HELIOSEISMOLOGIE

→ řešení perturbovaných hydrodynamických rovnic
→ lineární
→ regulární na pólech ⇒ úhlová část
↳ sférická harmonika

→ radiální část
↳ JWKB aproximace

$$\xi_r = A\rho^{-1/2} e^{ik_r r}$$

$$p' = B\rho^{1/2} e^{ik_r r}$$

$r = 0 \rightarrow$ regulární $\sim \xi_r = 0$

$r = R_\odot \rightarrow \delta p = 0 = p' + \frac{dp}{dr}\xi_r = 0$

→ disperzní relace:

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} + \frac{S_l^2}{c^2\omega^2}(N^2 - \omega^2)$$

$$\omega_c = \frac{c}{2H}, \quad H = \left(\frac{d\ln\rho}{dr}\right)^{-1}$$

$$k_h^2 = \frac{l(l+1)}{r^2}$$

→ disperzní relace:

$\omega^2 = \omega_c^2 + k^2c^2$ p-mody

$\omega^2 = N^2\cos^2\theta$ g-mody

$\omega^2 = k_h g$ f-mod (nekompresibilní)

p-mody $k_r^2 > 0$, $N^2 < 0$

bod obratu: $k_r^2 = 0 \Rightarrow \frac{c(r_{td})}{r_{td}} = \frac{\omega}{\sqrt{l(l+1)}}$

$\omega_c \ll \omega$

horní: $\omega_c(r_t) \sim \omega \Rightarrow r_{tu} \sim R_\odot$

frekvence pro low degree

$$\Delta\nu = \left(4\int_0^{R_\odot}\frac{dr}{c}\right)^{-1}$$

__g-mody__: $k_r > 0$

$N^2 > 0$

bod obratu: $N(r) \sim \omega$

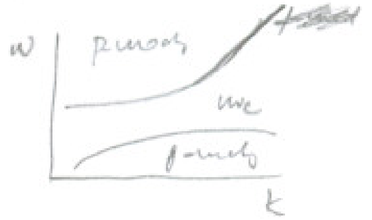
mezi nimi: $k_r \sim \dfrac{\sqrt{l(l+1)}\, N}{r\omega}$

frekvence: $$\omega \sim \frac{\sqrt{l(l+1)} \int_{r_{td}}^{r_{tu}} N \frac{dr}{r}}{\pi (n+\alpha)}$$

__rezonance__: jen vlny tvořící stojaté vlnění se udržují

$$\int k_r \, dr = \pi (n + \alpha)$$

↳ vlastnost hraničních vrstev



z scanu 06_0.jpg

$\boxed{\text{Seismický poloměr}}$

z f-modu:

$$\omega^2 = g k_h = \frac{GM}{R^2} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R}$$

$$\Rightarrow R = \left[\frac{\sqrt{l(l+1)}\, GM}{\omega^2} \right]^{1/3}$$

měříme $\omega = \omega(l)$, z čehož se dá $R_\odot$ vypočítat

$R_{seism} \sim 695{,}68$ Mm

$R_{opt} \sim 695{,}99$ Mm

0,3 Mm rozdíl nejspíš kvůli nepřesném modelu podpovrchové konvekce

$\boxed{\text{Duvallův zákon}}$

p-mody: $$\int_{r_t}^{R} k_r \, dr = \pi (n + \alpha)$$

$$\int_{r_t}^{R}\left[\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]^{1/2}dr=\pi(n+\alpha) \quad \Big/ : \frac{1}{\omega}$$

$$\int_{r_t}^{R}\left(\frac{r^2}{c^2}-\frac{l(l+1)}{\omega^2}\right)\frac{dr}{r}=\frac{\pi(n+\alpha)}{\omega}$$

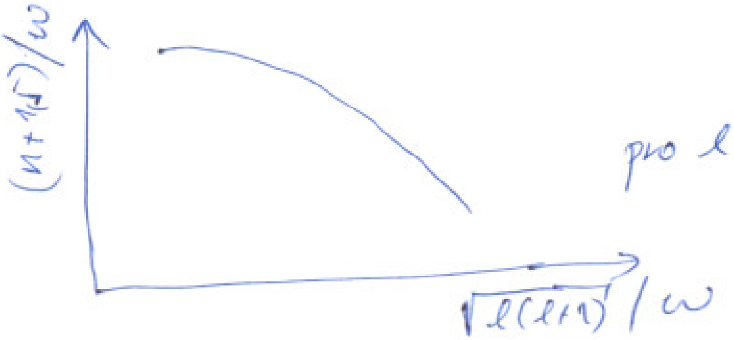
r_t závisí na poměru $\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega}$

$\searrow$ $r_t \sim \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega}\, c(r_{ta})$

$\Rightarrow$ celá levá strana je fce $\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{l(l+1)}{\omega}\right)=\frac{\pi(n+\alpha)}{\omega}$$

$\Rightarrow$ 2D disperzní relace $\omega=\omega(n,l)$ kolabuje na 1D relaci mezi poměry $\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega}$ a $\frac{n+\alpha}{\omega}$. $\Rightarrow$ Duvallův zákon



$\boxed{\text{Inverzní úlohy}}$

$\rightarrow$ podstatou je najít korekce ke slunečnímu modelu, které minimalizují diference mezi vypočtenými a změřenými frekvencemi

$\rightarrow$ $c \rightarrow c+\Delta c$ $\leftarrow$ perturbace v rychlosti zvuku
$\omega \rightarrow \omega+\Delta\omega$ $\leftarrow$ odpovídající změna frekvence

$$\int_{r_t}^{R}\left[\frac{(\omega+\Delta\omega)^2}{(c+\Delta c)^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]^{1/2}dr=\pi(n+\alpha)$$

$$l(l+1)=L^2$$

rozvoj jednou podle $\frac{\Delta\omega}{\omega}$, podruhé $\frac{\Delta c}{c}$, pokaždé stejný výsledek?

$$\Delta\omega: \left[\left(\frac{\omega+\Delta\omega}{c}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\frac{2\Delta\omega}{\omega}\right) - \frac{L^2}{r^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2\Delta\omega\,\omega}{c^2}\right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}}\left[1 + \frac{\frac{2\Delta\omega\,\omega}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}}\right]^{1/2} = \left|\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}\right| =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}}}_{A} + \frac{\frac{\Delta\omega\,\omega}{c^2}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - L^2/r^2\right)^{1/2}} = A + \frac{\frac{\Delta\omega\,\omega}{c^2}}{\frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}} =$$

$$= A + \frac{\Delta\omega}{c}\frac{1}{\left(1 - \frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}}$$

$$\Delta c: \left[\left(\frac{\omega}{c+\Delta c}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta c}{c}\right)^2} - \frac{L^2}{r^2}\right] =$$

$$= \left[\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{1+\frac{2\Delta c}{c}} - \frac{L^2}{r^2}\right]^{1/2} = \left|\frac{1}{1+x} \sim 1 - x\right| =$$

$$= \left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{2\Delta c}{c}\right) - \frac{L^2}{r^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2} - \frac{2\Delta c\,\omega^2}{c^3}\right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}}\left(1 - \frac{\frac{2\Delta c\,\omega^2}{c^3}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}}}\right)^{1/2} = \left|\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{x}{2}\right| =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}}}_{A} - \frac{\Delta c}{c}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}} = A - \frac{\Delta c}{c}\frac{\omega}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}$$

porovnáme:

$$\int_{r_1}^{R}\left[A + \frac{\Delta\omega}{c}\frac{1}{\left(1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}}\right]dr = \int_{r_1}^{R}\left[A - \frac{\Delta c}{c}\,\frac{\omega}{c}\,\frac{1}{\left(1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}}\right]dr$$

$$\int_{r_1}^{R}\frac{\Delta\omega}{c}\,\frac{1}{\left(1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}}\,dr = -\int_{r_1}^{R}\frac{\Delta c}{c}\,\frac{\omega}{c}\,\frac{1}{\left(1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}}\,dr$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}\underbrace{\int_{r_1}^{R}\frac{1}{c}\,\frac{1}{\left(1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}}\,dr}_{T} = -\int_{r_1}^{R}\frac{\Delta c}{c}\,\frac{1}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}\,dr$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{T}\int_{r_1}^{R_0}\frac{\Delta c}{c}\,\frac{1}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}\,dr$$

T... cestovní čas vlny podél paprsku, pravá část průměrná perturbace rychlosti zvuku podél paprsku

Trasa paprsku:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} \;\longrightarrow\; \text{radiální: } \frac{dr}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k_r}$$

$$\searrow \text{úhlová: } r\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k_h}$$

disperzní relace: $\omega^2 = c^2(k_r^2 + k_h^2)$ → ω_c se zanedbá

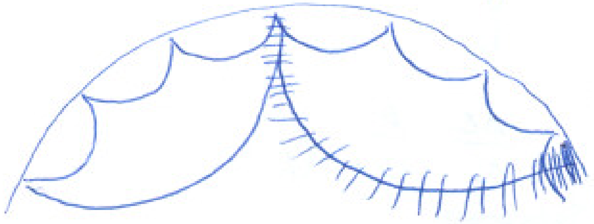
$$\Rightarrow dt = \frac{dr}{c\left(1-\frac{k_h^2c^2}{\omega^2}\right)^{1/2}} \Rightarrow T = \int_{r_t}^{R} dt(r)$$

↳ cestovní čas od spodního obratu k povrchu:

rovnice pro paprsek:

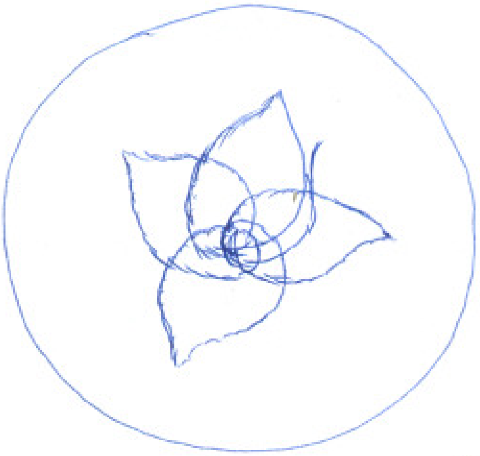
$$r\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{\partial\omega}{\partial k_h}\Big/\frac{\partial\omega}{\partial k_r} = \frac{k_h}{k_r}$$

nebo: $\frac{dr}{r\,d\vartheta} = \frac{k_r}{k_h} = \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{L^2}{r^2}}}{L/r}$



pro g-mody: $\omega^2 = \frac{k_h^2 N^2}{k_r^2+k_h^2}$

$$r\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{k_r}{k_h} = -\sqrt{\frac{N^2}{\omega^2}-1}$$



$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{T}\int_{r_t}^{R} \frac{\Delta c}{c}\,\frac{dr}{c\left(1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}}$$

Abelova integrální ~~infor~~ rovnice

$\Rightarrow$ lze rozřešit analyticky $\rightarrow$ výsledkem jsou korekce $\Delta c/c$

↳ diferenciální asymptotická inverze rychlosti zvuku

Obecná helioseismická inverze

→ asymptotické (ω velké u. λ malé) –

→ frekvence závisí jen na $\Delta c/c$ a lze rozřešit analyticky.

→ obecně → vztah mezi frekvencí a vnitřními parametry nelineární ⇒ nelze analyticky

↳ vypočtení z rovnic obsahujících $\rho(r)$, $P(r)$, $g(r)$.

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho \, ; \quad g = \frac{Gm}{r^2} \, ; \quad m = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr'$$

⇒ P a ρ nejsou nezávislé a nezávislé jsou jen dva hydrodyn. parametry nebo jejich kombinace:

$$(\rho, g), \; (P, g), \; \left(\frac{P}{\rho}, g\right), \; (c^2, g), \; (c^2, \rho), \dots$$

→ inverze formulována v členech malých korekcí standardního modelu → často iterativně

Variační princip

formálně: $\omega^2 \vec{\xi} = \mathcal{L}(\vec{\xi})$

↳ frekvence nějak závisí na perturbacích v pozici → vlastní problém

pokračujeme formálně: $\cdot \vec{\xi}^*$, $\int$ přes Slunce:

$$\omega^2 \int_V \rho_0 \vec{\xi}^* \cdot \vec{\xi} \, dV = \int_V \xi^* \cdot \mathcal{L}(\vec{\xi}) \rho_0 \, dV$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\int_V \vec{\xi}^* \cdot \mathcal{L}(\vec{\xi}) \rho_0 \, dV}{\int_V \rho_0 \vec{\xi}^* \cdot \vec{\xi} \, dV}$$

sluneční parametry v $\mathcal{L}$, frekvence vlastní čísla $\vec{\xi}$.

porušený model → změna frekvence závisí na perturbacích modelu → perturbace vlastní fce $\mathcal{L}$

$$\delta\omega^2 = \psi\left[\delta\rho, \delta\gamma, \delta\vec{\xi}\right].$$

variační princip: aproximace 1. řádu

$$\delta\omega^2 \sim \psi\left[\delta\rho, \delta\gamma\right]$$

čili zanedbáme perturbace vlastní fce

Poruchová teorie

malá porucha vlastního operátoru:

$$\mathcal{L}(\vec{\xi}) = \mathcal{L}_0(\vec{\xi}_0) + \mathcal{L}_1(\vec{\xi})$$

$$\Rightarrow \quad \delta\omega^2 = \frac{\int_V \xi^* \cdot \mathcal{L}_1(\xi)\rho\, dV}{\int_V \rho\, \vec{\xi}^* \cdot \vec{\xi}\, dV} = \left| I = \int_V \rho\, \vec{\xi}^* \cdot \vec{\xi}\, dV \right|$$

$\Rightarrow$

$$\delta\omega^2 = 2\delta\omega = \frac{1}{I}\int_V \xi^* \cdot \mathcal{L}_1(\xi)\rho\, dV$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2I\omega}\int_V \xi^* \cdot \mathcal{L}_1(\xi)\rho\, dV$$

I ... „mode mass"

$E = I\omega_0^2 a^2$ ... „mode energy"

a ... $|\xi_r|$ na povrchu

obvykle normalizace aby $\xi_r(R_\odot) = 1$

+ explicitní formulace $\mathcal{L}_1$ → štěpení

$$\frac{\delta\omega^{(n,l)}}{\omega^{(n,l)}} \int_0^R \underbrace{K^{(n,l)}_{\rho,\gamma}}\frac{\delta\rho}{\rho}dr + \int_0^R \underbrace{K^{(n,l)}_{\gamma,\rho}}\frac{\delta\gamma}{\gamma}dr$$

seismická jádra

lze vypočíst ze slunečních parametrů a vlastních ~~fcí~~ ξ pro tento model

~~$\mathcal{M}$~~ $= 5/8 =$

$\boxed{\text{Lokální x globální}}$

$\swarrow$ ring-diagram

$\searrow$ time-distance

$\boxed{\text{Ring-diagram}}$ zobecnění globální aplikované do malé oblasti Slunce

→ založeno na fitaci lokálního k-ω spektra

datová kostka $\Phi(\vec{k}, \omega)$, $\vec{k} = (k_x, k_y)$, aproximace rovinné vlny

power-spektrum $P(\vec{k}, \omega) = |\Phi(\vec{k}, \omega)|^2$

řez při konst. frekvenci → prstence

→ toky → Doppler-shifts ve frekvenci

→ změny rychl. zvuku → mění pozici prstenců

↳ fitují se pozice a tvar prstenců

↳ zavedeme $k = |\vec{k}|$

ψ → úhel $(\vec{k}, \vec{x})$

$$\Rightarrow P_k(\psi, \omega) = \sum_m a_m(\omega) \cos m\psi + b_m(\omega) \sin m\psi$$

↳ filtrujeme nízké m

pro každý p-mode ridge, při konst. k

$$P_{pr}(\psi, \omega) = \frac{A}{1 + \frac{(\omega - \omega_0 - k u_x \cos\psi - k u_y \sin\psi)^2}{\Gamma^2}} + \text{šum}$$

A... amplituda

Γ... pološířka

ω_0... frekvence pro rezonanci

u_x, u_y... komponenty pohybového pole

$\boxed{\text{Time - distance}}$ – měření cestovních časů vln mezi dvěma body

ze spektra – výběr jen vln se stejnou horizontální fázovou rychlostí $\frac{\omega}{k}$ → ty cestují do stejné horiz. vzdálenosti Δ

fukce fran $F_i(\vec{k},\omega) = e^{-\frac{\left(\frac{\omega}{k}-v_i\right)^2}{2\delta_i^2}}$

v_i ... střední fázová rychlost
δv_i ... disperse

filtrovaný signál $\psi(\vec{k},\omega) = F_i(\vec{k},\omega)\,\phi(\vec{k},\omega)$

four. transformace rychlostní dat. kostky

výpočet cross-covarianční fce mezi signály v $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$

$$C(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t) = \frac{h_t}{T-|t|}\sum_{t'}\psi(\vec{x}_1,t')\,\psi(x_2,t'+t)$$

h_t ... vzorkování v čase
T ... doba pozorování

$$-\frac{T}{2} \le t' \le \frac{T}{2}\ ,\ t' \text{... diskretní}$$

čili se hledá kovariance mezi $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ při zpoždění t

pro $t>0$ → pohyb $\vec{x}_1 \to \vec{x}_2$

← $C(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t)$

$\Delta = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$

travel-time závisí na modelu → změna modelu
⇒ změna travel-time

zhruba:

$$\delta\tau(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -\int_\Gamma ds \left[\frac{\vec{n}\cdot\vec{u}}{c^2} + \frac{1}{v_p}\frac{\delta c}{c} + \left(\frac{\delta \omega_c}{\omega_c}\right)\frac{\omega_c^2 \omega_p}{\omega^2 c^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{c_A^2}{c^2} - \frac{(\vec{k}\cdot\vec{c}_A)^2}{k^2 c^2}\right)\right]$$

Γ ... paprsek mezi $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$

$\vec{n}$ ... vektor šíření

$\vec{u}$ ... vnitřní tok

δc ... variace rychlosti zvuku

$\vec{c}_A = \frac{\vec{B}}{\sqrt{\rho}}$

$v_p = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$

→ $\vec{u}$, δc, c_A, ... integrované po paprsku

↳ výběrem vln a citlivostních jader

↳ separace do hloubek a pozic

$\tau(\vec{x}_1 \to \vec{x}_2) - \tau(\vec{x}_2 \to \vec{x}_1)$ ... tok hmoty

$\frac{1}{2}\tau(\vec{x}_1 \to \vec{x}_2) + \frac{1}{2}\tau(\vec{x}_2 \to \vec{x}_1)$ ... rychlost zvuku