SLUNEČNÍ OSCILACE

výkonové spektrum:

rychlost → rozklad do Fourierovských komponent

$$a(k_x, k_y, \omega) = \iiint v(x,y,t)\, e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)}\, dx\,dy\,dt$$

$$(k_x, k_y) = \vec{k_h} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$P(k_x, k_y, \omega) = a^* a$$ ← power-spektrum

na kouli: $v = v(\vartheta, \varphi, t)$

$$\hookrightarrow a(l, m, \omega) = \iiint v(\vartheta, \varphi, t) \underbrace{Y_l^m(\vartheta, \varphi)}_{\text{sférická harmonika}} e^{i\omega t}\, d\vartheta\, d\varphi\, dt$$

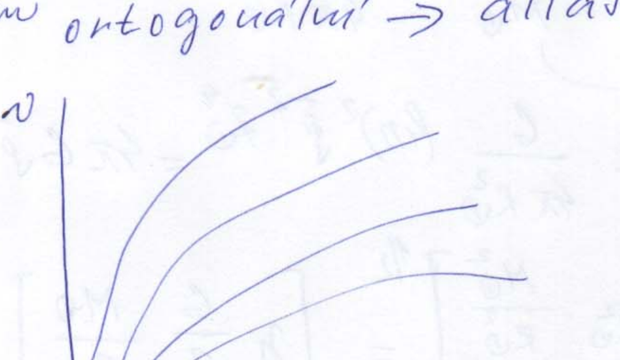
pak $P(l, m, \omega) = a^* a$

sférická symetrie → $P \neq P(m)$

$$\Rightarrow k_h = \frac{l(l+1)}{R}$$

$l=1, m=0$ $\qquad$ $l=3, m=2$ $\qquad$ $l=4, m=4$ $\qquad$ ...

pozorujeme na polokouli – na ní nejsou Y_l^m ortogonální → aliasing → falešné mody



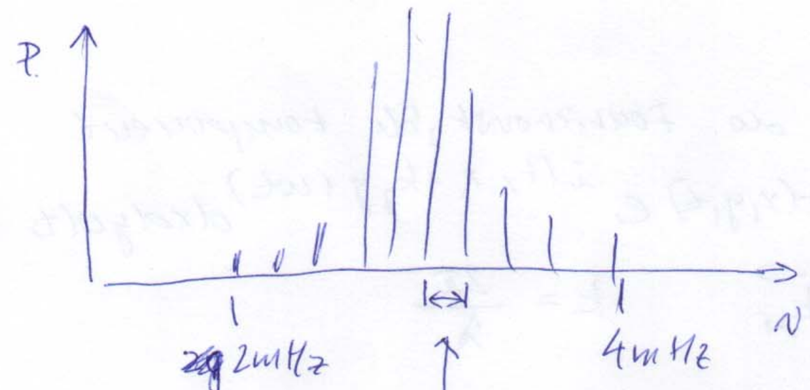
$l \sim k_h$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

klasické power-spektrum

l-ν diagram

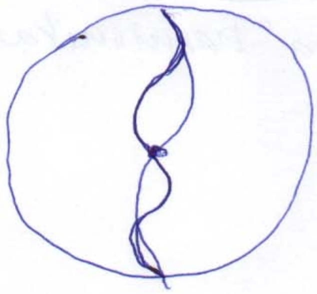
$\boxed{\text{low-}\ell}$ mody $\ell = 0, 1, 2, 3$



$\Delta\nu \sim 68\,\mu\text{Hz} \implies T \sim 245$ min

cestování přes celou hvězdu

lineární adiabatické oscilace nerotujícího Slunce



$\lambda \sim R_\odot$

putuje rychlostí zvuku:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}}}$$

$\bar{P} \to$ z rovnic vnitřní stavby: $\bar{\rho} = \frac{3}{4\pi} \frac{M_\odot}{R_\odot^3}$

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi \rho r^2}, \qquad \frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^2}$$

$$\frac{R_\odot - 0}{M_\odot - 0} = \frac{1}{4\pi \bar{\rho} R_\odot^2}, \qquad \frac{0 - \bar{P}}{M_\odot - 0} = -\frac{GM_\odot}{4\pi R_\odot^4}$$

$$\frac{R_\odot}{M_\odot} = \frac{1}{4\pi \bar{\rho} R_\odot^2}, \qquad \frac{\bar{P}}{M_\odot} = \frac{GM_\odot}{4\pi R_\odot^4}$$

$$\bar{P} = \frac{G}{4\pi R_\odot^2} \left(\frac{M_\odot}{R_\odot}\right)^2 = \frac{G}{4\pi R_\odot^2} (4\pi)^2 \bar{\rho}^{-2} R_\odot^4 = 4\pi G \bar{\rho}^{-2} R_\odot^2$$

$$c_s = \left(\gamma \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right)^{1/2} = \left[\gamma \frac{\frac{G}{4\pi R_\odot^2} \frac{M_\odot^2}{R_\odot^2}}{\frac{3}{4\pi} \frac{M_\odot}{R_\odot^3}}\right]^{1/2} = \left[\gamma \frac{G}{3} \frac{M_\odot}{R_\odot}\right]^{1/2}$$

oscilace: $\lambda = \tau c \to$ tam a zpět

$$\tau = \frac{\lambda}{c_s} = \frac{4R_\odot}{c_s} = \left[\frac{16 R_\odot^2}{\gamma \frac{G}{3} \frac{M_\odot}{R_\odot}}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{16}{3\gamma G} \frac{R_\odot^3}{M_\odot}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{16}{3\gamma G} \frac{3}{4\pi} \frac{4\pi}{3} \frac{R_\odot^3}{M_\odot}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{G\gamma\pi} \frac{1}{\rho}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma\pi}} \left[G\rho\right]^{-1/2}$$

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \; m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

$$\rho = 1{,}409 \times 10^3 \; kg/m^3$$

$$\boxed{\tau = 47 \; min}$$

rozštěpení rotací

mody s $m \neq 0 \to$ azimutální propagace

$m > 0 \to$ ve směru rotace

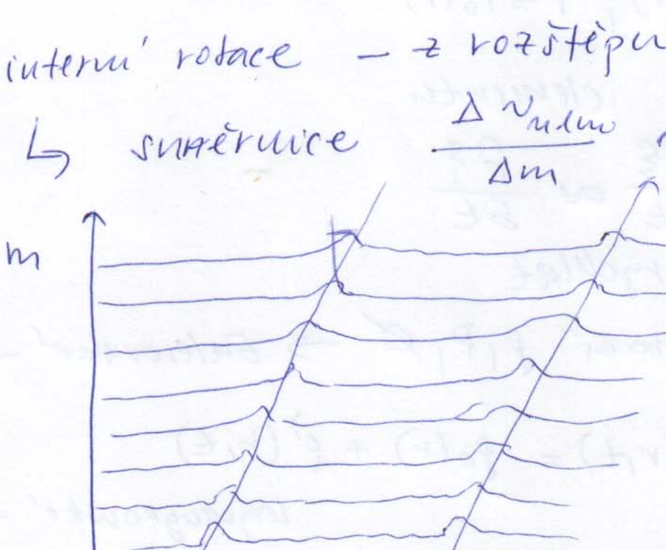
$m < 0 \to$ proti směru rotace

rozštěpení frekvence pro konst. n a l

$$\Delta \nu_{nlm} = \nu_{nlm} - \nu_{nl0}$$

↳ interní rotace – z rozštěpení frekvencí

↳ směrnice $\frac{\Delta \nu_{nlm}}{\Delta m} \approx$ interní rotace



Oscilace

předpoklady: lineární: $v/c_s \ll 1$

adiabatické: $\frac{dS}{dt} = 0$

sféricky symetrické pozadí

magnetismus a deformační tensor zanedbatelné

rovnice: kontinuita: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$

pohybová: $\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla P + \rho g$

$\hookrightarrow g = \nabla \phi$

$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v$

adiabaticita: $\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right) = 0$

$\frac{dP}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}, \; c^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$

$\hookrightarrow$ rychlost zvuku

Poissonova: $\Delta \phi = 4\pi G \rho$

$\hookrightarrow$ malá perturbace vůči pozadí v rovnováze:

$v_0 = 0, \; \rho = \rho_0(r), \; P = P_0(r)$

$\vec{\xi}(t) \rightarrow$ výchylka elementu

$\vec{v} = \frac{d\xi}{dt} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t}$

$\hookrightarrow$ jeho rychlost

dva typy perturbací $\rho, P, \phi \rightarrow$ Eulerovské $\rightarrow$ v určité pozici

$\rho(r,t) = \rho_0(r) + \rho'(r,t)$

Lagrangeovské $\rightarrow$ na částici

$\delta\rho(r+\xi) = \rho_0(r) + \delta\rho(r,t)$

ty jsou svázány:

$$\delta\rho = \rho' + (\xi \cdot \nabla\rho_0) = \rho' + (\xi \cdot \vec{e_r})\frac{d\rho_0}{dr} = \rho_0 + \xi_r \frac{d\rho_0}{dr}$$

↑ radiální jednotkový vektor

↳ linearizované rovnice:

pr. kontinuity: $\rho = \rho_0 + \rho'$, $v = v_0 + v'$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v) = 0 \quad , \quad \rho' v' \to 0 \quad , \quad \nabla\cdot v_0 = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 v_0)}_{=0 \;\to\; \text{řešení pro pozadí}} + \frac{\partial\rho'}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 v') = 0$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 v') = 0$$

↳ $v' = \dfrac{\partial\xi}{\partial t}$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho_0 \frac{\partial\xi}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot(\rho_0\xi) - \nabla\cdot\left(\xi\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot(\rho_0\xi) = \nabla\cdot\left(\xi\frac{\partial\rho_0}{\partial t}\right) = -\nabla\cdot\left[\xi\,\nabla\cdot\left(\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right]$$

reekout:

$$\rho' + \nabla\cdot(\rho_0\xi) = \underbrace{-\int\nabla\cdot\left[\xi\,\nabla\cdot\left(\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right]dt}_{=0 \text{ , pokud předpokládáme oscilující řešení}}$$

■ linearizované rovnice:

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho' + \nabla\cdot(\rho_0\vec{\xi}) = 0 && (1)\\ &\rho_0\frac{\partial v'}{\partial t} = -\nabla p' + g_0 e_r \rho' + \rho_0\nabla\Phi' && (2)\\ &p' + \xi_r\frac{dP_0}{dr} = c_0^2\left(\rho' + \xi_r\frac{d\rho_0}{dr}\right) && (3)\\ &\Delta\Phi' = 4\pi G\rho' && (4) \end{aligned}}$$

Cowlingova aproximace : $\Phi' = 0$

→ vlny nezpůsobují poruchy potenciálu

~~stavové parametry se perturbují jenom v r směru~~

+ přepis do sférické geometrie: (r, ϑ, φ)

$$\vec{\xi} = \xi_r \vec{e}_r + \xi_h$$

$$\hookrightarrow = \xi_\vartheta \vec{e}_\vartheta + \xi_\varphi \vec{e}_\varphi$$

radiální + horizontální

↳ zde se předpokládá symetrie

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \xi_r) + \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta\, \xi_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \xi_r) + \frac{1}{r}\nabla_h \xi_h$$

hledáme cyklickou perturbaci: $\vec{\xi} = e^{i\omega t}$

(1) $\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) = 0$

$$\rho' + \nabla_r \cdot (\rho_0 \xi_r) + \nabla_h \cdot (\rho_0 \xi_h) = 0$$

$$\boxed{\rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{\rho_0}{r}\nabla_h \cdot \xi_h = 0}$$

(2) $\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} = -\nabla P' + g e_r \rho' + \underbrace{\rho_0 \nabla \Phi'}_{\to\, = 0 \text{ cowling}}$

$$v = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$$

$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\nabla P' + g e_r \rho'$ na radiální a horizontální část.

$$\rho_0 \left[\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2}\right] = -\nabla_r P' - \frac{1}{r}\nabla_h P' + g e_r \rho'$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\nabla_r P + g e_r \rho' \;;\; \rho_0 \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{r}\nabla_h P'$$

$$\xi_r \sim e^{i\omega t} \;;\; \xi_h \sim e^{i\omega t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} -\omega^2 \rho_0 \xi_r &= -\frac{\partial P'}{\partial r} - g \rho' \\ -\omega^2 \rho_0 \xi_h &= -\frac{1}{r}\nabla_h P' \end{aligned}}$$

$\uparrow r \quad \downarrow \vec{g}$

(3) ad. děj: $\frac{dP}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow \delta P = c^2 \delta\rho$

$$\delta P = P' + \xi_r \frac{dP_0}{dr}$$

$$\delta\rho = \rho' + \xi_r \frac{d\rho_0}{dr}$$

$$P' + \xi_r \frac{dP_0}{dr} = c_0^2 \left(\rho' + \xi_r \frac{d\rho_0}{dr}\right)$$

$$\frac{1}{c_0^2} P' + \frac{1}{c_0^2} \xi_r \frac{dP_0}{dr} = \rho' + \xi_r \frac{d\rho_0}{dr}$$

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} P' + \frac{1}{c_0^2} \xi_r \frac{dP_0}{dr} - \xi_r \frac{d\rho_0}{dr}$$

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} P' + \xi_r \left[\frac{1}{c_0^2} \frac{dP_0}{dr} - \frac{d\rho_0}{dr}\right]$$

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} P' + \xi_r \left[\frac{\rho_0}{\gamma P} \frac{dP_0}{dr} - \frac{d\rho_0}{dr}\right]$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_0^2} + \xi_r \frac{\rho_0}{g} \underbrace{g \left[\frac{1}{\gamma P} \frac{dP_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr}\right]}_{N^2 \text{ – Brunt-Väisälä}}$$

$$\boxed{\rho' = \frac{P'}{c_0^2} + \frac{\rho_0 N^2}{g} \xi_r}$$

N^2 z Mixing-length theory:

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \left[\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{ad} - \frac{d\rho}{dr}\right]$$

ad. děj: $pV^{\gamma} = konst \Rightarrow P\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma} = konst$

$$P \rho^{-\gamma} = konst$$

diferencujeme: $dP \rho^{-\gamma} - \gamma P \rho^{-\gamma-1} d\rho = 0$

$$dP \rho^{-\gamma} = \gamma P \rho^{-\gamma-1} d\rho \Rightarrow dP = \gamma P \rho^{-1} d\rho$$

$$d\rho = \frac{\rho\, dP}{\gamma P} \;;\; \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP}{dr}$$

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \left[\frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP}{dr} - \frac{d\rho}{dr}\right] = \underbrace{g \left[\frac{dP}{\gamma P\, dr} - \frac{1\, d\rho}{\rho\, dr}\right]}$$

(4) neuvažuje se

$\Rightarrow$ 4 rovnice: $\rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho_0\xi_r) + \frac{\rho_0}{r}\nabla_h \xi_h = 0$ (a)

$$-\omega^2\rho_0 \xi_r = -\frac{\partial P'}{\partial r} + g\rho' \quad (b)$$

$$-\omega^2\rho_0 \xi_h = -\frac{1}{r}\nabla_h P' \quad (c)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c^2} + \frac{\rho_0 N^2}{g}\xi_r \quad (d)$$

+ okrajové podmínky:

$\xi_r(r=0) = 0 \rightarrow$ regularita pro $l=1$

střed je stabilní

$\delta P(r=R) = 0 \rightarrow$ nejsou externí síly

řešení regulární u pólů pro $\vartheta = 0, \pi$

$\hookrightarrow$ hledáme separované řešení pro radiální a úhlovou část:

$$\rho'(r,\vartheta,\varphi) = \rho'(r)\cdot f(\vartheta,\varphi)$$
$$P'(r,\vartheta,\varphi) = P'(r)\cdot f(\vartheta,\varphi)$$
$$\xi_r(r,\vartheta,\varphi) = \xi_r(r)\cdot f(\vartheta,\varphi)$$
$$\xi_h(r,\vartheta,\varphi) = \xi_h(r)\cdot \nabla_h f(\vartheta,\varphi)$$

(a) $\left[\rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho_0\xi_r)\right]f(\vartheta,\varphi) + \frac{\rho_0}{r}\xi_h \nabla_h^2 f = 0$

separace proměnných pokud

$$\nabla_h^2 f = \alpha f \;;\; \alpha = \text{konst}$$

$\rightarrow$ nenulové řešení na pólech pro

$$\alpha = -l(l+1)$$

$$f(\vartheta,\varphi) = Y_l^m(\vartheta,\varphi) = C\, P_l^m(\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

$\uparrow$ Legendre

$$\Rightarrow \rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho_0\xi_r) - \frac{l(l+1)}{r}\rho_0\xi_h = 0$$

(c) $-\omega \rho_0 \xi_h(r) \nabla_h f(\vartheta,\varphi) = -\frac{1}{r} p'(r) \nabla_h f(\vartheta,\varphi)$

$$-\omega \rho_0 \xi_h(r) = -\frac{1}{r} p'(r)$$

$$\boxed{\xi_h = \frac{1}{\omega^2 \rho_0 r} p'}$$

dosadíme do rce kontinuity ve tvaru:

$$\rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho_0 \xi_r) - \frac{l(l+1)}{r}\rho_0 \xi_h = 0$$

$$\rho' + \frac{2}{r}\rho_0 \xi_r + \xi_r \frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0 \frac{d\xi_r}{dr} - \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} p' = 0$$

$\hookrightarrow$ z (3) $\rho' = \frac{p'}{c_0^2} + \frac{\rho_0 N^2}{g}\xi_r$

$$\rho_0 \frac{d\xi_r}{dr} + \xi_r \frac{d\rho_0}{dr} + \frac{2}{r}\rho_0 \xi_r + \frac{p'}{c_0^2} + \frac{\rho_0 N^2}{g}\xi_r - \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} p' = 0 \quad / : \rho_0$$

$$\frac{d\xi_r}{dr} + \frac{2}{r}\xi_r + \xi_r \underbrace{\left[\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr} + \frac{N^2}{g}\right]} + \frac{p'}{\rho_0 c^2}\left[1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right] = 0$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr} + \frac{N^2}{g} = \cancel{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr}} + \frac{1}{\gamma P_0}\frac{dP_0}{dr} - \cancel{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr}} = \frac{1}{\gamma P_0}\frac{dP_0}{dr} =$$

$= \left| \frac{dP_0}{dr} = -g\rho_0 \right.$ neperturbovaná rovnováha potadí $\left| = -\frac{1}{\gamma P_0} g \rho_0 = \left| c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \right| = \right.$

$= -\frac{g}{c^2}$

$$\boxed{\frac{d\xi_r}{dr} + \cancel{\frac{2}{r}\xi_r} - \frac{g}{c^2}\xi_r + \left[1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right]\frac{p'}{\rho_0 c^2} = 0} \quad (1)$$

$\frac{d\xi_r}{dr} \gg \frac{\xi_r}{r}$

lokální přístup

rozměr frekvence^2

$S_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2}$ Lambova fce.

momentová radiální rovnice:

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r = -\frac{dP'}{dr} - g\rho'$$

$$\frac{dP'}{dr} + g\rho' - \omega^2\rho_0\xi_r = 0$$

$$\hookrightarrow \rho' = \frac{P'}{c^2} + \frac{\rho_0 N^2}{g}\xi_r$$

$$\boxed{\frac{dP'}{dr} + \frac{g}{c^2}P' + (N^2 - \omega^2)\rho_0\xi_r = 0} \quad (2)$$

doplnit o okrajové podmínky:

$$\boxed{\text{dole:} \quad \xi_r = 0} \quad (3)$$

$$\boxed{\text{nahoře:} \quad \delta P = P' + \frac{dP_0}{dr}\xi_r = 0} \quad (4)$$

$$\hookrightarrow \frac{dP_0}{dr} = -g\rho_0$$

$$P' - g\rho_0\xi_r = 0$$

horiz. komponenta pohyb. rce:

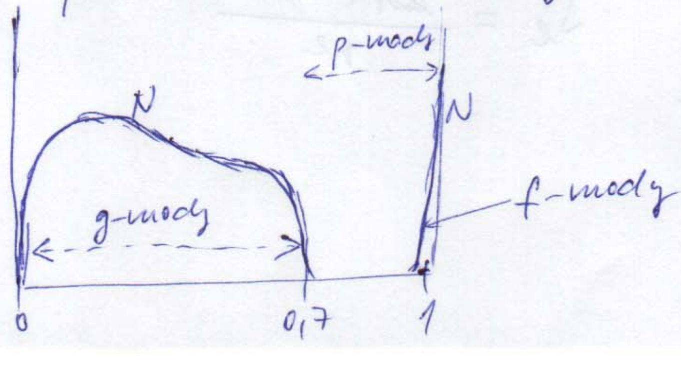
$$\xi_h = \frac{1}{\omega^2\rho_0 r}P'$$

$$\omega^2\rho_0 r\xi_h - g\rho_0\xi_r = 0$$

$$\frac{\xi_h}{\xi_r} = \frac{g}{\omega^2 r}$$

by mělo platit
ale neplatí přesně, protože existují externí síly (atmosféra),
tedy ~~neplatí~~ horní okraj. podmínka vypadá jinak

Rovnice (1) a (2) a podmínky (3) a (4) → vlastní problém pro oscilační mody



JWKB řešení

↳ Jeffreys - Wentzel - Kramers - Brillouin

předpokládáme, že se mění hlavně hustota v rámci oscilace, ostatní „pozaďové" parametry považujeme za konstantní

hledáme řešení ve tvaru:

$$\xi_r = A\,\rho^{-1/2} e^{ik_r r}$$

$$p' = B\,\rho^{1/2} e^{ik_r r}$$

$$k_r = k_r(r), \text{ mění se pomalu}$$

→ ① a ② přejdou na

$$\left(-ik_r + \frac{1}{H}\right)A - \frac{g}{c^2}A + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{S_\ell^2}{\omega^2}\right)B = 0$$

$$\left(-ik_r - \frac{1}{H}\right)B + \frac{g}{c^2}B + (N^2 - \omega^2)A = 0$$

netriviální řešení → pokud determinant ≠ 0

$$\to \quad A\left[-ik_r + \frac{1}{2H} - \frac{g}{c^2}\right] + B\left[\frac{1}{c^2} - \frac{S_\ell^2}{\omega^2 c^2}\right] = 0$$

$$A\left[N^2 - \omega^2\right] + B\left[-ik_r - \frac{1}{2H} + \frac{g}{c^2}\right] = 0$$

$$\left[-ik_r + \left(\frac{1}{2H} - \frac{g}{c^2}\right)\right]\left[-ik_r - \left(\frac{1}{2H} - \frac{g}{c^2}\right)\right] - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{S_\ell^2}{\omega^2 c^2}\right)(N^2 - \omega^2) = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{k_r^2} = \frac{\omega^2 - \overbrace{\frac{c^2}{4H^2}}^{\to \omega_c^2}}{c^2} + \frac{S_\ell^2}{c^2\omega^2}(N^2 - \omega^2) =$$

$$\boxed{= \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} + \frac{S_\ell^2}{c^2\omega^2}(N^2 - \omega^2)}$$

$$N^2 = \frac{g}{H} - \frac{g^2}{c^2}$$

ω_c ... akustická hraniční (cut-off) frekvence pro $k_r > 0$ → propagace vln

$k_r < 0$ → útlum vln

rezonance: $$\int_{r_1}^{r_2} k_r \, dr = \pi (n + \alpha)$$

$r_1, r_2 \ldots$ odrazné body

$n \ldots$ radiální řád – celé číslo

$\alpha \ldots$ posun fáze, je vlastní danému rozhraní, na němž dochází k odrazu

Odhady

1. $\omega^2 \gg N^2$

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} - \frac{S_\ell^2}{c^2}$$

definujeme: $k_h = \frac{S_\ell}{c} = \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{r}$

$$k_r^2 c^2 = \omega^2 - \omega_c^2 - k_h^2 c^2$$

$$\omega^2 = \omega_c^2 + k_r^2 c^2 + k_h^2 c^2$$

$$k^2 = k_r^2 + k_h^2$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_c^2 + k^2 c^2}$$ disperzní relace pro p-mody (akustické)

2. $\omega^2 \ll S_\ell^2$

$$k_r^2 = \frac{\cancel{\omega^2(\omega^2 - \omega_c^2)} + S_\ell^2 (N^2 - \omega^2)}{c^2 \omega^2} = \frac{S_\ell^2 (N^2 - \omega^2)}{c^2 \omega^2} =$$

$$= k_h^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) = k_h^2 \frac{N^2}{\omega^2} - k_h^2$$

$$\underbrace{k_r^2 + k_h^2}_{} = k_h^2 \frac{N^2}{\omega^2} = k^2$$

$$\boxed{\omega^2 = N^2 \frac{k_h^2}{k^2} = N^2 \cos^2 \theta}$$ pro g-mody

→ propagují se hlavně horizontálně

p-mody

$k_r^2 > 0$, v $k_r^2 = 0$ se otáčejí (odrážejí)

dolní obratový bod: $\omega_c \ll \omega$

$$\Rightarrow \omega \approx \frac{c\sqrt{l(l+1)}}{r} \quad k_h$$

$$\frac{c(r_1)}{r_1} = \frac{\omega}{L}$$ ... rovnice pro spodní bod

horní obratový bod: $\omega_c(r) \sim \omega$

$\omega_c(r)$ je strmá v podpovrchových vrstvách

$$\Rightarrow r_2 \approx R_\odot$$

$\Rightarrow$ rezonance:

$$\int_{r_1}^{R_\odot} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}}\, dr = \pi(n+\alpha)$$

pro $l \ll n$, $r_1 \sim 0$

$$\Rightarrow \omega \sim \frac{\pi\left(n + \sqrt{l(l+1)}/2 + \alpha\right)}{\int_0^R \frac{dr}{c}}$$

$$\Rightarrow \Delta\nu = \left(4\int_0^R \frac{dr}{c}\right)$$

low-l mody jsou ekvidistantní ve frekvenci

g-mody

obratový bod: $N(r) = \omega$

propagace pro $k_r > 0$, v té oblasti $N \gg \omega$

$$\Rightarrow k_r \sim \frac{\sqrt{l(l+1)}\,N}{r\omega}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega} N \frac{dr}{r} \simeq \pi(n+\alpha)$$

$$\omega \sim \frac{\sqrt{l(l+1)}\int_{r_1}^{r_2} N \frac{dr}{r}}{\pi(n+\alpha)}$$

$\boxed{\text{f-mody}}$

v povrchových vrstvách, kde $\delta P \sim 0$

$$P' = \delta P + g\rho\,\xi_r \rightarrow \text{řešíme pro Lagr. poruchu}$$

$$\frac{d\xi_r}{dr} - \frac{l(l+1)g}{\omega^2 r^2}\xi_r + \left(1 - \frac{l(l+1)c^2}{\omega^2 c^2}\right)\frac{\delta P}{\rho_0 c^2} = 0$$

$$\frac{d\,\delta P}{dr} + \frac{l(l+1)g}{\omega^2 r^2}\delta P - \frac{g\rho_0 f}{r}\xi_r = 0$$

$$f \sim \frac{\omega^2 r}{g} - \frac{l(l+1)g}{\omega^2 r}$$

řešení pro $\delta P = 0$ a $f = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{\sqrt{l(l+1)}\,g}{R_\odot} = k_h g}$$

rovnice $\dfrac{d\xi_r}{dr} - \dfrac{\sqrt{l(l+1)}}{r}\xi_r = 0$

řešení: $\xi_r \sim e^{k_h(r - R_\odot)}$

$\hookrightarrow$ pokles s hloubkou