4} \left(\frac{M_{\odot}}{M}\right)^{1/8} \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{9/8} \left(\frac{a}{R}\right)^{49/8} \quad (162)$$

nebo s využitím 3. Keplerova zákona (2),

$$t_{\text{cir}}(\text{roků}) = 9,4 \times 10^{4-N/4} \frac{(1+q)^{2/3}}{r_g^2} \left(\frac{L_{\odot}}{L}\right)^{1/4} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{23/12} \left(\frac{R_{\odot}}{R}\right)^5 (P_0[\text{dní}])^{49/12}. \quad (163)$$

Faktor 10^N je poměr makroskopické a mikroskopické viskosity. Při cirkularizaci dochází též ke zmenšení hlavní poloosy.

Je třeba říci, že u hmotnějších hvězd musí cirkularizace probíhat hlavně během života hvězdy na hlavní posloupnosti; po jejím opuštění rychle klesá r_g , a i čas, který má hvězda k dispozici jako obr či veleobr, je krátký. Zřejmě ovšem dochází k cirkularizaci, a to rychlé, též během přenosu hmoty.

Existence nekruhových drah tedy svědčí o rychlosti (resp. pomalosti) slapového vlivu. Pozorují se i zvláštní případy. Např. dvě složky sobě velmi podobné mají rozdílné rotační rychlosti nebo mají obě složky rotační periody, které jsou celočíselným zlomkem periody oběžné (např. α Vir nebo V436 Per).

5 Dvojhvězdy s komplikacemi

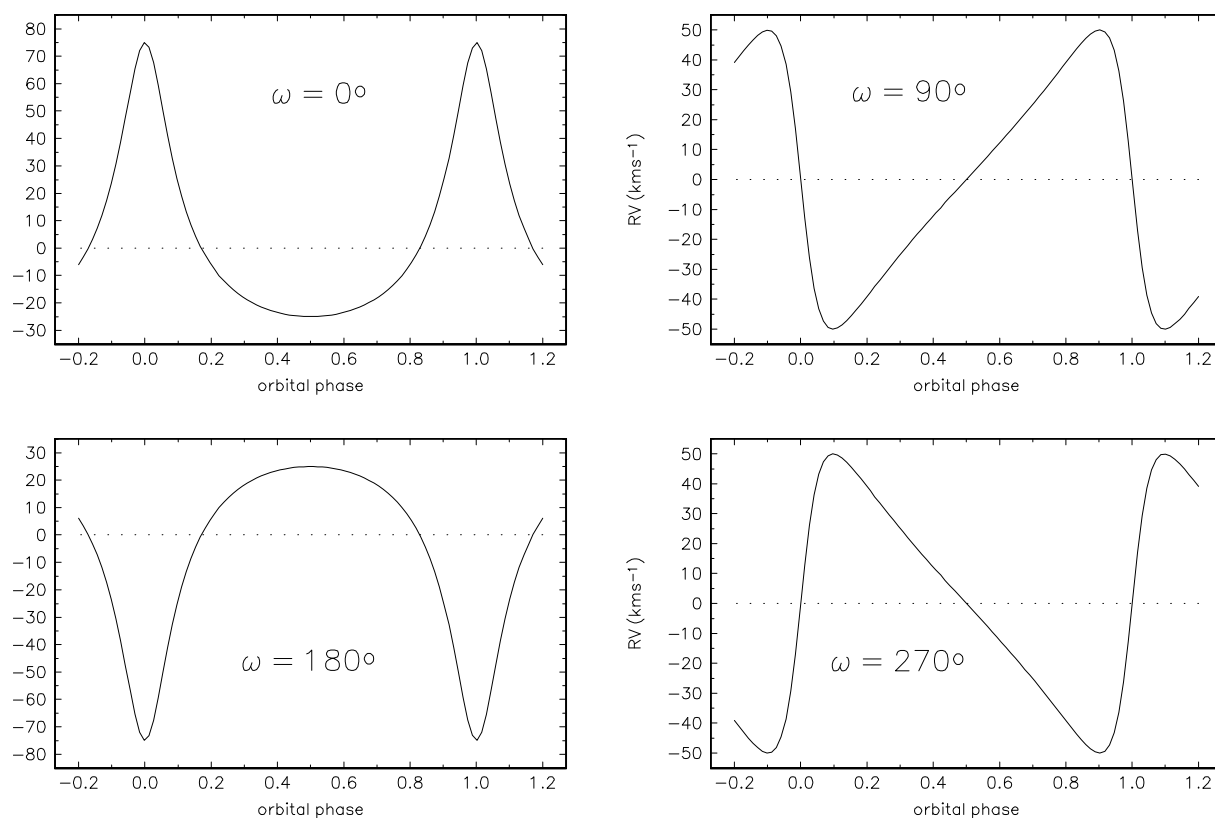
Spolehlivé určení základních fyzikálních vlastností dvojhvězdy a jejích složek se stává problémem ve chvíli, kdy je v soustavě přítomna cirkumstelární hmota. Jak křivky radiálních rychlostí, tak světelné křivky jsou v takových situacích několika vzájemně souvisejícími vlivy deformovány a neodpovídají čistému dráhovému pohybu. Pokud se nám nezdaří podobná zkusení správně identifikovat a vhodně korigovat, mohou formální řešení světelné křivky a křivky radiálních rychlostí vést k určení zcela nesprávných charakteristik soustavy.

Pokusme se nyní probrat některé typické případy takových vlivů.

5.1 Falešná výstřednost dráhy z křivek radiálních rychlostí

Některé typické struktury v mezihvězdné hmotě ve dvojhvězdě mohou způsobovat charakteristická zkreslení křivky radiální rychlosti, pravidelně se opakující s fází oběžné periody.

Abychom podobným jevům dobře porozuměli, je užitečné si nejprve uvědomit, jak vypadají křivky radiálních rychlostí pro čtyři typické orientace výstředné dráhy vůči pozorovateli. Na obrázku 29 jsou znázorněny křivky radiálních rychlostí pro čtyři různé hodnoty délky periastra ω . Jak vidíme, křivky pro ω 0° a 180° mají úzké extrémy kolem fáze maxima resp. minima radiální rychlosti. Naproti tomu křivky radiálních rychlostí pro ω rovné 90° resp. 270° mají jednu strmou a jednu povlnnou větev při přechodu od maxima do minima a zpět a vyznačují se tím, že části křivky nad a pod γ rychlostí jsou



Obrázek 29: Křivky radiálních rychlostí dvojhvězdy ve výstředné dráze ($e=0.5$, $\gamma=0$) odpovídající čtyřem konkrétním hodnotám délky periastra ω .

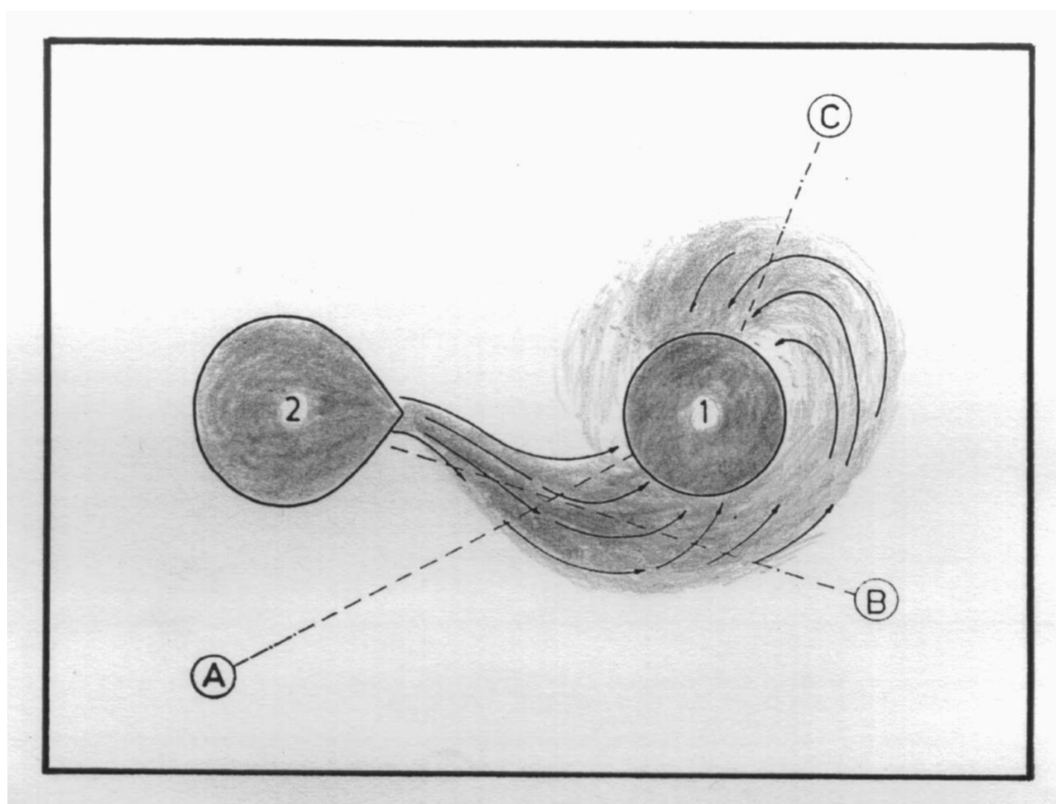
zrcadlově symetrické. Všechny tyto skutečnosti je užitečné si uvědomit, máme-li porozumět různým možným typům zkreslení křivek radiálních rychlostí, které se vyskytují.

Zkusme pro názornost předpokládat, že uvažovaná dvojhvězda má kruhovou dráhu. Tak tomu také v případě interagujících dvojhvězd v mnoha případech bývá.

5.1.1 Barrův jev

Partně nejlépe a nejdéle známý případ zkreslení křivky radiálních rychlostí je Barrův (1908) jev. Barr upozornil jako první, že se pozoruje mnohem více dvojhvězd s hodnotami ω mezi 0° a 120° než dvojhvězd s hodnotami ω mimo tento interval. Barr vyjádřil názor, že je krajně nepravděpodobné, že by existovala skutečná privilegovaná orientace výstředných drah v prostoru a navrhnul zkusmo dvě možná vysvětlení. Buď jsou spektrální čáry hvězd periodicky vychylovány ze svých normálních poloh vlivem *mimořádných výchylek v tlaku či teplotě ve hvězdných fotosférách či okolních atmosférách* nebo jsou disky pozorovaných hvězd nerovnoměrně jasné. Jeho práce byla publikována s pochybovačnými komentáři tehdejších významných astronomů W.F. Kinga a J.S. Plasketta, nicméně další výzkum ukázal, že Barr měl v zásadě pravdu i přesto, že některé objekty z jeho statistického souboru

byly později ze spektroskopických dvojhvězd překlasifikovány na pulsující hvězdy. Dnes je obecně přijímáno vysvětlení, které jako první vyslovil Struve (1944): protažení křivky radiálních rychlostí v blízkosti maxima je způsobeno dodatečnou absorpcí v plynovém proudu mezi složkami, který se v těch oběžných fázích promítá na disk hmotu přijímající hvězdy. Vzniklé zkreslení skutečné křivky radiálních rychlostí dvojhvězdy v kruhové dráze pak připomíná křivku výstředné dráhy pro hodnoty ω v blízkosti 0° . Jak je schematicky ukázáno v obrázku 30, průmět plynového proudu na disk hvězdy nastává někde mezi elongací, při které se hmotu přijímající složka od nás vzdaluje a mezi konjunkcí (směr A v obrázku). Protože plyn se v té chvíli pohybuje směrem od pozorovatele, jeho radiální rychlost zvyšuje pozorovanou radiální rychlost a tím právě vzniká protažení křivky v blízkosti maximální rychlosti. Charakter celého jevu přirozeně závisí i na sklonu dráhy. Pro dvojhvězdy, které nejsou zákrytové, se dá největší efekt očekávat v okolí elongace, kde je plynový proud hvězdě nejbližší a aspoň zčásti se na její disk může promítat.



Obrázek 30: Schematický obrázek dvojhvězdy s plynovým proudem mezi složkami a akrečním diskem.

Struveho vysvětlení je bezesporu správné u zákrytových dvojhvězd ve stadiu výměny hmoty jako je např. U Cep. Méně jasná je situace u nezákrytových soustav, kde zkreslení křivky radiálních rychlostí často představuje pouze několik málo km s^{-1} . Musíme se ptát proč, jestliže typické rychlosti plynového proudu se pohybují v řádu stovek km s^{-1} .

Kříž a Harmanec (1975) upozornili na přítomnost sekundárního maxima na křivkách radiálních

rychlostí řady dvojhvězd vykazujících Barrův jev a navrhli i možné vysvětlení: Jedná se o průmět stejného plynového proudu na disk hmoty přijímající složky dvojhvězdy, ale až poté, kdy plyn oblétně hvězdu a vrací se zpět směrem k původnímu proudu mezi složkami, přičemž jeho rychlost značně poklesla. Na obr. 30 tomu odpovídá pohled podél směru C.

5.1.2 Alternativní Barrův jev

Kříž a Harmanec (1975) také přišli s názorem, že u dvojhvězd ve stadiu výměny hmoty, u kterých je *hmotu ztrácející* složka jasnějším objektem v soustavě, musí docházet k průmětu plynového proudu mezi složkami na tuto hmotu ztrácející hvězdu podél směru B v obrázku 30. Podle Kříže a Harmance (1975) to musí vést na křivky radiálních rychlostí s falešnou výstředností a hodnotami ω mezi 180° a 220° . Harmanec (2003) podobnou situaci numericky modeloval a došel k názoru, že uvažovaný jev ve skutečnosti vede na zdánlivě výstřednou dráhu s délkou periastra kolem 140° .

5.1.3 Vliv slapové deformace tvaru hvězd

Už Sterne (1941) upozornil na to, že rozdíl mezi optickým těžištěm a skutečným těžištěm slapově deformované složky dvojhvězdy může vést na křivku radiálních rychlostí se zdánlivou výstředností a hodnotami ω v blízkosti buď 90° nebo 270° .

Harmanec (2001) zobecnil tento postřeh a dokazoval, že *jakékoliv zkreslení* křivky radiálních rychlostí, které působí *symetricky vzhledem ke spojnici obou hvězd*, musí vést na křivky se zdánlivou výstředností a ω v blízkosti buď 90° nebo 270° . Je to dáno charakterem křivek radiálních rychlostí pro tyto dvě konkrétní hodnoty délky periastra – viz obr. 29. Dobrým příkladem takového vlivu je fokusovaný hvězdný vítr u horkých dvojhvězd, které téměř vyplňují Rocheovu mez.

5.2 Nesprávně určená amplituda křivky radiálních rychlostí

Jiným možným důsledkem přítomnosti okolohvězdné hmoty ve dvojhvězdě může být nesprávně určená amplituda křivky radiálních rychlostí složky, která je takovou hmotou obklopena.

Může to být způsobeno několika různými vlivy.

5.2.1 Vliv průmětu plynového proudu

Vliv, který je nasnadě, souvisí přímo s Barrovým jevem a s ním souvisejícími efekty, které jsme probírali výše. Jevy zdánlivé výstřednosti dráhy přirozeně zvětšují skutečnou amplitudu křivek radiální rychlosti. Pokud se nám podobný jev podaří správně rozpoznat, je možno se mu vyhnout tím, že na spektrech o dobrém spektrálním rozlišení budeme radiální rychlost měřit na vnějších křídlech spektrálních čar. Jednoduchým řešením také je vynechat při řešení křivky radiálních rychlostí data z intervalu fází, kde k projekci plynového proudu na disk hvězdy dochází. Tento postup úspěšně aplikovali např. Hill a kol. (1997).

V případech, kdy je křivka radiálních rychlostí příliš deformována okolohvězdnou hmotou a její spolehlivé určení je prakticky nemožné, lze *pro polodotykové zákrytové soustavy* využít jiný postup. Můžeme totiž dosti spolehlivě předpokládat, že složka zaplňující Rocheovu mez má vázanou rotaci,

tj. rotační periodu rovnou oběžné periodě. Je-li tomu tak, je možné vyjít z rotační periody určené z rotačního rozšíření spektrálních čar složky zaplňující Rocheovu mez a z odhadu sklonu oběžné dráhy z řešení světelné křivky a určit poloměr této hvězdy (říkejme ji složka 2) v absolutních jednotkách podle vztahu

$$R_2^{\text{Roche}} = R_2 = \frac{0,019766878 \cdot P \cdot V_2 \sin i}{\sin i} \quad (164)$$

který přímo plyne ze vztahu (156). Poloměr je v jednotkách poloměru Slunce, perioda ve dnech a rotační rychlost v km s^{-1} . Křivka radiálních rychlostí hvězdy zaplňující Rocheovu mez bývá zpravidla dobře definována a bez komplikací. Pomocí ní lze tedy spočítat funkci hmoty – viz vztah (65).

Nyní postupujeme iteračně. Zvolíme zkusmo nějakou rozumnou hodnotu hmotnosti složky zaplňující Rocheovu mez. Z funkce hmoty (62) k ní pak lze pro dané $M_2 \sin^3 i$ iteračně určit obrácený hmotový poměr $q' = M_1/M_2$ a z něj přirozeně i hmotnost druhé složky dvojhvězdy $M_1 = q' \cdot M_2$. Z třetího Keplerova zákona (2) poté dostaneme vzdálenost složek a . Relativní poloměr Rocheovy meze v souřadnici kolmé na spojnici složek (což odpovídá geometrii při zákrytech) je funkcí pouze hmotového poměru a z definičních rovnic Rocheova modelu jej můžeme snadno získat např. iteračním postupem, který popsal Harmanec (1990):

Pokud vzdálenosti udáváme v jednotkách vzdáleností středů složek dvojhvězdy a volíme souřadnou soustavu rotující s dvojhvězdou tak, že počátek souřadnic je v centru složky 1 a osa X míří od složky 1 ke složce 2, lze souřadnice Lagrangeova bodu L_1 zapsat ve tvaru $(x_1, 0, 0)$, kde hodnota x_1 je jedním z řešení rovnice

$$x^{-2} - x + q(1 - x - (1 - x)^{-2}) = 0. \quad (165)$$

V této rovnici $q = M_2/M_1$ označuje poměr hmotností. Uvedenou rovnici lze řešit iteračně, např. Newtonovou metodou, s tím, že jako počáteční hodnotu zvolíme $x_1 = 0,5$, což zaručí, že pro libovolný hmotový poměr bude postup konvergovat k řešení pro bod L_1 .

Jakmile známe x_1 , můžeme vypočítat souřadnice (x_{12}, y_{12}) bodu, který definuje největší rozměr Rocheovy meze v y -souřadnici v rovině XY , z podmínky nulové derivace průmětu kritické plochy Rocheova modelu podle x :

$$\alpha d_1^{-1} + \beta(d_2^{-1} - x) + d_1^2 = \gamma, \quad (166)$$

$$x(2 - \alpha d_1^{-3} - \beta d_2^{-3}) = \beta(1 - d_2^{-3}),$$

kde

$$d_1 = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad d_2 = ((1 - x)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (167)$$

$$\alpha = 2(1 + m)^{-1}, \quad \beta = \alpha \cdot m, \quad (168)$$

$$\gamma = \alpha \cdot x_1^{-1} + \beta((1 - x_1)^{-1} - x_1) + x_1^2. \quad (169)$$

Pro hvězdy zaplňující Rocheovu mez odpovídá relativnímu fotometrickému poloměru r_2 určenému z řešení světelné křivky právě hodnota y_{12} . Pro úplnost dodejme, že řešením rovnic (166) pro hmotový poměr q můžeme zjistit i y -ový rozměr Rocheovy meze kolem složky 1 výpočtem souřadnic bodu (x_{11}, y_{11}) .

Rovnice (166) lze snadno řešit pro libovolný hmotový poměr iteračně. Vyjdeme z počátečních hodnot $x = 1,01$ a $d_1 = 1,05$ a postupně počítáme

$$d_2 = \beta(\gamma + \beta x - \alpha d_1^{-1} - d_1^2)^{-1}, \quad (170)$$

$$y = (|d_2^2 - (1 - x)^2|)^{\frac{1}{2}}, \quad (171)$$

$$d_1 = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ a} \quad (172)$$

$$x = \beta(1 - d_2^{-3})(2 - \alpha d_1^{-3} - \beta d_2^{-3})^{-1}. \quad (173)$$

Pokud se následující iteračně určená hodnota $(|y_n - y_{n-1}|/y_n)$ liší od předchozí o více než požadovaný počet platných cifer, opakujeme další iteraci s novými hodnotami x a d_1 .

Dodejme ještě, že pokud potřebujeme jen přibližný odhad, můžeme místo uvedeného výpočtu zjistit potřebnou hodnotu y_{12} interpolací v tabulkách Rocheova modelu, které publikovali Plavec a Kratochvíl (1964).

Nyní již můžeme porovnat absolutní poloměr Rocheovy meze

$$R_2^{\text{Roche}} = a \cdot y_{12}, \quad (174)$$

který jsme dostali pro zkusmo zvolenou hodnotu hmotnosti M_2 s poloměrem určeným z pozorování pomocí vztahu (164) a pokud se neshodují, můžeme celý postup opakovat pro jinou hodnotu M_2 , až se metodou pokusů a omylů ke shodě propracujeme.

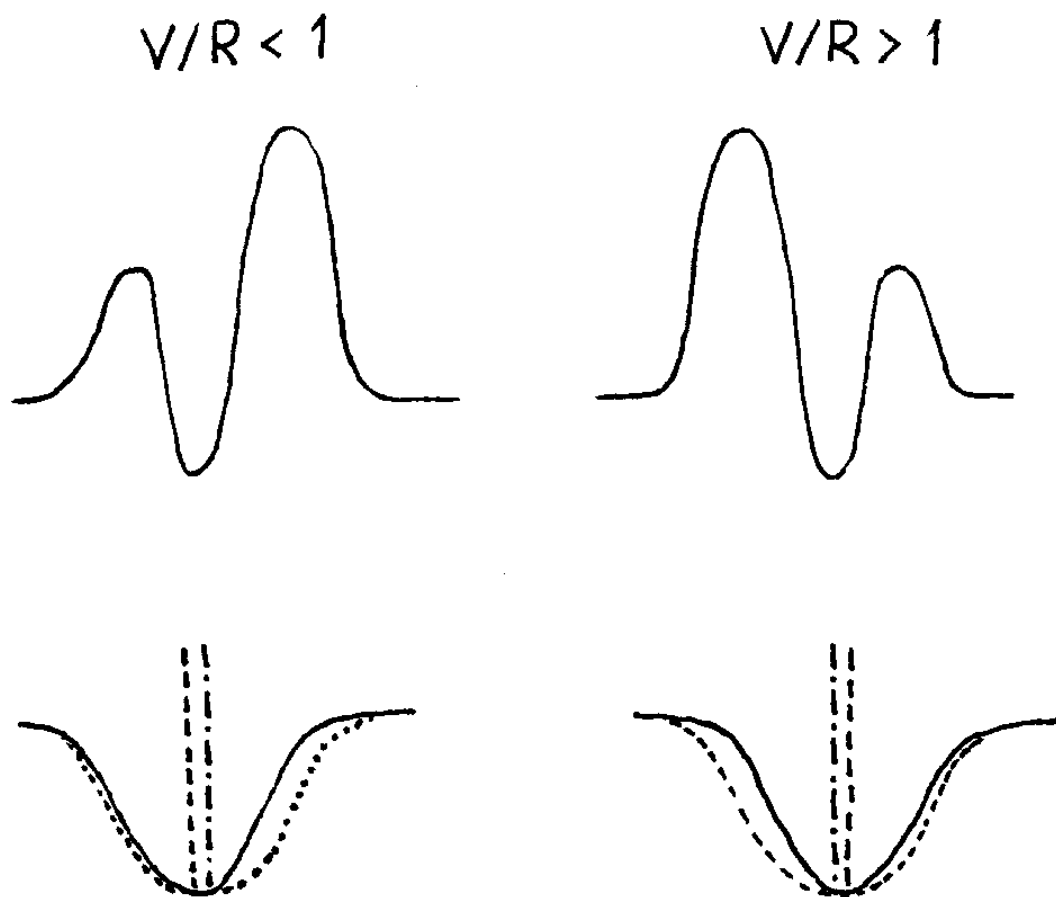
Tento postup použili např. Andersen a kol. (1988, 1989) k určení fyzikálních vlastností dvojhvězd SX Cas a RX Cas a Harmanec (1990) k odhadu správného hmotového poměru dvojhvězdy β Lyr.

5.2.2 Chybná amplituda křivky radiálních rychlostí v důsledku fázově vázaných V/R změn dvojitých emisních čar z disku kolem jedné ze složek

Z pozorování více dvojhvězd s emisními čarami je známo, že dvojitě emise vznikající v disku kolem jedné ze složek dvojhvězdy vykazují fázově vázané změny V/R (violet to red) poměru intenzit obou vrcholů, a to jak pro čáry vodíku Balmerovy serie, tak i pro čáry jiných iontů. Tyto změny jsou prakticky ve fázi s křivkou radiálních rychlostí, tj. poměr V/R je největší v okamžiku maxima radiální rychlosti a opačně, jak bylo zjištěno např. v pracích Peters(ové) (1972), Harmanec a kol. (1976), Doazan(ové) a kol. (1982) nebo Harmanec a kol. (2002).

Jak nedávno ukázali Harmanec a kol. (2002), přítomnost slabé a prakticky neznatelné emise ve zdánlivě fotosferických absorpčních čarách He I může v kombinaci s právě popsányými fázově vázanými V/R změnami vést k *nadhodnocení* skutečné amplitudy křivky radiálních rychlostí určené z těchto čar. Celý jev je schematicky znázorněn na obrázku 31: V maximu radiální rychlosti je $V/R > 1$, takže modré křídlo zdánlivě čistě absorpční čáry je zčásti zaplněno emisí a střed čáry je tím posunut směrem k červené části spektra. Měřením této čáry proto dostaneme radiální rychlost, která bude větší než skutečná rychlost dráhového pohybu. Právě opačná situace nastane v minimu radiální rychlosti, kdy je $V/R < 1$.

Možné řešení tohoto problému bylo navrženo a zkusmo použito Božicem a kol. (1995) při studiu dvojhvězdy φ Per = HD 10516, a Harmancem a kol. (2000, 2002), kteří studovali γ Cas = HD 5394 a V832 Cyg = HD 200120.



Obrázek 31: Schematická ilustrace vlivu fázově vázaných V/R změn dvojitých emisních čar na měřenou radiální rychlost zdánlivě absorpčních čar neutrálního helia He I: Horní panely obrázku ukazují, jak vypadá emisní profil Balmerových čar vodíku ve dvou elongacích dvojhvězdy, zatímco spodní panely znázorňují téměř neznatelné ovlivnění zdánlivě čistě absorpčních čar He I. Vzhledem k tomu, že fázově vázané V/R změny nastávají ve fázi s křivkou radiálních rychlostí, je dlouhovlnné křídlo He I absorpce více zaplněno emisí ve chvíli, kdy $V/R < 1$ a naopak. Výsledný pozorovaný profil He I čáry (plná čára), který se stále jeví jako absorpční čára, je posunut jako celek směrem do krátkovlnné části spektra (tj. k zápornější radiální rychlosti vůči laboratorní poloze) ve chvíli, kdy je $V/R < 1$ a křivka radiálních rychlostí dosahuje minima, a do dlouhovlnné oblasti spektra, když je $V/R > 1$. To ve svém důsledku zvětšuje měřenou amplitudu křivky radiálních rychlostí.

Úvaha je následující: Je velmi pravděpodobné, že rotační rychlost jakéhokoliv reálného plynového disku obklopujícího hvězdu klesá s rostoucí vzdáleností od hvězdy. Vzhledem k tomu, že ekvipotenci-

Tabulka 2: Srovnání polovičních amplitud křivek radiálních rychlostí několika dvojhvězd s emisními čarami z měření na emisních křídlech vodíkových čar Balmerovy serie a z měření na křídlech absorpčních čar.

Dvojhvězda	HD	$P_{\text{orb.}}$ (d)	$K_{\text{emis.}}$ (km s ⁻¹)	$K_{\text{abs.}}$ (km s ⁻¹)	Zdroj
γ Cas	5394	203 ^d 6	4.7	7.0	Harmanec a kol. (2000)
φ Per	10516	126 ^d 7	10.4	21.0	Božić a kol. (1995)
κ Dra	109387	61 ^d 6	2.3	6.8	Juza a kol. (1991)
V839 Her	142926	46 ^d 2	4.8	8.0	Koubský a kol. (1997)
V832 Cyg	200120	28 ^d 2	13.0	27.2	Rivinius and Štefl (2000), Harmanec a kol. (2002)
V1931 Cyg	200310	146 ^d 36	9.0	12.0	Doubek (2006)

ální plochy Rocheova modelu jsou více sférické v blízkosti hvězdy, lze očekávat, že vnitřní části disku budou s dostatečnou přesností osově symetrické a budou popisovat správně dráhový pohyb složky, kterou disk obklopuje. Vzhledem k předpokládanému rozložení rychlostí v disku se dráhový pohyb vnitřních částí disku projeví na vnějších křídlech emisní čáry, zatímco možné asymetrie vnějších částí disku se projeví v blízkosti středu emisních čar, např. již zmiňovanými změnami poměru V/R .

Z toho tedy vyplývá, že měření radiální rychlosti na strmých vnějších křídlech silné emisní čáry jako je $H\alpha$ by mělo dát křivku radiální rychlosti, která dobře popisuje dráhový pohyb emisní složky dvojhvězdy.

Božić a kol. (1995) and Harmanec a kol. (2000, 2002) skutečně zjistili, že měření radiálních rychlostí na strmých vnějších křídlech $H\alpha$ emise dává dobře definovanou křivku s malým rozptylem a s amplitudou menší, než odpovídající křivka založená na zdánlivě absorpčních čarách.

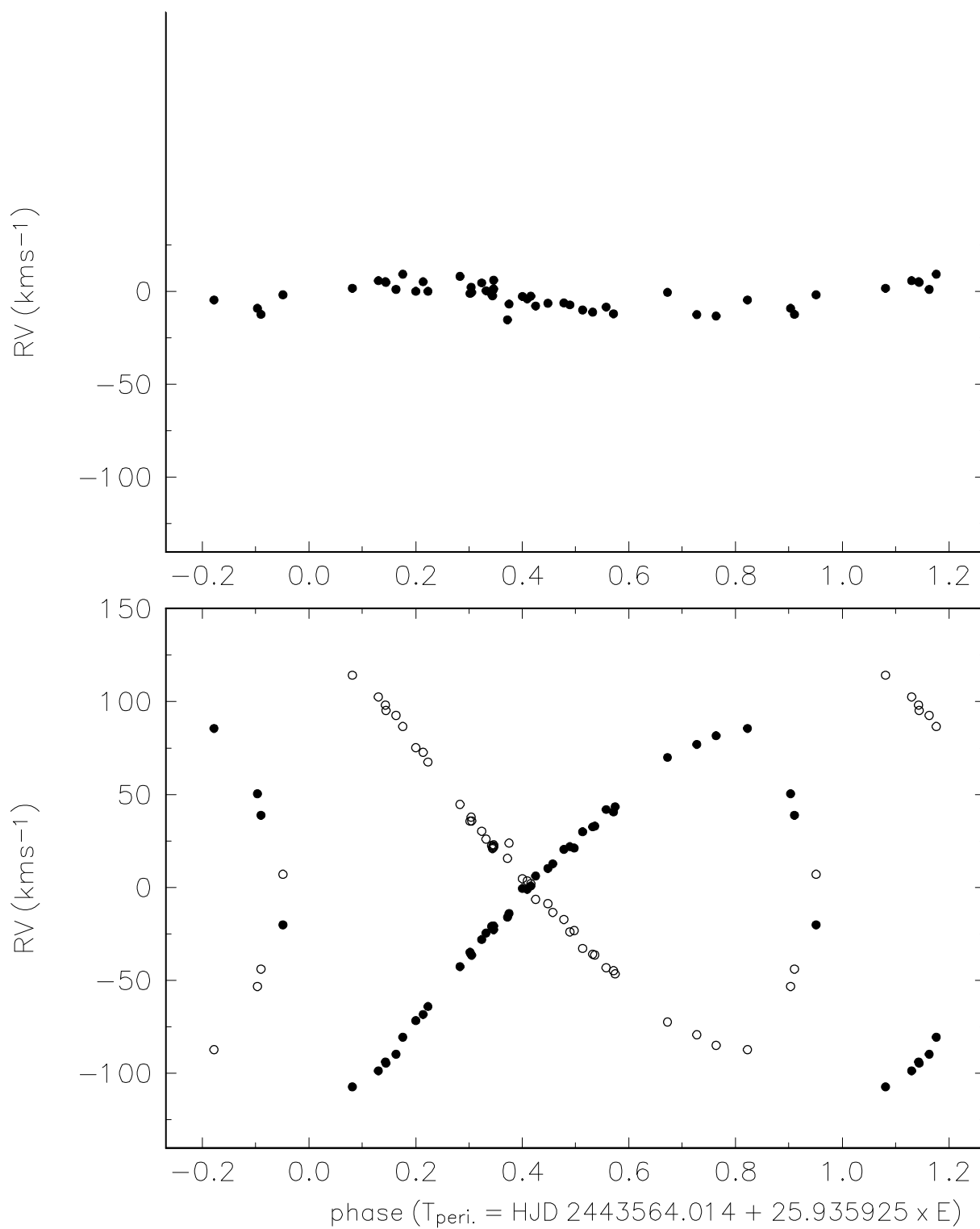
Harmanec (2000) shromáždil údaje o všech emisních dvojhvězdách, pro něž se podobná měření podařilo provést. Přehled, převzatý z jeho práce, je v tabulce 2.

Ihned je vidět, že amplitudy křivek radiálních rychlostí založené na měření křídel emisních čar jsou *vždy menší*, než amplitudy odpovídajících křivek pro čáry absorpční. To tedy patrně potvrzuje, že výše zmíněný jev u emisních dvojhvězd skutečně nastává, ať už je příčina fázově vázaných V/R změn jakákoliv.

5.2.3 Chybné amplitudy křivek radiálních rychlostí způsobené nízkou rozlišovací schopností nebo blendováním čar

Zhoršená rozlišovací schopnost pro slabší objekty a silné blendování čar složek dvojhvězd s rychle rotujícími složkami a podobnými spektrálními typy jsou jevy, se kterými se lze setkat poměrně často, a to i v případech, kdy v soustavě není přítomna cirkumstelární hmota.

Na to, že ke správnému určení hmotností složek je třeba použít spektra s dostatečným spektrálním rozlišením, opakovaně upozorňoval americký astronom Daniel Popper, který většinu své astronomické kariéry zasvětil právě získávání spolehlivých fyzikálních vlastností složek dvojhvězd – viz např. Popper (1967, 1971, 1980).



Obrázek 32: Srovnání křivky radiálních rychlostí V436 Per získané klasickým měřením polohy středu čáry (horní obrázek) a rozkladem spektra za pomoci programu KOREL (spodní obrázek). Radiální rychlosti primární složky jsou znázorněny plnými a sekundární prázdnými symboly.

Již dlouho je také známo, že radiální rychlosti absorpčních čar Balmerovy serie vodíku se pro svou velkou šířku k přesnému určování amplitud křivek radiálních rychlostí příliš nehodí – viz třeba Andersen (1991). Pokud je to trochu možné, je lépe určit křivku radiálních rychlostí z čar helia či kovů.

Existuje řada horkých dvojhvězd se složkami podobných spektrálních typů a s podobným, ač ne nutně stejným, rotačním rozšířením čar. U mnoha z nich může docházet k silnému blendování čar ve všech orbitálních fázích. V extrémních případech to může dokonce zabránit tomu, abychom zjistili oběžný pohyb a identifikovali příslušný objekt jako spektroskopickou dvojhvězdu. To je např. případ dvojhvězdy V436 Per = 1 Per, která byla po nějaký čas považována za fyzikální proměnnou a teprve díky fotometrickým zákrytům byla identifikována jako zákrytová dvojhvězda s oběžnou periodou 25^d9 a výstřednou dráhou. Obrázek 32 ukazuje srovnání křivky radiálních rychlostí V436 Per z klasických měření na středy čar s křivkou získanou pomocí spektrálního rozkladu programem KOREL a pomocí kroskorelační metody (viz Hill 1993 a Hill a Holmgren 1995) a je převzat z práce Harmanec a kol. (1997). Je ihned zřejmé, že zatímco klasické měření dává poloviční amplitudu křivky radiálních rychlostí pouze asi 10 km s⁻¹ (a tím pádem i zcela nerealistický odhad hmotností pro zákrytovou soustavu), jsou skutečné křivky obou složek se silně blendovanými čarami blízké hodnotě 100 km s⁻¹, o celý jeden řád větší. Takové amplitudy vedou na zcela normální hmotnosti obou těles. KOREL navíc dává lépe definované křivky s menším rozptylem, než kroskorelační metoda.

5.2.4 Chybné amplitudy křivek radiálních rychlostí z absorpčních čar pocházejících z obálky kolem celé dvojhvězdy

V případech, kdy existuje plynová obálka kolem celé dvojhvězdy, může se stát, že pozorujeme absorpční čáry vznikající v materiálu obálky při projekci na jasnější složku dvojhvězdy. Budeme-li měřit radiální rychlost takových čar, dostaneme křivku radiálních rychlostí ve fázi s oběžnou periodou soustavy, ale se *značně redukovanou amplitudou*. Tuto situaci pro jednoduchý model popsali Thackeray (1971) a Kíž a Harmanec (1975):

Uvažujme dva hmotné body s hmotnostmi M_1 a M_2 obíhající po kruhových drahách kolem společného těžiště. Dále předpokládejme, že absorbující vrstvu obálky kolem celé soustavy znázorníme jako válcovou slupku plynu v efektivní vzdálenosti d od těžiště, která kolem těžiště obíhá s kritickou rotační rychlostí

$$v_e = \left(\frac{G(M_1 + M_2)}{d} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (175)$$

To je ovšem zjednodušení, které vychází z představy, že ve větších vzdálenostech můžeme na gravitační působení dvojhvězdy nahlížet jako na gravitační působení hmotného bodu o hmotnosti $M_1 + M_2$.

Pro radiální rychlost absorpční čáry vznikající při průmětu části takového plynového prstence na disk jasnější složky 1 dvojhvězdy zřejmě platí

$$RV_e = \left(\frac{G(M_1 + M_2)}{d^3} \right)^{\frac{1}{2}} a_1 \sin \vartheta \sin i, \quad (176)$$

kde i , a_1 a ϑ označují sklon oběžné dráhy, vzdálenost složky 1 od těžiště a fázový úhel složky 1 během oběhu měřený od její horní konjunkce (tj. okamžiku, kdy je hvězda nejdále od pozorovatele).

Radiální rychlost složky 1 samotné bude ve stejné chvíli rovna

$$RV_1 = \frac{2\pi a_1}{P} \sin \vartheta \sin i = \left(\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}} a_1 \sin \vartheta \sin i, \quad (177)$$

kde a označuje vzdálenost středů obou hvězd. Je tedy zřejmé, že poměr radiální rychlosti absorpčních čar z uvažovaného plynového prstence a orbitální radiální rychlosti složky 1

$$\frac{RV_e}{RV_1} = \left(\frac{a^3}{d^3} \right) \quad (178)$$

zůstává po celou dobu oběhu stejný, přičemž amplituda křivky čar z prstence je značně redukována. Je snadné si spočítat, že např. již pro obálku ve vzdálenosti o polovinu větší než vzájemná vzdálenost složek bude

$$\frac{RV_e}{RV_1} = 0.3. \quad (179)$$

5.3 Vliv plynového obalu kolem jedné ze složek na pozorované změny jasnosti soustavy

Je zřejmé, že pro zákrytové dvojhvězdy s velkými a opticky tlustými disky kolem jedné ze složek musí být tvar světelné křivky výrazně přítomností disku ovlivněn a standardní řešení světelné křivky nemůže vést k určení správných poloměrů složek.

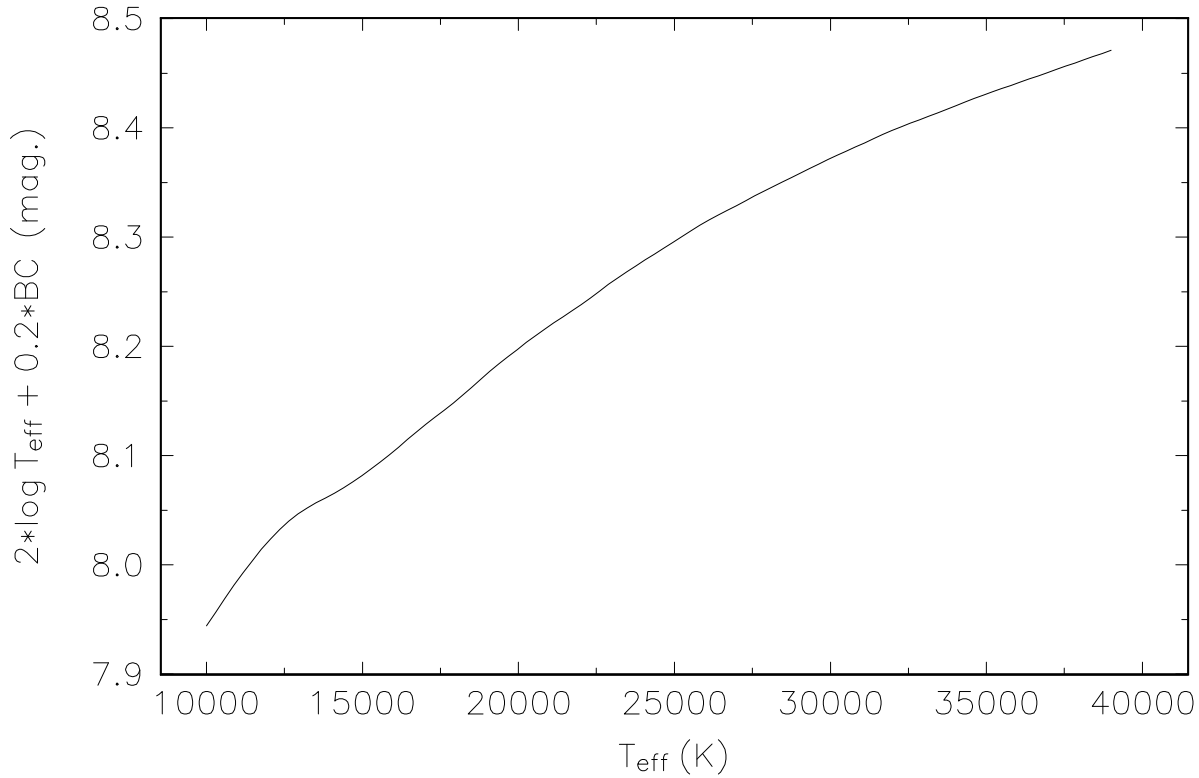
Tento problém byl poprvé rozpoznán a řešen pro známou zákrytovou dvojhvězdu β Lyr.⁶ Ještě začátkem padesátých let dvacátého století byla β Lyr považována za velmi hmotnou dvojhvězdu s primární složkou spektrálního typu B8II a sekundární složkou spektrální třídy A či F, což mj. vyplývalo ze standardního řešení světelné křivky. První skutečně kvantitativní model světelné křivky β Lyr, ve kterém byl uvažován i disk kolem sekundární složky, publikoval Wilson (1974). Ten modeloval disk jako velice rotačně zploštělý elipsoid a jasně ukázal, jak je záření z horké hvězdy ukryté v disku přerozdělováno a vysíláno převážně mimo oběžnou rovinu soustavy. Jinými slovy – Wilson ukázal, že v podobných případech je nutné striktně rozlišovat mezi pozorovaným tokem F_λ v nějaké oblasti spektra a mezi celkovou zářivostí uvažované složky dvojhvězdy $L_\lambda = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$.

Později Zola (1991, 1995) modifikoval standardní Wilsonův-Devinneyův program (Wilson and Devinney 1971) tak, že zahrnoval i záření disku. Ještě propracovanější model světelných křivek β Lyr publikoval Linnell (2000, 2002) a patrně nejkomplexnější modelování lze nalézt v pracích Mourarda a kol. (2018) a Brože a kol. (2021).

5.4 Jak si lze s některými problémy poradit

Přesné paralaxy změřené pro řadu hvězd družicí Hipparcos (Perryman a kol. 1997) a Gaia umožňují pro objekty, pro které lze získat dobrý odhad nezčervenalé hvězdné velikosti ve žluté barvě V_0 ,

⁶Historie 200 let studia této dvojhvězdy je podrobně shrnuta v práci Harmance (2002).



Obrázek 33: Průběh funkce $2 \log T_{\text{eff}} + 0.2BC$ v závislosti na efektivní teplotě T_{eff} pro horké hvězdy. Bolometrické korekce byly získány lineární interpolací v $\log T_{\text{eff}}$ v tabulce empirických bolometrických korekcí publikovaných v práci Code a kol. (1976).

nezávislý odhad poloměrů hvězd. Postup se přirozeně hodí zvláště dobře pro objekty, které jsou členy hvězdokup, neboť paralaxa hvězdokupy může být určena z mnoha nezávislých určení pro jednotlivé členy a je velmi přesná.

Spojením definice efektivní teploty T_{eff}

$$M_{\text{bol}} = (42,3532632(25) - 5 \log(R/R_{\odot}) - 10 \log T_{\text{eff}}) \quad (180)$$

s modulem vzdálenosti a bolometrickými korekcemi BC

$$V_0 - M_V = -5 \log p - 5, \quad (181)$$

dostaneme pracovní vztah

$$\log(R/R_{\odot}) = 7,47379 - 2 \log T_{\text{eff}} - 0,2BC - V + A_V - \log p. \quad (182)$$

Povšimněme si příznivé okolnosti, že pro horké hvězdy se funkce $2 \log T_{\text{eff}} + 0.2BC$ mění jen zvolna s efektivní teplotou. To znamená, že i pro poměrně hrubý odhad T_{eff} lze získat značně spolehlivou hodnotu poloměru hvězdy za předpokladu, že máme k dispozici spolehlivé hodnoty vizuální hvězdné velikosti V , zčervenání A_V a paralaxy p .

Tabulka 3: Srovnání hmotností a poloměrů emisních složek dvou zákrytových dvojhvězd získaných řešením světelných křivek a křivek radiálních rychlostí s poloměry R_1^{Hip} odhadnutými z paralaxy, změřené družicí Hipparcos a hvězdné velikosti V opravené o příspěvek sekundární složky. Rozsah hodnot, odpovídající udané chybě paralaxy, je uveden v závorkách.

Binary	HD	$\log T_{\text{eff}}$	M_1 ($M_{\odot}$)	R_1 ($R_{\odot}$)	R_1^{Hip} ($R_{\odot}$)
U Cep	5679	4.112	4.21	2.69	2.59 (2.33–2.91)
V360 Lac	216200	4.280	6.5	6.4–8.8	6.32(5.06–8.43)

Pro hvězdy, pro něž je znám z interferometrických měření úhlový průměr θ , opravený o okrajové ztemnění, lze poloměr odhadnout při známé paralaxe aniž bychom museli činit nějaký odhad efektivní teploty hvězdy. Platí zřejmě

$$(R/R_{\odot}) = (107, 5161\dots) \frac{\theta}{p}. \quad (183)$$

Harmanec (2000) ukázal pro jasné emisní hvězdy, že porovnání obou metod vede k velmi uspokojivé shodě. Pro použití první metody je ovšem u emisních objektů kritickým bodem volba správné hodnoty vizuální hvězdné velikosti. Obálky emisních objektů mohou totiž zčásti ovlivnit i pozorovanou jasnost a většina emisních hvězd vykazuje dlouhodobou proměnnost. Jak ukázal Harmanec (1983, 1994, 2000), existují v zásadě dva charakteristické typy dlouhodobých změn jasnosti a barvy emisních hvězd v korelaci se změnami intenzity emisních čar: pozitivní nebo inverzní korelace. Chceme-li určit poloměr hvězdy pomocí rovnice (182) správně, je přirozeně třeba použít jasnost a barvu hvězdy z období, kdy ve spektru emise zcela chybí nebo jsou velmi slabé. To ovšem není v konkrétních případech jednoduché a vyžaduje to, abychom o dlouhodobém chování objektu něco věděli. Například u známé jasné dvojhvězdy γ Cas, jejíž primární složka je hvězdou se závojem, bylo spektrum bez emisních čar za celou její stopadesátiletou historii spektrálních pozorování pozorováno jen jednou, po krátké období na konci druhé světové války.

Harmanec (2000) tabeloval hmotnosti a poloměry pro několik případů zákrytových dvojhvězd s emisními složkami, pro něž bylo možné tyto hodnoty dostatečně věrohodně určit ze světelné křivky a z křivky radiálních rychlostí. Pro dvě z těchto dvojhvězd jsou k dispozici i data dovolující odhad poloměrů emisních složek pomocí zde popsané metody s použitím vztahu (182). Srovnání je uvedeno v tabulce 3. Jak je vidět, oba postupy se v rámci uvedených chyb shodují.

6 Různé konkrétní typy dvojhvězd

Pojmosloví v oboru dvojhvězd je poměrně pestrá kombinací popisného třídění a pojmosloví založeného na základním pochopení fyzikální podstaty dané skupiny dvojhvězd. Ten, kdo se chce studiu dvojhvězd vážněji věnovat, by se v tomto ‘živočichopise’ měl orientovat. Proto si zde stručně představíme četné konkrétní kategorie dvojhvězd, jak se vyskytují v současné astronomické literatuře.

6.1 Dvojhvězdy typu Algol

Tento pojem je zvláště zrádný, protože se historicky vyvíjel a může znamenat několik zcela různých věcí. Kromě původní charakteristiky typu světelné křivky začal totiž být postupně užíván i k označení polodotykových soustav ve stádiu přenosu hmoty mezi složkami (často též nyní nazývaných „interagující dvojhvězdy“). Tím se chápání pojmu „Algol“ postupně posouvalo k fyzikálnější interpretaci. „Algolem“ v tomto smyslu je pak i prototyp druhého typu světelné křivky, známá interagující dvojhvězda β Lyr. Odtud byl již jen krok k velmi nešťastnému termínu „nezákrytový Algol (non-eclipsing Algol)“, používanému některými astronomy pro spektroskopické dvojhvězdy, u nichž se lze podle nepřímých důkazů dohadovat také o probíhajícím přenosu hmoty mezi složkami, a jejichž sklon oběžné dráhy je takový, že vůči nám nedochází k zákrytům.

6.2 Dvojhvězdy s hvězdou se závojem

Existují dvojhvězdy, v jejichž spektrech nacházíme obvykle časově proměnné emisní čáry, které ve většině případů souvisejí s jednou ze složek dvojhvězdy, obvykle hvězdou spektrálního typu O, B či A. Obecně se soudí, že emisní čáry svědčí o přítomnosti cirkumstelární hmoty ve dvojhvězdě. Čistě popisně a historicky bylo rozlišeno několik skupin emisních objektů. Asi nejznámější jsou dvojhvězdy typu W Ser, mezi něž se kromě zmíněného prototypu počítá i β Lyr, UX Mon, SX Cas, RX Cas a další. Jde vesměs o dvojhvězdy s oběžnými periodami delšími, než mají klasické Algoly. Typické periody jsou asi od 10 do 300 dní. Hvězdy typu W Serpentis byly Plavcem a Kochem jako třída zavedeny tak, že jde o objekty s řadou silných emisních čar viditelných v družicové ultrafialové části spektra. Jedná se vesměs o polodotykové soustavy, u kterých sekundární složka vyplňuje Rocheovu mez.

Po objevu rentgenovských zdrojů záření se ukázalo, že mnoho z nich jsou hmotné dvojhvězdy, jejichž optickou primární složkou je právě hvězda se závojem, buď o vysoké svítivosti nebo hvězda hlavní posloupnosti.

Konečně jsou známy dvojhvězdy, kde sekundární složku emisní hvězdy tvoří horká heliová a málo hmotná hvězda jako je tomu v případě φ Per.

Struktura cirkumstelární hmoty, ve které vznikají emisní a dodatečné absorpční čáry a zřejmě i část spojitého záření, jsou u těchto objektů často velmi proměnné, což se projevuje jak neperiodickými spektrálními změnami, tak také měnícím se vzhledem světelných křivek. V některých případech je třeba pozorování za mnoho oběžných cyklů, aby se vůbec podařilo prokázat periodicitu související s oběžným pohybem. Zcela zřejmě u některých těchto dvojhvězd nedochází k zákrytům složek dvojhvězdy, ale k zákrytům jedné složky časově proměnnou cirkumstelární hmotou.

6.2.1 Symbiotické dvojhvězdy

Tento pojem byl zpočátku chápán zcela popisně, dnes je definován podle určitých spektrálních vlastností přesněji, aby vymezoval fyzikálně homogennější třídu objektů. Jejich pozorovaná spektra jsou kombinací dvou různých spekter: V optickém oboru zpravidla dominuje obří chladná hvězda – rudý obr či veleobr. Druhým spektrem je horká složka, buď normální hvězda hlavní posloupnosti nebo bílý

trpaslík. V druhém případě lze na takovou symbiotickou hvězdu pohlížet i jako na kataklysmickou proměnnou. Podmínkou klasifikace je i přítomnost emisních čar včetně čar zakázaných.

Jedná se o dvojhvězdy s velmi dlouhými oběžnými periodami řádu několika stovek dní, takže jejich orbitální pohyb má malou amplitudu a není snadné jej spolehlivě prokázat. Chladné složky často i pulsují a mění při tom svou jasnost, dochází též k dlouhodobým výrazným spektrálním změnám. Ty jsou často mnohem nápadnější, než pravidelné změny související s oběžnou periodou, a proto trvalo až do osmdesátých let 20. století, než byl obecně přijat názor, že všechny symbiotické hvězdy jsou dvojhvězdami. Je možné, že všechny chladné složky symbiotických dvojhvězd zaplňují Rocheovu mez, jen pro několik z nich to však dosud bylo dokázáno. Problém spočívá v tom, že efekty cirkumstelární hmoty, oscilací chladné složky a obecně dlouhé oběžné periody velmi znesnadňují spolehlivé určení hmotností a poloměrů těchto dvojhvězd. Předpokládá se ale, že horká složka přijímá hmotu z chladné složky, ať už klasickým přenosem hmoty nebo ve formě hvězdného větru. Přenos hmoty je řádu $10^{-5}M_{\odot}$ ročně, teplota je v rozsahu 10^4 až 10^5 K, svítivost 10^3 až $10^4 L_{\odot}$; takové vlastnosti mají i centrální hvězdy planetárních mlhovin. Vzhledem k již zmíněným malým amplitudám křivek radiálních rychlosti se spolehlivé důkazy oběžného pohybu často zakládají na fotometrii. Např. v UV mohou být zákryty žhavé složky dosti hluboké. Symbiotické hvězdy ale mění svou jasnost v mnoha časových škálách (viz např. již zmíněné pulsace chladné složky nebo vzplanutí podobná výbuchům nov) a identifikace zákrytu proto nemusí být jednoznačná. Symbiotické hvězdy se dělí na typ S, u něhož je v IR oblasti pozorovatelné jen spektrum chladné složky, a typ D (zpravidla s delšími oběžnými periodami), kdy lze v IR oblasti nalézt emisi prachu o teplotě 400 až 1000 K. Kromě obou těles existuje v systému i množství mezihvězdné hmoty a okolohvězdné hmoty, projevující se četnými efekty ve spektru. Hustota ionizované složky této mlhoviny je $N_e \geq 10^7 \text{cm}^{-3}$ u typu S, a je menší u typu D. Existuje diagnostika na odlišení od planetárních mlhovin. Jsou problémy s určením vzdálenosti, neboť kontinuum je špatně definováno, a mezihvězdná extinkce má i cirkumbinární složku.

Kříž a Harmanec (1975) upozornili na to, že na Algoly, dvojhvězdy s hvězdou se závojem a symbiotické hvězdy s chladnou složkou zaplňující Rocheovu mez lze pohlížet jako na podobné objekty, které se liší především délkou oběžné periody. U Algolů s kratšími oběžnými periodami není uvnitř Rocheovy meze dostatečné místo na vznik rozsáhlých obálek, proto se u nich nepozorují příliš silné emise. Naopak u symbiotických hvězd je Rocheova mez kolem chladné složky tak velká, že tato složka světelně dominuje již v optické oblasti spektra.

6.3 Dvojhvězdy s veleobry

Skupina dvojhvězd, kde jedna složka je veleobr, je jistě důležitá pro určení hmotností veleobrů, i jako přechodný stav ke konečným fázím vývoje dvojhvězdy. Je tu ovšem značný výběrový jev: veleobr vzniká z hmotnější složky díky jejímu rychlejšímu vývoji, méně hmotná složka zůstává na hlavní posloupnosti a je tedy daleko slabší a menší – tudíž je i obtížně zjištělná, a to jak spektrálně, tak i fotometricky. Navíc se zdá, že řada členů dvojhvězd svou příslušnost k veleobrům jen simuluje (jde o hvězdy nižší svítivosti s obálkou, jejíž absorpční čáry se podobají spektru veleobra). Mezi nejranějšími hvězdami je známo několik případů takových dvojhvězd se zdánlivě veleobřími složkami (např. V1765 Cyg, V380 Cyg, δ Ori či V1007 Sco); mají vesměs výstředné dráhy s periodami 5

až 14 dnů a jejich hmotnosti nejsou dobře určeny, neboť křivky radiálních rychlostí jsou ovlivněny efekty hvězdného větru a v mnoha případech jsou čáry sekundáru velmi slabé a špatně měřitelné. Lze předpokládat, že u těchto dvojhvězd v dalším vývoji dojde k cirkularizaci během fáze výměny hmoty (zpravidla případu B, kdy k výměně hmoty dojde při expanzi hvězdy po vyhoření vodíku v jejím jádru).

U dvojhvězd s veleobry středních a pozdních spektrálních typů jde zejména o hvězdy typu ζ Aur (např. 31 a 32 Cyg, v nich jsou veleobři typu K) a VV Cep (veleobři typu M; jde často současně o symbiotické proměnné). Sekundárními složkami jsou MS spektrálního typu B. Oběžné periody těchto objektů jsou velmi dlouhé, roky až desítky let. Nejdelší periodu má ϵ Aur (27 let), s veleobrem typu F. Sekundární složka této dvojhvězdy je ale záhadou (viz např. přehledová práce Guinana a DeWarfa 2002). Během zákrytu v letech 2009-2011 byla ale získána interferometrická pozorování v optickém a infračerveném oboru, která potvrdila, že sekundární složka je ukryta v obrovském chladném disku, který samotný zákryt způsobuje (Kloppenborg a kol. 2010). Protože stále není k dispozici spolehlivě určená paralaxa, vedou se i spory o to, zda primární složka je skutečně veleobr.

6.3.1 Hvězdy typu ζ Aurigae a VV Cephei

Tak jsou označovány dvojhvězdy sestávající z chladného obra či veleobra spektrální třídy a z hvězdy hlavní posloupnosti se spektrálním typem B či A, u kterých dochází k atmosférickým zákrytům. Pokud je obří hvězda spektrálního typu M, mluví se též o hvězdách typu VV Cephei. Oběžné periody těchto soustav jsou dlouhé nebo i velmi dlouhé, v několika případech skoro 10000 dní. Atmosférické zákryty složek na hlavní posloupnosti obřími hvězdami s velmi rozsáhlými atmosférami dávají unikátní možnost strukturu obřích atmosfér studovat a protože k podobným zákrytům dochází vzhledem k dlouhým oběžným periodám jen zřídka, bývají k jejich sledování organizovány mezinárodní kampaně.

6.4 Dvojhvězdy s Wolfovou-Rayetovou hvězdou

Wolfovy-Rayetovy hvězdy jsou velmi horké hvězdy s nápadnými emisními čarami ionizovaného helia a kovů. Mnohé z nich (v určité době se soudilo, že možná i všechny) se nacházejí ve dvojici s hvězdou spektrálního typu O. Jejich spektrum je čistě emisní a vykazuje jasné známky silného hvězdného větru unikajícího vysokými rychlostmi a ačkoliv některé z nich – např. V444 Cyg – jsou i zákrytovými dvojhvězdami, znalosti jejich hmotností a poloměrů jsou stále nejisté, neboť jak křivka radiálních rychlostí, tak světelná křivka jsou silně komplikovány přítomností cirkumstelární hmoty. Kromě toho existují přesvědčivé důkazy toho, že rozměry dynamických obálek kolem těchto hvězd se s časem mohou měnit. Kuhi a Schweizer (1970) zjistili, že u WR dvojhvězdy CV Ser zcela zmizely fotometrické zákryty, které předtím několik jiných astronomů pozorovalo.

6.5 Hvězdy chemicky pekuliární

Existují dvě třídy chemicky pekuliárních hvězd, o nichž se dnes dosti všeobecně soudí, že se vyskytují pouze ve dvojhvězdách, ačkoliv přímá souvislost podvojnosti a pekuliarit je dosud otázkou zkoumání.

Jsou to Am hvězdy (pro něž čáry vápníku odpovídají ranému A typu, čáry ostatních kovů pozdnímu A typu a čáry vodíku střednímu A typu) a Ba hvězdy, s anomálně silnými čarami kovů a barya. Ukazuje se, že chemická pekuliarita obou skupin má mnoho společného. Kromě toho je podvojnost velmi častým jevem u hvězd typu HgMn s pekulárními intenzitami čar rtuti a manganu.

6.6 Hvězdy typu RS CVn

Jedná se o dvojhvězdy s chladnými složkami, u nichž jsou ve spektru pozorovatelné obě složky a u nichž dochází ke změnám jasnosti také v důsledku toho, že v jejich atmosférách vznikají a zanikají obří analogie slunečních skvrn. Pro tyto dvojhvězdy existují zvláště z družicových UV, rentgenových a radiových pozorování četné důkazy přítomnosti chromosfér, občasných mohutných erupcí a dlouhodobých cyklů aktivity, takže analogie s hvězdami slunečního typu je velmi hluboká.

6.7 Dvojhvězdy typu W UMa

Nejde o omyl. Typ W UMa je sice jedním ze základních typů světelné křivky, ukazuje se však, že popisuje i fyzikálně příbuznou skupinu hvězd, které jsou v takovém vývojovém stadiu, že buď kolem obou složek existuje společná atmosféra, která zaplňuje vyšší ekvipotenciálu, než je Rocheova mez nebo jsou obě složky Rocheově kritické mezi velmi blízko. Jedná se zpravidla o dvojhvězdy s chladnými složkami spektrálních typů A-K, u nichž se podobně jako u hvězd typu RS CVn pozorují skvny na jejich povrchu. Kromě toho však u nich dochází k nepravidelným změnám oběžné periody. Často existuje rozpor mezi hmotovým poměrem určeným ze spektroskopie a z fotometrie. Popisně se tyto dvojhvězdy dělí na dva podtypy podle řešení světelné křivky: typ A, kdy je v hlubším minimu zakrývána menší hvězda větší hvězdou, a typ W, kdy je tomu naopak.

6.8 Kataklysmické proměnné (CV; novy, trpasličí novy a rentgenovské dvojhvězdy o malé hmotnosti)

Jedná se o dvojhvězdy, u nichž je přenos hmoty mezi složkami spojen s eruptivními jevy, zejména s nápadným zjasňováním celé soustavy v nepravidelných intervalech od týdnů až do desítek let. U těchto dvojhvězd se zpravidla pozorují i emisní čáry ve spektrech. Obvykle jsou tvořeny dvojicí chladné hvězdy zaplňující Rocheovu mez a horké, velmi kompaktní hvězdy. Důležitou charakteristikou je, že k celkovému zářivému výkonu těchto soustav přispívá podstatnou měrou záření akrečního disku kolem horké složky. Pozorují se i zákryty v rentgenovském oboru a v některých případech periodické změny jasnosti na časové škále o řád delší, než oběžná perioda. U některých soustav existují důkazy přítomnosti silného magnetického pole – systémy typu AM Her.

Že některé novy (přesněji, postnovy) jsou dvojhvězdy, bylo známo už od padesátých let (DQ Her). Teprve v šedesátých letech se ale postnovy staly předmětem zájmu, a bylo zjištěno, že dvojhvězd mezi nimi je velmi mnoho, takže vlastně všechny musí být dvojhvězdami. To ovšem vedlo i k teoretickému vysvětlení jevu novy: jde o nukleární výbuch v atmosféře bílého trpaslíka, k němuž dochází - v různých dlouhých intervalech - díky akreci vodíku z atmosféry druhé složky.

U trpasličích nov je mechanismus zjasnění jiný: Zjasnění souvisejí s nestabilitou akrečního disku po dasažení určité kritické hustoty, kdy se v oblastech měnící se ionizace velmi prudce změní opacita disku (který je u trpasličích nov hlavním zdrojem záření celé soustavy). Tento model je podrobně popsán v přehledové práci Pringle (1981).

Observačně je tedy možno zjistit světelnou křivku postnovy; je řada případů, kdy jde o zákrytové dvojhvězdy. Světelné křivky jsou ale obtížněji dešifrovatelné než u „normálních“ hvězd, neboť významným přispěvatelem ke světlu tu je i disk, dále „jasná skvrna“ na disku, a i rozdělení jasu na složkách může být nepravidelné. Objekt přitom jeví změny jasnosti v řadě časových škál – mluví se o výbuších, supervýbuších, nízkém stavu (kdy zmizí akreční disk a je pozorovatelná fotosféra). Je ovšem možné i spektroskopické studium, opět komplikované emisemi, a tím, že jde o objekty slabé – přitom oběžné doby jsou většinou krátké a tedy expoziční doby musí být též krátké.

CV lze rozdělit na řadu podtypů:

- novy (CN, classical nova);
- trpasličí novy (DN, dwarf nova);
- novám podobné proměnné (NL, nova like);
- magnetické CV (MCV).

Mezi méně zásadní typy patří např. hvězdy typu AM CVn, s velmi krátkou dobou oběhu (10 až 40 min.; sama AM CVn má 17 min) nebo typu ER UMa, což jsou velmi aktivní DN, s výbuchy každých několik dní.

Někdy se jako CV klasifikují i tzv. symbiotické hvězdy (Z And dle GCVS). Tam ale sekundár nemusí být nutně WD, viz kapitola 1.2.3. Downes & Shara (1993) uvádějí seznam všech CV s klasifikací (751 objektů). Seznam CN pozorovatelných v minimu udává Warner (1987).

Klasifikace závisí především na velikosti $\dot{M}$ při dané periodě (na velikosti $\dot{M}$ závisí i čas rekurence u UG a ZC). Protože ztráta úhlového momentu - na níž závisí i přenos hmoty - způsobuje i sekulární vývoj systému ke kratším periodám, je možné, že za změnami $\dot{M}$ je stárí. CV jistě vznikají s různými periodami, rozptyl stárí při dané periodě je tedy značný.

6.8.1 Oběžné periody CV

Velká většina CV má periody velmi krátké; důležitým jevem je mezera v pozorované délce oběžné periody („period gap“): periody v rozsahu 2^h10^m až 2^h52^m má jen několik málo objektů. Např. všechny CN mají periodu delší.

Perioda každé CV se ovšem obecně zkracuje, úhlový moment se ztrácí gravitačním vyzařováním, u MCV též „magnetickým brzděním“, v časové škále 10^9 roků. Obecně CV končí jako pár bílých trpaslíků, a u jistého procenta z nich už během Hubbleova času⁷ vyplní méně hmotný WD svou Rocheovu mez a s dalším poklesem úhlového momentu ji přeteče a vytvoří disk kolem hmotnější složky; ta disk postupně pohltí. Jedním z výsledků takového procesu jsou pravděpodobně „extrémně heliové hvězdy“ (na jejichž povrchu je jen nepatrně vodíku a kde logaritmus poměru svítivost-hmotnost (ve slunečních jednotkách) je větší než 4.

⁷ Jako Hubbleův čas se označuje převrácená hodnota Hubbleovy konstanty H_0 .

6.8.2 Trpasličí novy (DN)

DN, jinak též UG (typ U Gem), se dále dělí na:

- SS (SS Cyg) – v cyklu 10 až 1000 dní jejich jasnost stoupne o 2-4 mag. v 1-2 dnech, a během několika dnů klesne na normální;
- SU (SU UMa) – perioda pod mezerou (<2h 10m), má „normální“ a „super“ výbuchy;
- ZC (Z Cam) – mají též výbuchy, ale někdy mezi nimi jasnost neklesne na normální.

Obecně jsou ovšem pro poznání všech typů CV důležité objekty se zákryty. Zejména u DN jsou zákryty přínosem – dovolují studovat dramatické změny akrečního disku při výbuších a v obdobích klidu. Široký zákryt při erupci znamená, že je zakrýván velký svítivý disk; v období klidu jsou na světelné křivce jen nevelké struktury připisatelné zákrytu WD a jasné skvrně na obvodu disku (Z Cha, HT Cas, OY Car). U typu SU jsou pozorovatelné tzv. superhumps: po světelné křivce přechází vlna svědčící o precesi eliptického disku (obr. 34).

6.8.3 Magnetické kataklysmické proměnné (MCV)

Podle intensity magnetického pole bílého trpaslíka se dělí na typ AM Her (polary; 10 až 80 MG, i více), a typ DQ Her (intermediární polary), 1 až 10 MG. Patří k nim asi 1/4 všech CV. Rozpoznávacím rysem je zpravidla silná kruhová i lineární polarizace záření ve vizuálním a blízkém IR oboru.

Většina záření je emitovaná v rentgenovém oboru, důvodem jsou akreční šoky na povrchu WD. MCV typu AM Her nemají akreční disky, akreovaný materiál je magnetickým polem veden na jeden, eventuálně oba magnetické póly. WD je magnetickým polem synchronizován s oběžnou periodou, jeho rotační perioda je tedy od 80 minut do asi 8 hodin. U typu DQ Her je rotační perioda obvykle kolem 1/10 periody oběžné, a zpravidla je přítomen akreční disk. Intensita magnetického pole se dá určit z fotosférických spekter – v tzv. nízkém stavu dominuje záření fotosféry nad akrečními šoky a diskem. U vyšších intenzit pole jsou spektrální čáry nejen rozštěpené, ale i posunuté a deformované. Zdá se, že rekord 230 MG má AR UMa. Více o MCV viz Wickramasinghe & Ferrario (2000).

6.8.4 Novám podobné proměnné (NL)

U CV typu NL ztrácí hvězda hlavní posloupnosti pozdního typu hmotu na WD hlavně přes RLOF (přetokem Rocheovy meze, Roche lobe overflow). WD je bez silného magnetického pole a proud dopadá na disk, tam je jasná skvrna; na rozdíl od DN nemají NL kvaziperiodické výbuchy. U podtypu MV Lyr nedochází k nízkému stavu.

6.8.5 Předchůdci supernov typu Ia

Soudí se, že některé dvojhvězdy CV jsou předchůdci supernov. Supernovy typu Ia ve spektru nemají vodík (ani helium), a jejich absolutní vizuální magnituda v maximu dosahuje pozoruhodně shodných hodnot:

$$M_V = -19.30 + 5 \log \left(\frac{H_0}{60} \right) \quad (184)$$

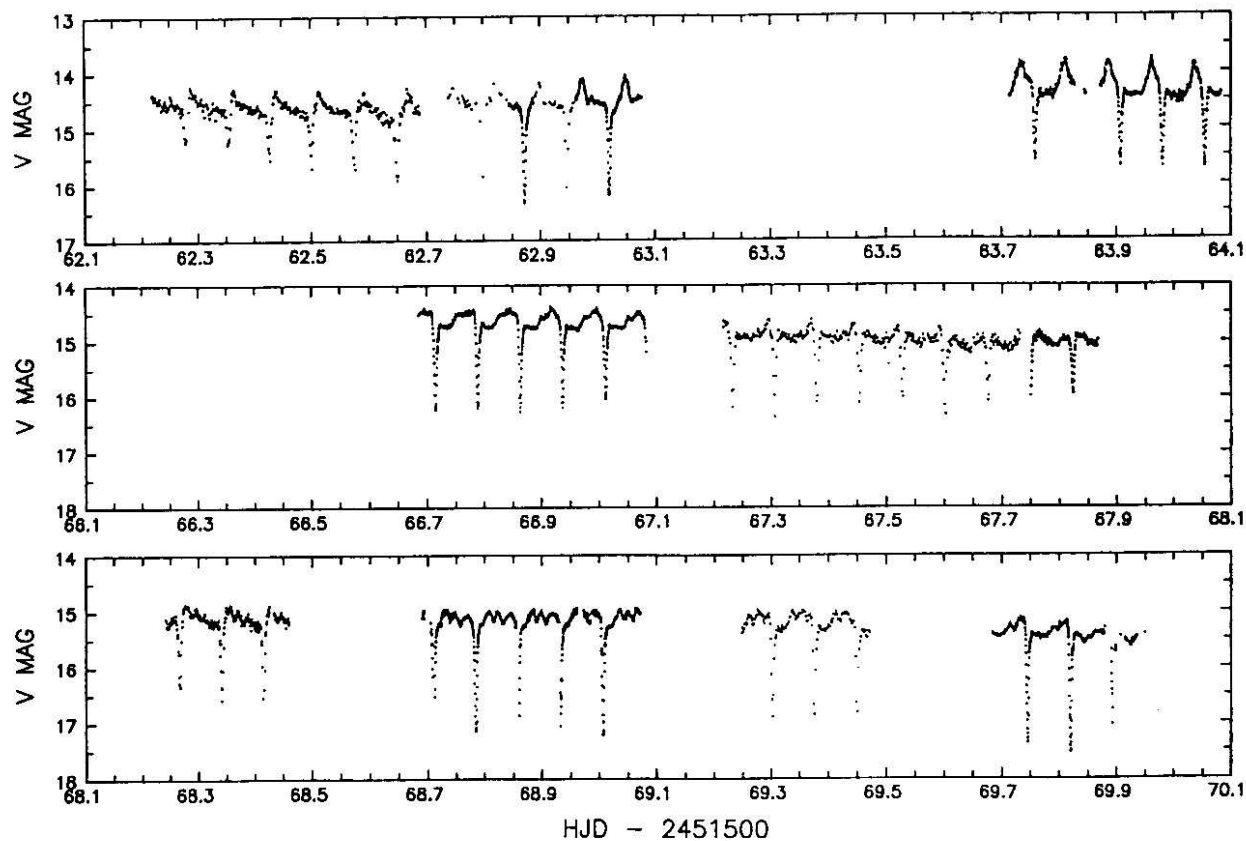
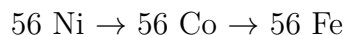


FIG. 2.—Three 48 hour segments of IY UMa light curve during the 2000 January superoutburst. Deep eclipses at P_{orb} occur throughout. A prominent wave, the superhump, drifts slowly through the orbital light curve. The superhump amplitude and eclipse depth are periodically reduced when the superhump coincides with eclipse. Recurrent wiggles at higher frequency are also evident, especially in the last panel.

Obrázek 34: Světelná křivka IY UMa (typ UGSU) ve třech obdobích po 48 hodinách během supervýbuchu. Zřejmé jsou hluboké zákryty (perioda 0.073909 d), a vlna posouvající se po křivce. Zejména v posledním období jsou zřejmé i poklesy s vyšší frekvencí (Patterson a další 2000).

(kde H_0 je Hubbleova konstanta), s disperzí pouze 0^m3 a $(B - V) = 0$ (i když je několik případů s odlišnější jasností). Předchůdci výbuchu nebyli objeveni. Tyto vlastnosti lze vysvětlit předpokladem, že supernova vzniká zhroucením bílého trpaslíka (typu C+O), jehož hmotnost akrecí vzrostla nad Chandrasekharovu mez (asi $1,4 M_\odot$; ovšemže akrecí hmoty z druhé složky dvojhvězdy). Jiná verze, splnutí dvou bílých trpaslíků, by sotva mohla vysvětlit shodnost jasností v maximu. Pozorované rychlosti expanze přitom odpovídají syntéze asi $1 M_\odot$ C+O do prvků Fe skupiny a prvků s mezilehlou hmotou jako jsou Si a Ca; energetika radioaktivního procesu



přitom velmi dobře vystihuje průběh klesající jasnosti objektu po výbuchu.

SN Ia se vyskytují ve spirálních i eliptických galaxiích, tj. vznik z hvězd s vyšší hmotností nepřipadá v úvahu (i když některé podtypy jsou jen ve spirálách).

Problémy ovšem jsou. Předně, při pomalé akreci vodíku dojde ke vzniku novy, a při tomto výbuchu se ztratí více hmoty než se v cyklu získalo. Při rychlé akreci by pak mělo dojít k trvalému hoření, takový systém by ale byl jasný a pozorovatelný (možná tak vypadá nějaký typ CV nebo symbiotiky).

6.9 Dvojhvězdy v posledním tažení

Tak jako jednotlivá hvězda končí svou aktivitu v podobě kompaktního objektu – tj. jako bílý trpaslík, neutronová hvězda nebo černá díra – tak i ke konci vývoje dvojhvězdy se jedna složka stane takovým objektem (mohou se jím ovšem stát obě složky, nebo se dvojhvězda může rozpadnout). Zopakujme:

- WD - poloměr kolem 10000 km, hmotnost menší než $1.4 M_\odot$;
- NS - poloměr kolem 10 km, hmotnost menší než asi $3.4 M_\odot$;
- BH - lze uvádět poloměr nejmenší stabilní dráhy; hmotnost nad $4 M_\odot$.

Už z možných kombinací je zřejmé, že konečná stadia vývoje dvojhvězd mohou být velmi různorodá. Existuje řada klasifikací pozdních stadií dvojhvězd. Základní dělení je podle typu kompaktního objektu:

bílý trpaslík (WD)+ „normální“ hvězda = kataklysmická dvojhvězda (CV),
neutronová hvězda (NS)+ „normální“ hvězda = rentgenová dvojhvězda (XRB),
černá díra (BH)+ „normální“ hvězda = rovněž rentgenová dvojhvězda.

To ale neznamená, že CV by nemohla být detekována jako rentgenový zdroj. Dvojhvězdy se ovšem projevují jako CV nebo XRB jen dochází-li k akreci na kompaktní objekt. Jsou-li složky velmi vzdálené, pak k interakci nedochází, např. u dvojhvězd typu Sirius (WD+MS).

I druhá složka může být kompaktní objekt, takže možných kombinací je řada. Je známo několik příkladů WD+WD, u nichž nedochází k interakci, ani není přítomna cirkumbinární hmota. Existují WD+NS, jsou to LMXRB s periodami 9 - 50 minut. Některé radiové binární pulsary jsou NS+NS.

Neutronová hvězda je ovšem obecně pulsar (vyzařující jen v kuželu, tedy ne vždy jako pulsar pozorovatelná), a je proto možných více podob dvojhvězd s pulsarem. Některé dvojhvězdy spadají do více kategorií.

6.9.1 Vývoj dvojhvězdy se společnou obálkou

Většina dvojhvězd s kompaktním objektem má oběžné periody pod jeden den. Znamená to, že původní periody běžných dvojhvězd – obvykle vícedenní – musely být ovlivněny nějakým procesem.

Takovým uznávaným procesem je vývoj ve společné obálce. Jestliže z jedné složky uniká více hmoty než je druhá složka schopna zachytit, atmosféra té druhé složky se zahřeje a rozšíří, až vyplní Rocheovu mez, a přetékající hmota se dostává do obálky obklopující obě složky. Tření při pohybu složek v plynu obálky vede ke spirálovitému vzájemnému přibližování složek a část uvolněné energie pak odnáší hmotu i rotační moment obálky mimo dvojhvězdu (Soberman a další 1997).

Tento proces nepochybně nastává u planetárních mlhovin (PN), pokud jsou jejich jádra dvojhvězdami (mnohé CV vznikly z PN), CV a jiných degenerovaných dvojhvězd. Může nastat i když nejde o únik z Rocheovy meze, ale o hvězdný vítr (což se opět týká PN, ale i dvojhvězd s OB složkou). CV mají běžně periody jen v délce hodin. Jejich bílý trpaslík ale vzniká z jádra rudého obra, jedna složka tedy musí projít tímto stavem a původně tedy musí jít o rozměrný systém s dlouhou oběžnou dobou. Výsledkem tohoto „vývoje ve společné obálce“ pak jsou nejen CV, ale i XRB a SN.

Protože pravděpodobně všechny hvězdy s počáteční hmotou $8 M_{\odot}$ nebo menší končí jako bílí trpaslíci (vzhledem ke stáří vesmíru ovšem ještě žádné hvězdy s hmotou menší než asi $1 M_{\odot}$ do stavu WD nemohly dospět), měla by být prostorová hustota CV značná. Jsou ovšem dvojhvězdy, kde vzdálenosti složek jsou (a byly) značné, a kdy WD+ „normální“ hvězda tvoří běžnou dvojhvězdu (vizuální, viz již zmíněný „typ Sirius“). Tyto dvojhvězdy není snadné objevit; pokud je WD podstatně teplejší složkou, lze je objevit právě jako objekty s převahou UV nebo EUV záření. Takové objekty pak poskytují důležité informace o hmotnostech WD.

6.9.2 Rentgenové dvojhvězdy

Při identifikaci zdrojů rentgenového záření s optickými objekty bylo často zjištěno, že jde o dvojhvězdu (je známo na 200 takových dvojhvězd v Galaxii a několik v jiných galaxiích). Dvojhvězdy se liší: podobou druhé složky, časovou proměnností, mj. občasnými výbuchy, hmotností rentgenové složky, rentgenovým spektrem, sklonem dráhy. Složkou, která září v rentgenovém oboru, je ovšem neutronová hvězda nebo černá díra; získává hmotu akrecí, a září přeměnou gravitační potenciální energie (což je proces o řád účinnější než nukleární hoření).

Existují i dvojhvězdy zářící v rentgenovém oboru, kde obě složky jsou „normální“ hvězdy, kdy příčinou rentgenového záření jsou rázové vlny ve hvězdném větru či atmosférické procesy (korona). Svítivost je v těchto případech o několik řádů menší.

Zásadní rozlišení je podle typu složky: LMXRB (low mass X-ray binary; složka s malou hmotností, přesněji spektrálního typu pozdějšího než A, event. bílý trpaslík), a HMXRB (high mass XRB), kdy u složky jde o typ O nebo B. V prvním případě má na optické záření podstatný vliv ohřev složky a akrečního disku rentgenovým zářením, a přenos hmoty se děje přetokem Rocheovy plochy (RLOF). V druhém případě je pro přenos hmoty důležitý hvězdný vítr z O či B složky – jeho značnou část zachytí kompaktní složka. I zde ovšem může nastat RLOF. Při RLOF se přenáší významný rotační moment, vznikne tedy akreční disk.

HMXRB lze dále dělit na dvě skupiny: „normální“ složka je OBI-IIe veleobr (někdy se označují

Tabulka 4: Dvojhvězdné pulsary

Pulsar	P_{puls} (ms)	P_{orb} (d)	e	$f(M)$ ($M_{\odot}$)	M_2 ($M_{\odot}$)	$\log(B)$ (G)	$P/(2\dot{P})$ (roky)	Typ
0045-7319	926	51	0,808	2,169	10	12,3	3×10^6	1
1534+12	37,9	0,42	0,274	0,315	1,34	10	2×10^8	2
2145-0750	16,0	6,8	0,000021	0,0241	0,51	$< 8,9$	$> 8 \times 10^9$	3
0820+02	864,8	1232	0,0119	0,0030	0,23	11,5	1×10^8	4
1045-4509	7,5	4,1	0,000019	0,00177	0,19	8,6	6×10^9	4

SXRB) nebo hvězda se závojem o nižší svítivosti BeXR (B V-IIIe). Někdy je luminositní klasifikace obtížná a dělení tedy není příliš spolehlivé. Je-li optickou složkou B V-IIIe hvězda, vyskytují se dost často intenzivní rentgenové výbuchy (transients), a mimo ně jsou objekty nepozorovatelné; zpravidla je neutronová hvězda rentgenovým pulsarem, s rotační periodou obvykle několik sekund. Ze zdánlivé změny periody pulsů lze pak velmi přesně stanovit dráhu. Část BeXR je pozorovatelná stále, výbuchy jsou méně výrazné, a pulsace mají periody řádově stovky sekund (X Per).

6.9.3 Dvojhvězdné pulsary

Mezi pulsary se dosti často nacházejí objekty s periodicky proměnnou frekvencí pulsů, v takovém případě jde tedy o složky dvojhvězd. Oběžné periody jsou přitom od hodin po roky. Sledování okamžiků pulsů vede k velmi přesně určitelné dráze. V některých případech je složka pulsaru viditelná v optickém oboru, případně je pulsar i rentgenovou dvojhvězdou. Milisekundové pulsary jsou složkami dvojhvězd vždy (ovšem až na výjimky – soudí se, že ve dvou případech, kdy je milisekundový pulsar samostatný, došlo ke zničení druhé složky).

Zdá se, že existují dva typy dvojhvězd s pulsary: V prvním případě je průvodcem pulsaru také neutronová hvězda nebo hmotný bílý trpaslík, oběžná perioda je krátká a dráha výstředná. V druhé kategorii jsou pulsary, jejichž druhou složkou je málo hmotná hvězda ($0,2-0,4 M_{\odot}$), patrně heliový bílý trpaslík. Oběžná dráha je kruhová a perioda je dlouhá.

Už napsané napovídá o velké rozmanitosti binárních pulsarů; jednotlivé kategorie lze stručně popsat takto (příklady viz tab. 4):

1. Dosud nedošlo k akreci na neutronovou hvězdu z druhé složky, dráha je excentrická.
2. Obě složky jsou neutronové hvězdy. Pulsar a jeho průvodce se nejprve spirálovitě přiblížili ve společné obálce, pak došlo k výbuchu druhé supernovy. Každá ze složek tak musela mít původně hmotnost nad $8 M_{\odot}$.
3. Druhou složkou je WD s velkou hmotností, který mohl vzniknout jen z obra daleko rozměrnějšího než je současná dráha. To znamená, že NS spirálovala obálkou obra a způsobila její odmrštění. Zbylé jádro už nevydalo na druhou NS.

4. Složkou je málo hmotný WD na kruhové dráze, který se mohl vytvořit při stabilizovaném přenosu hmoty ze složky s malou hmotností, vyplňující RL.
5. Jde o systémy se složkami méně hmotnými než jsou hmotnosti jader nejméně hmotných hvězd, které se ještě mohly vyvinout nad hlavní posloupnost během existence vesmíru. Přenos hmoty tedy musel mít jiný důvod než nukleární vývoj složky – šlo tedy o gravitační záření nebo ztrátu úhlového momentu v magnetickém větru.
6. Pulsar 1257+12 má možná planetární systém, několik dalších pulsarů snad zničilo své průvodce, které jim poskytly úhlový moment k jejich rychlé rotaci.

6.10 Dvojhvězdy mezi hvězdami PMS (pre-main sequence)

V novější době se věnuje značná pozornost dvojhvězdám mezi hvězdami, které dosud nedosáhly ZAMS (hlavní posloupnost nulového věku). Je to proto, že proces kontrakce na Hayashiho posloupnosti zdaleka není tak dobře pochopen jako chování hvězd od jejich dosažení ZAMS. A také proto, že technika dovoluje takové hvězdy (a dvojhvězdy) studovat. Jiné označení těchto hvězd je „Herbigovy-Harovy Be/Ae hvězdy“. Prototypem je ovšem T Tau (hvězdy typu T Tau by ale měly mít ekvivalentní šířku $H\alpha > 10 \text{ \AA}$). Tyto hvězdy jsou obklopeny mezihvězdnou hmotou (prach, plyn, molekulární mračna), zpravidla v podobě disku. Extinkce může být značná, často jsou to objekty pozorovatelné jen v IR oblasti nebo i rádiově (tepelná emise prachu, volně-volná emise z ionizovaných bipolárních výtrysků). Název „Herbigovy-Harovy objekty“ je téměř synonymem pro PMS hvězdy. Jde o drobné mlhoviny nepravidelných tvarů, zpravidla na pozadí temných mračen, a jsou to viditelné části akrečních disků a bipolárních výtrysků.

Hvězdy PMS se vyskytují především v několika oblastech: Tau-Aur, Sco-Oph, CrA. V první ze zmíněných oblastí téměř všechny PMS vytvářejí vizuální dvojhvězdy nebo vícenásobné systémy; v ostatních oblastech je sice také procento dvojhvězd vysoké, ale – vzhledem k celkově menšímu počtu těchto objektů – není rozdíl proti výskytu dvojhvězd v okolí Slunce statisticky průkazný.

Značná část vizuálních dvojhvězd má úhlovou vzdálenost složek pod $1''$, některé byly objeveny interferometricky, jiné mají složku viditelnou jen v IR oboru (T Tau). Vzdálenost oblasti Tau-Aur je asi 140 pc, takže např. $0,1''$ odpovídá 14 au. Při hmotnostech zhruba rovných $1 M_{\odot}$ by byla perioda řádu desítek let a pro některé z těchto dvojhvězd už lze stanovit dráhy a – díky známé vzdálenosti – i hmotnosti.

Spektroskopických dvojhvězd zatím mezi PMS známo mnoho není. Jde spíše o slabší objekty (T Tau má 10. mag.), takže menší amplitudy radiálních rychlostí se obtížně hledají. Velmi zajímavý je ovšem objekt 1 SWASP J1 40747.93-394542.6 v asociaci Sco-Cen OB, u kterého Mamajek a kol. (2012) objevili přes 30 dní trvající a 4 mag. hluboký zákryt v roce 2007. Před ním a po něm byly pozorovány menší poklesy jasnosti, takže světelná křivka poněkud připomíná světelnou křivku ϵ Aur. Kenworthy a kol. (2015) publikovali další studii ve snaze detekovat sekundární složku, dostali ale jen odhady, že její hmotnost by neměla být větší, než 80 hmotností Jupitera a že tato složka je obklopena obrovským a strukturovaným diskem. Další zákryt se přes veškeré úsilí nepodařilo najít, takže autoři pouze odhadují oběžnou periodu v rozmezí 4 až 14 let.

6.11 Dvojhvězdy mezi cefeidami

První dvojhvězdy mezi cefeidami byly objeveny teprve během několika posledních desetiletí. Protože cefeida je veleobr, její jasnost značně převyšuje eventuálního průvodce – hvězdu hlavní posloupnosti. Průvodce se proto může projevit třeba efektem rozdílné dráhy světla (perioda cefeidy se periodicky mění) nebo – jde-li o objekt teplejší než je cefeida – zvýšenou jasností v UV části spektra. Na adrese

<http://www.konkoly.hu/CEP/intro.html>

je seznam dvojhvězd mezi cefeidami publikován. Pro 29 objektů byla k datu květen 2015 uvedena spektroskopická dráha. Nejkratší oběžná perioda je 133 dní (TX Del), většina period je ale mezi 1000 až 10000 dní. Je známo i několik trojhvězd.

6.12 Dvojhvězdy s podtrpaslíky

Jedním z výsledků vývoje se společnou obálkou jsou i dvojhvězdy s podtrpaslíky typu B (sdB). To jsou hvězdy na extrémní horizontální větvi (EHB); spalují He v jádře o hmotnosti kolem $0.5 M_{\odot}$ a mají jen velmi tenkou vodíkovou obálku. Společná obálka musela vzniknout u hvězdy s degenerovaným heliovým jádrem na špičce RGB. Složkou sdB může být hvězda MS nebo podobr (v těchto případech se na světelné křivce projeví reflexní efekt) nebo WD. Perioda může být velmi krátká, nejkratší známá je 0^d073 u dvojhvězdy PG 1017-086, jejíž druhou složkou je málo hmotný červený trpaslík nebo snad hnědý trpaslík. Velkým úspěchem je objev *zákrytové* dvojhvězdy SDSS 103533.03+055158.4 sestávající z bílého a hnědého trpaslíka, který učinili Littlefair a kol. (2006). Tato soustava má oběžnou periodu 82,0896 minut ($0^d057007$) a probíhá v ní přenos hmoty od hnědého na bílého trpaslíka, jde tedy o CV systém. Hmotnost hnědého trpaslíka byla určena na $0,052 M_{\odot}$, bílého na $0,94 M_{\odot}$. Poloměry jsou 0,108 a $0,0087 R_{\odot}$.

6.13 Dvojhvězdy v kulových hvězdokupách

Zatímco ještě před nedávnem se soudilo, že v kulových hvězdokupách dvojhvězdy téměř nejsou – a těch několik, které byly známy, se chápaly jako výsledek zachycení v hustém prostředí kupy – nyní je zřejmé, že zastoupení dvojhvězd tu je snad jen o málo menší než ve slunečním okolí; a že nutně jde o dvojhvězdy vzniklé současně s hvězdokupou (primordinální). Jde jak o dvojhvězdy objevené optickými metodami, tak o LMXRB a pulsary. Je zajímavé, že přítomnost dvojhvězd má zásadní vliv na vývoj celé kupy.

Na rozdíl od osamocených dvojhvězd lze při pozorování hvězdokupy získat úplný soubor do určité mezní magnitudy, a výběrové efekty ve statistice mohou být kvantifikovány. Nejjasnějšími hvězdami v kulové kupě jsou červení obři s hmotnostmi pod $1 M_{\odot}$, buď na špičce RGB (red giant branch) nebo typu AGB (asymptotic giant branch). Očekávané periody jsou tedy delší než asi 40 dní, amplitudy $10 - 20 \text{ km s}^{-1}$.

Zákrytové dvojhvězdy se ovšem spíše objeví, je-li jejich perioda krátká, tj. jde-li o hvězdy hlavní posloupnosti. Fotografie, ale daleko spíše snímky CCD, by tak měly objevit zákrytové proměnné mezi členy kupy slabšími, než je horizontální větev. Je známa řada kandidátů – členství v kupě ale musí být potvrzeno spektroskopicky (radiální rychlostí).

6.14 Dvojhvězdy v jiných galaxiích

Jde ovšem hlavně o dvojhvězdy v Magellanových mračnecích (LMC a SMC) a jiných galaxiích lokální skupiny. Mnoho zákrytových dvojhvězd v MC bylo objeveno už v první polovině minulého století. Současné velké dalekohledy dovolují i jejich spektrální výzkum, a to i v M31. Přes velkou podobnost této galaxie s Mléčnou dráhou je dobře známo, že nejjasnější zákrytové proměnné v M31 zdaleka nejsou tak jasné jako v naší galaxii (což je dáno podmínkami vzniku velmi hmotných hvězd). Vývoj dvojhvězd v MC pak je ovlivněn nižší abundancí kovů u hvězd těchto mračen.

7 Vznik dvojhvězd

Vznik dvojhvězd a vícenásobných soustav patřil kupodivu po dlouhou dobu mezi jednu z největších hádanek týkajících se dvojhvězd.

V existující literatuře se dlouho zvažovalo několik možností:

1. *Rozštěpení (fission) protohvězdy rychlou rotací.*
2. *Rychlá fragmentace v zárodečném protohvězdném mračnu*
3. *Fragmentace disku vznikající protohvězdy*
4. *Zachycení jedné hvězdy druhou*

Teprve rozvoj metod počítačové simulace dynamického vývoje souboru velmi mnoha částic vede postupně k tomu, že lze o vzniku dvojhvězd činit spolehlivější závěry. Dobré shrnutí současného stavu lze najít např. v práci Clarke(ové) (2007).

Tohline a Durisen (2001) podrobně shrnuli numerické simulace vzniku hvězd štěpením. Ač byla tato možnost v minulosti považována za velmi slibnou, ukazuje se, dynamický vývoj původně osově symetrické rotující protohvězdy vede na nestabilní konfigurace a nikoliv ke vzniku dvojhvězdy obíhající kolem společného těžiště. Jedinou nadějí pro zachování hypotézy vzniku hvězd štěpením tak zůstává počínající studium dynamické stability útvarů, které ani při svém vzniku nebyly osově symetrické či útvarů, jejichž vývoj je způsoben nikoliv dynamickými, ale nějakými pomalými, dlouhodobě působícími procesy.

Vznik dvojhvězdy dynamickým zachycením míjejících se těles je možný pouze pokud spolupůsobí nějaké další těleso s vlastní gravitací nebo pokud je setkání tak těsné, že slapové síly dokáží změnit keplerovskou (hyperbolickou) dráhu na dráhu eliptickou. Zachycení dvou míjejících se hvězd se proto při prostorových hustotách hvězd podobných té v okolí Slunce jeví jako nanejvýš nepravděpodobné. Vážně se však o něm uvažuje pro místa s podstatně vyššími prostorovými hustotami hvězd jako je centrum Galaxie či vnitřní části kulových hvězdokup. Zdá se velmi pravděpodobné, že také třeba v hvězdokupě M 42 (ve velké mlhovině v Orionu) dochází ke vzniku některých dvojhvězd zachycením prolétající hvězdy v protostelárním disku. Tím se – jak modelováním prokázali např. Olczak a kol. (2006) – zároveň postupně odčerpává hmota disku. V každém případě se ale zdá, že tímto mechanismem může i v nejhustších částech hvězdokup vznikat nejvýše 10 procent z celkové populace dvojhvězd. Také je třeba si uvědomit, že při setkání hvězd dochází i k *rozpadu* dvojhvězd, takže je

důležité vědět, jaký rovnovážný stav se nakonec vytvoří. Důsledkem vzniku dvojhvězdy mechanismem zachycení může být i to, že složky takto vzniklé dvojhvězdy nemusejí mít stejný vývojový věk, což se normálně předpokládá. Pokud je nám známo, nebyla zatím dvojhvězda s průkazně různými vývojovými věky obou složek v literatuře dosud popsána. Je ovšem pravda, že při zachycení hvězd v rozsáhlé hvězdokupě či mlhovině mohou obě tělesa společný vývojový věk mít.

Speciální pozornost byla také věnována otázce vzniku těsných dvojhvězd s téměř kruhovými drahami. Uznávána je teorie, která vychází z myšlenky vlivu vzdáleného třetího tělesa, působícího cyklické poruchy dráhy dvojhvězdy formou resonancí, jak je poprvé popsal pro situaci ve sluneční soustavě Kozai (1962). Aplikaci na trojhvězdy studoval Harrington (1968, 1969) a současná podoba hypotézy byla zformulována Kiselevou, Eggletonem a Mikkolou (1998). V původní soustavě vzájemně značně vzdálených tří hvězd s odlišnými sklony drah působí nejvzdálenější těleso cyklické oscilace výstřednosti vnitřní dráhy. V době, kdy je výstřednost vnitřní dráhy vysoká, může při průchodech pericentrem docházet k silnému slapovému tření, v důsledku kterého se postupně dráhový moment hybnosti předává z vnitřního k vnějšímu systému, oběžná perioda vnitřní dráhy se zkracuje a dráha se cirkularizuje. Tento efekt může být mnohem rychlejší, než obvyklé procesy cirkularizace probíhající na nukleární časové škále.

Podle Clarke(ové) (2007) se studium vzniku dvojhvězd v posledních letech zásadním způsobem změnilo a posunulo od pokusů modelovat jednu konkrétní hypotézu k modelování vzniku a dynamického vývoje celých hvězdokup. (Příklady takových simulací viz např. Bate a kol. 2002 či Delgado a kol. 2004, Kratter a kol. 2010). Rozhodování o tom, které mechanismy vzniku dvojhvězd působí či spolupůsobí bude tedy do budoucna otázkou porovnání statisticky kvalitního souboru pozorovaných dvojhvězd a vícenásobných soustav s předpovědí dobrých numerických modelů. Je proto zřejmé, že objevování nových dvojhvězd a vícenásobných soustav je stále velmi žádoucí. Dosavadní úsilí v tomto směru naznačuje tři významnější neshody mezi modely a pozorováním:

1. Numerické simulace produkují příliš mnoho osamocených hvězd o malé hmotnosti a
2. předpovídají příliš mnoho dvojhvězd s velmi malými poměry hmot.
3. Numerické simulace nedovedou reprodukovat tak velké množství hvězd s vyšší multiplicitou (více než tři složky) jaké je skutečně pozorované ve hvězdné populaci. Může to být ale způsobeno jen výpočetním omezením dnešních programů, které nejsou schopny počítat s primordiálními soustavami obsahujícími více nežli 3 komponenty.

Je ovšem třeba si uvědomit, že detekce soustav s malým poměrem hmotností je obtížná a musí zde působit výběrové efekty.

Poslední simulace vzniku a následného vývoje dvojhvězd ukazují, že pro dobrou shodu modelu s pozorováním je potřeba aby na 100 nově vzniklých systémů připadalo asi 40 trojhvězd, a 60 dvojhvězd. Z těchto 40 trojhvězd následně vznikne asi 25 stabilních hierarchických systémů a 15 se jich rozpadne na 15 dvojhvězd a 15 samostatných hvězd (viz Goodwin a Kroupa 2005).

Dynamický rozpad nestabilních (nehierarchických) systémů probíhá poměrně rychle. Bylo ukázáno

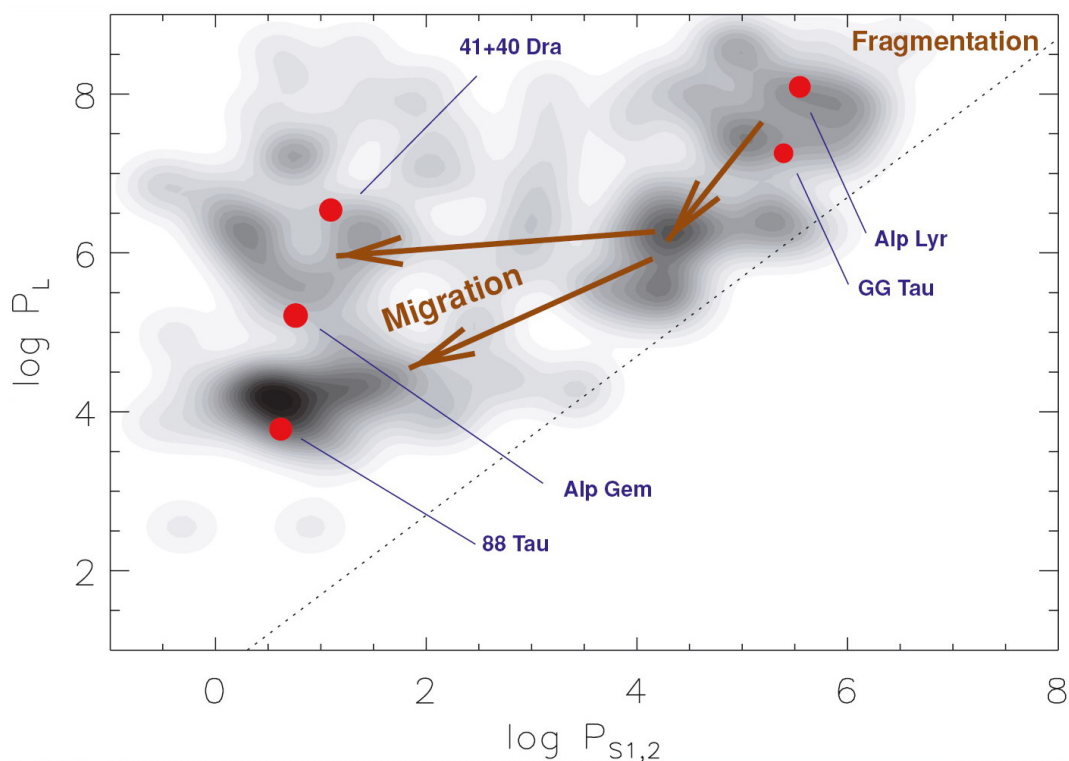
(např. Anosova 1986) že platí:

$$t_{decay} \sim 14 \left(\frac{R}{au} \right)^{3/2} \left(\frac{M_{stars}}{M_{\odot}} \right)^{-1/2} yr,$$

kde R je rozměr systému a M_{stars} je hmotnost složek. Tento rozpad má za následek dvě hlavní věci. Jednak je to vyvržení nejméně hmotné složky ze soustavy a druhak také zmenšení poloosy oběhu zbývajících dvojhvězdy, která je pak dynamicky mnohem stabilnější.

Ve velmi mladých populacích (oblasti tvorby hvězd, PMS hvězdy) se ukazuje, že je zastoupení systémů s více složkami velice vysoké, viz např. Leinert a kol. (1993). Není ale jasné, zdali k vysvětlení velkého množství osamocených hvězd malé hmotnosti – viz obr. (23) – stačí procesy typu dynamického rozpadu a odvržení právě nejméně hmotné složky, nebo zda působí nějaký efektivnější mechanismus rozpadu u málo hmotných hvězd.

Tokovinin (2008) pro velké množství vícenásobných systémů a jejich parametrů podrobně diskutoval, zda konkrétní mechanismy vzniku a následného vývoje dostatečně dobře popisují pozorované charakteristiky. Na obr. (35) je znázorněn případ možného vzniku čtyřhvězdy, kdy díky takovému vývoji dochází ke změně periody vnitřní a vnější dráhy. Tak zvaná kaskádovitá fragmentace na počátku z rotujícího zárodečného disku oddělí fragmenty, které si odnesou i část momentu hybnosti a dále fragmentují (a tyto fragmenty nadále mohou vytvářet páry podobných hvězd, tzv. 2+2 systémy). Následná migrace drah může být způsobena právě Kozaiovými cykly se slapovým působením, vedoucími k tomu, že moment hybnosti se z vnitřní dvojhvězdy přenesou na třetí složku a díky tomu pozorujeme některé charakteristiky P-P diagramů. Tomu by např. nasvědčoval i fakt, že mezi spektroskopickými dvojhvězdami vidíme kratší periody právě u systémů se třetí složkou, než u prostých dvojhvězd.



Obrázek 35: Schéma možného vývoje na příkladu čtyřnásobných systémů, viz Tokovinin (2008).

8 Apendix: Použité fyzikální a astronomické jednotky

V posledních letech docházelo v souvislosti se zlepšující se přesností astronomických pozorování k poměrně rychlému vývoji ve zpřesňování, ale i novému definování některých fyzikálních a astronomických jednotek. Protože právě dvojhvězdy jsou zdrojem našich nejpřesnějších údajů o fyzikálních vlastnostech hvězd, je důležité se tomuto vývoji přizpůsobit. Všechny konstanty použité v textu této učebnice jsou založeny na jednotkách, které jsou shrnuty v následujících odstavcích.

V současnosti je z rozhodnutí Mezinárodní astronomické unie platný systém astronomických konstant známý jako

The IAU 2009 system of astronomical constants

(viz Luzum a kol. 2011). Základní fyzikální jednotky přejímá IAU z ICSU (International Council for Science) a jeho orgánu CODATA (The Committee on Data for Science and Technology). IAU 2009 soustava přebírá fyzikální jednotky ze soustavy jednotek CODATA 2006 – viz

<http://physics.nist.gov/cuu/Constants/archive2006.html> .

V tomto textu jsou použity z uvedených zdrojů následující jednotky:

8.1 Základní fyzikální jednotky

Rychlost světla ve vakuu c je přirozenou definiční konstantou, ze které se odvozuje délková jednotka SI soustavy 1 m

$$c = 299792458 \text{ m s}^{-1} . \quad (185)$$

Stefanova - Boltzmannova konstanta σ je měřenou fyzikální konstantou. Zde přijímáme novější hodnotu z databáze CODATA 2014

$$\sigma = (5,670367 \pm 0,000013) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4} . \quad (186)$$

Je třeba upozornit, že existují vážné úvahy o tom, že by i hodnota této konstanty byla do budoucna fixována na přesné číslo nezatížené žádnou chybou.

Gravitační konstanta G je měřenou fyzikální konstantou, která je zatížena stále relativně velkou měřicí chybou. Nejnověji stanovená hodnota podle CODATA 2014 je

$$G = (6,67408 \pm 0,00031) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} . \quad (187)$$

Součin gravitační konstanty s hmotností Slunce $GM_{\odot}$ je ovšem možno díky radarovým a laserovým měřením ve sluneční soustavě určit mnohem přesněji, než samotnou gravitační konstantu či hmotnost Slunce v SI soustavě. Přijaté hodnoty jsou

$$\begin{aligned} GM_{\odot}(\text{TCB}) &= (1.32712442099 \pm 0.00000000010) \cdot 10^{20} \text{ m}^3\text{s}^{-2}, \\ GM_{\odot}(\text{TDB}) &= (1.32712440041 \pm 0.00000000010) \cdot 10^{20} \text{ m}^3\text{s}^{-2}, \end{aligned} \quad (188)$$

kde první hodnota je kompaktilní s koordinovaným barycentrickým časem TCB a druhá s barycentrickým dynamickým časem TDB (terestrickým časem doplněným o malé cyklické relativistické korekce). Pro účely studia dvojhvězd je příznivé, že ve všech důležitých rovnicích jako je třetí Keplerův zákon či vztahy pro velkou poloosu dráhy dvojhvězdy nebo hmotnosti složek vystupuje vždy součin $GM_{\odot}$, takže přesnost příslušných numerických koeficientů v rovnicích (2), (56), (57), (61) a (65) je mnohem větší, než jaká by plynula s chybou určení samotných hodnot G či $M_{\odot}$.

8.2 Základní astronomické jednotky

Astronomická jednotka au je veličina, jejíž chápání se vyvíjelo od pojmu střední vzdálenosti Země od Slunce k přesnější definici, že se jedná o poloměr kruhové dráhy tělíska zanedbatelné hmotnosti, které oběhne kolem středu Slunce za 1 siderický rok. Rozborem přesných měření byla získána hodnota $au = (149\,597\,870\,700 \pm 3) \text{ m}$. Z několika různých důvodů rozhodlo v roce 2012 Valné shromáždění Mezinárodní astronomické unie svou resolucí B2 definici astronomické jednotky změnit a učinit z ní konstantu o známé hodnotě vyjádřené v metrech. Nyní tedy platí, že

$$au = 149\,597\,870\,700 \text{ m} . \quad (189)$$

V souvislosti s tím bylo rozhodnuto, že ze soustavy astronomických jednotek bude vypuštěna Gaussova gravitační konstanta k . Nová definice astronomické jednotky bude aplikována při výpočtech ve všech užívaných časových škálách a součin $GM_\odot$ bude určován v SI soustavě přesnými měřeními s cílem nalézt jeho případné časové změny související jak se změnou hmotnosti Slunce, tak s relativistickými efekty.

Hmotnost a poloměr Slunce $M_\odot$ a $R_\odot$ jsou měřené veličiny, jejichž hodnoty v SI soustavě se nepochybně sekulárně mění: hmotnost v důsledku ztráty hmoty hvězdným větrem či naopak dopadem malých těles sluneční soustavy na sluneční povrch, poloměr pak v důsledku vývojové expanze a patrně i cyklicky. Navíc se v literatuře udávané hodnoty těchto veličin vzájemně dost liší i v souvislosti s tím, jak se jejich přesnost určení s časem zlepšovala. Vzhledem k tomu, že se ve stelární astronomii tradičně hmotnosti a poloměry hvězd vyjadřují právě ve slunečních jednotkách, vnáší se tím do jejich určení zbytečná nepřesnost. Harmanec a Prša (2011) proto navrhli přijmout *nominální* hodnotu slunečního poloměru, která by sloužila jako přesně definovaná hodnota převodu poloměrů hvězd vyjádřených ve slunečních poloměrech na kilometry.

Situace s hmotností Slunce je poněkud odlišná. Vzhledem k tomu, že hodnota součinu $GM_\odot$ je vztahem (188) definována velice přesně a jak již bylo zmíněno, vystupuje tento součin ve všech rovnicích definujících hmotnosti hvězd či planet, není třeba definovat samotnou nominální hodnotu sluneční hmotnosti.

Je zda ale jedna důležitá výjimka. Ve výpočtech vývojových modelů hvězd se používají hmotnosti hvězd v SI či častěji v cgs soustavě. Pokud bychom přijali nominální hodnotu součinu $GM_\odot$, lze hmotnost počítat ze vztahu

$$M_\odot[\text{kg}] = GM_\odot / G^{\text{aktuální}} \sim 1,988475 \cdot 10^{30} \text{ kg}. \quad (190)$$

Povšimněme si, že vzhledem k velké chybě gravitační konstanty G je lhostejno, zda zvolíme hodnotu součinu $GM_\odot$ vztaženou k času TCB nebo TDB.

V letech 2013-2015 připravovala pracovní skupina IAU pod vedením Petra Harmance a později Erica Mamajka návrh příslušné resoluce, který byl předložen Valnému shromáždění IAU v létě 2015 a schválen jako resoluce B3. ⁸ Harmanec a Prša (2011) původně navrhovali, aby se jako nominální poloměr Slunce přijala hodnota 695508 km. Torres a kol. (2010) ale publikovali rozsáhlou revizi přesných hmotností a poloměrů dobře pozorovaných dvojhvězd, ve které použili novou hodnotu slunečního poloměru z práce Haberreiterové a kol. (2008). Ta totiž řeší dlouho se vlekoucí neshodu mezi seismicky určeným a fotosferickým poloměrem Slunce. Při přípravě resoluce bylo proto nakonec doporučeno přijmout za nominální právě tuto hodnotu zaokrouhlenou s ohledem na chybu jejího určení, konkrétně

$$R_\odot = 695700 \text{ km}.$$

Rovněž bylo stanoveno, že přijatá hodnota $(\mathcal{GM})_\odot^N$ bude odpovídat nyní měřeným hodnotám zaokrouhleným na přesnost, při níž se ještě neliší hodnoty v TBC a TDB soustavách.

Poté, co byla resoluce přijata, publikovali Prša, Harmanec, Torres a kol. (2016) vysvětlující poznámky ke vzniku resoluce a také návod, jak ji prakticky aplikovat. Přijaté nominální sluneční pře-

⁸www.iau.org/static/resolutions/IAU2015_English.pdf

Tabulka 5: Nominální sluneční převodní konstanty na SI soustavu jednotek stanovené resolucí Mezinárodní astronomické unie B3 z roku 2015.

Quantity	Symbol	Value
nominální poloměr Slunce	$\mathcal{R}_{\odot}^N$	$6,957 \times 10^8 \text{ m}$
součin hmoty a gravitační konstanty	$(\mathcal{GM})_{\odot}^N$	$1,3271244 \times 10^{20} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$
nominální sluneční zářivý výkon	$\mathcal{L}_{\odot}^N$	$3,828 \times 10^{26} \text{ W}$
nominální bolometrický sluneční tok záření u Země	$\mathcal{S}_{\odot}^N$	1361 W m^{-2}
nominální efektivní teplota Slunce	$\mathcal{T}_{\odot}^N$	5772 K

vodní konstanty jsou shrnuty v tabulce 5. Doporučení je do všech programů, které provádějí např. řešení křivek radiálních rychlostí, světelných křivek a podobně, nominální jednotky zadat a příslušné veličiny počítat podle jejich definičních vztahů a rovnic - viz tabulka 3 ve výše citované práci. Astronomové počítající vývojové modely jsou zároveň vyzýváni, aby publikovali explicitně hodnotu gravitační konstanty G , kterou použili, aby v budoucnu bylo možné jejich výsledky přepočítat dle vztahu (190).

Závěrem technická poznámka, jak zapisovat v publikacích nominální jednotky:
Nominální hodnotu veličiny Q můžeme v Latexu zapsat pomocí definice,

```
\newcommand{\Qnom}{\hbox{$\mathcal{Q}^{\rm N}_{\odot}$}}
```

kterou lze pak užívat v textu i v rovnicích například takto:

```
$Q_1=15,3$\Qnom
```

a podobně.

9 Poděkování

Za kritické přečtení předchozích verzí tohoto textu, nalezení četných překlepů či za cenné připomínky děkujeme našim kolegům doc. RNDr. Petrovi Hadravovi, DrSc., Dr. Davidovi Holmgrenovi, Dr. Andreji Pršovi, Dr. Slavkovi Ruciňskému, doc. RNDr. Markovi Wolfovi, CSc. a také studentům Astronomického ústavu UK slečně Marii Hrudkové, Mgr. Janu Libichovi a pánům Pavolovi Habudovi, Tomáši Proseckému, Stanislavu Poddanému, Lukášovi Shrbenému a Michalovi Zajačkovi. Děkujeme také Mgr. Janu Károvi za poskytnutí programu, kterým byl vytvořen obrázek 2.

Monografie

- Aitken R.G. 1935 The binary stars, McGraw-Hill, New York
- Batten A.H. 1973 Binary and multiple systems of stars, Pergamon Press
- Eggleton P. 2006 Evolutionary Processes in Binary and Multiple Stars, Cambridge University Press
- Frank J., King A.R., Raine D.J. 1985 Accretion Power in Astrophysics. Cambridge University Press, 283 stran
- Heintz W. D. 1978, Geophysics and Astrophysics Monographs, Reidel Publishing Company, USA
- Hilditch R.W. 1999 Binary stars, Cambridge University Press
- Hiltner W.A. (Editor) 1962 Astronomical techniques, Chicago
- Kopal Z. 1959 Close Binary Systems, The International Astrophysics Series, London, Chapman and Hall, 558 stran
- Kopal Z. 1989 Astro. Astrophys. Space Library 152, Kluwer, Dordrecht, 273 stran
- Shore S.N. 2003 The Tapestry of Modern Astrophysics, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, USA
- Warner B. 1995 Cataclysmic variable stars, Cambridge U.P.

Reference

- Andersen J. 1991 Astron. Astrophys. Rev. 3, 91
- Andersen J., Nordstrom B., Mayor M., Polidan R.S. 1988 Astron. Astrophys. 207, 32
- Andersen J., Pavlovski K., Piirola V. 1989 Astron. Astrophys. 215, 272
- Anosova J. P. 1986 Astrophys. Space Sci. 124, 217
- Bagnuolo W.G. Jr., Gies D.R. 1991 Astrophys. J. 376, 266
- Barr J.R. 1908 Journal Royal Astron. Soc. Canada 2, 70
- Bisikalo D., Matsuda T. 2007 Proc. IAU Symp. 240, Cambridge Univ. Press, 356
- Bisikalo D.V., Harmanec P., Boyarchuk A.A., Kuznetsov O.A., Hadrava P. 2000 Astron. Astrophys. 353, 1009
- Borkovits T., Csizmadia Sz., Forgács-Dajka E., Hegedüs T. 2011 Astron. Astrophys. 528, A53
- Borkovits T., Rappaport S., Hajdu T., Sztakovics J. 2015 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 448, 946
- Borkovits T., Hajdu T., Sztakovics J. a kol. 2016 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 455, 4136

- Bos W.H. van den 1962 in *Astronomical Techniques*, ed. W.A. Hiltner, Chicago, 537
- Božić H., Harmanec P., Horn J., Koubský P., Scholz G., McDavid D., Hubert A.-M., Hubert H. 1995 *Astron. Astrophys.* 304, 235
- Bulut I, Demircan O. 2007 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 378, 179
- Brown E. W. 1936 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 97, 62
- Brož M. a kol. 2021 *Astron. Astrophys.* 645, A51
- Claret A. 2000 *Astron. Astrophys.* 363, 1081
- Claret A. 2007 *Astron. Astrophys.* 470, 1099
- Clarke C.J. 2007 *Binary Stars as Critical Tools and Tests*, IAU Symp. 240, Ed. by W.J. Hartkopf, E.F. Guinan a P. Harmanec, Cambridge Univ. Press, 337
- Code A.D., Davis J., Bless R.C., & Hanbury Brown R. 1976 *Astrophys. J.* 203, 417
- Conroy K.E. a kol. 2020 *Astrophys. J. Suppl.* 250, 34
- Da Costa G.S., Freeman K.C., Kalnajs A.J., Rodgers A.W., Stapinski T.E. 1977 *Astron. J.* 82, 810
- Davis J., Mendez A., Seneta E. B., Tango W. J., Booth A. J., O’Byrne J. W., Thorvaldson E. D., Ausseloos M., Aerts C., Uytterhoeven K. 2005 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 356, 1362
- Deeg H.J. 2021 *Galaxies* 9,1
- Díaz-Cordovés J. 1990 PhD Thesis, University of Complutense, Madrid, Spain
- Doazan V., Harmanec P., Koubský P., Krpata J., Žďárský F. 1982 *Astron. Astrophys.* 115, 138
- Doubek, J. 2006 *Spektroskopie hvězdy 60 Cygni*, diplomová práce, Astronomický ústav UK
- Downes R.A. & Shara M.M. 1993 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 105, 127
- Drobek D., Pigulski A., Shobbrook R.R., Narwid A. 2013 *Acta Astron.* 63, 339
- Duchêne G., & Kraus A. 2013 *ARA&A* 51, 269
- Duquennoy A., & Mayor M. 1991 *Astron. Astrophys.* 248, 485
- Eggleton P. P., & Tokovinin A. A. 2008 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 389, 869
- Etzel P.B. 1981 in *Photometric and Spectroscopic Binary Systems*, Ed. by E.B. Carling and Z. Kopal
- Fekel F.C., Tomkin J. 1993 *Astron. J.* 106, 1156
- Fekel F.C., Scarfe C.D., Barlow D.J., Hartkopf W.I., Mason B.D., McAlister H.A. 2002 *Astron. J.* 123, 1723
- Gies D.R., Williams S.J., Matson R.A., Guo Z., Thomas S.M., Orosz J.A., Peters G.J. 2012 *Astron. J.* 143, 137
- Giménez A. & Garcia-Pelayo J.M. 1983 *Ap& SS* 92, 203
- Giménez A. & Bastero M. 1995 *Ap& SS* 226, 99

- Goodwin S.P. & Kroupa P. 2005 *Astron. Astrophys.* 439, 565
- Gorda S.Y. 2000 *Inf. Bull. Var. Stars* No. 4839
- Griffin R.F. 1967 *Astrophys. J.* 148, 465
- Griffin R.F. 2000 *Observatory* 120, 1
- Guinan E.F. & DeWarf L.E. 2002 in *Exotic Stars*, IAU Col. 187, Ed. by C. Tout & Van Hamme, ASP Conf. Ser 279, 121
- Haberreiter M., Schmutz W., Kosovichev A.G. 2008 *ApJ* 675, L53
- Hadrava P. 1990 *Contr. Astron. Obs. Skalnaté Pleso* 20, 23
- Hadrava P. 1995 *Astron. Astrophys. Suppl.* 114, 393
- Hadrava P. 1997 *Astron. Astrophys. Suppl.* 122, 581
- Hadrava P. 2004a *Publ. astron. Inst. Acad. Sci. Czech Rep.* No. 92, 1
- Hadrava P. 2004b *Publ. astron. Inst. Acad. Sci. Czech Rep.* No. 92, 15
- Hadrava P. 2009a *Astron. Astrophys.* 494, 399
- Hadrava P. 2009b *arXiv:0909.0172v2*
- Harmanec P 1983 *Hvar Obs. Bull.* 7, 55
- Harmanec P. 1988 *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 39, 329
- Harmanec P. 1990 *Astron. Astrophys.* 237, 91
- Harmanec P. 1994 in *NATO ARW: The Impact of Long-term Monitoring on Variable Star Research*, Ed. by C. Sterken and M. de Groot, Kluwer, Dordrecht, 55
- Harmanec P. 2000 in *Smith a kol. 2000*, p. 13
- Harmanec P. 2003, pozvaný referát: Determination of basic physical properties of binary stars with hot components, ve sborníku *Close Binaries, Royal Road to the Stars*, ed. by O. Demircan a E. Budding, Canakkale, Turkey, July 2002
- Harmanec P., Prša A. 2011 *PASP* 123, 976
- Harmanec P., Koubský P., Krpata J., Ždárský F. 1976 *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 27, 47
- Harmanec P., Habuda P., Štefl S., Hadrava P., Korčáková D., Koubský P., Krtička J., Kubát J., Škoda P., Šlechta M., Wolf M., 2000 *Astron. Astrophys.* 364, L85
- Harmanec P., Božić H., Percy J.R., Yang S., Ruždjak D., Sudar D., M. Wolf, Iliev L., Huang L., Buil C., Eenens P. 2002 *Astron. Astrophys.* 387, 580
- Harmanec P., Lipták J., Koubský P., Božić H., Labadie-Bartz J., Šlechta M., Yang S., Harmanec, A. 2020 *Astron. Astrophys.* 639, A32, 1-15
- Harrington R.S. 1968 *Astron. J.* 73, 190
- Harrington R.S. 1969 *Celest. Mechan.* 1, 200
- Hartkopf W. I., Mason B. D. & Worley C. E. 2001 *Astron. J.* 122, 3472

- Hartkopf W.I., Guinan E.F., Harmanec P. (Eds.) 2007 Proc. IAU Symp. 240 Binary stars as critical tools and test in contemporary astrophysics, Cambridge Univ. Press, S240
- Hill G.W. 1902 Astron. J. 22, 93 a 117
- Hill G., 1979, Publ. Dom. Astrophys. Obs. 15, 297
- Hill G., 1993, in New Frontiers in Binary Star Research, Ed. K.-C. Leung and I.S. Nha, Astron. Soc. Pacific Conf. Ser. 38, 127
- Hill G., Harmanec P., Pavlovski K., Božić H., Hadrava P., Koubský P., Žižňovský J. 1997 Astron. Astrophys. 324, 965
- Holmgren D.E., Hadrava P., Harmanec P., Eenens P., Corral L.J., Yang S., Ak H., Božić H., 1999, Astron. Astrophys. 345, 855
- Horák T. 1966 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 17,27
- Horák T. 1970 Astron. J. 75, 1116
- Hubeny I., Plavec M.J. 1991 Astron. J. 102, 1156
- Hut 1981, Astron. Astrophys. 99, 126
- Iben I. & Livio M. 1993 Publ. Astron. Soc. Pacific 105, 1373
- Ilijic S., Hensberge H., Pavlovski K., Freyhammer L. M. 2004 ASPC 318, 111
- Juryšek J., Zasche P., Wolf M., Vraštil J., Vokrouhlický D., Skarka M., Liška J., Janík J., Zejda M., Kurfürst P, Paunzen E. 2017 Astron. Astrophys. (podáno do tisku)
- Kallrath J., Linnel A.P. 1987 Astrophys. J. 313, 346
- Kenworthy M.A., Lacour S., Kraus A., Triaud A.H.M.J., Mamajek E.E., Scott E.L., Ségransan D., Ireland M., Hambach F.-J., Reichart D.E., Haiskip J.B., LaCluyze A.P., Moore J.P., Frank N.R. 2015 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 446, 411
- Kiseleva L.G., Eggleton P.P., Mikkola S. 1998 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 300, 292
- Klioner S.A. 2016 <https://arxiv.org/pdf/1609.00915.pdf>
- Kloppenborg B., Stencel R.E., Monnier J.D., Schaefer G. a 13 spoluautorů 2010 Nature 464, 870
- Kozai Y. 1962 Astron. J. 67, 591
- Kratter K.M., Matzner C.D., Krumholtz M.R., Klein R.I. 2010 Astrophys. J. 708, 1585
- Kratochvíl P. 1964 *Těsné dvojhvězdy*, diplomová práce, Astronomický ústav UK Praha
- Kreiner J.M., Kim C-H. & Nha I.-S. 2000 An Atlas of $O-C$ Diagrams of Eclipsing Binary Stars, Krakow
- Kříž, S. 1972 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 23, 328
- Kříž, S., Harmanec P. 1975 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 26, 65
- Kuhi L.V., Schweizer F. 1970 Astrophys. J. 160, L185
- Kuiper G.P. 1941 Astrophys. J. 93, 133
- Kwee K.K., van Woerden H. 1956 Bull. Astron. Inst. Netherlands 12, 327

- Lacy C.H.S. 1992 *Astron. J.* 104, 2213
- Leinert C., Zinnecker H., Weitzel N. a kol. 1993 *Astron. Astrophys.* 278, 129
- Limber D.N. 1963 *Astrophys. J.* 138, 1112
- Linnell A.P., 1984, *Astrophys. J. Suppl.* 54, 17
- Linnell A.P., 1986, *Astrophys. J.* 300, 304
- Linnell A.P., 2000, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 319, 255
- Linnell A.P., 2002, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 334, 963
- Linnell A.P., Hubeny I., 1994, *Astrophys. J.* 434, 738
- Linnell A.P., Hubeny I., 1996, *Astrophys. J.* 471, 958
- Linnell A.P., Hubeny I., Lacy C.H.S. 1996 *Astrophys. J.* 459, 721
- Linnell A.P., Hubeny I., Harmanec P. 1998 *Astrophys. J.* 509, 379
- Littlefair S.P., Dhillon V.S., Marsh T.R., Gänsicke B.T., Southworth J., Watson C.A. 2006 *Science* 314, 1578
- Luzum B., Capitaine N., Fienga A., Folkner W., Fukushima T., Hilton J., Hohenkerk C., Krasinsky G., Petit G., Pitjeva E., Soffel M., Wallace P. 2011 *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 110, 293
- Mamajek E.E., Quillen A.C., Pecaute M.J., Moolekamp F., Scott E.L., Kanworthy M.A., Collier Cameron A., Parley N.R. 2012 *Astron. J.* 143, 72
- Mardling R. A. & Aarseth S. J. 2001 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 321, 398
- Mayer P., Harmanec P., Wolf M., Nemravová J., Prša A., Frémat Y., Zejda M., Liška J., Juryšek J., Hoňková K., Mašek M. 2016 *Astron. Astrophys.* 591, A129
- Mayer P., Lorenz R., Chochol D., Irsamambetova T.R. 1994 *Astron. Astrophys.* 288, L13
- Milne E.A. 1921 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 81, 361
- Mochnacki S.W., Doughty N.A. 1972 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 156, 51
- Morbey C.L. 1975 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 87, 689
- Mourard D. a kol. 2018 *Astron. Astrophys.* 618, A112
- Nemravová J.A., Harmanec P., Brož M. a kol. 2016 *Astron. Astrophys.* 594, A55, 1-47
- Olczak C., Pfalzner S., Spurzem R. 2006 *Astrophys. J.* 642, 1140
- Pathania A., Medupe T. 2012, *Astrophys. Space Sci.* 338, 127
- Peters G.J. 1972 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 84, 334
- Peters G.J. 2007 *Proc. IAU Symp.* 240, Cambridge Univ. Press, 148
- Petrova A.V. & Orlov V.V. 1999 *Astron. J.* 117, 587
- Pietrukowicz P., Mróz P., Soszyński I. a kol. 2013 *Acta Astronomica* 63, 115
- Plavec M. 1958 *Mém. Soc. R. Sci. Liège*, 14th ser., 20, 411
- Plavec M., Kratochvíl P. 1964 *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 15, 165

- Pourbaix D. 1998 *Astron. Astrophys. Suppl.* 131, 377
- Pringle J.E. 1981 *Ann. Rev. Astr. Astrophys.* 19, 137
- Prša A., Zwitter T. 2005, *Astrophys. J.* 628, 426
- Prša A., Conroy K.E., Horvat M., Pablo H., Kochoska A., Bloemen S., Giammarco J., Hambleton K.M., DeGroote P. 2016, *Astrophys. J. Suppl.* 227:29, 1-20
- Prša A, Harmanec P., Torres G., Mamajek E., Asplund M., Capitaine N., Christensen-Dalsgaard J., Depagne É., Haberreiter M., Hekker S., Hilton J., Kopp G., Kostov V., Kurtz D.W., Laskar J., Mason B.D., Milone E.F., Montgomery M., Richards M., Schmutz W., Schou J., Stewart S.G. 2016, *Astron. J.* 152:41, 1-7
- Raghavan D., McAlister H. A., Henry T. J. a kol. 2010 *Astrophys. J. Suppl.* 190, 1
- Rappaport S., Deck K., Levine A. a kol. 2013 *Astrophys. J.* 768, 33
- Ramsay G., Cropper M., Wu K., Mason K.O., Hakala P., 2000, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 311, 75
- Richards M.T., Hubeny I. (Eds.) 2012 *Proc. IAU Symp.* 282
- Ritter H., Kolb U. 1998 *Astron. Astrophys. Suppl.* 129, 83 low-mass X-ray binaries and related objects
- Roelofs G.H.A., Rau A., Marsh T.R., Steeghs D., Groot P.J., Nelemans G. 2010 *ApJ* 711, L138
- Roche E. 1859 *Ann. Obs. Paris* 5, 353
- Rucinski S. 1992 *Astron. J.* 104, 1968
- Rucinski S. 1998 *Turkish J. of Physics* 1, 1
- Simkin S.M. 1974 *Astron. Astrophys.* 31, 129
- Simon K.P., Sturm E. 1994 *Astron. Astrophys.* 281, 286
- Soberman G.E., Phinney E.S. & van den Heuvel E.P.J. 1997 *Astron. Astrophys.* 327, 620
- Söderhjelm S. 1975 *Astron. Astrophys.* 42, 229
- Sterzik M. F. & Tokovinin A. A. 2002 *Astron. Astrophys.* 384, 1030
- Sterne T.E. 1941 *Proc. National Acad. Sci.* 27, 168
- Struve O. 1944, *Astrophys. J.* 99, 89
- Taam R.E. & Sandquist E.L. 2000 *ARA& A* 38, 113
- Tassoul J.-L. 1988 *Astrophys. J.* 324, L71
- Tassoul J.-L. & Tassoul M. 1992 *Astrophys. J.* 395, 259
- Thackeray A.D. 1971 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 154, 103
- Tohline J., Durisen R. 2001 *The Formation of Binary Stars*, IAU Symp. 200, Ed. by H. Zinnecker a R.D. Mathieu, 40
- Tokovinin A. 2007, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 367, *Massive Stars in Interactive Binaries*, ed. N. St.-Louis & A. F. J. Moffat, 615

- Tokovinin A. 2008 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 389, 925
- Tokovinin A., Mason B. D., & Hartkopf W. I. 2010 Astron. J. 139, 743
- Tonry J., Davis M. 1979 Astron. J. 84, 1511
- Torres G., Andersen J., Giménez A. 2010 Astron. Astrophys. Rev. 18, 67
- Van Hamme W. 1993 Astron. J. 106, 2096
- Van Hamme W., Wilson R.E. 2003 in ASP Conf. Ser. 298 GAIA Spectroscopy, Science and Technology, Ed. by U. Munari, 323
- Wade R.A., Rucinski S.M. 1985 Astron. Astrophys. Suppl. 60, 471
- Warner B. 1987 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 227, 23
- Whitworth A. P. & Lomax O. 2015 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 448, 1761
- Wickramasinghe D.T. & Ferrario L. 2000 Publ. Astron. Soc. Pacific 112, 873
- Wilson R.E., 1974, Astrophys. J. 189, 319
- Wilson R.E., 1979, Astrophys. J. 234, 1054
- Wilson R.E., 1990, Astrophys. J. 356, 613
- Wilson R.E., 1993, in ASP Conf. Ser. 38 New Frontiers in Binary Star Research, Ed. by K.C. Leung and I.S. Nha, 91
- Wilson R.E., Devinney E.J., 1971, Astrophys. J. 166, 605
- Wilson R.E., Twigg L.W., 1980, IAU Symp. 88 Close Binary Stars: Observations and Interpretation, Ed. by D.M. Popper and R.K. Ulrich, Reidel, Dordrecht, 263
- Wood D.B., Forbes J.E. 1963 Astron. J. 68, 257
- Zahn J.P. 1977 Astron. Astrophys. 57, 383
- Zasche P., Uhlář R. & Svoboda P. 2014 Acta Astronomica 64, 125
- Zejda M. 2008 Analýza světelných křivek zákrytových dvojhvězd, PhD disertační práce, Astronomický ústav UK,
<http://www.physics.muni.cz/zejda/dizertace.pdf>
- Zucker S., Mazeh T. 1994 Astrophys. J. 420, 806
- Zucker S., Tal A. 2007 Astrophys. J. 654, L83