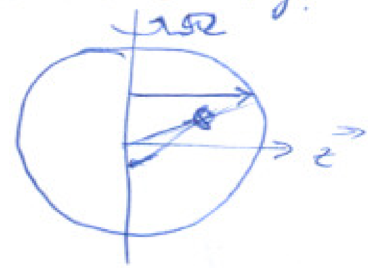
SLUNEČNÍ ROTACE

- diferenciální
- rovník o 30% víc než póly
- radiativní zóna rotuje ~ rigidně
- dif. rot. ⇒ klíčový ingredient dynama

Efekt rotace na vnitřní strukturu

• ↳ rce hydrostatické rovnováhy musí být modifikována – započtení ~~kg~~ odstředivé síly.

$$\nabla P = -\rho g + \rho\Omega^2 \vec{s}$$



$$= -\rho\nabla\Phi + \rho\Omega^2\vec{s} =$$

$$= -\rho\, \nabla\Psi$$

zahrnuje gravitační i odstředivé síly

pokud Ω konstantní na válcích ⇒ má potenciál

$$\Omega^2 s = -\nabla V, \quad V = -\int_0^s \Omega^2 s \, ds$$

$\nabla\Phi \parallel \nabla V$ ⇒ isoplochy ψ jsou totožné s plochami konst. tlaku → závisí jen na ψ

pokud $\mu = const$ ⇒ T je též funkcí pouze ψ, jinak T/μ je konstantní na ekvipotenciálních površích $P = \mathcal{R}\rho T/\mu$

Dále: $\nabla P = -\rho\nabla\psi \quad / \nabla\times$

$$\underbrace{\nabla\times\nabla P}_{=0} = -\nabla\times(\rho\nabla\psi) =$$

$$= -(\nabla\rho)\times(\nabla\psi) + \underbrace{\rho(\nabla\times\nabla\psi)}_{=0}$$

$$\underbrace{0 = \nabla\rho\times\nabla\psi}$$

tedy hustota konstantní na ekvipotenciálách

- Místo rce kontinuity → Poissonova

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

nebo $\Delta \Psi = \Delta \Phi + \Delta V = 4\pi G \rho - 2\Omega^2$

- Rovnice přenosu záření:

$$\vec{E}_R = -\frac{16\sigma T^3}{3\varkappa\rho}\nabla T = -\frac{16\sigma T^3}{3\varkappa\rho}\frac{dT}{d\Psi}\nabla\Psi$$

$\sim$ $E_R = f(\Psi)\nabla\Psi$ přepis

$$f(\Psi) = -\frac{16\sigma T^3}{3\varkappa\rho}\frac{dT}{d\Psi}$$

- Rovnice energetické rovnováhy

$\nabla \cdot \vec{E}_R = \rho \epsilon$ → místně:

$$\nabla \cdot L = \frac{df}{d\Psi}(\nabla\Psi)^2 + f(\Psi)\Delta\Psi =$$

$$= \frac{df}{d\Psi}\underbrace{(\nabla\Psi)^2}_{} + f(\Psi)\left[4\pi G\rho - 2\Omega^2\right] = \rho\epsilon$$

tento člen není konstantní na ekvipotenciále

⇒ ~~rigidně~~ rigidně rotující hvězda → rovnici energetické rovnováhy nelze splnit

→ von Zeipelův paradox (1924)

→ je třeba zavést další mechanismus transportu energie → meridionální cirkulaci

charakteristický čas:

$$\tau_{circ} \sim \frac{GM^2}{LR}\frac{1}{\xi} \sim \frac{\tau_{KH}}{\xi}$$

$\xi = \dfrac{\Omega^2}{2\pi G\rho_c}$ ... popisuje důležitost rotace, $\xi = \dfrac{f_{cent}}{f_{grav}}$

pro ☉ → $\tau_{circ} \sim 10^{12}$ let

interpretace: teplo přicházející není vyváženo teplem odcházejícím ⇒ daný element se buď ohřívá nebo ochlazuje vůči okolí, Vzplývavé síly pak vedou k cirkulaci v meridionální rovině.

⇒ není stabilní, musí se měnit, nebo musí být energie vytvářena ve fyzikálně nerealistické formě (z hlediska ~~roz~~ rozložení)

Další práce (Baker & Kippenhahn 1959) → cirkulace se ustaví téměř pro všechny typy rotace, Roxburgh (1966) → ustaví se pro všechny konzervativní rotační zákony

↳ lze najít stabilní řešení, kdy ale jak rotace tak cirkulace bude nekonzervativní

↳ odstředivá síla nebude mít potenciál

↳ pro ☉ není globální cirkulace důležitá, ale je důležitá v podpovrchových vrstvách, kde je ρ malé.

↳ Měření rotace

↳ Sluneční rotace

Mechanismus diferenciální rotace

→ zachování úhlového momentu v konvektivní zóně

$\mathcal{L} = r \times p \rightarrow$ konst.

$\vec{v}$ je superpozice rotace $\langle v_\varphi \rangle$ a meridionální cirkulace: $\vec{v}_m = (\langle v_r \rangle, \langle v_\vartheta \rangle)$ a konvektivní rychlosti $\vec{w}$

$\langle \ \rangle$ ... průměr přes φ (délka)

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{w}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\phi$$

↳ gravitace

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

azimutální složka: $\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{w}$

$$\langle \vec{v} \rangle = v_\varphi = r \sin\vartheta\, \Omega = s\Omega$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_\varphi \langle \nabla\cdot\vec{v} \rangle_\varphi = 0 \qquad | \cdot s\rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \langle (\rho\vec{v}) \rangle_\varphi = 0 \qquad | \cdot s\rho$$

zanedbáme $\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$s\rho\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + s\rho(\vec{v}\cdot\nabla)v_\varphi = 0 \qquad | \langle\ \rangle_\varphi$$

$\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$ ← anelasticita

$$(\rho v\cdot\nabla)v = \nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) - (\nabla\cdot\rho v)v = \nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v})$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_r \\ v_\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_r \\ w_r \\ w_\varphi \end{pmatrix}$$

rotace $\qquad \vec{v}_m \qquad$ konvekce

$$\frac{\partial}{\partial t}(s\rho v_\varphi) + \nabla\cdot\left(s\rho\langle \vec{v} v_\varphi \rangle_\varphi\right) = 0$$

$$\langle \vec v\, v_\varphi \rangle_\varphi = \left\langle (\vec v_\varphi + \vec v_M + \vec w)(v_\varphi + w_\varphi) \right\rangle_\varphi =$$

$$= \cancel{\langle \ldots \rangle_\varphi} =$$

$$= \langle v_\varphi \vec v_\varphi + v_\varphi \vec v_M + v_\varphi \vec w + \vec v_\varphi w_\varphi + \vec v_M w_\varphi + \vec w w_\varphi \rangle_\varphi =$$

$$= v_\varphi^2 + v_\varphi \cancel{\langle} \vec v_M \cancel{\rangle} + v_\varphi \underbrace{\langle \vec w \rangle}_{=0} + v_\varphi \underbrace{\langle w_\varphi \rangle}_{=0} + v_M \underbrace{\langle u_\varphi \rangle}_{=0} + \langle w w_\varphi \rangle_\varphi =$$

$$= v_\varphi^2 + v_\varphi \vec v_M + \underbrace{\langle \vec w\, w_\varphi \rangle_\varphi}_{\text{korelování}}$$

korelování = náhodné, ale pro n-w blízké, chovají se podobat v čase

↳ nezajímavé vzhledem k $\nabla\cdot$ $(\nabla\cdot\vec a = 0)$

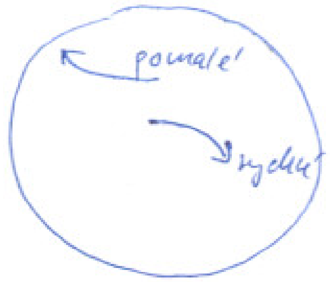
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(s \rho v_\varphi) + \nabla\cdot\left(s\rho v_\varphi \vec v_M + \rho s \langle \vec w\, w_\varphi \rangle_\varphi\right) = 0$$

$$v_\varphi = s\Omega$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\rho s^2 \Omega}_{\text{úhlový moment}}) + \nabla\cdot\left(\rho s^2 \Omega \vec v_M + \rho s \langle \vec w\, w_\varphi \rangle_\varphi\right) = 0}$$

změna buď meridionální cirkulací nebo konvektivními pohyby.

$\Rightarrow$



pokud w_φ roste $\Rightarrow v_M$ klesá

$\Rightarrow$ zrychlování rovníku

pokud w_φ klesne $\Rightarrow \vec v_M$ vzroste

$\Rightarrow$ zpomalování pólu

$\rightarrow$ problém: $\frac{\partial}{\partial t}\rho$ a $\nabla\cdot\rho$ nelze zanedbat, protože právě to řídí konvekci.

$\langle u_\varphi \vec w \rangle$ ... Reynoldsův tensor

↳ $Q_{ij} = \langle w_i w_j \rangle$ obecně

<u>střední pole</u>

$\Rightarrow$ rozdělení Q_{ij} do difúzivní a nedifúzivní části difuzivní část – zhlazuje turbulentní projevy na velkých škálách.

definujme: $(Q_{r\varphi}, Q_{\vartheta,\varphi}) = -\nu_t\, s\, \nabla\Omega$

↳ difuzivita

pokud $\vec{v}_M = 0 \Rightarrow$ uniformní rotace

anisotropická viskozita:

$$Q_{r\varphi} = -\nu_t\, r \sin\vartheta \frac{\partial\Omega}{\partial r} + \Lambda_r \sin\vartheta\, \Omega$$

$$Q_{\vartheta,\varphi} = -\hat{s}\, \nu_t \sin\vartheta \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta} + \Lambda_h \cos\vartheta\, \Omega$$

nedifuzivní část

$\nu_t \sim \ell w$
charakteristiky konvektivního pole $\vec{w}$

$\Lambda_r = \Lambda_r(r)$

$\Lambda_h = \Lambda_h(\sin^2\vartheta)$

$\hat{s}$ ... bezrozměrný parametr → separuje zhlazování radiálně a horizontálně

→ pokud $\vec{v}_M = 0$ a $\Lambda_h = 0$ $\Rightarrow \Omega = \Omega(r)$ nekonzervativní, nebalancuje $\nabla P \Rightarrow \vec{v}_M \neq 0$

$\Rightarrow \vec{v}_M$ určena tak, aby zachovala pozorované $\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}$

pro $\vec{v}_M = 0$ a $\Lambda_h \neq 0$ → vede k jakémusi profilu, který bude opět nekonzervativní

Detaily: ~~v_φ~~ ... turbulentní rychlost elementu

↳ horizontální Coriolisovo zrychlení: $2\Omega v_\varphi \cos\vartheta$ během korelačního času τ_L (Lagrangeův) vede k rychlosti $v_\vartheta = 2\, Co_L\, v_\varphi \cos\vartheta$

$Co_L \simeq \mathrm{Min}(Co, 1)$

+ pohyb v meridionálním směru – opačné znaménko a r-složka

$$\Rightarrow \langle v_\vartheta v_\varphi \rangle = 2\, Co_L \left(\langle v_\varphi^2 \rangle - \langle v_\vartheta^2 \rangle \right)$$

$$\langle v_r v_\varphi \rangle = 2\, Co_L \left(\langle v_\varphi^2 \rangle - \langle v_r^2 \rangle \right) \sin\vartheta$$

případy: a) pomalá rotace: $Co \ll 1$

$$\Rightarrow \langle v_r^2 \rangle > \langle v_\varphi^2 \rangle \sim \langle v_\vartheta^2 \rangle$$

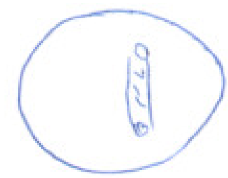
$$\Rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} \sim 0 \,; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial r} < 0$$

b) rychlá rotace: $Co \sim 1$

1. $\langle v_\varphi^2 \rangle \sim \langle v_r^2 \rangle / \sin^2\vartheta \sim \langle v_\vartheta^2 \rangle / \cos^2\vartheta$

$\Rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} < 0 \,, \left.\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right|_{eq}$ malé, $\left.\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right|_{poles} < 0$

→ konvektivní trubice



2. $\langle v_\varphi^2 \rangle \sim \langle v_r^2 \rangle > \langle v_\vartheta^2 \rangle / \cos^2\vartheta$

$\rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial r} \sim 0 \,, \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} < 0$

→ banánové buňky

Pro ⊙ se očekává: banánové buňky v KZ

$\frac{\partial \Omega}{\partial r} < 0$ pod povrchem (kde $Co < 1$)