Vlny v plazmatu

- hledáme periodické (oscilující) řešení
- netriviální – komplexní problém
  ↳ zjednodušení: **lineární vlny**

Linearizace: veličina = pozadí + porucha

$$f = f_0 + f_1$$

pozadí: automaticky splňuje rovnice problému
→ použijeme tebutinovou aproximaci
→ proměnná 0. řádu

porucha: proměnná 1. řádu
malá ve srovnání s pozadím $f_1 \ll f_0$
průměrování nuží $\langle f_1 \rangle = 0$
→ totéž pro derivace

linearizace – porucha · porucha = proměnná 2. řádu
– v rovnicích ponecháme jen členy do 1. řádu

Notace: fluidní rovnice $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}$ (1)
$\vec{v}$ ← rychlost, $\vec{w}$ ← střední rychlost, $\vec{w}$ ← fluktuace

ALE

nyní: $\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{w}_1$ (2)
$\vec{w}$ ← rychlost, $\vec{w}_0$ ← pozadí, $\vec{w}_1$ ← fluktuace

je $\vec{w}$ z (1) totéž jako $\vec{w}$ z (2)?

ANO

Takže příklad:

Zvukové vlny v tekutině

kontinuita $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w}) = 0$

pohyb $\rho \left[\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} \right] = -\nabla p = -\frac{\partial p}{\rho} \nabla \rho$

↑ stavová rovnice adiabatická

Setup:
- → hydrodynamika pouze $E = B = 0$
- → bez viskozity
- → $w_0 = 0$
- → homogenní pozadí

Linearizace: rce kont.

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\rho_0 + \rho_1)(\vec{w}_0 + \vec{w}_1) \right] = 0$$

$$0 = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{w}_0) + \rho_0 \nabla \cdot \vec{w}_1 + \vec{w}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{w}_0 + \vec{w}_0 \cdot \nabla \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{w}_1)$$

pozadí = 0 ; homogenní pozadí $\nabla \rho_0 = 0$; $w_0 = 0$; 2. řád

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{w}_1 = 0 \qquad (a)$$

podobně Eulerovarce $\rho_0 \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} = -\nabla \frac{p_0}{\rho_0} \nabla \rho_1 \qquad (b)$

(a) a (b) řešíme

→ hledáme oscilující řešení, pak ansatz $A = \tilde{A} \exp\left[i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right]$ rovinná vlna

do splní

Dva pohledy: 1) hledáme řešení ve Fourierově prostoru

2) hledáme řešení jako superpozici módů (unikátní kombinace $\vec{k}$ a ω)

výhody: diferenciální operátory → algebraické

$\frac{\partial}{\partial t} \bullet \to -i\omega \bullet$, $\nabla \bullet \to i\vec{k} \bullet$, $\Delta \bullet \to -k^2 \bullet$

Co chceme? Hledáme disperzní relaci

$D(\vec{k}, \omega) = 0$ ← vazba mezi k a ω
← popis daného modu

náš případ:

(a) → $-i\omega\rho_1 + i\rho_0 \vec{k}\cdot\vec{w}_1 = 0$

(b) → $-i\omega\rho_0 \vec{w}_1 + \nu\eta \frac{\rho_0}{\rho_0} \vec{k}\rho_1 = 0$

zvolme $k \parallel w_1$

$-i\omega\rho_1 + i\rho_0 k w_1 = 0$; $-i\omega\rho_0 w_1 + \nu\eta \frac{\rho_0}{\rho_0} k\rho_1 = 0$

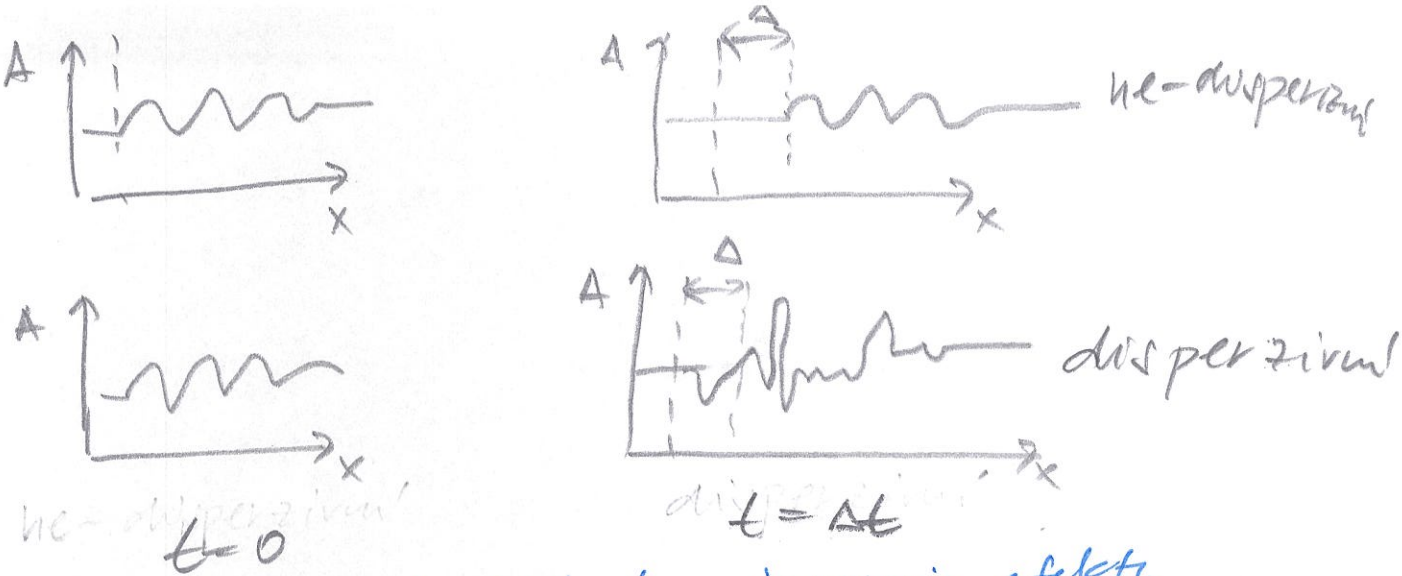
$\rho_1 = \frac{\omega\rho_0^2 w_1}{\eta k \rho_0}$

$-\frac{\omega^2\rho_0^2 w_1}{\eta k \rho_0} + \rho_0 k w_1 = 0 \quad / \cdot \frac{\eta k \rho_0}{\rho_0}$

$-\omega^2 w_1 + \eta \frac{\rho_0}{\rho_0} k^2 w_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{k} = \sqrt{\eta \frac{\rho_0}{\rho_0}}}$ disperzní relace

$\uparrow \equiv c_s$

- $D(\omega, k)$ obsahuje k, takže propagující se vlna.
  Bez k – oscilace
- $\lambda = 2\pi/k$ vlnová délka
- fázová rychlost $v_f = \frac{\omega}{k} = c_s$
  ↳ rychlost postupu konstantní fáze
- grupová rychlost $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c_s$
  ↳ rychlost propagace signálu (= modulace)
  $v_g \leq c$!
- pokud $v_f = v_g$ ... nedisperzivní vlna
  (zachovává se vlnoplocha, jen posun)
  $v_f \neq v_g$ ... disperzivní vlna
  (vlnoplocha mění tvar)
  $- v_f \equiv v_f(k)$



- „geometrická optika" – ignoruje efekty konečné vlnové délky
  - lepší popis: teorie rozptylu
- disperzní relace popisuje vztah ω, k
  → říká, že vlna musí existovat (co když se neexcituje?)
  → nepopisuje amplitudu ani vlnoplochu (kvůli dalším podmínkám)
  → nepopisuje mechanismus vzniku

Pozn: co když $\vec{w}_0 \neq 0$?

ve kontinuitě

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{w}_1 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{w}_0 + \vec{w}_0 \cdot \nabla \rho_1 = 0$$

($\rho_1 \nabla \cdot \vec{w}_0 = 0$ … homogenní)

$$-i\omega \rho_1 + i \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{w}_1 + i \rho_1 \vec{w}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

$$-i\rho_1 (\underbrace{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}_0}_{\omega'}) + i \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{w}_1 = 0$$

$$-i \rho_1 \omega' + i \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{w}_1 = 0 \quad \text{jako předtím}$$

$$\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{w}_0$$

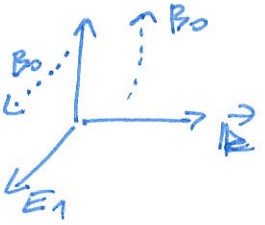
↑ Dopplerův jev!

Vlny v plazmatu

- excitovány obvykle nestabilitami

- ZOO:
  - elektronové
  - iontové
    - $\vec{k} \parallel \vec{E}_1$ – elektrostatické, longitudinální
    - $\vec{k} \nparallel \vec{E}_1$ – elektromagnetické, transverzální
      - $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ – paralelní
      - $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ – perpendikulární

$k \perp E_1$, $k \perp B_0$ dva druhy



Postup

→ setup → podmínky pro hledanou ~~vlnu~~ vlnu
→ řešení linearizovaných tekutinových rovnic (odpovídajících problému)
→ pokud řešení nalezeno → vlna může existovat
→ diskuse vlastností řešení

Plazmové oscilace

setup:
- $E_0 = B_0 = 0$, $B_1 = 0$, $E_1 \neq 0$
- bez tepelných pohybů
- ionty pevně pozadí
- $n_{e0} = n_{i0} = n_0$
- pozadí homogenní a stacionární
- $\vec{u}_{e0} = 0$

=J=

Linearizované rovnice:

$$m n_0 \frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} = -e n_0 \vec{E}_1 \quad / \nabla\cdot$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + \nabla\cdot[n_0 \vec{u}_{e1}] = 0$$

$$\vec{E}_1 = -\nabla \phi_1$$

$$\varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E}_1 = -e n_{e1}$$

$$\varepsilon_0 \Delta\phi_1 = n_{e1} e$$

$$m n_0 \frac{\partial \nabla\cdot\vec{u}_{e1}}{\partial t} = e n_0 \Delta\phi_1$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla\cdot\vec{u}_{e1} = 0$$

$$m n_0 \frac{\partial \nabla\cdot\vec{u}_{e1}}{\partial t} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0} n_{e1}$$

$$\nabla\cdot\vec{u}_{e1} = -\frac{1}{n_0}\frac{\partial n_{e1}}{\partial t}$$

$$-m\frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0} n_{e1} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$$

$$\omega^2 n_{e1} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} n_{e1} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \equiv \omega_p^2}$$

plazmová frekvence

- $\omega^2 = \omega_p^2$ nemá k → oscilace, plazmové oscilace (oscilace elektronů kolem základní polohy)
- $v_f = \frac{\omega}{k}$ není definovaná, není vázbe ve fázích
- $v_g = \frac{d\omega}{dk} = 0$ → nešíří se signál
- relaxace požadavku chladných elektronů

$$\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2} = \frac{k_B T_e}{m}\frac{1}{\omega_p^2} \sim \frac{1}{2} v_T^2 \frac{1}{\omega_p^2}$$

pro $v_T \sim \sqrt{\frac{2 k_B T_e}{m}}$

– fluktuace plazmových oscilací stínění na Debyeově škále ⇒ není makroskopická změna náboje

Elektronová elektrostatická vlna bez mg. pole

Setup
- $E_0 = B_0 = 0$, $B_1 = 0$, $E_1 \neq 0$
- Ionty chladné, elektrony ne
- Ionty fixní pozadí
- pozadí stacionární a homogenní
- $\vec{u}_{e0} = 0$
- $n_{e0} = n_{i0} = n_0$ $\quad k \parallel E_1$

→ tepelné pohyby – izotermická stavová rce

$\nabla p_e = \nabla (3 k_B T_e n_e) = 3 k_B T_e \nabla (n_0 + n_{e1})$

↳ 1-D problém, $\gamma = \frac{2+N}{N} = 3$ $\quad N$ ... stupně volnosti

Linearizované rce: $m n_0 \frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} = -e n_0 E_1 - 3 k_B T_e \nabla n_{e1} \quad / \nabla \cdot$

$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{e1} = 0$

$\vec{E}_1 = -\nabla \phi_1$

$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_1 = -e n_{e1}$

$\varepsilon_0 \Delta \phi_1 = n_{e1} e$

$m n_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{u}_{e1} = e n_0 \Delta \phi_1 - 3 k_B T_e \Delta n_{e1}$

$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{e1} = 0$

$m n_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{u}_{e1} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0} n_{e1} - 3 k_B T_e \Delta n_{e1}$

$\nabla \cdot \vec{u}_{e1} = -\frac{1}{n_0} \frac{\partial n_{e1}}{\partial t}$

$-m \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0} n_{e1} - 3 k_B T_e \Delta n_{e1}$ $\quad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$, $\nabla \cdot \to +ik\cdot$, $\Delta \to -k^2$

$\omega^2 n_{e1} = \omega_p^2 n_{e1} + 3 k^2 \frac{k_B T_e}{m} n_{e1}$

$v_t^2 = \frac{2 k_B T_e}{m}$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_t^2}$$

- DR má $k \to$ vlna se propaguje. Šíří se jen pro $\omega > \omega_p$. Pro $\omega < \omega_p$ útlum

=7→

- $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + 3/2 k^2 v_T^2}}{k} = v_f(k)$

vlna disperzivní

- $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2}\frac{v_T^2 k}{\omega} = \frac{3}{2}\frac{v_T^2 k}{\sqrt{\omega_p^2 + 3/2 k^2 v_T^2}} \neq 0$ vlna nese signál

limitně: $\lim_{k\to\infty} v_g = \frac{3}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{v_T^2 k}{\sqrt{\omega_p^2 + 3/2 k^2 v_T^2}} \approx \frac{3}{2}\frac{v_T^2 k}{\sqrt{3/2 k^2 v_T^2}} =$

$= \sqrt{\frac{3}{2}}\, v_T$

⇒ limitně se propaguje teminální rychlostí

- řešení n v hustotě, co jiné veličiny?
- disperzní relace stejná, ale vzájemně možné fázové posuny

př. plné řešení pro hustotu $n_{e1} = \overline{n_{e1}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

$\vec{E_1}$? $\vec{E_1} = \overline{E_1} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_{E_1})$

Poisson: $\varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E_1} = -e n_{e1}$

$-\varepsilon_0 k \cdot \overline{E_1} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_{E_1}) = -e\,\overline{n_{e1}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

$\sin(k\cdot r - \omega t)\cos\delta_{E_1} + \cos(k\cdot r - \omega t)\sin\delta_E =$

$= \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{\overline{n_{e1}}}{\vec{k}\cdot\overline{E_1}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

řešení pro $\delta_{E_1} = \frac{\pi}{2}$ ⇒ fázový posun proti n_{e1}

- směr $\vec{u}_{e1}$?

Lorentz: $-\omega\vec{u}_{e1} = e(\vec{E_1} + \vec{u}_{e1}\times\vec{B_0})$, $B_0 = 0$

$\Rightarrow \vec{u}_{e1} = -\frac{e}{\omega}\vec{E_1} \Rightarrow \vec{u}_{e1} \parallel \vec{E_1}$

→ opravdu podélná vlna

Iontová elektrostatická vlna s $B_0 = 0$

Setup:
- $E_0 = B_0 = 0$, $B_1 = 0$, $E_1 \neq 0$
- ionty i eletrony mají termální pohyby
- $n_{e0} = n_{i0} = n_0$
- pozadí stacionární homogenní
- $\vec{u}_{e0} = \vec{u}_{i0} = 0$

Linearizované rovnice

$$m n_0 \frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} = -e n_0 \vec{E}_1 - 3 k_B T_e \nabla n_{e1}$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{e1} = 0$$

$$M n_0 \frac{\partial \vec{u}_{i1}}{\partial t} = e n_0 \vec{E}_1 - 3 k_B T_i \nabla n_{i1} \quad | \nabla \cdot$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{i1} = 0$$

$$\vec{E}_1 = -\nabla \phi_1$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_1 = e (n_{i1} - n_{e1})$$

Ionty „těžké" → elektrony „následují" ionty a vytvářejí stínění → použijeme Boltzmannův vztah

$$n_{e1} = n_e - n_{e0} = n_0 \left(\exp \frac{e\phi_1}{k_B T_e} - 1 \right) \sim n_0 \frac{e\phi_1}{k_B T_e}$$ a vyřešeno

$$M n_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{u}_{i1} = -e n_0 \Delta \phi_1 - 3 k_B T_i \Delta n_{i1}$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{i1} = 0$$

$$-\varepsilon_0 \Delta \phi_1 = e n_{i1} - e^2 n_0 \frac{\phi_1}{k_B T_e}$$

$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

$\nabla \to +ik$

$\Delta \to -k^2$

$$\cancel{-} M \cancel{i} \omega^2 n_{i1} = \cancel{-i} e n_0 k^2 \phi_1 \cancel{-i} 3 k_B T_i k^2 n_{i1}$$

$$+ \varepsilon_0 k^2 \phi_1 = e n_{i1} - e^2 n_0 \frac{\phi_1}{k_B T_e}$$

$$\omega^2 = \frac{e^2 n_0 k^2}{M \left(\varepsilon_0 k^2 + \frac{e^2 n_0}{k_B T_e} \right)} + \frac{3 k_B T_i k^2}{M}$$

$\Omega_p^2 \equiv \frac{e^2 n_0}{M \varepsilon_0}$ plazmová iontová frekvence

$\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}$, $v_{Ti}^2 = \frac{2 k_B T_i}{M}$

$$\omega^2 = \frac{\Omega_p^2 \lambda_D^2 k^2}{\lambda_D^2 k^2 + 1} + \frac{3}{2} v_{Ti}^2 k^2$$

elektrostatická iontová vlna

neplatí obecně!

- plazmová aproximace $n_i = n_e \rightarrow$ $n_{e1} = n_{i1}$

$\rightarrow k\lambda_D \ll 1$

pak $\omega^2 = k^2 \left(\frac{k_B T_e}{M} + 3\frac{k_B T_i}{M} \right)$

- $v_f = \sqrt{\frac{k_B T_e + 3 k_B T_i}{M}} \equiv c_s$ v plazmatu

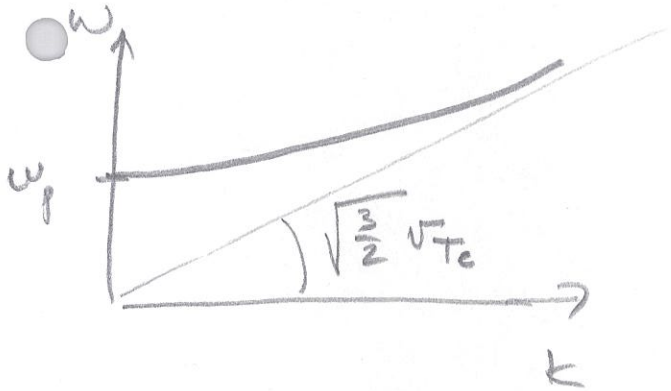
v plazmatickém přiblížení je vlna nedisperzivní. Disperze se objeví na škálách sub-Debyeovských

- $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_f = c_s$
- v laboratoři a často i ve vesmíru $T_i \ll T_e$

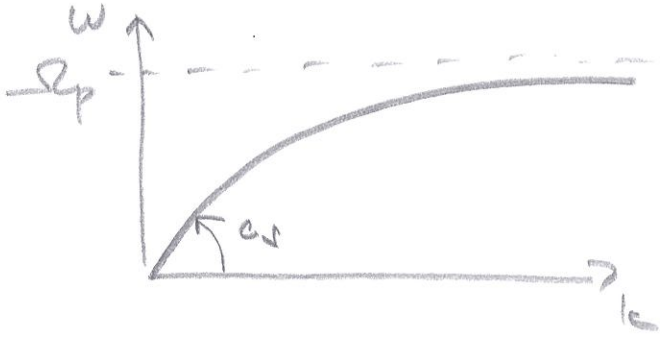
$\Rightarrow c_s \sim \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} \Rightarrow$ hmotnost iontů, ale teplota elektronů!

- iontová vlna existuje jen, když funguje stínění. Elektrony vytažený, stínění nedokonalé, vznikají akumulace náboje, vlna se šíří prostřednictvím vznikého vnitřního $\vec{E}$ pole
- asymptoticky $k \to 0 \Rightarrow \omega = 0$

$k \to \infty \Rightarrow \omega = \Omega_p$



elektronová



iontová

elektrostatická vlna

$$-i\omega m\, v_{e1} = -e\,(E_1 + v_{e1} \times B_0)$$

$$-i\omega n_{e1} + i n_0\, k \cdot \vec{v}_{e1} = 0 \;\rightarrow\; n_{e1} = \frac{n_0}{\omega} k \cdot \vec{v}_{e1}$$

$$i k \cdot E_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_{e1}$$

$$E_1 = \frac{i\omega m \vec{v}_{e1}}{e} - \vec{v}_{e1} \times B_0$$

$$\omega\, k \cdot E_1 = -\frac{e n_0}{\omega \varepsilon_0} k \cdot \vec{v}_{e1} \Rightarrow k \cdot E_1 = \frac{i e n_0}{\omega \varepsilon_0} k \cdot \vec{v}_{e1}$$

$$k \parallel E_1 \Rightarrow \quad k \cdot E_1 = k E_1 = \frac{i e n_0}{\omega \varepsilon_0} k \cdot v_{e1}$$

$$|E_1| = \frac{i e n_0}{k \omega \varepsilon_0} k \cdot \vec{v}_{e1}$$

$$\vec{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_1 \sin\alpha \\ 0 \\ E_1 \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k \sin\alpha \\ 0 \\ k \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_1 \sin\alpha \\ 0 \\ E_1 \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{i\omega m}{e} \begin{pmatrix} v_{e1,x} \\ v_{e1,y} \\ v_{e1,z} \end{pmatrix} - B_0 \begin{pmatrix} v_{e1,y} \\ -v_{e1,x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|E_1| = \frac{i e n_0}{k \omega \varepsilon_0} \left(k v_{e1,x} \sin\alpha + k v_{e1,z} \cos\alpha \right)$$

$$\frac{i e n_0}{k \omega \varepsilon_0} \left(k v_{e1,x} \sin\alpha + k v_{e1,z} \cos\alpha \right) \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{i\omega m}{e} \left(\; \right) - B_0 \begin{pmatrix} v_{e1,y} \\ -v_{e1,x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$/ \cdot \frac{1}{i} \frac{e}{\omega m}$$

Elektronové vlny v $B_0 \neq 0$ elektrostatické

Setup:
- $E_0 = 0$, $B_0 \neq 0$, $B_1 = 0$, $E_1 \neq 0$
- ionty stacionární, tepelné pohyby elektronů taky zanedbáme
- pozadí homogenní a stacionární
- $\vec{u}_{e0} = 0$
- $\vec{k} \parallel \vec{E}_1$ ← podmínka elektrostatické vlny

Linearizované rovnice v Fourierově obraze

$$-i\omega m \vec{u}_{e1} = -e\left(\vec{E}_1 + \vec{u}_{e1} \times \vec{B}_0\right)$$

$$-i\omega n_{e1} + i n_0 \vec{k} \cdot \vec{u}_{e1} = 0$$

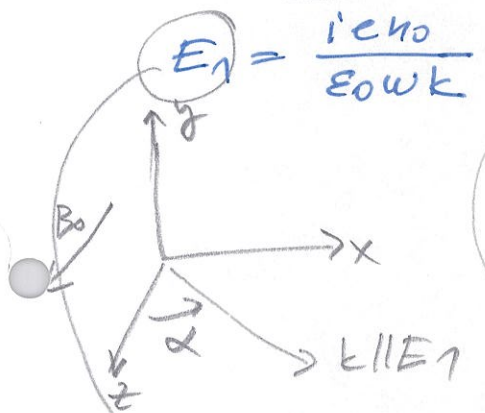
$$i \vec{k} \cdot \vec{E}_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_{e1}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{i\omega m}{e} \vec{u}_{e1} - \vec{u}_{e1} \times \vec{B}_0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = \frac{i e n_0}{\varepsilon_0 \omega} \vec{k} \cdot \vec{u}_{e1}$$

$\vec{k} \parallel \vec{E}_1 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_1 = k E_1$

$$E_1 = \frac{i e n_0}{\varepsilon_0 \omega k} \vec{k} \cdot \vec{u}_{e1}$$ amplituda E_1



$$\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$$
$$\vec{E}_1 = (E_1 \sin\alpha, 0, E_1 \cos\alpha)$$
$$\vec{k} = (k \sin\alpha, 0, k \cos\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} u_{e1,x} \sin\alpha + u_{e1,z} \cos\alpha \\ 0 \\ u_{e1,x} \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_1 \sin\alpha \\ 0 \\ E_1 \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{i e n_0}{\varepsilon_0 \omega} \begin{pmatrix} u_{e1,x} \sin^2\alpha \\ 0 \\ u_{e1,z} \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \frac{i\omega m}{e} \begin{pmatrix} u_{e1,x} \\ u_{e1,y} \\ u_{e1,z} \end{pmatrix} - B_0 \begin{pmatrix} u_{e1,y} \\ -u_{e1,x} \\ 0 \end{pmatrix} \Big| \cdot \frac{1}{i\omega} \frac{e}{m}$$

$$\begin{pmatrix} u_{e1,x} \\ u_{e1,y} \\ u_{e1,z} \end{pmatrix} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \begin{pmatrix} u_{e1,x} \sin^2\alpha \\ 0 \\ u_{e1,z} \cos^2\alpha \end{pmatrix} + i \frac{\omega_c}{\omega} \begin{pmatrix} u_{e1,y} \\ -u_{e1,x} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

Maticová rovnice $M_\omega \cdot \vec{w}_{11} = 0$ s maticí

$$M_\omega = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\sin^2\alpha & i\frac{\omega_c}{\omega} & -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\sin\alpha\cos\alpha \\ -i\frac{\omega_c}{\omega} & 1 & 0 \\ -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\sin\alpha\cos\alpha & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

netriviální řešení pro $\det M_\omega = 0$ | rozvoj

$$\det M_\omega = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\cos^2\alpha\right)\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\sin^2\alpha - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) = 0$$

↑ $+\frac{\omega_p^4}{\omega^4}\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

elektronové elektrostatické vlny v přítomnosti podélného magnetického pole

- není $k \Rightarrow$ jen oscilace!
- $\alpha = 0 \Rightarrow$ podél pole

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_p^2} \wedge \boxed{\omega^2 = \omega_c^2}$$

podél pole jakoby tam nebyl + cyklotronní frekvence

- $\alpha = \pi/2 \Rightarrow$ napříč polem

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) = 0$$

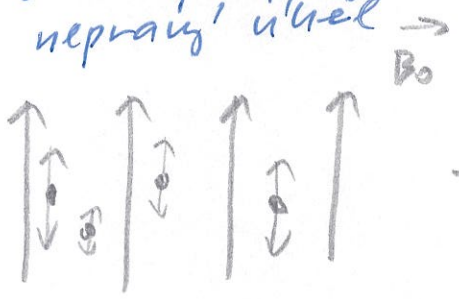
$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \equiv \omega_h^2}$$

horní hybridní frekvence

Iontové elektrostatické vlny

setup:
- $\vec{E}_0 = 0$, $B_0 \neq 0$, $B_1 = 0$, $E_1 \neq 0$
- elektrony termální pohyb, ionty chladné
- $n_{i0} = n_{e0} \equiv n_0$
- pozadí homogenní stacionární
- $\vec{w}_{i0} = \vec{w}_{e0} = 0$
- $\vec{k} \parallel \vec{E}_1$

→ dva případy $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ a $\vec{k}$ a $\vec{B}_0$ svírají úhel



elektrony stíní jen podél pole, nemohou být nositeli nabojové napětí

elektrony mohou stínit, existuje komponenta $\vec{E}$ podél pole → může vznikout vlna

① $\sphericalangle(\vec{k}, \vec{B}_0) = \alpha$, $\alpha \neq \pi/2$

→ elektrony vyšetříme Boltzmannovým vztahem

Euler: $-i\omega M \vec{w}_{i1} = -e\nabla\phi_1 + e\vec{w}_{i1} \times \vec{B}_0$

v komponentách: $-i\omega M w_{i1x} = -eik\phi_1 + e w_{i1y} B_0$

$-i\omega M w_{i1y} = +e w_{i1x} B_0$

$-i\omega M w_{i1x} = -eik\phi_1 + eB_0 \frac{eB_0}{i\omega M} w_{i1x}$ / : $i\omega M$

$+w_{i1x} = +\frac{ek\phi_1}{\omega M} + \left(\frac{eB_0}{M}\right)^2 \frac{1}{i^2\omega^2} w_{i1x}$

$w_{i1x} - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2} w_{i1x} = \frac{ek\phi_1}{\omega M}$

$w_{i1x} = \frac{ek\phi_1}{\omega M}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}$

kontinuita: $n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} w_{Ni1x}$

Boltzmann $n_{e1} = n_0 \frac{e\phi_1}{k_B T_e}$

pro $n_i = n_e$ a $n_{i1} = n_{e1}$

$$\Rightarrow w_{Ni1x} = \frac{\omega}{k} \frac{e\phi_1}{k_B T_e}$$

$$\frac{\omega}{k} \frac{e\phi_1}{k_B T_e} = \frac{e k \phi_1}{\omega M} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 - \Omega_c^2 = \frac{k_B T_e}{M} k^2}$$

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{k_B T_e}{M} + \frac{3 k_B T_i}{M}\right) \doteq \frac{k_B T_e}{M} \qquad T_i \ll T_e$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 c_s^2}$$

iontová zvuková vlna v B_0

jen pokud $\theta > \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$

pak kinetická energie elektronů dost velká na stínění

pro úhly menší musíme jinak

(2) $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ bez stínění. Řešíme obojí e^- i i^+

pro ionty z předchozího

$$w_{Ni1x} = \frac{ek\phi_1}{M}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \wedge n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} w_{Ni1x}$$

pro elektrony analogicky

$$w_{e1x} = -\frac{ek\phi_1}{m}\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \wedge n_{e1} = n_0 \frac{k}{\omega} w_{e1x}$$

pokud $n_{e1} = n_{i1}$, pak $w_{e1} = w_{i1}$

$$M\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right) = -m\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)$$

$$M \frac{\omega^2 - \Omega_c^2}{\omega^2} = -m \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2}$$

$$M\omega^2 - M\Omega_c^2 = -m\omega^2 + m\omega_c^2$$

$$\omega^2(M+m) = m\omega_c^2 + M\Omega_c^2 = e^2B_0^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) =$$

$$= e^2B_0^2\left(\frac{M+m}{mM}\right)$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{eB_0}{m}\,\frac{eB_0}{M} = \omega_c\,\Omega_c \equiv \omega_d^2}$$

~~iontová elektrostatická vlna~~
iontové elektrostatické oscilace napříč mg. polem

dolní hybridní frekvence

Elektromagnetické vlny

→ podélná $k \perp E_1$, elektro**magnetické** $\Rightarrow B_1 \neq 0$

Světelné vlny ve vakuu

Setup: $B_0 = E_0 = 0$

vakuum $\Rightarrow \mu_e = \mu_i = \mu_0 = 0$, $\vec{u_e} = \vec{u_i} = 0$

$k \perp E_1$

pouze Maxwellovy linearizované

$$\nabla \times E_1 = -\dot{B}_1 \qquad / \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B_1 = \varepsilon_0 \dot{E}_1 \qquad \nabla \times$$

$$\nabla \cdot B_1 = 0$$

$$\nabla \times \dot{E}_1 = -\ddot{B}_1$$

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla \times \nabla \times B_1 = \nabla \times \dot{E}_1$$

$$\nabla \cdot B_1 = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$, $\nabla \to i\vec{k}$

$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

$$-c^2 k \times (k \times B_1) = \omega^2 B_1$$

$$k \cdot B_1 = 0$$

$$-c^2 [(k \cdot B_1) k - k^2 B_1] = \omega^2 B_1 \; ; \; k_g \cdot B_1 = 0$$

$$\Rightarrow c^2 k^2 B_1 = \omega^2 B_1 \qquad \boxed{\omega^2 = c^2 k^2}$$

- klasické světelné vlny

Světelné vlny v plazmatu

Setup:
- $B_0 = E_0 = 0$
- pozadí homogenní a stacionární
- ionty tvoří nehybné pozadí ($\omega \gg \Omega_p$)
- ionty i elektrony chladné
- $k \perp E_1$

podobně jako předtím, v Ampérově zákoně zůstává proud

$$\nabla \times E_1 = -\dot{B}_1 \quad / \nabla\times$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times B_1 = \varepsilon_0 \dot{E}_1 + j_1 \quad / \frac{\partial}{\partial t}$$

a zpojit přes $\nabla \times B_1$

$$\nabla\times\nabla\times E_1 = -\nabla\times\dot{B}_1 = \mu_0\varepsilon_0 \ddot{E}_1 - \mu_0 \dot{j}_1 =$$

$$= \frac{1}{c^2}\ddot{E}_1 - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\dot{j}_1 \qquad \nabla \to i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$$

$$-(k\cdot E_1)k + k^2 E_1 = \frac{i\omega}{\varepsilon_0 c^2} j_1 + \frac{\omega^2}{c^2} E_1$$

podmínka $k \perp E_1 \Rightarrow k\cdot E_1 = 0$

$$\Rightarrow (\omega^2 - c^2k^2)\vec{E}_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0}\vec{j}_1$$

j_1 z rekurentních rovnic pro elektrony

$$\vec{j}_1 = -n_0 e \vec{v}_{e1} \quad \text{– Eulerova rce}$$

$$-i\omega m \vec{v}_{e1} = m\frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} = -e\vec{E}_1 \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$$

$$\vec{j}_1 = -n_0 e \frac{e}{i\omega m}\vec{E}_1 = -\frac{n_0 e^2}{i\omega m}\vec{E}_1$$

$$(\omega^2 - c^2k^2)\vec{E}_1 = \frac{i\omega}{\varepsilon_0}\frac{n_0 e^2}{i\omega m}\vec{E}_1 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}\vec{E}_1 = \omega_p^2 \vec{E}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2}$$

- $v_f = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} > c^2$

  → fázová rychlost $> c$! ale nenese signál
- v_f závisí na k ⇒ v plazmatu disperzivní

  pro $k \to \infty$ $\omega^2 \sim c^2k^2$! pak nedisperzivní
- $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right) = \frac{2c^2k}{2\sqrt{\omega_p^2 + c^2k^2}} = \frac{c^2}{v_f} < c$ pro $v_f > 0$

  → grupová rychlost $< c$ ← nese signál

- propagace jen pro $\omega^2 > \omega_p^2$

↖ hraniční (cut-off) frekvence

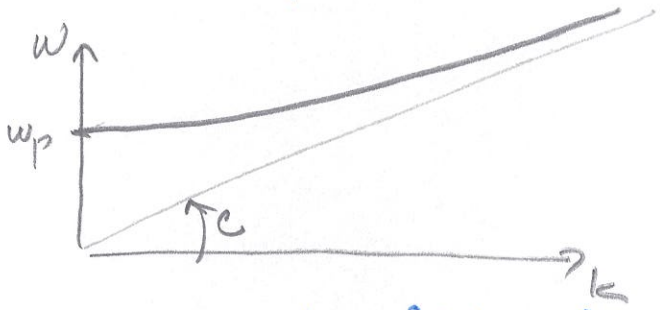
pro $\omega^2 < \omega_p^2$:

$$ck = (\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2} = i\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$$

pro $E_1 = \overline{E_1}\exp[i(kr - \omega t)] \propto \exp[ikx] =$

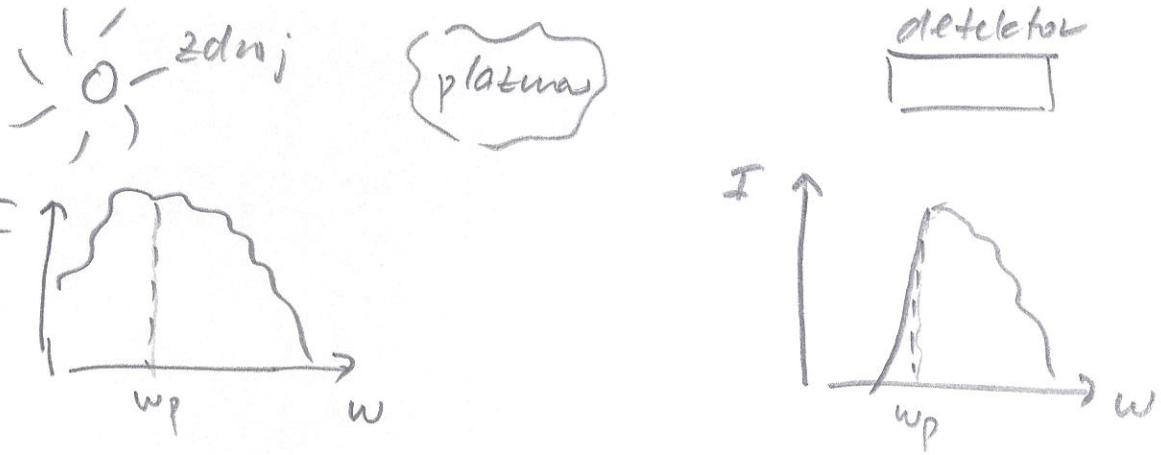
$$= \exp\left[-x\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}\right] = \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right]$$

$$\delta \equiv \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}} \quad \ldots \text{útlumová délka}$$



$$\omega_p = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}$$

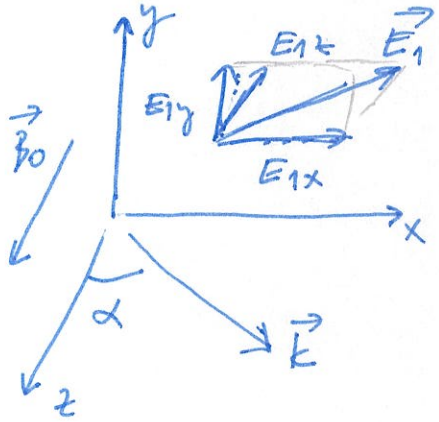
primitivní způsob měření hustoty
→ oblak se ozáří spektrem, které projde, stanoví se $\omega_p \to n_0$



- při průletu plazma stoupá atmosférou hvězdy a je zdrojem elmag. vln

Komplex elmag. vln v plazmatu s B_0

Setup
- jako předtím
- $B_0 \neq 0$



souřadnicový systém

$\vec{B}_0 \parallel \hat{z}$, $\sphericalangle(\vec{k}, \vec{B}_0) = \alpha$

$\vec{b}_0 = \frac{\vec{B}_0}{|B_0|}$

$\vec{b}_0 = (0, 0, 1)$; $\vec{k} = (k\sin\alpha, 0, k\cos\alpha)$

$\vec{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y}, E_{1z})$

- linearizovaná rce

$-i\omega m \vec{v}_{e1} = -e(\vec{E}_1 + \vec{v}_{e1} \times \vec{B}_0)$

$+ i\vec{k} \times \vec{E}_1 = +i\omega \vec{B}_1$

$\frac{i}{\mu_0} \vec{k} \times \vec{B}_1 = -\varepsilon_0 i\omega \vec{E}_1 - e n_0 \vec{v}_{e1}$

ω_c

$$\vec{v}_{e1} = -i\frac{e}{m\omega}\vec{E}_1 - i\frac{eB_0}{m\omega}\vec{v}_{e1} \times \vec{b}_0$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{c^2}{\omega^2}\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_1) + i\frac{e n_0}{\varepsilon_0 \omega}\vec{v}_{e1}$$

$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$\vec{v}_{e1} = -i\frac{\varepsilon_0 \omega}{e n_0}\vec{E}_1 - i\frac{c^2 \varepsilon_0 \omega}{\omega^2 e n_0}\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_1)$$

$$-i\frac{\varepsilon_0 \omega}{e n_0}\vec{E}_1 - i\frac{c^2 \varepsilon_0}{\omega e n_0}\left(\vec{k} \times [\vec{k}, \vec{E}_1]\right) =$$

$$= -i\frac{e}{m\omega}\vec{E}_1 - i\frac{\omega_c}{\omega}\left[-i\frac{\varepsilon_0 \omega}{n_0 c}\vec{E}_1 - i\frac{c^2 \varepsilon_0}{\omega e n_0}\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_1)\right] \times \vec{b}_0 \quad / \cdot \frac{-e n_0 \omega}{i\varepsilon_0}$$

$$\omega^2 \vec{E}_1 + c^2(\vec{k}\cdot\vec{E}_1) - c^2 k^2 \vec{E}_1 =$$

$$= \underbrace{\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m}}_{\omega_p^2}\vec{E}_1 - i\omega_c \omega \vec{E}_1 \times \vec{b}_0 - i\frac{\omega_c}{\omega}c^2(\vec{k}\cdot\vec{E}_1)(\vec{k} \times \vec{b}_0) + i\frac{\omega_c}{\omega}c^2 k^2 (\vec{E}_1 \times \vec{b}_0)$$

$$(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2)\vec{E}_1 + i\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2-c^2k^2)(\vec{E}_1\times\vec{b}_0) +$$

$$+c^2(\vec{k}\cdot\vec{E}_1)\vec{k} + i\frac{\omega_c}{\omega}c^2(\vec{k}\cdot\vec{E}_1)(\vec{k}\times\vec{b}_0) = 0$$

---

do komponent podle souřadnicového systému:

$$(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2)\begin{pmatrix}E_{1x}\\E_{1y}\\E_{1z}\end{pmatrix} + i\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2-c^2k^2)\begin{pmatrix}E_{1y}\\-E_{1x}\\0\end{pmatrix} +$$

$$+c^2(kE_{1x}\sin\alpha + kE_{1z}\cos\alpha)\begin{pmatrix}k\sin\alpha\\0\\k\cos\alpha\end{pmatrix} +$$

$$+i\frac{\omega_c}{\omega}c^2(E_{1x}k\sin\alpha + E_{1z}k\cos\alpha)\begin{pmatrix}0\\-k\sin\alpha\\0\end{pmatrix} = 0$$

---

maticově: $M_{E_1}\cdot E_1 = 0$; prvky M_{E_1} dohledat

$$M_{E_1} = \begin{bmatrix} \omega^2-\omega_p^2-c^2k^2+c^2k^2\sin^2\alpha & i\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2-c^2k^2) & c^2k^2\sin\alpha\cos\alpha \\ -i\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2-c^2k^2\cos^2\alpha) & \omega^2-\omega_p^2-c^2k^2 & -i\frac{\omega_c}{\omega}c^2k^2\cos\alpha\sin\alpha \\ c^2k^2\sin\alpha\cos\alpha & 0 & \omega^2-\omega_p^2-c^2k^2+c^2k^2\cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

(poznámky: $-c^2k^2+c^2k^2\sin^2\alpha = c^2k^2\cos^2\alpha$; $-c^2k^2+c^2k^2\cos^2\alpha = c^2k^2\sin^2\alpha$)

netriviální řešení pro $\det M_{E_1}=0$

$$\det M_{E_1} = c^4k^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left[\frac{\omega_c^2}{\omega^2}(\omega^2-c^2k^2)-(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2)\right] +$$
$$+(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2\sin^2\alpha)\Big[(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2\cos^2\alpha)(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2)-$$
$$-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}(\omega^2-c^2k^2)(\omega^2-c^2k^2\cos^2\alpha)\Big] = 0$$

disperzní relace komplexní elmag. vln v plazmatu s B_0

speciální případy

① $\vec{k} \perp \vec{B}_0 \Rightarrow \alpha = \pi/2$

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2)\left[(\omega^2-\omega_p^2)(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2) - \omega_c^2(\omega^2-c^2k^2)\right] = 0$$

a) $\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2}$ – jako bez mg. pole

– řádná (O-) vlna

b) $(\omega^2-\omega_p^2)(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2) = \omega_c^2(\omega^2-c^2k^2)$

$$(\omega^2-\omega_p^2)(\omega^2-c^2k^2)\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2-c^2k^2}\right) = \omega_c^2(\omega^2-c^2k^2)$$

$$(\omega^2-\omega_p^2) - \frac{(\omega^2-\omega_p^2)\omega_p^2}{\omega^2-c^2k^2} = \omega_c^2$$

$$-\frac{(\omega^2-\omega_p^2)\omega_p^2}{\omega^2-c^2k^2} = \omega_c^2 - \omega^2 + \omega_p^2 = -(\omega^2-\omega_h^2)$$

$$\boxed{\omega^2 - c^2k^2 = \frac{\omega_p^2(\omega^2-\omega_p^2)}{\omega^2-\omega_h^2}}$$

→ mimořádná (X-) vlna

↳ částečně podélná, částečně příčná, ale propaguje se ~~podél~~ napříč B_0!

→ O- a X- vlny mění polarizace

→ plazma jako dvojlomné prostředí pro elmag. vlny

② podél $B_0 \Rightarrow \alpha = 0$

$$(\omega^2-\omega_p^2)\left[(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2)^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}(\omega^2-c^2k^2)^2\right] = 0$$

a) $\boxed{\omega^2 = \omega_p^2}$ podél pole plazmové oscilace

b) $\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2 = \pm\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2-c^2k^2)$

$$(\omega^2-c^2k^2)\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2-c^2k^2}\right) = \pm\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2-c^2k^2)$$

$$-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-c^2k^2} = \pm\frac{\omega_c}{\omega} - 1 = -\left(1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}\right)$$

$$\boxed{\omega^2 - c^2k^2 = \frac{\omega_p^2}{1 \mp \omega_c/\omega}}$$

R – vlna

L – vlna

→ vlny zjevně disperzivní

→ $v_\varphi(R) > v_\varphi(L)$ zjevně

→ polarizace → zpět do $\vec{E}_1$ komponent

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2 & i\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2 - c^2k^2) & 0 \\ -i\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2 - c^2k^2) & \omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_p^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} = 0$$

→ $E_{1z} = 0$

→ $(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2)E_{1x} + i\frac{\omega_c}{\omega}(\omega^2 - c^2k^2)E_{1y} = 0$

použije disperzní relaci: $c^2k^2 = \omega^2 - \omega_p^2\left(1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}\right)^{-1}$

$$\left(\cancel{\omega^2} - \omega_p^2 - \cancel{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}}\right)E_{1x} + i\frac{\omega_c}{\omega}\left(\cancel{\omega^2} - \cancel{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}}\right)E_{1y} = 0$$

$$-\omega_p^2\left(1 - \frac{1}{1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}}\right)E_{1x} + i\frac{\omega_c}{\omega}\left(\frac{\omega_p^2}{1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}}\right)E_{1y} = 0$$

$$-\cancel{\omega_p^2}\left(\frac{\cancel{1} \mp \frac{\omega_c}{\omega} - \cancel{1}}{\cancel{1 \mp \omega_c/\omega}}\right)E_{1x} + i\frac{\omega_c}{\omega}\frac{\cancel{\omega_p^2}}{\cancel{1 \mp \omega_c/\omega}}E_{1y} = 0$$

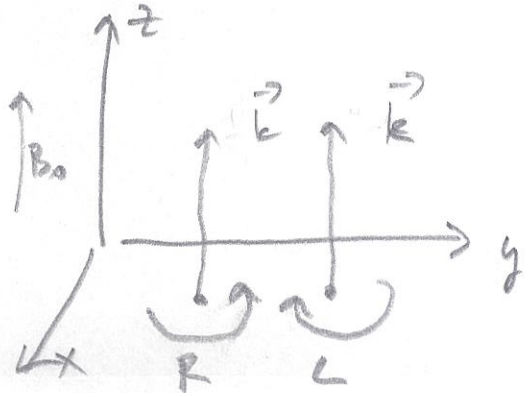
$$\pm\frac{\cancel{\omega_c}}{\cancel{\omega}}E_{1x} + i\frac{\cancel{\omega_c}}{\cancel{\omega}}E_{1y} = 0$$

$$E_{1x} = \mp i E_{1y} \Rightarrow E_{1y} = \underset{L}{\overset{R}{\pm}} i E_{1x}$$

⇒ kruhová polarizace

R → E_{1y} napřed před E_{1x} o $\pi/2$ → pravotočivá

L → obráceně → levotočivá



Aplikace: **Faradayova rotace**

- detekce R a L modů umožňuje např. „změřit" vzdálenost.
- vodné předpoklady – (homogenní prostředí, podélné pole a pod.)

rozpis:

$$\vec{E}_R = E_0 \exp\left[i(\vec{k}_R\cdot\vec{r} - \omega t)\right]\left[\hat{e}_x + i\hat{e}_y\right]$$
$$\vec{E}_L = E_0 \exp\left[i(\vec{k}_L\cdot\vec{r} - \omega t)\right]\left[\hat{e}_x - i\hat{e}_y\right]$$

stejné amplitudy

R napřed
L pozadu

„měření" = superpozice

pokud by $k_R = k_L = k$

$$\vec{E} = \frac{1}{2}E_0 e^{-i\omega t}\left[2e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{e}_x\right] = E_0\exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right]\hat{e}_x$$

⇒ lineárně polarizovaná vlna ve směru $\hat{x}$

⊕ ale opravdu $k_R \neq k_L$

$$k_{R,L} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 \mp \omega_c/\omega}} \qquad \begin{matrix} R \\ L \end{matrix}$$

pro $\omega \gg \omega_c, \omega_p$: $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}$, $(1+x)^{-1} \sim 1 - x$

$$\Rightarrow k_{R,L} \approx \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{1}{1 \mp \omega_c/\omega}\right) \sim \frac{\omega}{c}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 \pm \frac{\omega_c}{\omega}\right)\right]$$

$$\rightarrow k_{R,L} \doteq k \mp \Delta k \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]$$

$$\Delta k = -\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2\omega_c}{c\,\omega^2}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{E}_R + \vec{E}_L) = \frac{1}{2}E_0 e^{-i\omega t}\left[e^{i\vec{k}_R\cdot\vec{r}}(\hat{e}_x + i\hat{e}_y) + e^{i\vec{k}_L\cdot\vec{r}}(\hat{e}_x - i\hat{e}_y)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}E_0 e^{-i\omega t}\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{i\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}}(\hat{e}_x + i\hat{e}_y) + e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}}(\hat{e}_x - i\hat{e}_y)\right] =$$

$$= E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\left[\cos(-\Delta k\cdot r)\hat{e}_x + \sin(-\Delta k\cdot r)\hat{e}_y\right]$$

lineární polarizace — rotace polarizace

$\vec{r} \parallel \vec{k} \Rightarrow$

fázový posun $-\Delta \vec{k} \cdot \vec{r} \Rightarrow -\Delta k z \Rightarrow \varphi$

pak $\underbrace{\frac{d\varphi}{dz}}_{\text{„stočení“}} = -\Delta k$

$$\Rightarrow \text{otočení: } \varphi = \varphi_0 + \int_0^d \frac{d\varphi}{dz} dz = \varphi_0 + \int_0^d -\Delta k \, dz =$$

$$\doteq \varphi_0 + \frac{1}{2c\omega^2} \int_0^d \omega_p^2(z) \, \omega_c(z) \, dz$$

pokud $n_0 \neq n_0(z) \wedge B_0 \neq B_0(z)$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \frac{e^3}{2m\varepsilon_0 c} \frac{1}{\omega^2} n_0 B_0 d$$

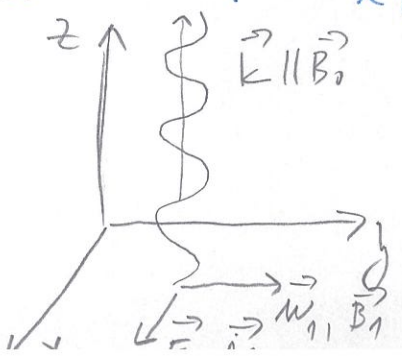
$\uparrow \varphi = \varphi(\omega) \Rightarrow$ měřením stočení polarizační roviny pro různá ω lze fitovat některou z n_0, B_0, d, pokud ostatní 2 známe

Hydromagnetické vlny

– nízkofrekvenční oscilace iontů v přítomnosti magnetického pole

Setup:
- $B_0 \neq 0, E_0 = 0, B_1 \neq 0, E_1 \neq 0$
- pozadí homogenní a stacionární
- ionty i elektrony chladné
- řešíme i ionty i elektrony

Souřadnice: $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$, aby:



$\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$

$\vec{E}_1 \parallel \vec{j}_1 \parallel \hat{e}_x, \quad \vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$

$\vec{B}_1 \parallel \vec{v}_j \parallel \hat{e}_y$

$\vec{k} \parallel \vec{B}_0, \quad \vec{B}_1 \perp \vec{E}_1$

zadáme Maxwellovými rovnicemi

$\nabla \times E_1 = -\dot{B}_1 \quad / \nabla\times$

$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B_1 = +\varepsilon_0 \dot{E}_1 + j \quad / \partial/\partial t$ — a spojit přes $\nabla \times B_1$

$\nabla \times (\nabla \times E_1) = -\nabla \times \dot{B}_1 = -\mu_0 \varepsilon_0 \ddot{E}_1 - \mu_0 \dot{j} = -\frac{1}{c^2}\ddot{E}_1 - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\dot{j}_1$ } elmag vlny

do FT

$-k^2 (k \cdot E_1) + k^2 E_1 = \frac{i\omega}{\varepsilon_0 c^2} j_1 + \frac{\omega^2}{c^2} E_1$

$k \cdot E_1 = 0$ podle předpokladu

○ $(\omega^2 - c^2 k^2)\vec{E}_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0}\vec{j}_1$ $\quad E_1 \parallel j_1$ o.k.

□ $\vec{j}_1 = j_1 \hat{e}_x = n_0 e (w_{i1x} - w_{e1x})\hat{e}_x$

z Eulerovy rce:

$M \frac{\partial \vec{w}_{i1}}{\partial t} = e(\vec{E}_1 + \vec{w}_{i1} \times \vec{B}_0)$

komponenty a FT: $-i\omega M w_{i1x} = eE_1 + e w_{i1y} B_0$

$-i\omega M w_{i1y} = -e w_{i1x} B_0$

$-i\omega M w_{i1x} = eE_1 + eB_0 \frac{eB_0}{i\omega M} w_{i1x}$

$\Rightarrow w_{i1x} = eE_1 \frac{i}{\omega M} \Big/ \left(1 - \frac{e^2 B_0^2}{M^2 \omega^2}\right) =$

△ ⇓ $= \frac{ie}{\omega M}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1$

$w_{i1y} = \frac{e}{\omega M}\frac{\Omega_c}{\omega}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1$

pro elektrony analogicky: $M \to m$, $e \to -e$, $\Omega_c \to -\omega_c$

$w_{e1x} = -\frac{ie}{\omega m}\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1$

$w_{e1y} = \frac{-e}{\omega m}\frac{-\omega_c}{\omega}\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1$

pro $\omega \ll \omega_c$:

◇ $v_{e1x} = -\frac{ie}{\omega m}\left(\frac{\omega_c^2-\omega^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1 \sim \frac{ie}{\omega M}\frac{\omega^2}{\omega_c^2}E_1 \to 0$ pro $\omega \ll \omega_c$

$v_{e1y} = \frac{e}{\omega m}\frac{\omega_c}{\omega}\left(\frac{\omega^2-\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1 \sim \frac{e}{\omega m}\frac{\omega_c}{\omega}\frac{\omega^2}{\omega_c^2}E_1 = -\frac{e}{\omega_c m}E_1 =$

$= -\frac{E_1}{B_0}$

◇ + △ do □ a pak do ○

$(\omega^2 - c^2k^2)E_1 = -\frac{i\omega}{\varepsilon_0} n_0 e\left[\frac{ie}{\omega M}\left(1-\frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}E_1 - 0\right] =$

$= \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 M}\left(1-\frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}E_1 = \Omega_p^2\left(1-\frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}E_1$

$\Rightarrow \boxed{\omega^2 - c^2k^2 = \Omega_p^2\left(1-\frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}}$

disperzní relace

pro $\omega \ll \Omega_c$:

$\omega^2 - c^2k^2 = \Omega_p^2\left(\frac{\omega^2-\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \sim -\omega^2\frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} = -\omega^2\frac{n_0 M}{\varepsilon_0 B_0^2} =$

$= -\omega^2\frac{\rho}{\varepsilon_0 B_0^2}$

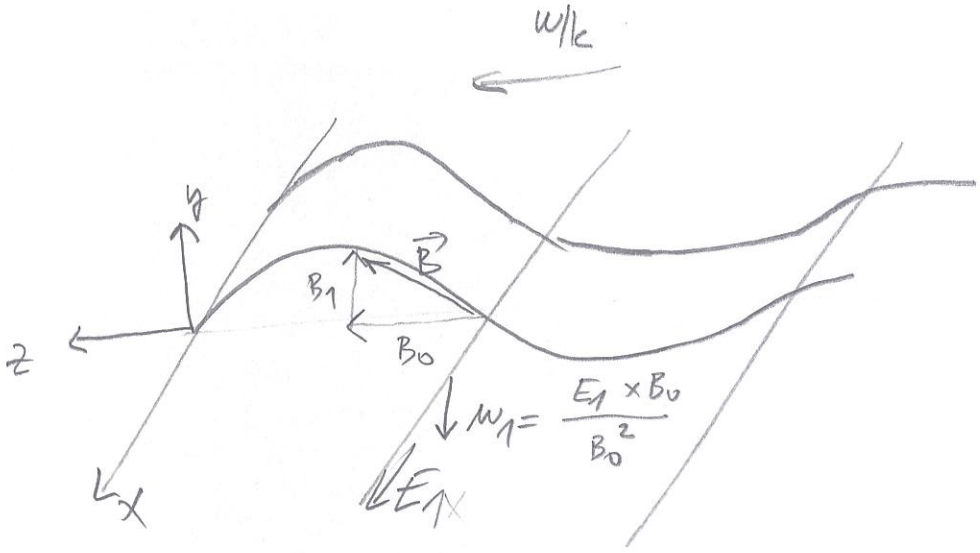
$\Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1+\frac{\rho}{\varepsilon_0 B_0^2}}$ – vyšetřuje relativní permitivitu

$\frac{\omega}{k} \ll c \Rightarrow 1 + \rho/\varepsilon_0 B_0^2 \gg 1$

$\Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} \sim \frac{c^2}{\frac{\rho\mu_0 c^2}{B_0^2}} = \frac{B_0^2}{\mu_0\rho}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{k} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho}} = c_A}$ Alfvénova rychlost

↑ disperzní relace podélné Alfvénovy vlny



- magnetická komponenta $B_1 \parallel B_y$ → zvlnění mg. pole v y-směru

→ máme drift $v_y = \frac{E_1 \vec{e}_x \times \vec{B}_0}{B_0^2}$ stejný pro $e^\ominus$ i $p^\oplus$

- fázová rychlost poruchy B_1

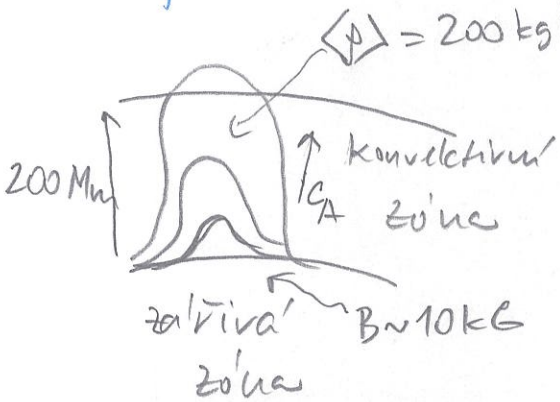
$\omega B_1 = k v_{y,B} B_0$ z indukční rovnice

$kE_1 = -\omega B_1$ z Faradayova zákona

$\Rightarrow v_{y,B} = -\frac{\omega}{k}\frac{k}{\omega}\frac{E_1}{B_0} = -\frac{E_1}{B_0}$, to je stejné jako driftová rychlost částic

$\Rightarrow$ pole i částice oscilují spolu $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ pole i částice konzistentně se zamrzlým polem

- plasma, jen když $E_0 \cdot B_0 = 0$
- Alfvénova rychlost → char. rychlost propagace poruch mg. pole



$\tau \sim \frac{d}{c_A} \sim \frac{200\,\text{Mm}}{1\,\text{T}/\sqrt{\mu_0}\sqrt{200\,\text{kg/m}^3}} \sim$

$\sim \frac{2\times 10^8}{1/\sqrt{4\pi 10^{-7}}\sqrt{200}}\,\text{s} \sim 36$ dní

Obecná MHD rce

1- tekutinová aproximace

systém $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{w} = 0$

$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = -\nabla p + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} / \mu_0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^n}\right) = 0$

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{w} \times \vec{B})$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

- požadí homogenní a stacionární, $\vec{w}_0 = 0$
- Maxwellovy rce → indukční rce bez driftace

  → $\nabla \cdot B = 0$

  → $j = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B$

- adiabatická stavová rce

---

linearizace triviálním

$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot w_1) = 0$ (1)

$\rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + (\nabla \times B_1) \times B_0 / \mu_0$ (2)

$\frac{\partial B_1}{\partial t} = \nabla \times (w_1 \times B_0)$ (3)

$\nabla \cdot B_1 = 0$ (4)

v rovnici stavové složitější:

$0 = \left\{\frac{\partial}{\partial t} + w_1 \cdot \nabla\right\}\left[\frac{p_0 + p_1}{(\rho_0 + \rho_1)^n}\right] =$

$= \frac{1}{(\rho_0+\rho_1)^n}\left[\frac{\partial p_1}{\partial t} + (w_1 \cdot \nabla) p_0\right] + (p_0 + p_1)\left\{\frac{-n}{(\rho_0+\rho_1)^{n+1}}\left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (w_1 \cdot \nabla)\rho_0\right]\right\} =$

$= \frac{1}{(\rho_0+\rho_1)^n}\left[\frac{\partial p_1}{\partial t} - n \frac{p_0+p_1}{(\rho_0+\rho_1)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right] = \frac{1}{(\rho_0+\rho_1)^n}\left[\frac{\partial p_1}{\partial t} - c_s^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right] =$

($c_s^2 = n \frac{p_0+p_1}{(\rho_0+\rho_1)}$)

$= 0$ (5)

$\Rightarrow \frac{\partial p_1}{\partial t} - c_s^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0$ je linearizovaná stavová rce

=13=

$\frac{\partial}{\partial t}$ (2): $\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\frac{\partial p_1}{\partial t} + \left(\nabla\times\frac{\partial B_1}{\partial t}\right)\times\frac{B_0}{\rho_0\mu_0}$

použijeme (5)

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(c_s^2\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right) + \left(\nabla\times\frac{\partial B_1}{\partial t}\right)\times\frac{B_0}{\mu_0\rho_0}$$

použijeme (1) použijeme (3)

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} = c_s^2\nabla(\nabla\cdot\vec{w}_1) + \left\{\nabla\times\left[\nabla\times(\vec{w}_1\times\vec{B}_0)\right]\right\}\times\frac{\vec{B}_0}{\mu_0\rho_0}$$

$\frac{\partial}{\partial t}\to -i\omega \qquad \nabla\to ik$

$\vec{B}_0 = B_0\vec{b}_0$

$\frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0} \equiv c_A^2$

$$\omega^2\vec{w}_1 = \cancel{c_s^2\nabla(\nabla\cdot w_1)+\{\nabla}$$
$$= c_s^2\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{w}_1) + \left\{\vec{k}\times\left[\vec{k}\times(\vec{w}_1\times\vec{B}_0)\right]\right\}\times\frac{\vec{B}_0}{\mu_0\rho_0} =$$
$$= c_s^2\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{w}_1) + \left\{\vec{k}\times\left[\vec{k}\times(\vec{w}_1\times\vec{b}_0)\right]\right\}\times\vec{b}_0\, c_A^2$$

$$\left\{k\times\left[k\times(w_1\times b_0)\right]\right\}\times b_0 = \left\{k\times\left[w_1(k\cdot b_0) - b_0(k\cdot w_1)\right]\right\}\times b_0 =$$
$$= (k\cdot b_0)\left\{k\times w_1\right\}\times b_0 - (k\cdot w_1)\left\{k\times b_0\right\}\times b_0 =$$
$$= -(k\cdot b_0)\left[k(w_1\cdot b_0) - w_1(k\cdot b_0)\right] + (k\cdot w_1)\left[k\, b_0^2 - b_0(k\cdot b_0)\right] =$$
$$= \vec{w}_1(\vec{k}\cdot\vec{b}_0)^2 - (\vec{k}\cdot\vec{w}_1)(\vec{k}\cdot\vec{b}_0)\vec{b}_0 + \vec{k}\left[\vec{k}\cdot\vec{w}_1 - (\vec{k}\cdot\vec{b}_0)(\vec{w}_1\cdot\vec{b}_0)\right]$$

$$\omega^2 w_1 = c_s^2\overset{(3a)}{k(k\cdot w_1)} + c_A^2\left\{\overset{(1)}{(k\cdot b_0)w_1} - \overset{(2)}{(k\cdot w_1)(k\cdot b_0)b_0} + \overset{(3b)}{k\left[k\cdot w_1 - (k\cdot b_0)(w_1\cdot b_0)\right]}\right\}$$

pokud $k\cdot b_0 = k\cos\alpha \qquad \alpha \equiv \measuredangle(k, b_0)$

$$\frac{\omega^2}{c_A^2}\vec{w}_1 = k^2\cos^2\alpha\,\vec{w}_1 - (\vec{k}\cdot\vec{w}_1)k\cos\alpha\,\vec{b}_0 + \vec{k}\left[\left(1+\frac{c_s^2}{c_A^2}\right)(\vec{k}\cdot\vec{w}_1) - k\cos\alpha\,(\vec{w}_1\cdot\vec{b}_0)\right]$$

projekce do $\vec{k}$ a $\vec{b}_0$

$$\vec{k}:\ \omega^2(k\cdot w_1) = \cancel{k^2c_A^2\cos^2\alpha\,(w_1\cdot k)} - \cancel{c_A^2k^2\cos^2\alpha\,(k\cdot w_1)} +$$
$$+ c_A^2k^2(k\cdot w_1) + c_s^2k^2(k\cdot w_1) - c_A^2k^3\cos\alpha\,(w_1\cdot b_0)$$

$$\Rightarrow \left[-\omega^2 + c_A^2k^2 + c_s^2k^2\right](\vec{k}\cdot\vec{w}_1) = c_A^2k^3\cos^2\alpha\,(\vec{w}_1\cdot\vec{b}_0)$$

b_0: $\omega^2(b_0\cdot w_1) = c_A^2 k^2 \cos^2\alpha\,(w_1\cdot b_0) - c_A^2\,(k\cdot w_1)\,k\cos\alpha +$

$+ c_A^2\,(k\cdot w_1)\,k\cos\alpha + c_s^2\,(k\cdot w_1)\,k\cos\alpha -$

$- c_A^2 k^2 \cos^2\alpha\,(w_1\cdot b_0)$

$\Rightarrow \omega^2(\vec{b_0}\cdot\vec{w_1}) = c_s^2\,(\vec{k}\cdot\vec{w_1})\,k\cos\alpha$

z obou pomocí $\dfrac{b\cdot w_1}{w_1\cdot k}$

$$\frac{b\cdot w_1}{w_1\cdot k} = \frac{-\omega^2 + c_A^2k^2 + c_s^2k^2}{c_A^2k^2\cos\alpha} = \frac{c_s^2 k\cos\alpha}{\omega^2}$$

$$\boxed{\omega^4 - \omega^2k^2(c_A^2+c_s^2) + c_s^2c_A^2k^4\cos^2\alpha = 0}$$

pro $\frac{\omega}{k}>0$ propagace vln

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = \left[\frac{1}{2}(c_s^2+c_A^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{c_s^4+c_A^4 - 4c_s^2c_A^2\cos^2\alpha + 2c_A^2c_s^2}\right]^{1/2}}$$

disperzní relace pro obecnou magnetoakustickou vlnu

$+$ ... rychlá (fast)

$-$ ... pomalá (slow)

a) podél pole: $\alpha = 0$

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}(c_s^2+c_A^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{c_s^4+c_A^4-2c_s^2c_A^2} = \frac{1}{2}(c_s^2+c_A^2) \pm \frac{1}{2}|c_s^2-c_A^2| =$$

$$= \begin{cases} c_s^2 \\ c_A^2 \end{cases}$$ podél pole dvě rychlosti

b) napříč polem: $\alpha = \pi/2$

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}(c_s^2+c_A^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{c_s^4+c_A^4+2c_s^2c_A^2} = \frac{1}{2}(c_s^2+c_A^2) \pm \frac{1}{2}(c_s^2+c_A^2) =$$

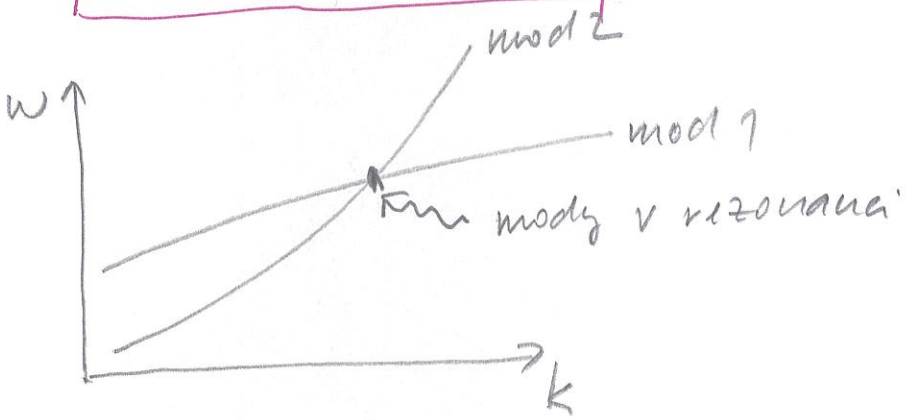
$$= \begin{cases} 0 \\ c_s^2+c_A^2 \end{cases}$$ ani jen rychlá

c) pro $B_0=0 \Rightarrow c_A=0 \Rightarrow$ vždy jen $\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \begin{cases} 0 \\ c_s^2 \end{cases}$

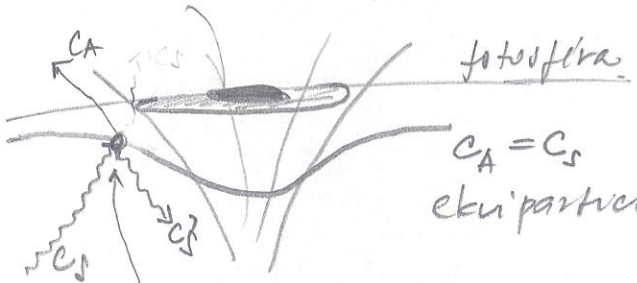
jen zvuková

=1/2

Konverze modů



„potkají-li" se dva módy v k–w diagramu, mají v daném místě stejnou N_γ → → může dojít k „přeskoku" → konverze módů



př. zvuková konverze částečně na magnetozvukovou nebo Alfvénovou

→ konverzi nelze popsat naším přiblížením
↳ teorie rozptylu