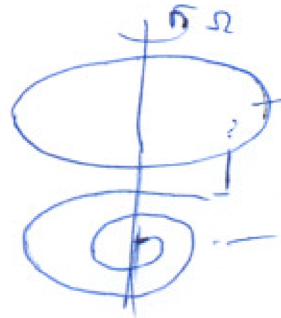
HOMOPOLÁRNÍ DYNAMO



rotující disk

zakroucený drát, vodivý dotek s diskem
drátem teče proud $I(t)$

může proud vzrůst ?

mg. pole buzené proudem má tok: $\Phi = MI$

M… vzájemná induktance drátu a kruhu

rotace → vzniká $\mathcal{E}$ v

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Omega}{2\pi}\Phi = \frac{\Omega}{2\pi} MI$$

rovnice pro proud:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \frac{M}{2\pi} MI$$

R… rezistence

L… induktance

řešení: $I(t) = I_0 e^{\lambda t}$

$$\lambda = \frac{1}{L}\left(\frac{M}{2\pi}\Omega - R\right)$$

vzrůst: $\lambda > 0 \Rightarrow \Omega > \frac{2\pi R}{M}$

⇒ rychlá rotace = generace proudu

DYNAMO

Mean-field theory

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) + \eta\,\Delta\vec{B} = \nabla\times\left[\vec{v}\times\vec{B} - \eta\,\nabla\times\vec{B}\right]$$

definujeme: $\vec{B} = \langle\vec{B}\rangle + \vec{b}$

↳ fluktuující část

↳ střední část

$$\vec{v} = \langle\vec{v}\rangle + \vec{w}$$

fluktuující: $\langle u\rangle = 0, \quad \langle v\rangle = 0$

dosadíme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\langle B\rangle + b) = \nabla\times\left[(\langle v\rangle + w)\times(\langle B\rangle + b) - \eta\,\nabla\times(\langle B\rangle + b)\right]$$

střední část:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle B\rangle = \nabla\times\left[\langle v\rangle\times\langle B\rangle + \langle w\times b\rangle - \eta\,\nabla\times\langle B\rangle\right]$$

fluktuující:

$$\frac{\partial}{\partial t} b = \nabla\times\left[\langle v\rangle\times b + w\times\langle B\rangle + w\times b - \langle w\times b\rangle - \eta\,\nabla\times b\right]$$

definujeme:
$$\mathcal{E} = \langle w\times b\rangle$$
$$G = w\times b - \langle w\times b\rangle$$

$\mathcal{E}$ … elektrické pole vytvořené fluktuujícími částmi

úvaha: b a $\langle B\rangle$ jsou v lineární relaci

$\mathcal{E}$ a b jsou v lineární relaci

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ a $\langle B\rangle$ by měly být lineární

tedy rozklad:

$$\mathcal{E} = \alpha\langle B\rangle - \beta\,\nabla\times\langle B\rangle + \dots$$

pro

pro izotropní turbulenci;

$$\alpha \sim \frac{1}{3} \langle w \cdot \nabla \times w \rangle \tau$$

$$\beta \sim \frac{1}{3} \langle w \cdot w \rangle \tau$$

τ ... korelační čas

$w \cdot \nabla \times w$ ... kinetická helicita

magnetická

$(H = \int A \cdot B \, dV =$
$= \int A \cdot (\nabla \times A) \, dV$
$h_j = j \cdot B)$

proudová

$$\Rightarrow \frac{\partial \langle B \rangle}{\partial t} = \nabla \times \Big[\underbrace{\langle v \rangle \times \langle B \rangle}_{\Omega\text{-efekt}} + \underbrace{\alpha \langle B \rangle}_{\alpha\text{-efekt}} - (\eta + \beta) \nabla \times \langle B \rangle \Big]$$

$\eta + \beta = \eta_t$ ... turbulentní viskozita

α-efekt $\rightarrow$ toroidální $\Rightarrow$ poloidální
Ω-efekt $\rightarrow$ poloidální $\Rightarrow$ toroidální

na $\odot$ platí

α ... problém

odhady: $\alpha = \pm l \Omega$

$\hookrightarrow$ rotační rychlost
$\hookrightarrow$ char. konvektivní délka

znaménko opačné helicitě v daném místě

numericky: $\alpha = \dfrac{\langle w \times b \rangle \cdot B_H}{B_H^2}$

B_H ... externí horizontální pole

~~vstupní pole~~

podle autorů

$\alpha \in \langle \sim \text{cm/s}, \sim 100 \text{ m/s} \rangle$

Kinematické dynamo

astrofyzikální dynamo → jev, který produkuje mg. pole proti jeho rozpadu → udržuje se trvale

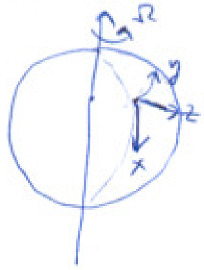
→ máme diferenciální rotaci a α-efekt

→ $\Omega(r,\vartheta)$ a $\alpha(r,\vartheta)$ je známo

↳ mean-field:

$$\frac{\partial\langle B\rangle}{\partial t} = \nabla\times\left[\langle v\rangle\times\langle B\rangle + \alpha\langle B\rangle - \eta_t\nabla\times\langle B\rangle\right]$$

uvažujeme v lokálním kartézském systému:



x... meridiální

y... ~~[illegible]~~ podél rovnoběžky

z... kolmo k povrchu

mg. pole:
- toroidální $B_t = B\vec{e}_y$
- poloidální $B_p = (B_x, 0, B_z)$

zavedeme vektorový potenciál: $B = \nabla\times A$

⇒ pro poloidální má jen jednu složku A_y

$$B_p = \left(-\frac{\partial A}{\partial z}, 0, \frac{\partial A}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial\nabla\times A}{\partial t} = \nabla\times\left[v\times(\nabla\times A) + \alpha B - \eta_t\nabla\times\nabla\times A\right]$$

ve složkách se rovnice

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{v}\times(\nabla\times\vec{A}) + \alpha\vec{B} - \eta_t\overbrace{\nabla\times\nabla\times\vec{A}}^{-\Delta\vec{A}} \quad \text{a}$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times\left(\vec{v}\times\vec{B} + \alpha\vec{B} - \eta_t\nabla\times\vec{B}\right)$$

změní na:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \eta_t\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial z} + \eta_t\nabla^2 B$$

protože: $v = r\Omega = (R+z)\Omega$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = \Omega \quad \ldots$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \ldots$$ ta šířková diferenciace – teď zanedbáme

$\Rightarrow$ transformace do 1-D

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \eta_t \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \Omega \frac{\partial A}{\partial x} + \eta_t \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

hledáme řešení ve tvaru:

$$(A, B) = (A_0, B_0)\, e^{-i\omega t + ikx}$$

$$\Rightarrow \quad (-i\omega + \eta_t k^2) A_0 - \alpha B_0 = 0$$

$$(-i\omega + \eta_t k^2) B_0 - \Omega i k A_0 = 0$$

netriviální řešení pokud $\det = 0$

$$\Rightarrow \boxed{(-i\omega + \eta_t k^2)^2 - ik\alpha\Omega = 0}$$

pro $\alpha\Omega > 0$

$$-i\omega + \eta_t k^2 = \pm \sqrt{i}\sqrt{k\alpha\Omega} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{k\alpha\Omega}$$

$$\cancel{\ldots = \left(-\eta_t k^2 \pm \sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}}\right) \pm i \sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}}}$$

$$-i\omega = -\eta_t k^2 \pm (1+i)\sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}}$$

$$-i\omega = \left(-\eta_t k^2 \pm \sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}}\right) \pm i \sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}}$$

závislost $e^{-i\omega t}$ $\Rightarrow$ dynamo = rostoucí řešení

$$\rightarrow -i\omega > 0$$

$$i\omega < 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(\omega) < 0$$

$\mathrm{Im}\,s\ -i\omega = \pm i\sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}}$

$$\mathrm{Im}(\omega) = \mp\sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}} \Rightarrow \text{platí první řešení}$$

a tedy

$$-i\omega = \left(-\eta_t k^2 + \sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}}\right) + i\sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}}$$

↳ disperzní relace pro dynamovou vlnu

řešení pro mg. pole

$$B = B_0 \exp\left[\left(-\eta_t k^2 + \sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}}\right)t + i\left(\sqrt{\frac{k\alpha\Omega}{2}}\,t + kx\right)\right]$$

↳ propagace vln ve směru $-\vec{x} \Rightarrow$ k pólu

pro $\alpha\Omega < 0$ ... obdobně

↳ propagace ve směru $+\vec{x} \Rightarrow$ k rovníku

nárůst pokud: $\frac{\alpha\Omega}{2\eta_t^2 k^3} > 1$

dynamové číslo: $\mathcal{R}_D = \frac{\alpha\Omega R_\odot^3}{\eta_t^2}$ ... definice

pak podmínka, $\mathcal{R}_D (k R_\odot)^{-3} > 1$

výpočet ve sférických → vlna se propaguje podél ploch Ω=konst

↳ směr $\alpha \nabla\Omega \times \vec{e_\varphi}$

↳ azimutální vektor

nárůst pole limitován zpětnou reakcí konvekce:

→ např. α-quenching : $\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \left(\frac{B}{B_0}\right)^2}$

„tlumení"

pak je řešení stacionární oscilující