AST007:
ZÁKLADY ASTRONOMIE A ASTROFYZIKY II
Látka přednášená P. Harmancem

Petr Harmanec
Astronomický ústav Univerzity Karlovy

Verze 4: 21. prosince 2004

Obsah

1 Základy teorie záření **3**
1.1 Soustavy fyzikálních jednotek . . . 3
1.2 Elektromagnetické záření . . . 5
1.3 Intenzita . . . 8
1.4 Tok . . . 10
1.5 Hustota zářivé energie . . . 13
1.6 Tlak záření . . . 13
1.7 Koeficient opacity (absorpce) a optická tloušťka . . . 14
1.8 Mechanická síla, kterou záření působí na vrstvu plynu . . . 15
1.9 Emisní koeficient . . . 15
1.10 Rovnice přenosu energie . . . 15
1.11 Termodynamická rovnováha . . . 16
1.12 Záření absolutně černého tělesa . . . 17
1.13 Lokální termodynamická rovnováha . . . 21
1.14 Efektivní teplota hvězdy . . . 21

2 Klasické způsoby pozorování hvězd **22**
2.1 Spektrální klasifikace hvězdných spekter . . . 22
2.2 Hvězdná fotometrie . . . 23
2.2.1 Jasnosti hvězd, Pogsonova rovnice, hvězdné velikosti v různých mezinárodně přijatých systémech . . . 23
2.2.2 Různé druhy hvězdných velikostí, fotometrické systémy . . . 25
2.2.3 Redukce fotoektrických měření jasnosti hvězd . . . 28
2.2.4 Praktické aspekty fotometrických pozorování a redukcí . . . 34
2.2.5 Převody mezi fotometrickými systémy . . . 37
2.3 Určování fyzikálních vlastností hvězd z fotometrických měření . . . 38
2.3.1 Modul vzdálenosti, bolometrická korekce a zářivý výkon hvězdy . . . 38
2.3.2 Efektivní teplota hvězdy . . . 41
2.4 Redukce spektrogramů hvězd . . . 46

3 Analýza časových řad a hledání periodicity u proměnných hvězd **53**
3.1 Úvodní úvahy . . . 53
3.2 Obecné zákonitosti a problémy při hledání period . . . 54
3.3 Metody minimalizace fázového rozptylu . . . 59
3.4 Metody založené na modelování periodických změn matematickými funkcemi . . . 61
3.5 Odstranění neperiodické změny . . . 62
3.6 Numerický příklad . . . 65
3.7 Existující algoritmy a programy . . . 66

1 Základy teorie záření

Patří k samotné povaze astronomie a astrofyziky, že naprostou většinu informací o kosmických objektech nám zprostředkovává od nich přicházející elektromagnetické záření, ať už jimi vyzařované nebo pouze odražené. Se základními pojmy, které se záření týkají, se proto budeme opakovaně setkávat a je důležité se s nimi důkladně obeznámit.

1.1 Soustavy fyzikálních jednotek

Na samotný úvod je třeba si stručně povědět něco o jednotkách měření, které se v dnešní astronomii a astrofyzice používají.

Mezinárodní astronomická unie již před delší dobou rozhodla, že se mají používat jednotky SI soustavy, vycházející z následujících základních jednotek:

kg (kilogram)... pro hmotnost,
m (metr) ... pro délku,
s (sekunda) ... pro čas a
K (kelvin) ... pro absolutní teplotu.

V SI soustavě jsou dovoleny pouze ty odvozené jednotky pro větší či menší množství, které jsou vůči základním jednotkám soudělné tisícem, tedy např. nanometr, milimetr nebo kilometr:

$\mathrm{nm} = 10^{-9}\mathrm{m}, \quad \mathrm{mm} = 10^{-3}\mathrm{m}, \quad \mathrm{km} = 10^{3}\mathrm{m}$

a podobně.

Za zmínku stojí i některé důležitější odvozené jednotky
N (newton) = $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ ... pro sílu,
J (joule) = $\mathrm{N\,m} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$ ... pro energii či práci a
W (watt) = $\mathrm{J\,s^{-1}} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$ ... pro výkon.

Je třeba ovšem říci, že zmíněná reforma "na povel" se příliš nevžila a právě v oblasti záření jsou ve světové astronomické literatuře i nadále používány (a redakcemi časopisů tolerovány) jednotky starší soustavy cgs. Je to vcelku pochopitelné, neboť SI jednotky nejsou někdy příliš praktické a kromě toho existuje spousta rozsáhlých souborů dat, např. modely hvězdných atmosfér či tabulky vlnových délek spektrálních čar (jak se o nich zmíníme později), které jsou uvedeny ve starších jednotkách.

Základními jednotkami cgs soustavy jsou:

g (gram) ... pro hmotnost ($1\ \mathrm{g} = 10^{-3}\mathrm{kg}$),
cm (centimetr) ... pro délku ($1\ \mathrm{cm} = 10^{-2}\mathrm{m}$),
s (sekunda) ... pro čas a
K (kelvin) ... pro absolutní teplotu,

a také odvozené jednotky jako
dyn = $\mathrm{g\,cm\,s^{-2}} = 10^{-5}\mathrm{N}$ ... pro sílu či
erg = $\mathrm{g\,cm^2\,s^{-2}} = 10^{-7}\mathrm{J}$ ... pro energii či práci.

Používají se i některé starší tradiční jednotky jako jednotka délky

Å(angström): 1 Å= 10^{-10}m.

V astronomii se běžně používají jednotky odvozené ze základních fyzikálních vlastností Země, Slunce a sluneční soustavy. Jde např. o následující jednotky času:

- *Střední sluneční den* či jen den (zkratka d) = 86400 s.
- *Siderický rok* je doba oběhu Země kolem Slunce vůči inerciální vztažné soustavě (hvězdám). Jeho délka je 365,2564 dne.
- *Juliánský rok* je hodnota siderického roku s tou přesností, jaká byla známa tvůrcům Juliánského kalendáře: 365,25 dne. Tato hodnota se dodnes při některých úvahách používá.
- *Tropický rok* zvaný též sluneční či astronomický rok je doba mezi dvěma průchody Slunce jarním bodem. V současnosti je to 365,24219 dne.
- *Hvězdný den* je siderická doba rotace Země (=doba rotace v inerciální soustavě čili vůči hvězdám). Měřena v jednotkách středního slunečního dne činí 365,24219/366,24219 = 0,997269566 dne.

V pracech, zabývajících se objekty sluneční soustavy se často za jednotku vzdálenosti přijímá astronomická jednotka (zkratka AU = astronomical unit), což je střední vzdálenost středu Země od středu Slunce. Její hodnota je

1 AU = 149 597 870,691 km = 1,49597870691$\times 10^{11}$ m.

Astronomická jednotka se někdy užívá i ve hvězdné astronomii. Z ní také vychází jednotka vzdálenosti hvězd a dalších kosmických těles od nás, zvaná *parsek* (zkratka pc). Je to vzdálenost, ze které by se střední poloměr zemské dráhy kolem Slunce (=1 AU) jevil pod úhlem jedné obloukové vteřiny. Je tedy

$$1\ \mathrm{pc} = \frac{1\ \mathrm{AU}}{\sin 1''} = 206264,80625 \times 1,49597870691 \times 10^{11}\mathrm{m} = 3,085677581318 \times 10^{16}\mathrm{m}. \tag{1}$$

Důvodem zavedení této jednotky bylo to, že trigonometricky určovaná hvězdná paralaxa p je právě úhel, pod kterým je vidět z dané hvězdy poloměr zemské dráhy. Vzhledem k obrovským vzdálenostem hvězd od nás jsou jejich paralaxy velmi malé a udávají se v obloukových vteřinách. Platí tedy jednoduchý vztah mezi vzdáleností a paralaxou:

$$d(\mathrm{pc}) = \frac{1}{p('')}. \tag{2}$$

Pro úplnost ještě dodejme, že ve sdělovacích prostředcích a při popularizaci astronomie se často užívá jednotka *vzdálenosti* s poněkud matoucím názvem *světelný rok*. Rozumí se tím dráha, kterou urazí světlo ve vakuu za 1 rok. Nejde o oficiálně uznanou a řádně definovanou jednotku, takže se lze setkat s hodnotami světelného roku odvozenými jak od tropického, tak od siderického roku. Nejčastěji se ale světelným rokem rozumí dráha, kterou urazí ve vakuu elektromagnetické záření za 1 Juliánský rok (365,25 dne).

1 světelný rok = 9,4607305$\times 10^{15}$m

a tedy

1 pc = 3,26156 světelného roku.

Hmotnosti a rozměry hvězd se obvykle vyjadřují v jednotkách hmotnosti Slunce $M_\odot$ a rovníkového poloměru Slunce $R_\odot$. To ale vzhledem k rostoucí přesnosti našich pozorování začíná být určitým problémem, neboť znalost hmotnosti i poloměru Slunce se s postupem doby zpřesňuje a každý autor používá trochu jiné hodnoty. Kromě toho je zřejmé, že nejde o konstanty v pravém slova smyslu: hmotnost Slunce se v důsledku ztráty hmoty dlouhodobě poněkud zmenšuje, zatímco jeho poloměr se mírně mění např. během jedenáctiletého slunečního cyklu (jak ukazují přesná inteferometrická měření) a sekulárně z vývojových důvodů zvolna roste.

Velmi dlouho se např. užívala hodnota $R_\odot$ = 696260 km, zatímco současná pozorování vedou na střední hodnotu $R_\odot$ = 695835 km. Zdálo by se, že takový rozdíl je zanedbatelný. Nemusí tomu ale tak být. Uvažme např., že rotační rychlosti hvězd (o jejichž měření se zmíníme později) se udávají v absolutních jednotkách km s^{-1} a pro pomaleji rotující hvězdy je lze snadno určit s přesností na 1 km s^{-1}. Kdybychom určovali rotační periodu obří hvězdy s poloměrem 30 $R_\odot$ a obvodovou rotační rychlostí 5 km s^{-1}, pak pro první výše uvedenou hodnotu slunečního poloměru dostaneme $303\overset{\mathrm{d}}{.}984$, zatímco pro druhou $303\overset{\mathrm{d}}{.}798$. Rozdíl mezi oběma hodnotami je již po několika cyklech snadno měřitelný. Bylo by proto žádoucí, aby se Mezinárodní astronomická unie dohodla na definici *nominálních* hodnot sluneční hmotnosti a slunečního poloměru, vyjádřených v kg a m, které by byly "uzákoněny" jako skutečné konstanty, povinně všemi badateli používané.

Pro účely tohoto textu tak učiníme provizorně a přijmeme jako konstanty tyto nominální hodnoty hmotnosti a poloměru Slunce:

$M_\odot = (1.988435 \pm 0.000027) \times 10^{30}$ kg (Gundlach a Merkowitz 2000) a

$R_\odot = 6.95835 \times 10^{8}$ m (hec).

V tomto textu budu tedy vycházet z SI soustavy, ale všude, kde to bude vhodné, budu uvádět i jiné dosud používané jednotky.

Přehled jednotek a různých zde používaných konstant a jejich numerických hodnot je uveden v příloze na konci textu.

1.2 Elektromagnetické záření

Jak je známo z fyziky, má elektromagnetické záření duální povahu: má současně charakter vlnění a částicovou povahu.

Jako vlnění se může šířit i prázdným prostorem a lze jej charakterizovat vlnovou délkou (tedy délkou jedné vlny) λ nebo frekvencí ν (počtem kmitů na jednotku délky). Obě tyto veličiny spolu souvisí známým vztahem

$$\nu = \frac{c_\mathrm{n}}{\lambda}, \tag{3}$$

kde c_n je rychlost, jakou se elektromagnetické záření šíří v uvažovaném prostředí. V prázdném kosmickém prostoru se elektromagnetické záření šíří konstantní rychlostí c, které se nejčastěji říká rychlost světla a která je významnou fyzikální konstantou. Protože právě o záření šířící se kosmickým prostorem se budeme zajímat nejvíce, budeme vztah mezi frekvencí a vlnovou délkou uvažovat obvykle ve tvaru

$$\nu = \frac{c}{\lambda}. \tag{4}$$

Z fyziky dále víme, že jedno kvantum elektromagnetického záření o frekvenci ν, tedy foton záření, s sebou nese energii

$$E_\nu = \mathrm{h}\nu \tag{5}$$

kde h je malé kladné číslo a nazývá se Planckova konstanta. Podle slavné Einsteinovy rovnice

$$E_\nu = m_\mathrm{f} c^2 \tag{6}$$

lze pak ovšem pohybujícímu se fotonu přiřadit i hmotnost m_f a tedy i hybnost $m_\mathrm{f} c$.

Je tedy zřejmé, že energie fotonu je přímo úměrná jeho frekvenci a nepřímo úměrná jeho vlnové délce. Jinak řečeno, kvantum krátkovlnného záření odpovídá vyšší energii než kvantum záření dlouhovlnného. To není ani intuitivně tak překvapivé, neboť jaksi cítíme, že na to, aby se na dané délce záření zavlnilo vícekrát, je třeba, aby mělo větší energii. Také si můžeme uvědomit, že částicová povaha světla se bude více uplatňovat na krátkovlnném konci elektromagnetického záření, zatímco jeho vlnová povaha na dlouhém.

Je také dobré si uvědomit, že je-li rychlost světla ve vakuu nepřekročitelnou mezí, pak se rychlost elektromagnetického záření vysílaného i rychle se pohybujícím zdrojem již nemůže zvýšit. Co se ale změní, je energie fotonů. Pokud se zdroj pohybuje ve směru k pozorovateli, energie fotonu se zvýší o přidanou kinetickou energii a světlo se posune k vyšším frekvencím, tedy do fialova. Naopak u zdroje letícího směrem od pozorovatele se energie fotonu sníží a světlo se posune směrem do červena. Tento jev se nazývá Dopplerovým jevem a pro elektromagnetické záření jej lze v klasické fyzice (tj. pro vzájemnou rychlost zdroje a pozorovatele, která je mnohem menší, než rychlost světla ve vakuu) popsat vztahem

$$RV = \frac{c}{\lambda_\mathrm{lab}}(\lambda - \lambda_\mathrm{lab}), \tag{7}$$

kde RV je radiální rychlost zdroje vůči pozorovateli, tedy rychlost ve směru zorného paprsku (zpravidla se bere kladně při vzdalování zdroje), λ je pozorovaná vlnová délka, λ_lab je laboratorní klidová vlnová délka a c je opět rychlost světla ve vakuu.

Elektromagnetické záření můžeme vnímat buď globálně nebo podle jednotlivých vlnových délek. Často se používá termín spektrum elektromagnetického záření. Tím se rozumí funkce vyzařování nějakého zdroje v závislosti na vlnové délce či frekvenci. Reálné zdroje elektromagnetického záření totiž obvykle nejsou monochromatické, ale vyzařují přes velký rozsah vlnových délek, ač pro různé vlnové délky s různou vydatností.

Podle délky vlny se historicky vyvinulo schematické dělení elektromagnetického záření na několik plynule na sebe navazujících oblastí. Je ovšem třeba upozornit, že různé prameny udávají hranice oblastí poněkud různě, někdy i s vzájemným překryvem. Zde uvedené dělení je proto jen informativní:

1. *Záření* γ Vlnové délky kratší než 0,1 nm.

2. *Rentgenové (X) záření* Vlnové délky mezi 0,1 nm a zhruba 4 nm.
3. *Ultrafialové (UV) záření* Vlnové délky mezi 4 nm a zhruba 370 nm.
4. *Optické záření = viditelné světlo* Vlnové délky v rozsahu asi 370–750 nm; s rostoucí vlnovou délkou vnímáme toto záření jako světlo fialové, modré, zelené, žluté, oranžové a červené barvy.
5. *Infračervené (IR) záření* Vlnové délky mezi 750 nm a zhruba 1 mm.
6. *Mikrovlnné záření* Vlnové délky mezi 1 mm a zhruba 100 mm.
7. *Rádiové záření* Vlnové délky delší než asi 100 mm; v řadě případů se lze setkat s tím, že část mikrovlnného záření se považuje za podskupinu radiového záření.

Vlnová délka elektromagnetického záření se měří ve zlomcích, případně násobcích základní SI jednotky jednoho metru. Frekvence se v zásadě měří v jednotkách odvozené SI jednotky zvané Hertz (zkratka Hz) a příslušných násobcích:

$$1\mathrm{Hz} = 1\mathrm{s}^{-1}. \tag{8}$$

Vzhledem k obrovskému rozpětí mnoha řádů se v různých oblastech elektromagnetického záření vlnová délka a frekvence udávají z praktických důvodů v různých tradičně zaváděných jednotkách. V oblasti záření γ se vetšinou vůbec nepoužívá vlnová délka ani frekvence, ale jednotky energie odpovídající kvantu záření o dané frekvenci, nejčastěji udávané v *elektronvoltech* (zkratka eV):

$$1\mathrm{eV} = (1,602176462 \pm 0.000000063) \times 10^{-12}\mathrm{erg} = (1,602176462 \pm 0.000000063) \times 10^{-19}\mathrm{J}. \tag{9}$$

V UV oboru a v optickém oboru se nejčastěji používá vlnová délka, udaná buď v nm nebo v Å.
V infračerveném oboru se nejčastěji udává vlnová délka v $\mu m = 10^{-6}$ m.
Konečně pro rádiové vlny se udává jejich vlnová délka v m, případně frekvence v kHz či MHz.

Příklad:
Spočítejte, jakou frekvenci a jakou vlnovou délku má foton o energii 1 eV.

Řešení:
Podle vztahu (5) je

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{1,602176462 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}{6,62606876 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}} = 2.41798949 \times 10^{14}\mathrm{Hz} \tag{10}$$

Podle vztahu (4) je odpovídající vlnová délka

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2,99792458 \times 10^{8}\mathrm{m\,s}}{2.41798949 \times 10^{14}\mathrm{Hz}} = 1,23984186 \times 10^{-6}\mathrm{m} = 1,23984186\mu\mathrm{m} \tag{11}$$

Na základě právě uvedeného jednoduchého příkladu tedy vidíme, že lze napsat jednoduchý obecně platný vztah mezi vlnovou délkou záření v μm a jeho energií E na 1 foton udanou v eV:

$$\lambda[\mu\mathrm{m}] = \frac{hc}{E} = \frac{1,23984186}{E[\mathrm{eV}]}. \tag{12}$$

1.3 Intenzita

Monochromatická intenzita I_ν je množství zářivé energie procházející v daném místě prostoru v daném směru kolmo jednotkovou ploškou do jednotkového prostorového úhlu v jednotkovém intervalu frekvencí za jednotku času. Množství zářivé energie $\mathrm{d}E_\nu$ vycházející v daném směru z plošky $\mathrm{d}s$ do prostorového úhlu $\mathrm{d}\omega$ pod úhlem ϑ vůči normále k plošce ve frekvenčním intervalu $(\nu, \nu + d\nu)$ za čas $\mathrm{d}t$ je pak dáno vztahem

$$\mathrm{d}E_\nu = I_\nu(x, y, z, \varphi, \vartheta, t)\mathrm{d}\nu\mathrm{d}s\cos\vartheta\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t. \tag{13}$$

Úhel ϑ měříme od osy z v intervalu od nuly do π, úhel φ od osy x v rozsahu od 0 do 2π. Rozměr intenzity na jednotku frekvence se zpravidla udává v W.m^{-2}Hz^{-1}sr^{-1} (abychom zdůraznili, jak je intenzita vyjadřena, i když je zřejmé, že např. 1 Hz = s^{-1}). Daleko častěji se však v astronomické literatuře dosud setkáme s rozměrem v soustavě cgs: erg.s^{-1}cm^{-2}Hz^{-1}sr^{-1}. Platí zřejmě, že

I_ν (cgs) = $10^{-3} I_\nu$ (SI).

Intenzitu lze ovšem udávat i na jednotku vlnové délky a označovat ji jako I_λ a vztah (13) psát ve tvaru

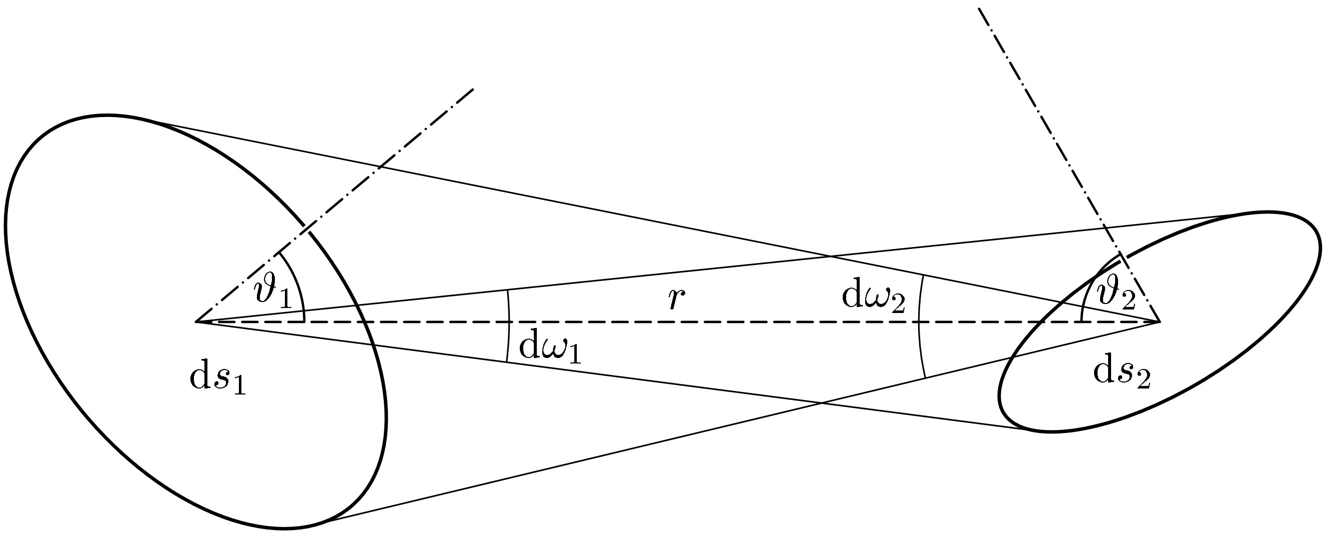
$$\mathrm{d}E_\lambda = I_\lambda(x, y, z, \varphi, \vartheta, t)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s\cos\vartheta\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t. \tag{14}$$

Mají-li výrazy $\mathrm{d}E_\nu$ a $\mathrm{d}E_\lambda$ v rovnicích (13) a (14) vyjadřovat stejné množství energie, musí platit

$$I_\lambda\mathrm{d}\lambda = I_\nu\mathrm{d}\nu \tag{15}$$

a po diferencování rovnice (4) dostáváme zřejmé vztahy mezi oběma veličinami:

$$I_\lambda = \frac{\nu^2}{c} I_\nu \quad \text{a} \quad I_\nu = \frac{\lambda^2}{c} I_\lambda \tag{16}$$



Obrázek 1: Intenzita záření v různých místech prázdného prostoru.

(záporné znaménko z diferencování se "ztratí" v opačné orientaci kladných diferenciálů $\mathrm{d}\nu$ a $\mathrm{d}\lambda$).

Uvažme situaci, kdy záření v prázdném prostoru prochází v daném směru postupně dvěma elementárními ploškami $\mathrm{d}s_1$ a $\mathrm{d}s_2$, jejichž normály svírají se směrem záření dva různé úhly ϑ_1 a ϑ_2, přičemž r je vzdálenost mezi středy obou složek – viz obr. 1. Energii záření jdoucího z místa plošky $\mathrm{d}s_1$ ve směru plošky $\mathrm{d}s_2$, které právě prochází ploškou $\mathrm{d}s_2$ je

$$\mathrm{d}E_\nu = I_\nu \mathrm{d}\nu \mathrm{d}s_1 \cos\vartheta_1 \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}t, \tag{17}$$

kde pro úhel $\mathrm{d}\omega_1$ zjevně platí

$$\mathrm{d}\omega_1 = \frac{\mathrm{d}s_2 \cos\vartheta_2}{r^2}. \tag{18}$$

Rovnici (17) lze proto přepsat do tvaru

$$\mathrm{d}E_\nu = I_\nu \mathrm{d}\nu \mathrm{d}s_1 \cos\vartheta_1 \frac{\mathrm{d}s_2 \cos\vartheta_2}{r^2} \mathrm{d}t. \tag{19}$$

Ploška $\mathrm{d}s_1$ je vidět z plošky $\mathrm{d}s_2$ pod úhlem $\mathrm{d}\omega_2$, pro který analogicky platí

$$\mathrm{d}\omega_2 = \frac{\mathrm{d}s_1 \cos\vartheta_1}{r^2} \rightarrow \mathrm{d}s_1 \cos\vartheta_1 = r^2 \mathrm{d}\omega_2, \tag{20}$$

takže rovnici (19) lze upravit do tvaru

$$\mathrm{d}E_\nu = I_\nu \mathrm{d}\nu \mathrm{d}s_2 \cos\vartheta_2 \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}t. \tag{21}$$

Intenzita I_ν je ovšem stejné množství energie v místě plošky $\mathrm{d}s_1$ jak v rovnici (17), tak v rovnici (21), takže je zřejmé, že pokud v prostředí mezi oběma ploškami nedochází ani k pohlcování ani k uvolňování zářivé energie, nezávisí intenzita na místě, kde ji uvažujeme.

Intenzita je tedy obecně funkcí frekvence, místa a směru. Nezávisí však na tom, kde ji registrujeme.

Někdy se místo a směr záření popisují vektorově; poloha vektorem

$$\vec{r} = (x, y, z) \tag{22}$$

a směr jednotkovým vektorem $\vec{n}$, který s kolmicí na plošku ds svírá úhel ϑ. Rovnici (13) lze pak psát ve tvaru

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{n}, t) d\nu \vec{n}.\mathrm{d}\vec{s}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t, \tag{23}$$

kde skalární součin $\vec{n}.\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}s \cos\vartheta$.

Často se také používá střední intenzita záření J_ν, tj. intenzita středovaná přes celý prostorový úhel ω, mnohdy též nazývaná nultý moment intenzity:

$$J_\nu = \frac{\int_0^{4\pi} I_\nu \mathrm{d}\omega}{\int_0^{4\pi} \mathrm{d}\omega} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_\nu \mathrm{d}\omega. \tag{24}$$

V řadě případů – např. v normálních hvězdných atmosférách – lze předpokládat osovou symetrii, tedy to, že intenzita záření nezávisí na úhlu φ. Označme ji pro odlišení symbolem I_ν^{s}. S uvážením toho, že

$$\mathrm{d}\omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi, \tag{25}$$

a po integraci přes úhel φ lze pak ovšem psát

$$J_\nu^{\mathrm{s}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} I_\nu^{\mathrm{s}} \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta. \tag{26}$$

Někdy je užitečné používat celkovou, integrální či bolometrickou intenzitu I záření získanou integrací přes celé elektromagnetické spektrum:

$$I = \int_0^{\infty} I_\nu \mathrm{d}\nu = \int_0^{\infty} I_\lambda \mathrm{d}\lambda. \tag{27}$$

1.4 Tok

Celkové množství záření procházející ploškou ds za čas dt ve frekvenčním rozsahu $(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu)$ ze všech směrů je

$$\mathrm{d}E_\nu = \mathcal{F}_\nu \mathrm{d}\nu \mathrm{d}s \mathrm{d}t. \tag{28}$$

Funkce $\mathcal{F}_\nu(x, y, z, t)$ se nazývá monochromatický tok záření plochou a jak ihned vyplyne z dalšího výkladu, je to jedna z nejzáludnějších v astrofyzice používaných veličin, na kterou je třeba si dávat zvlášť velký pozor, neboť ji různí autoři používají různě. Je zřejmě

$$\mathcal{F}_\nu = \int_0^{4\pi} I_\nu \cos\vartheta \mathrm{d}\omega. \tag{29}$$

Rozměr toku je $\mathrm{W.m^{-2}Hz^{-1}}$ (nebo $\mathrm{erg.cm^{-2}s^{-1}Hz^{-1}}$).

Stejně jako intenzitu lze i tok alternativně udávat na jednotku vlnové délky, s převodními vztahy analogickými rovnici (16):

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{\nu^2}{c}\mathcal{F}_\nu \quad \text{a} \quad \mathcal{F}_\nu = \frac{\lambda^2}{c}\mathcal{F}_\lambda. \tag{30}$$

V teorii hvězdných atmosfér se velmi často používá transformace $\mu \equiv \cos\vartheta$; příslušné integrace přes interval $\langle 0, \pi\rangle$ v úhlu ϑ se pak změní v integrace přes interval $\langle -1, 1\rangle$ v proměnné μ. Zde se však pro názornost přidržím explicitního zápisu.

Pokud budeme opět předpokládat, že intenzita záření nezávisí na úhlu φ a připomeneme si vztah (25), dostáváme pro tok výraz

$$\mathcal{F}^{\mathrm{s}}_\nu = 2\pi \int\limits_0^\pi I^{\mathrm{s}}_\nu \sin\vartheta\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta. \tag{31}$$

Pokud je intenzita záření do všech směrů stejná tj. pokud nezávisí v daném místě ani na úhlu ϑ, hovoříme o isotropním záření s intenzitou I^{i}_ν. Je zřejmé, že pro isotropní záření je celkový tok plochou **nulový**, neboť

$$\mathcal{F}^{\mathrm{i}}_\nu = 2\pi I^{\mathrm{i}}_\nu \int\limits_0^\pi \sin\vartheta\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta = \pi I^{\mathrm{i}}_\nu [\sin^2\vartheta]^\pi_{\vartheta=0} = 0. \tag{32}$$

Naproti tomu tok isotropního záření I_ν do poloprostoru

$$\mathcal{F}^{\mathrm{i}}_\nu = 2\pi I^{\mathrm{i}}_\nu \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta = \pi I^{\mathrm{i}}_\nu [\sin^2\vartheta]^{\frac{\pi}{2}}_{\vartheta=0} = \pi I^{\mathrm{i}}_\nu. \tag{33}$$

Pozor! V řadě publikací se lze setkat s tím, že tok do celého prostoru je označován výrazem πF_ν, kde F_ν je tzv. *astrofyzikální tok* související se zde zavedeným tokem vztahem

$$\pi F_\nu = \mathcal{F}_\nu. \tag{34}$$

Astrofyzikální tok F_λ je tabelován např. ve velmi často užívaných Kuruczových modelech atmosfér hvězd – viz Kurucz (1979).

Množství energie procházející celým povrchem sférické hvězdy o poloměru R v daném frekvenčním intervalu $\mathrm{d}\nu$ je zřejmě dáno součinem plochy povrchu hvězdy a toku v uvažovaném intervalu frekvencí, tedy výrazem $4\pi R^2 \mathcal{F}_\nu \mathrm{d}\nu$. Je-li uvažovaná hvězda ve vzdálenosti d od nás a označíme-li tok z hvězdy registrovaný na Zemi symbolem f_ν, pak pro energii procházející sférou o poloměru d musí analogicky platit výraz $4\pi d^2 f_\nu \mathrm{d}\nu$ a porovnáním dostaneme vztah

$$f_\nu = \frac{R^2}{d^2}\mathcal{F}_\nu = \left(\frac{R}{d}\right)^2 \pi F_\nu. \tag{35}$$

Vidíme tedy, že tok ubývá se čtvercem vzdálenosti od zdroje.

V teoretických modelech se nejčastěji používá tzv. *Eddingtonův tok* neboli první moment intenzity

$$H_\nu = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} I_\nu \cos\vartheta \mathrm{d}\omega, \tag{36}$$

který souvisí s tokem zde zavedeným vztahem

$$H_\nu = \frac{1}{4\pi}\mathcal{F}_\nu. \tag{37}$$

Vzhledem k tomu, že v klasických modelech atmosfér hvězd se uvažují homogenní, ploché rovinné atmosféry, kde intenzita nezávisí na úhlu φ, je vystupující tok dobře popsán rovnicí (31). Eddingtonův tok lze pak psát ve tvaru

$$H_\nu = \frac{1}{4\pi}\mathcal{F}_\nu^{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} I_\nu \sin\vartheta\cos\vartheta \mathrm{d}\vartheta. \tag{38}$$

Je tedy zřejmé, že při praktických numerických aplikacích je třeba si dávát velmi dobrý pozor na to, jaký tok záření a v jakých jednotkách ten který autor používá.

Je přirozeně opět možné závést i celkový, integrální neboli bolometrický tok:

$$\mathcal{F} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu = \int_0^\infty \mathcal{F}_\lambda d\lambda = \int_0^{4\pi} I\cos\vartheta d\omega. \tag{39}$$

Příklad:

Hayes a Latham (1975) publikovali absolutní kalibraci toku jasné hvězdy Vega (α Lyr). Pro vlnovou délku 550 nm udávají tok F_λ=3,39×10^{-9} erg.cm^{-2}s^{-1}Å^{-1}. Vypočtěte odpovídající frekvenci tohoto záření a odpovídající tok na jednotku frekvence udaný v SI soustavě.

Řešení:

Frekvence záření o vlnové délce 550 nm je podle vztahu (4) rovna

$$\nu = \frac{2,99792458\times10^8\mathrm{ms}^{-1}}{550\times10^{-9}\mathrm{m}} = 5,45077196\times10^{14}\mathrm{Hz}. \tag{40}$$

Tok F_λ v SI soustavě je 3,39×10^{-9} $\times\ 10^{-7}$ J×10^4m^{-2}s^{-1}Å^{-1}= 3,39×10^{-12}Wm^{-2}Å^{-1}.

Protože tok na jednotku frekvence musí označovat stejné množství zářivé energie za jednotku času jako tok na jednotku vlnové délky, platí zřejmě

$$F_\nu \mathrm{d}\nu = F_\lambda \mathrm{d}\lambda = F_\lambda \frac{c}{\nu^2}\mathrm{d}\nu \tag{41}$$

a tedy

$$F_\nu = \frac{c}{\nu^2}F_\lambda = \frac{2,99792458\times10^8\mathrm{m.s}^{-1}}{5,45077196^2\times10^{28}\mathrm{Hz}^2}\cdot 3,39\times10^{-12}\mathrm{Wm}^{-2}10^{10}\mathrm{m}^{-1} = 3,42\times10^{-23}\mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{Hz}^{-1}. \tag{42}$$

1.5 Hustota zářivé energie

Hustotou zářivé energie rozumíme množství zářivé energie nacházející se v daném místě a čase v objemové jednotce. Množství zářivé energie dE_ν procházející ploškou ds ze směru svírajícího s kolmicí na plošku úhel ϑ za čas dt bude zřejmě

$$\mathrm{d}E_\nu = I_\nu \cos\vartheta \mathrm{d}\nu \mathrm{d}s \mathrm{d}t \mathrm{d}\omega. \tag{43}$$

Protože toto záření se pohybuje rychlostí světla c, naplní za čas dt objem $\mathrm{d}V = c\mathrm{d}t\mathrm{d}s\cos\vartheta$. Hustota záření přicházejícího z daného směru bude tedy

$$\frac{\mathrm{d}E_\nu}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{c} I_\nu \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\nu. \tag{44}$$

Integrací přes celý prostorový úhel dostaneme pak hustotu záření v daném intervalu frekvencí

$$u_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{1}{c}\int_0^{4\pi} I_\nu \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu \mathrm{d}\nu \tag{45}$$

a integrací přes celé spektrum pak celkovou hustotu záření

$$u = \int_0^\infty u_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{1}{c}\int_0^{4\pi} I \mathrm{d}\omega = \frac{4\pi}{c} J. \tag{46}$$

1.6 Tlak záření

Označme hybnost záření v dané frekvenci, které přichází z určitého směru, symbolem dp_ν. Je-li celková hmotnost tohoto záření m_ν, lze pro jeho hybnost psát d$p_\nu = m_\nu c$. S použitím Einsteinovy rovnice (6)

$$\mathrm{d}E_\nu = m_\nu c^2 \tag{47}$$

je tedy výraz pro příspěvek hybnosti záření

$$\mathrm{d}p_\nu = \frac{\mathrm{d}E_\nu}{c} \tag{48}$$

takže síla působící na plošku ds od uvažovaného příspěvku záření je podle druhého Newtonova zákona a s využitím vztahu (43)

$$\triangle f \mathrm{d}\nu = \frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E_\nu}{\mathrm{d}t} = \frac{I_\nu}{c}\cos\vartheta \mathrm{d}s \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\nu. \tag{49}$$

Složka síly působící kolmo na uvažovanou plošku bude ovšem $\triangle F = \triangle f \cos\vartheta$. Tlak je výsledná síla působící na jednotkovou plochu, tedy

$$P_{r,\nu}\mathrm{d}\nu = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}s}\int_0^{4\pi} \triangle F \mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}\nu}{c}\int_0^{4\pi} I_\nu \cos^2\vartheta \mathrm{d}\omega \tag{50}$$

Zavedeme-li ještě druhý moment intenzity K_ν vztahem

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{4\pi} I_\nu \cos^2 \vartheta \mathrm{d}\omega, \tag{51}$$

můžeme pro tlak monochromatického záření psát

$$P_{r,\nu} = \frac{4\pi}{c} K_\nu. \tag{52}$$

Pro celkový tlak záření všech frekvencí pak přirozeně platí

$$P_r = \frac{1}{c} \int\limits_0^{4\pi} I \cos^2 \vartheta \mathrm{d}\omega \tag{53}$$

1.7 Koeficient opacity (absorpce) a optická tloušťka

Uvažme situaci, kdy záření o intenzitě I_ν prochází tenkou vrstvou plynu o tloušťce $\mathrm{d}x$. Z definice intenzity plyne, že množství záření dopadající na jednotkovou plochu na povrchu uvažované vrstvy za čas $\mathrm{d}t$ pod úhlem ϑ z prostorového úhlu $\mathrm{d}\omega$ v jednotkovém frekvenčním intervalu bude $I_\nu \cos \vartheta \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\nu \mathrm{d}t$. Při průchodu vrstvou o tloušťce $\mathrm{d}x$ urazí toto záření zřejmě dráhu $\mathrm{d}x \cdot \cos^{-1} \vartheta$. Celkově se tedy z tohoto záření při průchodu uvažovanou vrstvou pohltí energie

$$\mathrm{d}E_\nu = \kappa_\nu \rho I_\nu \cos \vartheta \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\nu \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}x}{\cos \vartheta} = \kappa_\nu \rho \mathrm{d}x I_\nu \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\nu \mathrm{d}t, \tag{54}$$

kde κ_ν je koeficient opacity neboli absorpce *na jednotku hmoty* v daném frekvenčním intervalu. Budeme-li se tedy ptát, o jakou hodnotu $\mathrm{d}I_\nu$ se při průchodu onou vrstvou plynu změní intenzita záření, pak zřejmě platí

$$\mathrm{d}I_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu \mathrm{d}x. \tag{55}$$

Absorpční koeficient má zřejmě rozměr $\mathrm{m}^2\mathrm{kg}^{-1}$. Na definici absorpčního koeficientu – a také emisního koeficientu, o kterém je řeč níže – je ovšem třeba si dávat dobrý pozor, neboť mnozí autoři používají absorpční koeficient *na jednotku objemu* $\kappa_\nu \rho$.

V teorii hvězdných atmosfér se používá veličina nazývaná optická tloušťka τ_ν zavedená vztahem

$$\mathrm{d}\tau_\nu = \kappa_\nu \rho \mathrm{d}x \tag{56}$$

nebo integrálním vztahem

$$\tau_\nu = \int_0^x \kappa_\nu \rho \mathrm{d}x, \tag{57}$$

kde x je celková tloušťka vrsty plynu podél zorného paprsku. Vztah pro změnu intenzity pak lze psát ve tvaru

$$\mathrm{d}I_\nu = -I_\nu \mathrm{d}\tau_\nu. \tag{58}$$

1.8 Mechanická síla, kterou záření působí na vrstvu plynu

Uvažme nyní, jakou mechanickou silou působí záření o intenzitě I_ν na výše uvažovanou tenkou vrstvu plynu o síle $\mathrm{d}x$, na kterou dopadá pod úhlem ϑ z prostorového úhlu $\mathrm{d}\omega$. Jak víme již z rovnice (48), bude příspěvek hybnosti $\mathrm{d}p$ dán výrazem

$$\mathrm{d}p_\nu = \frac{\mathrm{d}E_\nu}{c}, \tag{59}$$

kde c opět označuje rychlost světla. Příspěvek mechanické síly působící *kolmo* na uvažovanou tenkou vrstvu bude tedy $\frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}t}\cos\vartheta$. Celkovou mechanickou sílu záření $f_{r,\nu}$ působící kolmo na jednotkovou plochu uvažované vrstvy tedy získáme integrací přes celý prostorový úhel:

$$\begin{aligned} f_{r,\nu}\mathrm{d}\nu &= \frac{\mathrm{d}\nu}{c}\int\limits_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}E_\nu}{\mathrm{d}t}\cos\vartheta\mathrm{d}\omega = \frac{\kappa_\nu\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}\nu}{c}\int\limits_0^{4\pi} I_\nu\cos\vartheta\mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{\kappa_\nu\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}\nu}{c}\mathcal{F}_\nu = \frac{\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\tau_\nu}{c}\mathcal{F}_\nu, \end{aligned} \tag{60}$$

kde $\mathcal{F}_\nu$ je celkový monochromatický tok záření v daném místě.

Celková mechanická síla působená tlakem záření všech vlnových délek pak bude

$$f_r = \int\limits_0^\infty f_{r,\nu}\mathrm{d}\nu = \frac{\rho\mathrm{d}x}{c}\int\limits_0^\infty \kappa_\nu\mathcal{F}_\nu\mathrm{d}\nu. \tag{61}$$

1.9 Emisní koeficient

Emisní koeficient je množství zářivé energie emitované *jednotkovou hmotou* za jednotku času do jednotkového prostorového úhlu. Množství zářivé energie vysílané z elementárního válečku o podstavě $\mathrm{d}s$ a výšce $\mathrm{d}x$, tedy z objemu $\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}s$ o hustotě ρ do prostorového úhlu $\mathrm{d}\omega$ za čas $\mathrm{d}t$ je pak

$$\mathrm{d}E_\nu = j_\nu\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t, \tag{62}$$

kde j_ν je emisní koeficient na jednotku hmoty.

Pro změnu intenzity záření podél zorného paprsku můžeme tedy psát

$$\mathrm{d}I_\nu = j_\nu\rho\mathrm{d}x. \tag{63}$$

Rozměr emisního koeficientu zřejmě je $\mathrm{W\,kg^{-1}Hz^{-1}sr^{-1}}$.

1.10 Rovnice přenosu energie

Uvažujme o energetické bilanci infinitesimálního válečku s podstavou $\mathrm{d}s$ a výškou $\mathrm{d}x$. Za čas $\mathrm{d}t$ vstoupí do válečku z prostorového úhlu $\mathrm{d}\omega$ ve frekvenčním rozsahu $\mathrm{d}\nu$ záření

$$I_\nu\mathrm{d}s\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t. \tag{64}$$

Na druhém konci bude z válečku vystupovat záření

$$(I_\nu + \mathrm{d}I_\nu)\mathrm{d}s\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t. \tag{65}$$

Ve válečku se pohltí

$$\kappa_\nu I_\nu \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t, \tag{66}$$

kde κ_ν je absorpční koeficient na jednotku hmoty. Váleček sám bude do daného směru vyzařovat energii

$$j_\nu \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t. \tag{67}$$

Má-li být zachována energetická rovnováha, musí tedy platit

$$\begin{aligned}&(I_\nu + \mathrm{d}I_\nu)\mathrm{d}s\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t = \\ &I_\nu \mathrm{d}s\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t + j_\nu \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t - \kappa_\nu I_\nu \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{68}$$

Po úpravě dostáváme obecnou rovnici přenosu záření ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}x} = j_\nu \rho - \kappa_\nu \rho I_\nu. \tag{69}$$

Pro sférickou atmosféru lze ještě psát

$$\mathrm{d}I_\nu(r,\vartheta) = \frac{\partial I_\nu}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial I_\nu}{\partial \vartheta}\mathrm{d}\vartheta, \tag{70}$$

což lze upravit pomocí geometrických vztahů
$\mathrm{d}r = \mathrm{d}x.\cos\vartheta$ a $\mathrm{d}\vartheta = -r^{-1}\mathrm{d}x.\sin\vartheta$
do tvaru

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial r}\cos\vartheta - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial I_\nu}{\partial \vartheta} + \kappa_\nu \rho I_\nu - j_\nu \rho = 0. \tag{71}$$

1.11 Termodynamická rovnováha

Termodynamický systém je ve stavu rovnováhy, jestliže

1. všechny veličiny, které jej charakterizují, jsou nezávislé na místě a čase, a
2. jeho stav by se nezměnil, kdybychom jej dokonale isolovali od okolí.

V takovém případě závisí intenzita záření pouze na teplotě a frekvenci a od místa k místu se nemění. Jestliže tuto intenzitu označíme $B_\nu(T)$ a uvážíme-li, že výraz $\frac{dI_\nu}{dx}$ v rovnici (69) bude v daném případě nulový, dostáváme pro stav tepelné rovnováhy z rovnice (69) Kirchhoffův zákon

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu(T). \tag{72}$$

1.12 Záření absolutně černého tělesa

Absolutně černé těleso je takové těleso, které veškeré dopadající záření pohlcuje, žádné nepropouští ani neodráží.

Obecně lze definovat koeficienty absorpce κ_ν, odrazivosti R_ν a propustnosti D_ν jako tu část záření, která se z dopadajícího záření I_ν pohltí, resp. odrazí nebo projde, a tedy $I_{\nu_{pohlc.}} = \kappa_\nu I_\nu$ atd. Zřejmě musí platit

$$\kappa_\nu + R_\nu + D_\nu = 1. \tag{73}$$

Záření, které vysílá nějaké těleso, závisí pouze na jeho teplotě. Uvažme, jaké výsledné množství záření přechází mezi dvěma tělesy o teplotách T_1 a T_2, která žádné záření nepropouštějí, tj. pro něž platí $D_j = 0$ a tedy $R_j = 1 - \kappa_j$, $j = 1, 2$.

Těleso 1 vyšle v dané frekvenci záření E_1, z něj těleso 2 pohltí $\kappa_2 E_1$ a odrazí $(1-\kappa_2)E_1$. Z toho těleso 1 odrazí $(1-\kappa_1)(1-\kappa_2)E_1$ atd.

Celkem putuje od tělesa 1 k tělesu 2 záření

$$E_1(1 + (1-\kappa_1)(1-\kappa_2) + (1-\kappa_1)^2(1-\kappa_2)^2 + ...). \tag{74}$$

Označíme-li ještě $k = (1-\kappa_1)(1-\kappa_2)$, lze předchozí výraz zapsat jako součet geometrické řady

$$E_1(1 + k + k^2 + k^3 + ...) = \frac{E_1}{1-k}. \tag{75}$$

Záření, které se vrátí na těleso 1, je zřejmě

$$E_1(1-\kappa_2)(1 + k + k^2 + k^3 + ...) = \frac{E_1(1-\kappa_2)}{1-k}. \tag{76}$$

Protože pro záření druhého tělesa musí platit zcela analogické vztahy, lze úhrnně pro záření jdoucí z tělesa 1 na těleso 2 psát

$$\frac{E_1}{1-k} + \frac{E_2(1-\kappa_1)}{1-k} = \frac{E_1 + E_2 - E_2\kappa_1}{1-k}, \tag{77}$$

zatímco úhrnné záření jdoucí naopak z tělesa 2 na těleso 1 je

$$\frac{E_1 + E_2 - E_1\kappa_2}{1-k}. \tag{78}$$

V případě, že obě tělesa budou mít stejnou teplotu, pak pro dva systémy v rovnováze musí být oba příspěvky identické a musí tedy platit

$$\frac{E_1}{\kappa_1} = \frac{E_2}{\kappa_2}. \tag{79}$$

Pokud obě tělesa budou absolutně černá, platí, že $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ a ze vztahu (79) plyne, že dvě absolutně černá tělesa o stejné teplotě vysílají identické záření.

Označíme-li monochromatickou intenzitu záření absolutně černého tělesa o teplotě T symbolem $B_\nu(T)$ a symbolem $j_\nu(T)$ vyzařování nějakého nečerného tělesa, které je v rovnovážném stavu, plyne z rovnice (79) opět Kirchhoffův zákon

$$\frac{j_\nu(T)}{\kappa_\nu(T)} = B_\nu(T), \tag{80}$$

který jsme odvodili bez použití rovnice přenosu.

Z aplikace Bose-Einsteinovy statistiky na fotonový plyn plyne pro monochromatickou intenzitu absolutně černého tělesa, nazývanou též Planckova funkce, výraz

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{81}$$

kde

$$\begin{aligned} h &= (6,62606876 \pm 0,00000052).10^{-34}\mathrm{J\,s}, && (82)\\ k &= (1,3806503 \pm 0,0000024).10^{-23}\mathrm{J\,K^{-1}}, && (83)\\ c &= 2,99792458.10^{8}\mathrm{m\,s^{-1}} && (84)\end{aligned}$$

jsou Planckova konstanta, Boltzmannova konstanta a rychlost světla ve vakuu.

Integrací Planckovy funkce (81) přes celé elektromagnetické spektrum dostáváme integrální intenzitu záření černého tělesa

$$\begin{aligned} B(T) &= \int_0^\infty B_\nu(T)\mathrm{d}\nu = \frac{2h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = \\ &= \frac{2h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2h^3}T^4. \end{aligned} \tag{85}$$

(Integrace uvedeného vztahu není triviální. Platí

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^3\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty (\mathrm{e}^{-x}x^3 + \mathrm{e}^{-2x}x^3 + ...)dx = \\ &= 6(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...) = \frac{6\pi^4}{90}, \end{aligned} \tag{86}$$

protože

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-jx}x^3\mathrm{d}x = \frac{6}{j^4}. \tag{87}$$

V aplikaci na rovnici (85) je

$$x = \frac{h\nu}{kT} \to \nu = \frac{kT}{h}x \tag{88}$$

a tedy

$$\nu^3\mathrm{d}\nu = \left(\frac{kT}{h}\right)^4 x^3\mathrm{d}x.) \tag{89}$$

Jelikož záření černého tělesa je isotropní, nezávisí jeho intenzita na směru a místo integrálu hustoty energie pro integrální hustotu záření černého tělesa dostáváme

$$u(T) = \frac{4\pi}{c}B(T) = \frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3}T^4 = aT^4, \tag{90}$$

kde a je konstanta hustoty záření daná následujícím vztahem

$$a = \frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3} = 7,565767.10^{-16}\ \mathrm{Jm^{-3}K^{-4}}. \tag{91}$$

Zavedeme-li ještě Stefanovu-Boltzmannovu konstantu σ vztahem

$$\sigma = \frac{ac}{4} = (5,670400 \pm 0,000040).10^{-8}\mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{K}^{-4}, \tag{92}$$

dostáváme pro Planckovu funkci výraz

$$B(T) = \frac{\sigma}{\pi}T^4. \tag{93}$$

Jak jsme si již řekli v úvodu, v optickém a v dlouhovlnějších oborech spektra se většinou nepoužívá frekvence, ale vlnová délka záření. Je proto užitečné znát i výraz pro Planckovu funkci vyjádřený pomocí vlnové délky λ

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}, \tag{94}$$

který plyne z Planckovy funkce zapsané pomocí frekvence záření (81) s využitím vztahů (4) a (16).

Můžeme se také zajímat, u které vlnové délky dosahuje pro danou teplotu funkce $B_\lambda(T)$ maxima. Jestliže výraz (94) přepíšeme do tvaru

$$B_\lambda(T) = \frac{k_1}{\lambda^5}(\mathrm{e}^{\frac{k_2}{T\lambda}} - 1)^{-1}, \tag{95}$$

kde

$$k_1 = 2hc^2 \;\; a \;\; k_2 = \frac{hc}{k} \tag{96}$$

jsou konstanty, lze podmínku maxima funkce psát jako

$$\frac{\mathrm{d}B_\lambda(T)}{\mathrm{d}\lambda} = -5\frac{k_1}{\lambda^6}(\mathrm{e}^{\frac{k_2}{T\lambda}} - 1)^{-1} + \frac{k_1}{\lambda^5}(\mathrm{e}^{\frac{k_2}{T\lambda}} - 1)^{-2}\mathrm{e}^{\frac{k_2}{T\lambda}}\frac{k_2}{T\lambda^2} = 0. \tag{97}$$

Zavedeme-li novou proměnnou $x = \frac{k_2}{T\lambda}$, lze tuto podmínku přepsat do tvaru

$$-5 + x\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)^{-1} = 0, \tag{98}$$

což vede na rovnici

$$x = 5 - 5\mathrm{e}^{-x}. \tag{99}$$

Její iterační řešení vede k hodnotě $x = 4.96511..$, což s přihlédnutím k definici proměnné x a hodnoty k_2 vede konečně na podmínku

$$\lambda\, T = 2897768,6\ , \tag{100}$$

kde teplota je udána v K a vlnová délka λ v nm. Vztah, který jsme si právě odvodili, se nazývá Wienovým posunovacím zákonem a plyne z něj, že maximum vyzařování absolutně černého tělesa se s rostoucí teplotou posouvá ke kratším vlnovým délkám, což odpovídá i běžné lidské zkušenosti: barva zahřívaného tělesa se mění od červené k bílé až namodralé, jak roste jeho teplota. A jak uvidíme, červené hvězdy jsou skutečně chladnější, než hvězdy bílé či namodralé.

Příklad

Spočtěte, u kterých vlnových délek dosahuje Planckova funkce maximum pro absolutně černá tělesa s teplotami 3000 K, 6000 K, 10000 K a 30000 K.

Řešení

Jednoduchým dosazením do Wienova zákona (100) dostáváme vlnové délky 965,9 nm, 483,0 nm, 289,8 nm a 96,59 nm. Vidíme, že vyzařovací maximum se pro tento rozsah teplot posouvá od infračervené do ultrafialové oblasti spektra.

Pozor ale! Kdybychom podobně, jako jsme to právě učinili, vyšetřovali, kde dosahuje maxima Planckova funkce $B_\nu(T)$ definovaná vztahem (81), zjistili bychom, že *nikoliv* pro frekvenci odpovídající vlnové délce maxima funkce $B_\lambda(T)$, ale někde úplně jinde. Pokud budeme funkci $B_\nu(T)$ vyšetřovat také jako funkci vlnové délky, odvodíme pro její maximum podmínku

$$\lambda\, T = 5099437,0\ , \tag{101}$$

kde je opět teplota udána v K a vlnová délka λ v nm. Pro teplotu 6000 K dosahuje tedy tato funkce maxima až u vlnové délky 849,9 nm. Vidíme tedy, že funkce $B_\nu(T)$ a $B_\lambda(T)$ vyšetřované obě současně pro danou teplotu buď jako funkce vlnové délky nebo frekvence záření jsou *dvě různé funkce s různým průběhem.*

V krátkovlnné oblasti spektra je $\mathrm{e}^{\frac{hc}{kT\lambda}} >> 1$, takže lze Planckovu funkci $B_\lambda(T)$ aproximovat vztahem

$$B_\lambda(T) \doteq \frac{2hc^2}{\lambda^5}\mathrm{e}^{-\frac{hc}{kT\lambda}}. \tag{102}$$

To se obvykle nazývá Wienovou aproximací.

Naopak v dlouhovlnné oblasti spektra je $\frac{hc}{kT\lambda} << 1$ a můžeme tedy exponencielu nahradit rozvojem se zanedbáním vyšších členů

$$\mathrm{e}^{\frac{hc}{kT\lambda}} \doteq 1 + \frac{hc}{kT\lambda}, \tag{103}$$

takže dostáváme pro Planckovu funkci přibližný výraz

$$B_\lambda(T) \doteq \frac{2kcT}{\lambda^4}. \tag{104}$$

Tomuto vztahu se říká Rayleighův-Jeansův zákon.

Protože se týká dlouhovlnné oblasti spektra, můžeme jej numericky pro vlnové délky udané v metrech zapsat ve tvaru

$$B_\lambda(T) \doteq 8,27817 \times 10^{-15}\frac{T}{\lambda^4}. \tag{105}$$

Příklad

Radioteleskop změřil na vlnové délce 1 m intenzitu tepelného rádiového zdroje na jednotku *frekvence* I_ν = 10^{-22}W m^{-2}Hz^{-1}sr^{-1}. Odhadněte teplotu zdroje za předpokladu, že záření zdroje v této oblasti odpovídá dobře záření černého tělesa.

Řešení

Intenzita záření na jednotku vlnové délky I_λ bude podle vztahu (16)

$$I_\lambda = \frac{\nu^2}{c} I_\nu = \frac{c}{\lambda^2} I_\nu = 2,99792458 \times 10^{-14}. \tag{106}$$

Pokud platí, že $I_\lambda \doteq B_\lambda$, dostáváme z rovnice (105) teplotu zdroje T = 3,62 K .

Protože v radioastronomii se často používá frekvence záření, je užitečné uvést si Rayleighův-Jeansův zákon i pro funkci $B_\nu(T)$. Stejná přibližná aproximace jako (103) vede na vztah

$$B_\nu(T) \doteq \frac{2k}{c^2} \nu^2 T. \tag{107}$$

Je dobře si uvědomit, že ať už v dlouhovlnné oblasti uvažujeme frekvence nebo vlnové délky, je závislost toku záření tepelného zdroje na vlnové délce či frekvenci prostou mocninou vlnové délky nebo frekvence. Pokud tedy budeme v dlouhovlnné oblasti studovat spektrum nějakého zdroje, projeví se tepelný zdroj tím, že logaritmus toku záření z něj bude lineární funkci vlnové délky či frekvence.

1.13 Lokální termodynamická rovnováha

Hvězdná látka zcela zřejmě ve stavu dokonalé termodynamické rovnováhy být nemůže, neboť existuje tok záření z nitra směrem k povrchu a z povrchu do okolního prostoru. S výjimkou vnější atmosféry hvězdy můžeme však s velkou přesností předpokládat, že hvězdná látka je ve stavu termodynamické rovnováhy *lokálně*, tj., že v daném místě lze pole záření charakterizovat Planckovou funkcí odpovídající nějaké lokální (od místa k místu jiné) lokální teplotě. Lokálně platí také Kirchhoffův zákon (72).

1.14 Efektivní teplota hvězdy

Z rovnic (33) a (93) plyne pro tok záření absolutně černého tělesa do poloprostoru vztah

$$\pi B(T) = \sigma T^4. \tag{108}$$

Absolutní měření rozložení energie elektromagnetického záření v závislosti na vlnové délce ve spektrech hvězd vedlo ke zjištění, že záření hvězd se v hrubém příblížení svým průběhem podobá záření absolutně černého tělesa. Vzhledem k tomu je pro mnohé úvahy užitečné zavést parametr, kterým lze popisovat celkový (bolometrický) zářivý výkon hvězdy L, tj. celkový tok záření z povrchu hvězdy do okolního prostoru. Za tento parametr byla zvolena *efektivní teplota hvězdy*, definovaná rovnicí

$$L = 4\pi R^2 \pi B(T) = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4, \tag{109}$$

kde R označuje poloměr hvězdy. Efektivní teplota je rovna teplotě absolutně černého tělesa o stejném rozměru jako uvažovaná hvězda a vysílajícím do vnějšího prostoru stejný tok záření jako dotyčná hvězda.

2 Klasické způsoby pozorování hvězd

Elektromagnetické záření přicházející z hvězd lze zkoumat v zásadě dvojím způsobem:

1. Buď se zajímáme přímo o spojité záření hvězdy, tedy o integrální tok záření v nějakém rozsahu vlnových délek a jeho změny od jedné oblasti vlnových délek ke druhé (tedy jeho "barvu"), případně o časové změny pozorovaného integrálního toku v dané oblasti vlnových délek. Pak hovoříme o *hvězdné fotometrii*.

2. Druhou možností je, že studujeme světlo rozložené na barvy nějakým disperzním elementem jako je hranol či mřížka neboli *spektrum hvězdy*. V atmosférách hvězd, které jsou obvykle chladnější, než vrstvy pod nimi, dochází k pohlcování světla určitých vlnových délek odpovídajících změnám energetických stavů atomů či molekul v atmosférách. Spojité spektrum hvězdy je tedy obvykle přerušeno temnými proužky v odpovídajích vlnových délkách a toto *čárové spektrum* nám poskytuje velké množství informací, jak o tom bude řeč později. Právě popsaný typ pozorování se nazývá *hvězdná spektroskopie*.

3. Oba popsané způsoby lze kombinovat: Můžeme světlo mřížkou rozložit na barvy a poté nějakým detektorem zjišťovat monochromatický tok v každé vlnové délce. Podle toho, bude-li použitý detektor kalibrován v absolutních jednotkách toku nebo ne, hovoříme pak o *absolutní* či *relativní spektrofotometrii*.

V následujícím výkladu si o hvězdné fotometrii a spektroskopii, metodách prvotního zpracování i o tom, co se lze pomocí fotometrie a spektroskopie o hvězdách dozvědět, povíme podrobněji.

2.1 Spektrální klasifikace hvězdných spekter

Soustavnější pozorování spekter hvězd byla prováděna zhruba od poloviny devatenáctého století, nejprve visuálně pomocí spektroskopu a později ve spektrografech, se záznamem na fotografickou desku. Byly činěny různé pokusy spektra podle vzhledu klasifikovat (páter Secchi v Itálii, prof. Vogel v Německu na observatoři v Potsdamu), ale záhy se ujala klasifikace, kterou postupně za základě mnoha tisíců spekter vypracovala na Harvardově observatoři v USA slečna Cannonová. Spektra hvězd se podle svého vzhledu dělí do následujících spektrálních tříd:

- *třída O* Jsou přítomny čáry ionizovaného helia He II, neutrálního helia He I a neutrálního vodíku H I a též čáry dvakrát ionizovaného kyslíku, uhlíku a dusíku O III, C III a N III.

- *třída B* Dominují čáry neutrálního helia He I a neutrálního vodíku H I a přítomny jsou též čary O II, C II, N II, Fe III a Mg II.

- *třída A* Chybí čáry neutrálního helia He I a dominují čáry neutrálního vodíku H I, nápadné jsou jednou ionizované čary kovů skupiny železa jako Fe II, Ti II, V II či Cr II.

- *třída F* Čáry neutrálního vodíku H I jsou výrazně slabší, i když stále dominují a ve spektru přibývá čar kovů.

- *třída G* Čáry H a K ionizovaného vápníku (Ca II 393,3 a 396,9 nm) jsou ve spektru dominantní, objevují se první molekulární pásy.
- *třída K* Spektrum je bohaté na čary neutrálních kovů.
- *třída M* Ve spektru převládají molekulární pásy TiO a VO.
- *třída L* Tato třída byla zavedena až poměrně nedávno v práci Kirkpatricka a kol. (1999) v souvislosti s hledáním tzv. hnědých trpaslíků. Ve spectrech hvězd třídy L mizí molekulární pásy TiO a VO a objevují se silné čáry neutrálního draslíku K I a také čáry Rb I, Cs I a CrH.
- *třída T* I tato třída byla zavedena až nedávno a vyznačuje se zejména čarami methanu CH_4 a širokými spektrálními pásy vodních par H_2O – viz práce Burgassera a kol. (1999).

Je nutno si uvědomit, že laboratorní analýza čarových spekter se rozvíjela souběžně se studiem spekter hvězd a zpočátku nebylo vůbec jasné, že ve hvězdách musí existovat stejné chemické prvky jako na Zemi. Výrazné spektrální čáry byly označovány velkými písmeny a teprve postupně byla nacházena jejich identifikace s pozemskými prvky Mendělejevovy tabulky. Proto byl zásadním zjištěním fakt, že hvězdy spektrálních typů O a B se jevily jako modré a namodralé, hvězdy A a F jako bílé, G žluté, K oranžové a M červené. Ve dvacátých letech 20. století bylo již jasné, že existuje úzká vazba mezi spektrálními typy a povrchovými teplotami příslušných hvězd.

Současně se ale ukazovalo, že při stejné spektrální třídě se vyskytují rozdíly ve vzhledu některých čar. V okamžiku, kdy bylo dostatek údajů o vzdálenostech jednotlivých hvězd, vyšlo najevo, že tyto rozdíly souvisí s rozdíly v jasnostech hvězd stejného spektrálního typu, tedy s jejich třídou svítivosti neboli s rozdílem jejich poloměrů.

To se stalo základem dvourozměrné spektrální klasifikace, která je užívána dodnes.

2.2 Hvězdná fotometrie

2.2.1 Jasnosti hvězd, Pogsonova rovnice, hvězdné velikosti v různých mezinárodně přijatých systémech

Asi 150 let před začátkem našeho letopočtu publikoval Hipparchos katalog poloh a jasností asi 800 hvězd. Jasnosti hvězd v něm rozdělil do šesti kategorií, přičemž v první byly hvězdy nejjasnější. Ptolemaios později tento katalog rozšířil o dalších 200 hvězd. To se stalo základem postupně se vytvořivší škály *hvězdných velikostí*, což jsou jasnosti hvězd seřazené sestupně, tj. hvězda druhé hvězdné velikosti je méně jasná, než hvězda první velikosti, atd. Významně v těchto ranných stádiích hvězdné fotometrie přispěli zkušení pozorovatelé Herschel a Argenlander. Ukázalo se, že pro empiricky se vyvinuvší škálu hvězdných velikostí velmi přibližně platí, že rozdílu pěti hvězdných velikostí odpovídá stonásobný rozdíl jasností. Jasností zde rozumíme veličinu úměrnou množství zářivé energie z uvažované hvězdy, které prochází jednotkovou plochou v místě použitého detektoru. Jinak řečeno, veličinu úměrnou toku záření z hvězdy jednotkovou plochou v místě našeho detektoru. Lidské oko vnímá lineárně se měnící osvětlení na logaritmické škále. Na základě tohoto zjištění byla zavedena moderní škála hvězdných velikostí na návrh Pogsona (1856) tak, že zmíněný přibližný vztah byl přijat jako platící přesně.

Chceme-li tedy zapsat definici hvězdných velikostí v matematickém tvaru, je to tak, že hledáme logaritmický vztah, který zároveň převrací směr číselné osy tak, aby většímu osvětlení odpovídala menší hvězdná velikost, tedy

$$m_2 - m_1 = a \log \frac{E_1}{E_2}, \tag{110}$$

kde m_i a E_i, $i = 1, 2$ označuje hvězdné velikosti a na Zemi měřené jasnosti, úměrné toku zářivé energie, pro hvězdu 1 a hvězdu 2. Konstantu a zjistíme z přijaté definice škály hvězdných velikostí, neboť musí platit, že

$$5 = a \log 100.$$

Pracovní vztah pro výpočet hvězdných velikostí, nazývaný dnes Pogsonova rovnice, je tedy

$$m_2 - m_1 = 2,5 \log \frac{E_1}{E_2}. \tag{111}$$

Můžeme napsat i vztah opačný

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)} = b^{(m_2 - m_1)}, \tag{112}$$

kde $b = \sqrt[5]{100} \doteq 2{,}511886431$. Jak vidíme, je pátá odmocnina ze sta numericky podobná konstantě úměrnosti v rovnici (111) a proto může docházet k záměně. Ač jde o jednoduchou věc, je dobře si právě řečené dobře promyslet a vyhnout se tak při výpočtu hvězdných velikostí zbytečným chybám.

Hvězdné velikosti se udávají v jednotkách nazývaných magnituda označovaných horním indexem ‘m’ nebo zkratkou ‘mag.’ za číselnou hodnotou. Jinak řečeno, hvězda třetí velikosti je hvězda s magnitudou $3{,}^{\mathrm{m}}0$ nebo 3,0 mag. atd.

Závěrem této části ještě několik jednoduchých úvah o tom, jak se hvězdné velikosti skládají. Často totiž stojíme před úlohou určit hvězdné velikosti složek dvojhvězdy, kterou pro velkou vzdálenost od nás vidíme jen jako jediný svítící bod a pro kterou tedy přímým měřením můžeme pozorovat pouze celkovou jasnost způsobenou součtem světla obou složek. Protože rovnice (111) je v diferenčním tvaru, je jasné, že nezáleží při udávání jasností na použitých jednotkách. Z řešení světelných křivek zákrytových dvojhvězd lze obvykle určit poměr jasností obou složek L_2/L_1 vyjádřený v jednotkách celkové jasnosti v daném oboru vlnových délek ($L_1 + L_2 = 1$). Hvězdné velikosti jednotlivých složek tedy zřejmě určíme z pozorované hvězdné velikosti dvojhvězdy m podle vztahů

$$m_1 - m = 2,5 \log(1 + \frac{L_2}{L_1}), \tag{113}$$

$$m_2 - m = 2,5 \log(1 + (\frac{L_2}{L_1})^{-1}). \tag{114}$$

Z těchto vztahů snadno odhadneme, že bude-li např. dvojhvězda složena ze dvou stejně jasných složek, bude se dvojhvězda jevit o $2,5 \log 2 \doteq 0{,}^{\mathrm{m}}75$ jasnější, než by se ve stejné vzdálenosti od nás jevila každá ze složek dvojhvězdy. Kdyby byla přítomna tři stejně jasná tělesa, bude rozdíl činit již $1{,}^{\mathrm{m}}19$.

Analogicky můžeme odhadnout, jakou celkovou hvězdnou velikost m naměříme, pokud se do zorného pole našeho fotometru dostanou dvě velmi blízké hvězdy o známých hvězdných velikostech m_1 a m_2. Podle předchozího platí zřejmě

$$m = m_1 - 2,5 \log(1 + 10^{-0,4(m_2 - m_1)}). \tag{115}$$

2.2.2 Různé druhy hvězdných velikostí, fotometrické systémy

Je zřejmé, že rovnice (111) nedefinuje nulový bod škály hvězdných velikostí. Navíc je jasné, že záření hvězd je rozloženo do celého elektromagnetického spektra, a proto musíme při praktickém používání dodat, pro jakou vlnovou délku hvězdnou velikost udáváme. Obvykle se hvězdné velikosti v různých mezinárodně přijatých fotometrických systémech, jak o nich zde bude řeč, volí tak, aby nulový bod škály odpovídal historicky vzniklé škále hvězdných velikostí.

Žádný detektor a žádná detekční soustava nedokáže se stejnou účinností registrovat tok záření v různých vlnových délkách. Většina detektorů má u určité vlnové délky maximum citlivosti a na obě strany od ní jejich citlivost klesá. Výsledná funkce relativní citlivosti detekční soustavy v závislosti na vlnové délce se obvykle označuje výrazem spektrální propustnost R_λ. Můžeme ji zásadním způsobem ovlivnit, jestliže při pozorování jasnosti hvězd zařadíme před detektor nějaký barevný filtr propouštějící záření pouze v určitém známém intervalu vlnových délek. Ať už při měření použijeme filtr nebo budeme měřit bez filtru (v roli velmi širokopásmového filtru pak stejně bude vystupovat spektrální propustnost celého systému), můžeme obecně pro tok zářivé energie zaznamenaný fotometrem, který měří tok zdroje $E(\lambda)$, psát

$$E = \int_0^\infty E(\lambda) R(\lambda) d\lambda. \tag{116}$$

Visuální hvězdné velikosti m_{vis}

Lidské oko je nejcitlivější ke žluté barvě a proto je historická škála hvězdných velikostí vázána na jasnosti hvězd ve žluté části spektra. Visuální odhady jasností jsou tabelovány již v několika velkých katalozích z minulého století, např. v Henry Draper katalogu. Přesnost takových odhadů – pokud byly založeny pouze na pozorování lidským okem – je obvykle několik málo desetin magnitudy. Musím ovšem dodat, že poměrně nedávno jsem se přesvědčil, že existují pozorovatelé, kteří pro jasné hvězdy dosahují přesnosti asi $0\overset{m}{.}03$. Je to dáno jednak osobní dispozicí, ale také tím, že svá měření důsledně vztahují na fotoelektricky změřené visuální jasnosti všech použitých srovnávacích hvězd. Příkladem takového talentovaného pozorovatele je Sebastian Otero z argentinské amatérské organizace *Liga Iberoamericana de Astronomía* – viz Otero (2000). Podobnou přesnost dosahoval ale již dříve např. Rigolet (1936).

Fotografické hvězdné velikosti m_{pg}

Po vynálezu fotografických emulzí začaly být jasnosti hvězd získávány proměřováním fotografií hvězd. Dosahovaná přesnost určení hvězdných velikostí činí zhruba $0\overset{m}{.}1$. Při velmi pečlivé redukci může být i lepší. Protože ale běžné fotografické desky mají maximum citlivosti v modré oblasti spektra, liší se takto získané hvězdné velikosti od velikostí visuálních v závislosti na barvě (a tedy povrchové teplotě) hvězdy. Astronomové velmi brzo zjistili, že existuje dobře definovaný vztah mezi spektrálním typem hvězd (určený podle vzhledu jejich čárového spektra) a mezi barevným indexem $(m_{pg} - m_{vis})$.

Fotometrie s prvními fotocitlivými diodami

První fotoelektrická měření jasnosti hvězd prováděli Stebbins na Lickově observatoři v USA (viz např. Stebbins 1916, 1921) a Guthnick a Prager (1918) v Potsdamu v Německu. Přesnost měření tak vzrostla na $0\overset{\mathrm{m}}{.}01$-$0\overset{\mathrm{m}}{.}02$. Maximum citlivosti diody používané Stebbinsem se nacházelo v zelené barvě kolem 500 nm. Naproti tomu dvě různé diody používané v Potsdamu měly maximum citlivosti v modré barvě. Za zmínku stojí, že pozorování se s Guthnickem a Pragerem jeden čas účastnil i známý český astronom Bohumil Šternberk.

Fotometrie s fotonásobiči a barevnými filtry

V období mezi dvěma válkami se postupně začaly používat fotometry s fotonásobičem a zdrojem vysokého napětí. Vzhledem k vyšší citlivosti fotonásobičů bylo možné začít používat různé barevné filtry. Existují i měření v šesti barvách, ale žádné z měření té doby nebylo důsledně standardizováno.

Z hlediska šířky pásma barevné propustnosti se rozlišují filtry širokopásmové (propustnost v šíři několika málo stovek nm), středopásmové (několik desítek nm) a úzkopásmové (obvykle méně než 20 nm).

Standardní barevné systémy

Johnsonův UBV systém

Nejznámějším a nejrozšířenějším standardním systémem založeným na 3 širokopásmových filtrech je UBV systém zavedený Johnsonem a jeho spolupracovníky (Johnson a Morgan 1953, Johnson a kol. 1966). Ten je definován třemi filtry:

U : propustnost od 300 nm do 420 nm s maximem u 360 nm;

B: propustnost od 360 nm do 560 nm s maximem u 420 nm;

V: propustnost od 460 nm do 740 nm s maximem u 535 nm;

tedy ultrafialovým, modrým a žlutým.

Johnson a jeho spolupracovníci proměřili s použitím amerického fotonásobiče 1P21 mnoho tisíc hvězd a publikovali jejich UBV magnitudy. Díky tomu a díky jasně definovaným vztahům mezi určitými fyzikálními vlastnostmi hvězd a barvami v UBV systému (ty lze charakterizovat tzv. barevnými indexy $(B - V)$ a $(U - B)$, tj. rozdíly měřených hvězdných velikostí ve dvou sousedních filtrech) se jejich systém stal velmi populární a dodnes patří mezi nejužívanější.

Podařilo se jim rovněž nalézt velmi užitečné závislosti mezi charakteristikami hvězd a jejich UBV barvami, jak o tom bude řeč později.

Strömgrenův $uvby$ systém

Určitou nevýhodou Johnsonova systému je to, že filtr U zahrnuje oblast vlnových délek před i za Balmerovým skokem. Aby bylo možno výšku Balmerova skoku z fotometrie určovat, navrhl Strömgren středněpásmový systém s následujícími čtyřmi filtry:

u : pološířka 38 nm, maximum u 350 nm;

v : pološířka 20 nm, maximum u 410 nm;

b : pološířka 10 nm, maximum u 470 nm;

y : pološířka 20 nm, maximum u 550 nm.

Díky užším pásmům propustnosti poskytuje tento systém přesnější a lépe definovaný odhad některých základních vlastností hvězd. Obsáhlý popis vlastností Strömgrenova systému byl publikován Strömgrenem (1966). Kalibrovaná veličina y magnitudy je přímo navázána na Johnsonovu magnitudu V, což je možné

Tabulka 1: Filtry systému ženevské observatoře, všechny údaje jsou v nm

Filtr:	U	B	V	B_1	B_2	V_1	G
$\lambda_{\text{eff.}}$:	345,8	424,8	550,8	402,2	448,0	540,8	581,4
pološířka:	17,0	28,3	29,8	17,1	16,4	20,2	20,6

díky obvykle hladkému průběhu spojitého záření hvězd ve žluté oblasti spektra. Strömgren zavedl několik barevných indexů: Kromě indexů $(b - y)$ a $(u - b)$, analogických Johnsonovu systému, jsou to ještě

$$c_1 = (u - v) - (v - b) = u + b - 2v, \tag{117}$$
$$m_1 = (v - b) - (b - y) = v + y - 2b, \tag{118}$$

které jsou citlivé na chemické pekuliarity a překrývání spojitého spektra spektrálními čarami. V některých zdrojích bývají uvedeny pro jednotlivé hvězdy pouze hodnoty V, $(b - y)$, c_1 a m_1. Jak je zřejmé z definice indexů, můžeme v tom případě jednotlivé magnitudy a index $(u - b)$ vypočítat ze vztahů

$$b = V + (b - y), \tag{119}$$
$$\begin{aligned} v &= b + (b - y) + m_1 = \\ &= V + 2(b - y) + m_1, \end{aligned} \tag{120}$$
$$\begin{aligned} u &= v + (b - y) + m_1 + c_1 = \\ &= V + 3(b - y) + 2m_1 + c_1, \end{aligned} \tag{121}$$
$$(u - b) = 2(b - y) + 2m_1 + c_1. \tag{122}$$

Další systémy

Johnsonův UBV systém byl záhy rozšířen do červené a infračervené oblasti spektra pomocí širokopásmových filtrů R (700 nm), I (900 nm), J (1250 nm), K (2200 nm) a L (3400 nm) – viz např. obsáhlou práci Johnsona a spol. (1966), která obsahuje pozorování velkého počtu jasných hvězd.

Johnson a spol. (1975) publikovali měření 1380 jasných hvězd ve 13-tibarevném středněpásmovém systému, jehož filtry pokrývají rozsah od 330 do 1110 nm a jsou kalibrovány i absolutně, takže lze pomocí nich studovat rozložení spojitého spektra hvězd.

Mezi kanadskými astronomy dosáhl určité obliby DAO systém (podle Dominion Astrophysical Observatory ve Victorii), který používá tři filtry, [55], [44] a [35] a je dosti blízký UBV systému. Žlutá magnituda je opět redukována tak, aby plně odpovídala V magnitudě Johnsonova systému. V tomto systému bylo proměřeno nezanedbatelné množství hvězd – viz např. Hill a spol. (1976) a citace tam uvedené.

Známý je sedmibarevný systém středo- a širokopásmové fotometrie, používaný od roku 1960 astronomy ženevské observatoře. Jeho charakteristiku shrnuje tabulka 1.

Katalog informací o měření jasností hvězd v těchto a některých dalších systémech lze nalézt na počítačové adrese

http://obswww.unige.ch/gcpd/cgi-bin/photoSysHtml.cgi?0 .

Existují i různé systémy používané na družicích, které byly kalibrovány, např. systém UV hvězdných velikostí získaný pro řadu hvězd holandskou astronomickou družicí ANS nebo americkým satelitem OAO2. V nedávné době se stala velmi populární širokopásmová a velmi přesná a dobře standardizovaná měření jasnosti získávaná družicí Hipparcos v širokopásmovém H_p filtru.

Situace bohužel není dosud takto příznivá v hodně krátkovlnných oborech rentgenového a gama záření. Tam jednotlivé družice měří v pásmech, které nejsou kalibrovány, a které nejsou vzájemně převoditelné či srovnatelné.

2.2.3 Redukce fotoektrických měření jasnosti hvězd

Fotoelektrická měření jasnosti hvězd jsou nejpřesnější měřící technikou, která se používá již od dob první světové války. Třebaže by se zdálo, že postupy měření a zpracování musí být za takovou dobu již zcela standardizovány, je to pravda jen částečně.

Jak jsme to již probrali výše, je intensita světla každé hvězdy funkcí vlnové délky záření a ve velmi hrubém přiblížení lze záření hvězdy aproximovat zářením absolutně černého tělesa s teplotou odpovídající efektivní teplotě hvězdy. Pro reálné hvězdy – stejně jako pro absolutně černá tělesa – platí, že maximální intenzita jejich záření se s rostoucí teplotou posouvá směrem ke kratším vlnovým délkám.

Přechod od měřených k mezinárodně srovnávatelným hvězdným velikostem

Osvětlení, které zaznamená detektor našeho fotometru (citlivá dioda, fotonásobič nebo CCD prvek), ovšem *neodpovídá barevnému rozložení jasnosti hvězdy*, protože dopadající záření je dvojím způsobem transformováno.

Prvním transformačním prostředím je zemská atmosféra. V optické oblasti spektra platí, že čím kratší je vlnová délka dopadajícího záření, tím více je zemskou atmosférou zeslabováno. Tomuto zeslabení se říká atmosferická extinkce a je – stejně jako ve hvězdných atmosférách – výsledným efektem absorpce, rozptylu a odrazu dopadajícího záření. Extinkční koeficient v dané barvě používaný v praktické hvězdné fotometrii udává procento zeslabení dopadajícího světla v magnitudách po průchodu vrstvou atmosféry pro hvězdu v zenitu, tedy na jakýsi jednotkový sloupec vzdušné hmoty. Je zřejmé, že světlo hvězdy u obzoru prochází daleko větším sloupcem vzdušné hmoty. Bylo zjištěno, že pro ekvivalentní sloupec vzdušné hmoty v hvězdných veličinách, X, zhruba platí, že je nepřímo úměrný kosinu zenitové vzdálenosti. Pro celý rozsah vzdušných hmot, ve kterých má ještě smysl provádět fotoelektrická měření jasnosti, se dobře osvědčuje aproximační vztah

$$X = (1 - 0,0012\tan^2 z)\sec z. \qquad (123)$$

Je možné se o tom přesvědčit, porovnáme-li tento vztah numericky s přesnějším vztahem, který odvodil Bemporad:

$$X = \sec z - 0,0018167Q - 0,02875Q^2 - 0,0008083Q^3, \qquad (124)$$

kde

$$Q = \sec z - 1. \qquad (125)$$

Označíme-li m a m_0 měřenou hvězdnou velikost hvězdy a hvězdnou velikost, kterou bychom stejným přístrojem naměřili vně zemské atmosféry a k lineární extinkční koeficient, platí tedy

$$m = m_0 + kX. \tag{126}$$

Správná interpretace tohoto jednoduchého vztahu zasluhuje určitý komentář. Stav zemského ovzduší, jeho průzračnost i barevná propustnost se s časem dosti rychle mění. Tyto změny jsou – jak se dá očekávat – tím výraznější, čím hlouběji na dně vzdušného oceánu se nacházíme. Na horských observatořích se stabilními klimatickými podmínkami (La Silla v Chile, Sutherland v Jižní Africe, Maidanak ve střední Asii či observatoře na Havaji) jsou tyto změny relativně malé, ani zde je však nelze pro přesná měření přehlížet. V případě proměnlivého počasí takové změny nastávájí i v průběhu noci a běžné jsou zejména od jedné noci ke druhé, kdy se během dne atmosféra zahřeje přímým slunečním zářením. V důsledku změn stavu ovzduší dochází přirozeně ke změnám extinkčního koeficientu a jeho závislosti na vlnové délce.

Jestliže je přístroj stabilní a měří osvětlení ve formě nějak kalibrované výchylky měřicího přístroje či jako počet pulsů v přístrojích počítajících fotony, tedy nějakou veličinu, kterou budeme označovat d, pak platí

$$m = 2,5 \log d + c, \tag{127}$$

kde c je libovolně zvolený nulový bod škály přístrojových hvězdných velikostí.

Zkušenost ale ukazuje, že velmi často není detekční aparatura během noci dokonale stabilní a že se tedy mění nulový bod měřené škály hvězdných velikostí. Změny přístrojového nulového bodu mohou nastávat např. v důsledku změn vysokého napětí, měnit se může i citlivost samotného fotonásobiče (zejména pokud není temperován na stálou teplotu), a to jak s měnící se pracovní teplotou přístroje, tak se změnami teploty ovzduší během noci. Jak vidíme z rovnice (126), je extinkční koeficient k směrnicí přímky udávající, jak rychle se v daném místě a v daném čase mění hvězdná velikost v závislosti na měnící se vzdušné hmotě. Pokud budeme určovat extinkční koeficient z našich měření v situaci, kdy dochází ke změnám nulového bodu přístroje, pak se přirozeně můžeme dočkat toho, že námi určenými extinční koeficient bude zcela nesprávný. Jinými slovy, to co se při pozorování během noci v některých případech mění, je *nulový koeficient* c, nikoli samotný extinkční koeficient k!! V některých případech se ovšem může měnit skutečný extinkční koeficient, někdy dokonce na různých místech oblohy různý. Pozoroval jsem takové změny zejména v místech, kde se průzračnost ovzduší měnila v důsledku proměnné vlhkosti – např. vlivem blízkosti moře. Stojí za zmínku, že jsem takové změny zjistil i na vysokohorské observatoři San Pedro Mártir v nadmořské výšce 2850 m. Observatoř se nachází na úzkém poloostrově Baja California, který odděluje Tichý oceán a Kalifornské moře.

Zkušenost ukazuje, že časovou změnu nulového bodu lze obvykle dostatečně dobře popsat jako lineární nebo kvadratickou závislost na čase. Obecná transformační rovnice vyjadřující převod mezi vněatmosferickou a měřenou hvězdnou velikostí tedy bude

$$m = m_0 + kX + at^2 + bt + c, \tag{128}$$

kde t je čas měření. Jde-li skutečně o časovou změnu nulového bodu přístroje, měly by koeficienty a, b a c být stejné pro měření v kterémkoliv fotometrickém filtru.

Pokud dochází ke skutečným změnám extinkce během noci, lze je docela dobře modelovat polynomickou závislostí, třeba i pátého stupně, tedy

$$m = m_0 + X(k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + k_4 t^4 + k_5 t^5), \tag{129}$$

kde k_i (i=0, 1, 2, 3, ...) jsou koeficienty polynomu časové závislosti extinkce a mohou se přirozeně výrazně lišit od měření v jednom filtru ke druhému.

Mnoho - i velmi zkušených – pozorovatelů změny nulového bodu či změny extiknce během noci nebere v potaz. Je zřejmé, že v tom se skrývá velké nebezpečí. Zejména u pozorovacích programů, u nichž jsou změny jasnosti jedné hvězdy zaznamenávány po delší dobu během noci, nastane nutně silná korelace mezi časem měření a vzdušnou hmotou. Pokud např. pozorovatel určí hodnotu extinkčního koeficientu z rovnice (126) a nikoliv (128) či (129), projeví se případná časová změna nulového bodu nebo průzračnosti v určení chybné hodnoty extinkčního koeficientu k.

Ke druhé transformaci měřeného světla dochází ve vlastním měřícím přístroji. Všechny optické části dalekohledu a fotometru (zrcadla, čočky, filtry) zeslabují světlo různých vlnových délek různě a rovněž citlivost detektoru fotometru ke světlu různých barev je různá. Měřená jasnost je proto obecně vzato složitým integrálem přes všechny křivky spektrální propustnosti jednotlivých optických a detekčních elementů použitého přístroje. Pokud bychom tedy chtěli provádět absolutní měření rozložení energie ve spektrech hvězd, museli bychom výslednou křivku propustnosti přístroje velmi pečlivě proměřit. Zatím jen poznamenejme, že pokud jsou již taková měření rozložení energie pro některé hvězdy k dispozici, můžeme problém vyřešit tak, že měření provádíme diferenčně vůči některé takové hvězdě.

V této chvíli budeme pojednávat pouze o zpracování měření jasnosti v některém mezinárodně definovaném systému. Pro jednoduchost a názornost budeme většinu transformačních vztahů psát pro Johnsonův UBV systém, zcela analogické rovnice však lze použít i pro systémy jiné.

Kdyby se nám jednalo pouze o spolehlivé měření změn jasnosti některého objektu v čase, vystačili bychom při důsledném používání stejného přístroje pouze s opravami o zdánlivé změny jasnosti způsobené zemskou atmosférou a změnou nulového bodu přístroje. Mnozí pozorovatelé to tak i dělají. Lze tak ovšem s úspěchem činit pouze tehdy, můžeme-li si být jisti, že optické vlastnosti přístroje se s časem nemění. Tak tomu ale bohužel nikdy není. Čerstvě pohliníkované zrcadlo dalekohledu odráží světlo kratších vlnových délek lépe, než totéž zrcadlo vystavené rok vlivu zemského ovzduší. S časem se může měnit i spektrální citlivost použitého detektoru. Je proto žádoucí i běžná měření jasnosti proměnných hvězd vždy pečlivě redukovat na standardní systém.

Skutečnost, že žádný detektor neměří monochromatickou hvězdnou veličinu, nýbrž hvězdnou veličinu integrální, která vzniká jako součet příspěvků přes určitou oblast vlnových délek – viz rovnice (116)– způsobuje, že *vlastnosti přístroje mají vliv i na měřené zeslabení světla zemskou atmosférou.* Proč? Řekli jsme si již, že horké hvězdy vyzařují více světla pro kratší vlnové délky než hvězdy chladné. Jestliže tedy měříme integrální hvězdnou veličinu přes nějakou oblast vlnových délek, pak je zřejmé, že horká hvězda relativně více přispívá v krátkovlnné a chladná v dlouhovlnné části pásma propustnosti. Zároveň ale víme, že pohlcování světla zemskou atmosférou *roste se zkracující se vlnovou délkou.* V důsledku toho bude okamžitý extinkční koeficient pro libovolnou integrální hvězdnou veličinu vždy poněkud vyšší pro horké, než pro chladné hvězdy.

Parametrická závislost extinkčního koeficientu na barvě hvězd byla dosti nešťastně nazvána extinkčním koeficientem druhého řádu nebo barevným extinkčním koeficientem. Na rozdíl od stavu zemské atmosféry se optické vlastnosti přístroje a jeho spektrální citlivost mění jen zvolna s časem, takže je během jedné sezóny měření můžeme považovat za stálé. Totéž tím pádem platí i pro barevné extinkční koeficienty. Je proto velice nerozumné určovat je odděleně pro každou noc měření spolu s lineárními extinkčními koeficienty, jak se to doporučuje v klasických návodech na fotometrické redukce, které byly vypracovány ještě před érou elektronických počítačů (viz např. Hardie 1962).

Barevné extinkční koeficienty jsou dány vlastnostmi použitého přístroje, jsou proto během pozorovací sezóny stálé a musí být určeny z co největšího počtu měření za celou sezónu. Logicky proto patří mezi přístrojové transformační koeficienty. K jejich spolehlivému určení je navíc nezbytné pořídit měření jasnosti horkých i chladných standardních hvězd ve velkém rozsahu vzdušných hmot, alespoň do vzdušné hmoty 2. Je třeba si rovněž uvědomit, že pokud bychom mohli měřit čistě monochromatické hvězdné veličiny, žádné barevné extinkční koeficienty by nebylo třeba určovat. Pro měření v úzkopásmových filtrech je také skutečně můžeme spolehlivě zanedbat.

Z toho, co již bylo řečeno, vyplývá, že problém nastává tehdy, chceme-li porovnávat měření jasnosti ze dvou různých přístrojů nebo i z téhož přístroje, ale z různých let. To vedlo přirozeně ke snaze vytvořit různé standardní, referenční systémy hvězdných jasností. K definici takových systémů bylo obvykle použito několika barevných filtrů o známé spektrální propustnosti a konkrétní přístroj, pomocí kterého byly změřeny stovky či tisíce hvězd po celé obloze. Úloha barevných filtrů je, zhruba řečeno, dvojí:

1. Jednak představují dominantní člen určující spektrální průběh dané integrální hvězdné veličiny. To zajišťuje, že tento spektrální průběh bude pro různé přístroje a danou integrální hvězdnou veličinu alespoň přibližně podobný.

2. Druhým důležitým posláním barevných filtrů je, že nám umožňují - jsou-li vhodně zvoleny - velmi dobře měřit barvu hvězd a charakterizovat jejich spektrální vyzařovací charakteristiky.

Představme si, že bychom konkrétní přístroj, který bychom zvolili pro definici standardního systému, umístili vně zemské atmosféry a změřili s ním pro nějakou hvězdu standardní UBV hvězdné veličiny. Protože sama funkce logaritmus má tendenci "linearizovat" nelineární průběh logaritmované veličiny, a protože v období před zavedením počítačů existovala snaha používat co nejjednodušší funkční závislosti, byl i při definici Johnsonova systému učiněn předpoklad, že obecně neznámou a složitou funkční závislost mezi vněatmosférickými hvězdnými veličinami a barvami z různých přístrojů měřících s UBV filtry – či z různých sezón měření týmž přístrojem - lze dostatečně dobře popsat lineárními vztahy

$$\begin{aligned} V &= v_0 + H_1(B-V) + H_2, \\ (B-V) &= H_3(b-v)_0 + H_4, \\ (U-B) &= H_5(u-b)_0 + H_6, \end{aligned} \tag{130}$$

kde indexem 0 jsou označeny vněatmosférické hodnoty měřené naším přístrojem. Koeficienty H jsou transformační koeficienty barevného systému fotometru na systém standardní a lze je pro danou sezónu považovat za konstanty.

V domnění, že Johnsonem používané transformační vztahy je třeba dodržovat, redukuje bohužel dodnes naprostá většina i velmi renomovaných autorů svá měření pomocí transformačních rovnic (130), třebaže již Gutiérrez-Moreno a kol. (1966) a Harmanec a kol.(1977) ukázali, že zejména pro index $(U-B)$ tak dochází běžně k chybám řádově 0,1 mag. a doporučili použít alespoň pro $(U-B)$ index bilineární vztah

$$(U-B) = H_5(u-b)_0 + H_6(b-v)_0 + H_7. \tag{131}$$

Harmanec a kol.(1977) rovněž jako jedni z prvních prováděli na počítači redukce pro celou sezónu a určovali transformační koeficienty z dat získaných z celé řady dobrých nocí. Tentýž postup zvolili i Harris a kol.(1981) a Manfroid a Heck (1983).

V literatuře existuje několik teoretických studií, které ukazují, že rozdíly v propustnosti filtrů a dalších elementů různých použitých přístrojů musí vést k nelinearitě transformačních závislostí (King 1952, Golay 1974, Young 1974, 1992, Beckert and Newberry 1989). Velmi přesvědčivě to bylo prokázáno i empiricky - viz studii Cousinse a Jonese (1976) - kteří ukázali, že k takovým nelinearitám dochází i pro středněpásmové barevné systémy jako je Strömgrenův systém $uvby$. V minulosti pouze Harris a kol. (1981) použili nelineární vztahy, konkrétně polynomickou závislost na indexu $(B-V)$ pro veličiny $v_0 - V$ a $(b-v)_0$ a na indexu $(U-B)$ pro $(u-b)_0$. Jako první rovněž upozornili na to, že vzhledem k tomu, že standardní jasnost hvězdy je transformována atmosférou a přístrojem, je správné považovat v transformačních vztazích standardní hvězdné veličiny za nezávisle proměnné. (Pro původní lineární vztahy na tom ovšem nezáleželo).

Harmanec, Horn a Juza (1994) empiricky zjistili, že pro spolehlivé a dostatečně přesné transformace do standardního systému je třeba uvažovat polynomickou závislost až do třetí mocniny v $(B-V)$, ale i lineární závislost na indexu $(U-B)$, a vytvořili příslušný soubor zpracovatelských programů, který je nyní mezinárodně dostupný v počítačové síti Internet (viz níže). Ukázali současně, že druhou podmínkou co nejpřesnějších redukcí je postupné zpřesnění standardních hvězdných veličin všech standardních hvězd, které se k transformaci používají. Na základě velmi početných UBV měření mnoha jasných hvězd získaných v průběhu 15 let na observatořích Hvar a Skalnaté Pleso zpřesnili UBV hvězdné veličiny celé řady srovnávacích a kontrolních hvězd, použitých v dlouhodobém programu studia změn jasnosti hvězd se závojem (Be stars) a hvězd chemicky pekuliárních (CP stars). Vzhledem k tomu, že tyto hvězdy jsou značně rovnoměrně rozloženy po celém severním nebi, lze je zajisté využít jako transformačních standardů i v mnoha budoucích pozorovacích programech.

Transformační rovnice použité v redukčním programu HEC22 až do verze 13 mají následující tvar:

A. Transformace zemskou atmosférou:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + G_1 + G_5 X_V + G_9 t + G_{13} t^2, \\ b &= b_0 + G_2 + G_6 X_B + G_{10} t + G_{14} t^2, \\ u &= u_0 + G_3 + G_7 X_U + G_{11} t + G_{15} t^2, \end{aligned} \tag{132}$$

kde koeficienty G jsou transformační koeficienty, které je třeba určit (nebo zafixovat) pro každou noc pozorování. Pro jednokanálové fotometry je možné uvažovat okamžitou vzdušnou hmotu X pro měření v každém filtru zvlášť.

Od verze 14 programu HEC22 je možno modelovat i časově proměnnou extinkci a transformace zemskou atmosférou má pro měření v až 4 barevných filtrech[1] tvar

$$\begin{aligned}
v &= v_0 + G_1 + G_5\,X + G_9\,tX_V + G_{13}\,t^2X_V + G_{17}\,t^3X_V + G_{21}\,t^4X_V + G_{25}\,t^5X_V,\\
b &= b_0 + G_2 + G_6\,X + G_{10}\,tX_B + G_{14}\,t^2X_B + G_{18}\,t^3X_B + G_{22}\,t^4X_B + G_{26}\,t^5X_B,\\
u &= u_0 + G_3 + G_7\,X + G_{11}\,tX_U + G_{15}\,t^2X_U + G_{19}\,t^3X_U + G_{23}\,t^4X_U + G_{27}\,t^5X_U,\\
w &= w_0 + G_4 + G_8\,X + G_{12}\,tX_W + G_{16}\,t^2X_W + G_{20}\,t^3X_W + G_{24}\,t^4X_W + G_{28}\,t^5X_W.
\end{aligned} \tag{133}$$

Je také možné modelovat lineární nebo kvadratickou změnu nulového bodu přístroje během noci. V tom případě se ale koeficienty časové změny určí z měření ve žluté barvě a fixují se pro další filtry. Časová změna přístrojového nulového bodu by se totiž měla projevit ve všech filtrech stejně. Příslušné transformační rovnice proto mají tvar

$$\begin{aligned}
v &= v_0 + G_1 + G_5\,X_V + G_9\,t + G_{13}\,t^2,\\
b &= b_0 + G_2 + G_6\,X_B + G_9\,t + G_{13}\,t^2,\\
u &= u_0 + G_3 + G_7\,X_U + G_9\,t + G_{13}\,t^2,\\
w &= w_0 + G_4 + G_8\,X_W + G_9\,t + G_{13}\,t^2.
\end{aligned} \tag{134}$$

B. Sezónní transformace do standardního systému

Jak již bylo řečeno, uvažuje se polynomická závislost v indexu $(B-V)$ a lineární závislost na indexu $(U-B)$ a je zahrnuta i barevná extinkce podle vztahů Younga (1992). Příslušné rovnice mají tvar

$$\begin{aligned}
v_0 = V \;&+\; H_1(B-V) + H_2(U-B) + H_3Q + H_4T +\\
&+\; H_5X_VC_1(B-V+0.5X_VC_1) + H_6,\\
b_0 = B \;&+\; H_7(B-V) + H_8(U-B) + H_9Q + H_{10}T +\\
&+\; H_{11}X_BC_1(B-V+0.5X_BC_1) + H_{12},\\
u_0 = U \;&+\; H_{13}(B-V) + H_{14}(U-B) + H_{15}Q + H_{16}T +\\
&+\; H_{17}X_UC_2(U-B+0.5X_UC_2) + H_{18},
\end{aligned} \tag{135}$$

kde

$$Q = (B-V)^2,\; T = (B-V)^3,\; C_1 = G_6 - G_5,\; C_2 = G_7 - G_6. \tag{136}$$

Schema výpočtu pomocí těchto rovnic je podrobně popsáno v práci Harmance, Horna a Juzy (1994) a celá sada redukčních programů umožňujících redukci dat, archivaci a vybírání dat z archivů (HEC22, VYPAR a pomocné programy) je publikována v práci Harmance a Horna (1999) a je též volně dostupná pro zájemce.

Závěrem této části stojí za zmínku, že z povahy věci vyplývá, že transformace analogické transformacím (135) lze použít i k vzájemnému převodu dvou barevných systémů mezi sebou, pokud jsou oba systémy dobře definovány a vnitřně konsistentní.

[1] Např. pro Strömgrenův $uvby$ systém lze interpretovat v následujících rovnicích filtry tak, že Strömgrenův filtr y je označen symbolem v stejně jako v UBV systému, zatímco Strömgrenův filtr v je označen symbolem w.

2.2.4 Praktické aspekty fotometrických pozorování a redukcí

Povězme si nyní něco o praktické stránce pozorování a redukce. Systémový přístup, který je usnadněn počítačovým zpracováním dat, dovoluje maximální měrou optimalizovat např. pozorovací program proměnných hvězd tak, aby bylo možno získat data v mezinárodním systému bez velké ztráty času na měření standardů.

Pozorovatelé proměnných hvězd budou zásadně používat metodu diferenciální fotometrie, to znamená, že budou spolu se studovanou proměnnou hvězdou měřit i dvě blízké neproměnné hvězdy, obvykle nazývané srovnávací a kontrolní hvězda. Zkušenost totiž ukazuje, že průzračnost ovzduší se často během noci cyklicky mění (typické cykly bývají 10-30 minut). Při diferenciální fotometrii se tyto změny kompenzují tím, že měřenou jasnost srovnávací z měření před a po měření proměnné interpolujeme k okamžiku měření proměnné hvězdy a okamžitou jasnost proměnné určíme tak, že rozdíl mezi její měřenou jasností a interpolovanou jasností srovnávací přičteme ke známé (neměnné) jasnosti srovnávací hvězdy. S kontrolní hvězdou při zpracování zacházíme stejně jako s proměnnou. Její rozptyl hodnot vypovídá o skutečné přesnosti našich měření. Pokud se po zpracování ukáže, že jasnost kontrolní hvězdy se během noci nebo noc od noci mění, může to znamenat jednu ze dvou věcí:

a) chybu redukce - např. špatně určené extinkční koeficienty - nebo

b) proměnnost kontrolní či srovnávací hvězdy.

Pokud jde o druhý případ, můžeme celou situaci zachránit tak, že redukce opakujeme s použitím kontrolní hvězdy v úloze hvězdy srovnávací.

Uveďme si několik praktických zásad, které se vyplatí při přípravě pozorovacího programu, vlastním pozorování a při zpracování dodržet:

A. Příprava:

1. Srovnávací a kontrolní hvězdu ke studované proměnné volíme pokud možno podle následujících kritérií:

   - Jasností a zejména barvou (spektrálním typem) by srovnávací hvězda měla být co nejbližší studované proměnné. Dodržením této zásady omezíme vliv možných chyb při transformaci do standardního systému i případných chyb způsobených mírnou nelinearitou přístroje přes velký dynamický rozsah.
   - Srovnávací, proměnná a kontrolní hvězda by si měly být na obloze co nejblíže. Tím značně potlačíme chyby plynoucí z nepřesného určení atmosférických transformačních koeficientů.
   - Ideální je zvolit takovou srovnávací a kontrolní hvězdu, pro kterou jsou známy dobré standardní hodnoty v použitém systému měření (UBV, $uvby$ a podobně). Při dodržení této zásady můžeme všechna měření srovnávacích a kontrolních hvězd využít současně i k určení nočních a sezónních transformačních koeficientů. Zejména v případech, kdy během noci a sezóny měříme větší počet různých skupin hvězd, eliminuje tento postup prakticky nutnost ztrácet čas na speciální měření standardů nutných k určení transformačních vztahů.

2. Kromě srovnávací a kontrolní hvězdy se vyplatí k dané proměnné zvolit ještě jeden transformační standard výrazně odlišné barvy (červenou hvězdu k modré proměnné a naopak). Takovou hvězdu stačí změřit několikrát během měření dané proměnné a získáme tím další opěrný bod pro dobré určení transformačních vztahů.

B. Měření:

1. Označíme-li symboly P, S, K a ST proměnnou, srovnávací a kontrolní hvězdu a barevně odlišný standard, pak optimálním způsobem měření je sekvence

   S-K-ST-P-S-K-P-S-K-P-S.... S-P-ST-K-S

   Všimněme si symetricky obrácené sekvence na konci měření. Takto volená sekvence zajistí, že i v případě, že se naše srovnávací časem ukáže jako proměnná, můžeme i vůči kontrolní hvězdě, která nastoupí na její místo, všechna měření lineárně interpolovat. Ze stejného důvodu se vyplatí měřit kontrolní hvězdu stejně často jako proměnnou.

   Má to i druhý, stejně pádný důvod: Netrpělivce, kteří by to považovali za ztrátu času a časové rozlišovací schopnosti upozorňuji, že jedině tímto způsobem se mohou spolehlivě přesvědčit o reálnosti případných rychlých změn studované proměnné – a přesvědčit o nich i ostatní. Jinak se jim může snadno stát, že za rychlou proměnnost budou vydávat náhodně cyklický průběh v rozdílu změn průzračnosti v místě srovnávací a proměnné. (I takové případy není příliš nesnadné v astronomické literatuře nalézt.)

2. Každou hvězdu měříme bezprostředně po sobě ve všech barevných filtrech užitého systému a měření ukončíme změřením jasnosti oblohy v oblasti měřené hvězdy ve stejných filtrech. Vzhledem k povaze transformačních vztahů a jejich závislosti na okamžité barvě hvězd je z hlediska transformace do standardního systému *naprosto nepřijatelné* měřit např. hodinu v jedné barvě, pak ve druhé, atd.

3. Důležitým faktorem je doba měření v každém filtru. Zkušenost ukazuje, že integrační čas 10 sekund bývá obvykle postačující. Pro velmi přesná měření malých změn jasnosti je vhodné volit úměrně delší čas pro slabší signály (v závislosti na jasnosti a barvě hvězd a propustnosti jednotlivých filtrů), před zpracováním je pak ale třeba převést všechny signály do jedné škály, např. tak, že měřenou hodnotu dělíme dobou měření. Pro přesná měření je však třeba si uvědomit, že rovnice (135), dovolující mnohem přesnější převod hvězdných velikostí na standardní UBV systém, v sobě z hlediska přesnosti měření skrývají i určité nebezpečí. Použijeme-li pro měření ve všech třech filtrech stejnou integrační dobu, pak vzhledem k nízké propustnosti filtru U budou mít měření v něm výrazně nižší poměr signál/šum než měření ve filtrech B a V. Pokud bude mít použitý systém propustnosti citelně odlišné od systému standardního, budou koeficienty H_2 a H_8 v rovnicích (135) nenulové a nižší přesnost měření ve filtru U se promítne i do přesnosti ve filtrech V a B. To je třeba mít na paměti. Věc lze řešit např. tak, že použijeme delší integrační dobu pro měření ve filtru U.

   Samostatný problém představují z tohoto hlediska fotometrická měření pomocí CCD detektoru. Je totiž třeba si uvědomit, že celý snímek tj. měření jasnosti všech hvězd, které se na CCD detektoru zobrazí, nevyhnutelně získáme s jedinou expoziční dobou. To způsobí, že poměr signál/šum bude klesat s klesající jasností měřených hvězd. Tento fakt je určitou nevýhodou CCD fotometrie, která naopak poskytuje výhodu současného měření proměnné, srovnávací a kontrolní hvězdy a dovoluje tak získávat diferenciální fotometrii slušné přesnosti i v horších povětrnostních podmínkách, kdy fotometrie pomocí fotoelektrického fotometru již nepřichází v úvahu.

4. Pro studium velmi rychle proměnných hvězd, např. hvězd typu δ Sct, je třeba dosáhnout co největší časové rozlišovací schopnosti a pozorovatel je nucen se uchýlit k měření v jediném filtru. Rád bych

upozornil, že i v tom případě je nutné měřit souběžně i kontrolní hvězdu. Z povahy věci plyne, že nejpřesnější budou měření ve žluté barvě (nejmenší extinkční koeficient, nejmenší transformační chyby). Je rovněž dobré vědět, že alespoň v případech, kdy se během rychlých změn nemění příliš silně barva studované hvězdy (a tato podmínka bývá pro δ Sct hvězdy, hvězdy se závojem a další rychle proměnné obvykle splněna), je možné i měření v 1 či 2 barvách transformovat na standardní systém, pokud ovšem v dané sezóně dostatečný počet měření ve všech barvách k definici transformačních vztahů získáme. Program HEC22 je i na tuto možnost zařízen.

5. Je velmi důležité uvážit celkovou strategii pozorování během noci. Pokud bychom např. pozorovali jednu skupinu hvězd, postupně klesající od zenitu k obzoru, nebylo by při redukci možné odlišit lineární extinkci od plynulé změny nulového bodu přístroje, jak jsme se o tom již zmínili. Pokud taková situace nastane, je žádoucí čas od času změřit nějaké standardní hvězdy v rozdílných vzdušných hmotách, aby noční transformace popisující stav ovzduší a přístroje byla náležitě určena. Pokud ale měříme během noci jak vycházející, tak zapadající hvězdy a používáme srovnávací a kontrolní hvězdy se známými hodnotami standardních hvězdných velikostí, nemusíme žádná dodatečná měření provádět a noční transformační koeficienty bude snadné při redukci určit.

6. Při měření jasných hvězd je někdy nutné kvůli ochraně fotonásobiče zařadit zeslabující šedý filtr. Doporučuji vyhnout se názvu "neutrální filtr", který se v literatuře často vyskytuje. Žádný takový filtr totiž není barevně skutečně neutrální a chceme-li získat standardní hvězdné veličiny, je třeba zvláštní opatrnosti. V zásadě lze postupovat dvojím způsobem:

   - Pokud to dynamický rozsah fotometru a náš pozorovací program dovolí, pak je ideální měřit *všechny pozorované hvězdy* se zařazeným šedým filtrem, a pro tato měření určit všechny transformační koeficienty.
   - Jestliže výše uvedený postup není možný, pak je třeba opakovaným měřením vhodně volených hvězd se zařazeným šedým filtrem a bez něj určit přesný koeficient zeslabení pro každý barevný filtr zvlášť. V ultrafialovém oboru se tento koeficient zeslabení může dokonce pro červené a modré hvězdy lišit, vyloučena není ani změna propustnosti od noci k noci.

C. Redukce

1. Pokud neznáme - např. z předchozí sezóny – koeficienty sezónní transformace použitého přístroje – je nejlepší redukovat data z celé sezóny nejprve v instrumentálním systému (všechny koeficienty H zvolíme nulové a pro lineární extinkční koeficienty zadáme hodnoty odpovídající průměrným středoevropským podmínkám: např. v systému UBV je rozumné předpokládat střední koeficienty $0\overset{m}{.}7$, $0\overset{m}{.}45$ a $0\overset{m}{.}25$ v uvedeném pořadí filtrů).

2. Výsledky prvotní redukce je třeba pečlivě prozkoumat. Jednak opravíme případné chyby a vyloučíme chybná měření, hlavně však posoudíme kvalitu jednotlivých nocí a jejich použitelnost k určení transformačních vztahů. Zde lze vytknout následující zásady:

   - Pokud se pro standardní hvězdy liší jejich naměřené hodnoty od hodnot standardních systematicky jinak pro velké a pro malé vzdušné hmoty, dovolíme nejprve výpočet extinkce, a jestliže je v odchylkách poté patrný soustavný trend v čase, přidáme ještě výpočet lineární či kvadratické změny nulového bodu.

- Praktická zkušenost ukazuje, že extinkční koeficienty lze z dat dostatečně přesně určit, jestliže rozdíl největší a nejmenší vzdušné hmoty pro standardní hvězdy činí alespoň 0,2; v opačném případě je lépe použít střední extinkční koeficienty.

3. V některých nocech, kdy docházelo k velkým změnám ve stavu ovzduší, nejsme schopní systematický průběh odchylek odstranit a jako lepší postup se jeví rozdělit takovou noc vhodným způsobem na dvě či více částí a ty zpracovat odděleně. Totéž je nezbytné udělat, pokud jsme učinili přestávku v měření, během níž jsme přístroj vypnuli. Jestliže v některé části noci nelze extinkční koeficienty určit, je možno použít jejich hodnoty z části následující či předchozí.

4. Dobré a stabilní noci s malými odchylkami (např. do $0\overset{\mathrm{m}}{.}03$) označíme jako vhodné k výpočtu transformačních koeficientů H. Program pak zpracuje celý soubor měření z dané sezóny a určí transformační koeficient pouze z měření standardních hvězd z těch nocí, které jsme jako vhodné označili.

   K dosažení dobrého výsledku je třeba mít poměrně bohatý soubor měření z většího počtu nocí a s dobrým zastoupením různých standardních hvězd. Je třeba, aby náš soubor použitých standardních hvězd obsahoval nejen hvězdy různých barev, ale také nějaké hvězdy, které jsou zčervenalé a hvězdy mimo hlavní posloupnost. Důvodem k poslednímu vyslovenému požadavku je, že pro hvězdy hlavní posloupnosti existuje prakticky jednoznačné přiřazení mezi jejich barevnými indexy $(B-V)$ a $(U-B)$, takže pouze pomocí nich by transformační závislost na těchto dvou indexech jakožto dvou *nezávisle proměnných* nebyla určena. Pokud se nám nepodaří měření dostatečně bohatého souboru standardních hvězd během dané sezóny získat, je jistější zvolit režim programu, který spočte pouze bilineární tranformační vztahy. Pro orientaci lze uvést, že žádný z transformačních koeficientů H by neměl dosáhnout hodnot větších než 0,2, nejvýše 0,3 (pro ultrafialový obor), jinak je s naší transformací patrně něco v nepořádku a nezbývá, než znovu pečlivě prozkoumat volbu nocí, zjistit, zda jsme nepřehlédli trend nulového bodu, chybná měření a podobně.

   Podobně je třeba zvážit, zda je možno v dané sezóně určovat barevné extinkční koeficienty (H_5, H_{11}, H_{17}). Pokud nemáme měření standardních hvězd ve vzdušných hmotách 2 a více z několika nocí během sezóny, bude výpočet nepřesný a je lépe tyto koeficienty zvolit pevně. Všechny musí být záporné a orientačně lze doporučit např. hodnoty -0,03 až -0,05 ve žlutém a ultrafialovém oboru a -0,1 v modrém oboru.

5. Ke konečnému zpracování použijeme vypočtené transformační koeficienty H.

2.2.5 Převody mezi fotometrickými systémy

Z principu věci je zřejmé, že transformace (135) pro převod přístrojových vněatmosferických instrumentálních hvězdných velikostí na standardní systém musí být použitelné i pro přechod mezi dvěma dobře definovanými fotometrickými systémy. Navíc je možné na některý standardní systém převést i měření méně dobře definovaného systému v případech, že pro hvězdy, o které jde, známe hodnoty barevných indexů ve standardním systému. To je velmi dobře použitelné pro některé typy proměnných, u nichž se barva se změnami jasnosti mění jen málo.

Uveďme si zde několik takových převodů, které byly definovány v poslední době:

Božić a spol. (1995) zjistili, že stará měření Guthnicka a Pragera s Rb diodou lze diferenčně velmi dobře převést na Johnsonův filtr B pomocí následujícího vztahu

$$\triangle B = \triangle b + 0,2366 \triangle (B - V). \tag{137}$$

Holmgren a spol. (1999) publikovali diferenční převodní vztah pro Stebbinsova měření:

$$\triangle V = \triangle m_{500} - 0,64915 \triangle (B - V) - 0,01603 \triangle (U - B). \tag{138}$$

Hill a spol. (1997) nalezli následující převod mezi DAO a UBV systémem:

$$\begin{aligned} V &= [55], \\ (B - V) &= 1,1348X + 0,02368Y, \\ (U - B) &= 0,24453X + 0,74611Y - 0,37301X^2 + 0,50754X^3, \end{aligned} \tag{139}$$

kde $X = [44] - [55]$ a $Y = [35] - [44]$.

Harmanec (1998) publikoval následující převodní vztah mezi Johnsonovou V magnitudou a širokopásmovou H_p magnitudou z družice Hipparcos:

$$\begin{aligned} V &= H_p - 0,2964(B - V) + 0,0050(U - B) \\ &+ 0,1110(B - V)^2 + 0,0157(B - V)^3 + 0,0072. \end{aligned} \tag{140}$$

Božić a spol. (1999) a Harmanec a spol. (2000) zveřejnili převodní vztah mezi třináctibarevným systémem a Johnsonovým systémem:

$$\begin{aligned} V &= m_{55} + 0,01930bv + 0,01830ub - 0,06538q + 0,02411t + 0,01434 \\ B &= m_{43} - 0,03528bv + 0,01464ub - 0,02837q - 0,03429t + 0,00006 \\ U &= m_{35} + 0,10478bv - 0,15289ub + 0,11294q - 0,06538t + 0,01686, \end{aligned} \tag{141}$$

kde

$$\begin{aligned} m_{35} &= m_{52} + [(33 - 52) + (35 - 52) + (37 - 52)]/3, \\ m_{43} &= m_{52} + [(45 - 52) + (40 - 52)]/2, \\ m_{55} &= m_{52} + (52 - 58)/2, \\ bv = m_{43} - m_{55}, \quad ub &= m_{35} - m_{43}, \quad q = bv^2, \quad t = bv^3, \end{aligned} \tag{142}$$

přičemž Johnson tabeluje magnitudu m_{52} a jednotlivé barevné indexy $(33 - 52)$ atd.

Transformační vztahy umožňující transformovat měření v různých fotometrických systémech do Johnsonova systému UBV publikovali Harmanec a Božić (2001).

2.3 Určování fyzikálních vlastností hvězd z fotometrických měření

2.3.1 Modul vzdálenosti, bolometrická korekce a zářivý výkon hvězdy

Jak jsme si již uvedli dříve, bylo velké množství hvězd proměřeno v Johnsonově UBV systému a též ve Strömgrenově $uvby$. Hvězdné velikosti měřené ve žluté barvě Strömgrenova systému y jsou přímo navázány na Johnsonovy hvězdné velikosti ve žlutém filtru V jeho systému, a totéž platí i o několika dalších používaných systémech. I z dalších praktických důvodů se při srovnávání dat z různých zdrojů jeví hvězdná velikost měřená ve žluté barvě jako nejvhodnější: rozložení energie hvězd se v oblasti žluté barvy kolem 550 nm mění jen zvolna s vlnovou délkou a také extinkční koeficient naší atmosféry je při pozorování ve žluté barvě nižší, než v barvě modré či fialové. (Za dobrých pozorovacích podmínek zřídkakdy na kterékoliv pozemské observatoři přesahuje hodnotu 0,3 – 0,4; v dobrých podmínkách bývá pouze asi 0,15.) Ze všech těchto důvodů jsou měření ve žluté barvě zatížena nejmenšími chybami a také se nejsnáze převádějí na standardní systém.

Chceme-li ovšem z měření jasnosti ve žluté barvě získat představu o bolometrickém zářivém výkonu L_* (např. proto, abychom jej mohli porovnat s nějakým modelem), musíme provést několik kroků.

Nejprve musíme naměřenou zdánlivou hvězdnou velikost přepočítat na velikost absolutní, která je definována jako hvězdná velikost, kterou by hvězda měla ve vzdálenosti 10 pc od nás. Protože tok záření v prázdném prostoru ubývá se čtvercem vzdálenosti d, je zřejmě

$$M_V - V = -2,5 \log \frac{d^2}{100} = 5 - 5 \log d. \tag{143}$$

Vlivem mezihvězdné hmoty dochází však na velkých vzdálenostech k pohlcování světla hvězdy, což se obvykle popisuje absorpčním koeficientem ve žluté barvě A_V. Po proměření řady hvězd, u nichž bylo možno získat určitou představu o jejich vzdálenosti od nás, bylo zjištěno, že absorpci ve žluté barvě lze vcelku dobře popsat pomocí vztahu

$$A_V = 3,2E(B - V), \tag{144}$$

kde veličina $E(B - V) = (B - V) - (B - V)_0$ označuje zčervenání barevného indexu $(B - V)$. Index nula označuje ve fotometrických systémech obvykle nezčervenalé hodnoty, jaké bychom naměřili, kdyby nebylo mezihvězdné absorbce. Zčervenání $E(B-V)$ se dá z měření v Johnsonově či Strömgrenově systému obvykle dobře určit pro hvězdy hlavní posloupnosti. Např. pro UBV systém zjistili Johnson a Morgan (1953) a Johnson (1958), že pro hvězdy spektrálního typu B s povrchovými teplotami nad asi 10000 K lze definovat veličinu

$$Q = (U - B) - \frac{E(U - B)}{E(B - V)}(B - V), \tag{145}$$

ze které lze přímo spočítat nezčervenalou hodnotu $(B - V)_0$ podle vztahu

$$(B - V)_0 = 0,332Q. \tag{146}$$

Současně zjistili, že čára zčervenání v diagramu $(U - B)$ vs. $(B - V)$ je blízká přímce, konkrétně

$$\frac{E(U - B)}{E(B - V)} = 0,72 - 0,05E(B - V). \tag{147}$$

Kombinací vztahů (145), (146) a (147) dostaneme rovnici pro výpočet nezčervenalého indexu z pozorovaných UBV hodnot:

$$(B - V)_0 = \frac{0,332(U - B) - 0,239(B - V) - 0,0166(B - V)^2}{1 - 0,0166(B - V)}. \tag{148}$$

Pomocí ní a rovnice (147) tak můžeme vypočítat nezčervenalé hodnoty obou indexů a z rovnice (144) pak i zdánlivou hvězdnou velikost ve žluté barvě:

$$V_0 = V - A_V. \tag{149}$$

Pro absolutní hvězdnou velikost ve žluté barvě, zvanou obvykle velikost *visuální*, tak dostáváme jednoduchý pracovní vztah

$$M_V = V_0 + 5 - 5\log d = V_0 + 5 + 5\log p, \tag{150}$$

kde $p = d^{-1}$ je paralaxa, vyjádřená v obloukových vteřinách. Z toho, co bylo řečeno výše, vyplývá, že paralaxa je úhel, pod kterým je z dané hvězdy vidět astronomická jednotka. Dodejme, že *modulem vzdálenosti* bývá označován rozdíl nezčervenalé pozorované visuální magnitudy a magnitudy absolutní. Pro modul vzdálenosti tedy podle (150) platí

$$MODUL = V_0 - M_V = V - A_V - M_V = 5\log d - 5. \tag{151}$$

Vztah (150) můžeme přirozeně použít jen tehdy, známe-li vzdálenost hvězdy od nás. Pro hvězdy do vzdáleností asi 100 pc bylo možno vzdálenosti již od dob astronomického využití fotografických emulzí určovat trigonometrickou metodou. V nedávné době se díky mimořádně úspěšné družici Evropské kosmické agentury *Hipparcos*, která měřila velmi přesné paralaxy a též jasnosti hvězd v období let 1989-1994, podařilo tuto hranici prakticky o jeden řád zvětšit. Kromě toho lze měření jasnosti družice Hipparcos, pořizovaná ve velmi širokopásmovém filtru a označovaná jako H_p, v mnoha případech velmi přesně převést na Johnsonovu hvězdnou velikost ve žluté barvě pomocí vztahu, který publikoval Harmanec (1998) – viz rovnice (140). Jinou – i když podstatně méně přesnou – možností je odhadnout absolutní visuální magnitudu a tedy i vzdálenost podle vzhledu spektra hvězdy. Tato metoda tzv. spektroskopické paralaxy byla navržena Adamsem a Kohlschütterem (1914).

Rozdíl mezi bolometrickou a visuální absolutní hvězdnou velikostí se nazývá bolometrická korekce BC. Bolometrické korekce byly empiricky určeny na základě měření úhlových průměrů hvězd pomocí intenzitního interferometru, měření jejich rozložení energie a s použitím modelů atmosfér pro odhad příspěvku z krátkovlnné části spektra. Souhrnně jsou jako funkce efektivní teploty tabelovány v práci Code a spol. (1976) nebo v závislosti na spektrálním typu hvězd v práci Popper (1980). Jejich přičtením k absolutní visuální velikosti ze vztahu (150) dostáváme potřebnou absolutní velikost bolometrickou:

$$M_{\mathrm{bol}} = M_V + BC. \tag{152}$$

Tuto bolometrickou hvězdnou velikost můžeme již přímo porovnat s bolometrickou hvězdnou velikostí spočtenou ze zářivého toku hvězdy, udaného v jednotkách zářivého toku Slunce, který bývá obvykle v pracech s modely hvězdných niter tabelován:

$$M_{\mathrm{bol}} - M_{\mathrm{bol}_\odot} = -2,5\log\frac{L_*}{L_\odot}. \tag{153}$$

Protože novější studie ukazují, že zářivý výkon Slunce se poněkud mění během jedenáctiletého slunečního cyklu, a protože hodnota sama závisí na současné přesnosti našich měření, vyskytují se v literatuře pro zářivý výkon Slunce mírně odlišné údaje. To je ovšem nepříjemnost, která do našich srovnání vnáší zbytečnou nepřesnost navíc. Proto Mezinárodní astronomická unie přijala na svém 23. valném shromáždění r. 1997 resoluci, která stanoví, že nadále se nebude nulový bod škály bolometrických hvězdných velikostí definovat pomocí bolometrického zářivého výkonu Slunce, nýbrž tak, že bolometrická hvězdná velikost

$$M_{\rm bol} = 0\overset{\rm m}{,}0 \tag{154}$$

odpovídá zářivému výkonu

$$L = 3,055 \times 10^{28}\,\mathrm{W}. \tag{155}$$

To jinými slovy znamená, že lze zavést absolutní škálu pro převod zářivého výkonu na bolometrickou magnitudu ve tvaru

$$M_{\rm bol} = 71\overset{\rm m}{,}2125 - 2,5\log L, \tag{156}$$

kde zářivý výkon je udán ve watech. Snadno si lze ověřit, že tato definice dobře odpovídá následujícím často uváděným hodnotám pro bolometrický zářivý výkon Slunce

$M_{\rm bol_\odot}$=+4$\overset{\rm m}{,}$75 a $L_\odot = 3,846 \times 10^{26}$ W.

2.3.2 Efektivní teplota hvězdy

Efektivní teplotu hvězdy lze odhadnout přímo z jejího spektrálního typu. Existují různé škály efektivních teplot od různých autorů, jako dobrou lze doporučit např. škálu publikovanou v práci Popper (1980). Ideální ovšem je použít k určení efektivní teploty spočtené detailní modely hvězdných atmosfér a srovnávat pozorované a spočtené profily řady spektrálních čar, až nalezneme model, jehož spočtené čáry nejlépe popisují spektrum pozorované.

Jestliže nějakým způsobem pro danou hvězdu určíme jak efektivní teplotu, tak i její bolometrický zářivý výkon, pak můžeme z definice efektivní teploty (109) odhadnout také poloměr hvězdy. Platí zřejmě

$$M_{\rm bol} - M_{\rm bol_\odot} = -2,5\log(\frac{4\pi\sigma R_\odot^2}{L_\odot}) - 5\log(R/R_\odot) - 10\log T_{\rm eff}, \tag{157}$$

což po dosazení numerických hodnot konstant a přijatých hodnot pro Slunce vede na užitečný pracovní vztah

$$M_{\rm bol} = 42,368 - 5\log(R/R_\odot) - 10\log T_{\rm eff}. \tag{158}$$

Tento vztah můžeme naopak např. pro zákrytové dvojhvězdy, u nichž určíme poloměr z řešení světelné křivky, použít k určení bolometrické magnitudy a tedy k odhadu vzdálenosti soustavy od nás.

Dnes, při znalosti mnohem přesnějších paralax jasnějších hvězd z měření družice Hipparcos můžeme odhadovat poloměry jednotlivých hvězd s dobrou přesností. Kombinací rovnic (150), (152) a (158) dostáváme pracovní vztah pro výpočet poloměrů hvězd

$$\log(R/R_\odot) = 7,474 - 2\log T_{\rm eff} - 0,2BC - 0,2V_0 - \log p. \tag{159}$$

Tabulka 2: Vztah mezi spektrem, barevným indexem, bolometrickou korekcí a teplotou pro hvězdy hlavní posloupnosti podle Poppera (1980); doplněno o odhady efektivní teploty pro hvězdy tříd L a T

Spektrum	$B-V$	B.C.	$\log T_{\rm eff}$
O7	-0,31	-3,6	4,585
O8	-0,305	-3,4	4,551
O9	-0,30	-3,2	4,521
O9,5	-0,295	-3,1	4,497
B0	-0,285	-2,96	4,475
B0,5	-0,28	-2,83	4,455
B1	-0,26	-2,59	4,418
B2	-0,24	-2,36	4,364
B3	-0,20	-1,94	4,280
B5	-0,16	-1,44	4,190
B6	-0,14	-1,17	4,149
B7	-0,12	-0,94	4,112
B8	-0,09	-0,61	4,063
B9	-0,06	-0,31	4,015
A0	0,00	-0,15	3,974
A2	+0,06	-0,08	3,943
A5	+0,14	-0,02	3,911
A7	+0,19	-0,01	3,890
F0	+0,31	-0,01	3,844
F2	+0,36	-0,02	3,826
F5	+0,43	-0,03	3,810
F8	+0,54	-0,08	3,785
G0	+0,59	-0,10	3,772
G2	+0,63	-0,13	3,768
G5	+0,66	-0,14	3,762
G8	+0,74	-0,18	3,738
K0	+0,82	-0,24	3,715
K2	+0,92	-0,35	3,690
K5	+1,15	-0,66	3,633
K7	+1,30	-0,93	3,604
M0	+1,41	-1,21	3,589
M1	+1,48	-1,49	3,571
M2	–	-1,75	3,556
M3	–	-1,96	3,542
M4	–	-2,28	3,528
M5	–	-2,59	3,513
M6	–	-2,93	3,497
M7	–	-3,46	3,459
M8	–	-4,0	3,418
L0	–	–	3,30
T0	–	–	3,11
T9	–	–	2,98

Tabulka 3: Vztah mezi spektrem, barevným indexem, bolometrickou korekcí a teplotou pro obří hvězdy podle Poppera (1980)

Spektrum	$B-V$	B.C.	$\log T_{\rm eff}$
červení obři			
G0	+0,64	-0,13	3,763
G5	+0,90	-0,34	3,676
G8	+0,95	-0,38	3,662
K0	+1,01	-0,42	3,636
K1	+1,09	-0,48	3,629
K2	+1,16	-0,53	3,624
K3	+1,26	-0,60	3,593
K4	+1,43	-0,90	3,591
K5	+1,51	-1,19	3,575
M0	+1,57	-1,28	3,574
M1	–	-1,36	3,566
M2	–	-1,52	3,563

Za zmínku stojí, že např. pro hvězdy O a B tj. pro rozsah efektivních teplot od asi 10000 K do 40000 K, se funkce $2\log T_{\rm eff} + 0,2BC$ mění s efektivní teplotou jen dosti pomalu. To je příznivé, neboť z toho vyplývá, že i při poměrně nepřesné znalosti efektivní teploty hvězdy můžeme z rovnice (159) dostat spolehlivou hodnotu poloměru, pokud známe dobře jasnost hvězdy a její přesnou paralaxu.

Pro některé jasnější hvězdy byly pomocí intezitního interferometru změřeny úhlové průměry θ v obloukových vteřinách. Pro tyto hvězdy je možné určit poloměr nezávisle z pracovního vztahu

$$R/R_\odot = 107.47\frac{\theta}{p}. \tag{160}$$

kde úhlové jednotky udáváme v obloukových vteřinách (konstanta uvedeného vztahu je tedy $(1{\rm pc}/R_\odot)(\pi/180)(1/3600)/2,$ neboť udáván bývá obvykle úhlový průměr a my počítáme poloměr). Lze se přesvědčit, že pro tak malé úhly, o které zde jde (obvykle zlomky obloukové vteřiny) lze $\tan\theta$, který by se správně měl ve vztahu (160) objevit, spolehlivě nahradit přímo úhlem. Porovnání ukazuje, že v uvedených případech vedou obě metody k dobré shodě a že tedy můžeme nalezeným poloměrům důvěřovat.

Absolutní vizuální hvězdná velikost z poloměru a monochromatického toku

Jako cvičení v zacházení s astrofyzikálními veličinami popisujícími záření si můžeme také uvést, jak lze absolutní vizuální hvězdnou velikost určit pro hvězdy o známém poloměru s použitím monochromatického toku ze syntetických spekter jako to učinili např. Schönberner a Harmanec (1995).

Podle novější absolutní kalibrace pro Vegu (α Lyr), kterou publikovali Tüg a spol. (1977), je její měřený monochromatický tok ve vlnové délce 545 nm (odpovídající efektivní vlnové délce Johnsonova filtru V)

$f_{545}^{\rm Vega}$ = 3,678$\times 10^{-8}$erg cm^{-2}s^{-1}nm^{-1}.

Měřená jasnost Vegy ve filtru V je $V_{\rm Vega} = 0\overset{\rm m}{.}03$. Pro studovanou hvězdu můžeme tedy psát

$$V_0 - V_{\rm Vega} = -2,5\log\frac{f_{545}}{f_{545}^{\rm Vega}}, \tag{161}$$

což vede po dosazení numerických hodnot pro Vegu na rovnici

$$-\log f_{545} = 0,4V_0 + 7,4224. \tag{162}$$

Pro zde přijatou hodnotu slunečního poloměru 695835 km lze rovnici (35) přepsat do logaritmického tvaru

$$\log f_{545} = 2\log\frac{R}{R_\odot} + 2\log R_\odot[\rm km] - 2\log \rm d[pc] - 2\log(3,085678\times10^{13}[\rm km]) + \log\pi + \log F_{545}. \tag{163}$$

Po vyjádření numerických hodnot a dosazení z rovnic (162) a (150) dostáváme pracovní vztah

$$M_V = 23,435 - 2,5\log F_{545} - 5\log\frac{R}{R_\odot}. \tag{164}$$

Toto určení absolutní vizuální magnitudy samozřejmě není zcela nezávislé na určení pomocí bolometrické magnitudy a bolometrické korekce, neboť teoretický monochromatický tok F_{545} musíme zvolit pro konkrétní efektivní teplotu. Přesto představuje užitečnou kontrolu klasického postupu, neboť nezávisí ani na bolometrické korekci, ani na měřené vizuální jasnosti hvězdy opravené o zčervenání.

Blackwellova-Shallisova metoda určování úhlových průměrů hvězd

Označme zářivý výkon sférické hvězdy o poloměru R neboli její bolometrický tok z celého povrchu do okolního prostoru za jednotku času symbolem L_S. Pak lze zřejmě psát

$$L_S = 4\pi R^2 \mathcal{F}_S, \tag{165}$$

kde $\mathcal{F}_S$ označuje bolometrický tok z jednotkové plochy na povrchu hvězdy do poloprostoru. Ten lze ovšem vyjádřit pomocí definice efektivní teploty (109), takže vztah (165) lze psát jako

$$L_S = 4\pi R^2 \sigma T_{\rm eff}^4. \tag{166}$$

Nechť se studovaná hvězda nachází ve vzdálenosti d a její lineární průměr označme $D = 2R$. Vzhledem k tomu, že vzdálenosti hvězd od nás jsou vůči jejich rozměrům obrovské, lze funkci sinus zcela přesně nahradit prvním členem Taylorova rozvoje a úhlový rozměr hvězdy psát ve tvaru

$$\theta = \frac{D}{d} = \frac{2R}{d} \tag{167}$$

Uvažujme nyní monochromatický tok jednotkovou plochou na povrchu hvězdy F_S a měřený na Zemi F_E. Celkový monochromatický tok povrchem hvězdy a povrchem koule o poloměru d musí být stejný a platí tedy

$$4\pi R^2 F_{S,\lambda} = 4\pi d^2 F_{E,\lambda}. \tag{168}$$

Z toho tedy plynou zřejmé vztahy

$$R = d\sqrt[2]{\frac{F_{E,\lambda}}{F_{S,\lambda}}} \tag{169}$$

či

$$\theta = 2\sqrt[2]{\frac{F_{E,\lambda}}{F_{S,\lambda}}}. \tag{170}$$

Pro bolometrický tok z uvažované hvězdy měřený na Zemi F_E lze analogicky psát

$$F_E = F_S\frac{R^2}{d^2} = \frac{\theta^2}{4}\sigma T_{\rm eff}^4 \tag{171}$$

neboli

$$\sigma T_{\rm eff}^4 = \frac{4F_E}{\theta^2}. \tag{172}$$

Protože v infračervené oblasti spektra se tok záření normálních hvězd mění s vlnovou délkou jen pomalu a závisí jen velmi slabě na efektivní teplotě hvězdy, je výhodné měřit monochromatický tok právě v této oblasti elektromagnetického spektra.

Určení úhlového rozměru provádíme v praxi tak, že podle vzhledu spektra zvolíme hrubý odhad efektivní teploty hvězdy. Pro ten z vhodného modelu atmosféry přijmeme pro studovanou infračervenou oblast spektra hodnotu $F_{S,\lambda}$ a s použitím měřeného toku v dané oblasti určíme první odhad úhlového průměru z rovnice (170). Pomocí něj a pomocí měřeného bolometrického toku hvězdy u Země F_E zpřesníme hodnotu efektivní teploty z rovnice (172) a celý iterační proces opakujeme.

Hertzsprungův-Russellův diagram pro jednotlivé hvězdy a pro hvězdokupy

Když se podařilo definovat spektrální klasifikaci v tom duchu, jak jsme ji zde popsali a též změřit trigonometrické paralaxy pro dostatečný počet hvězd, začali astronomové zkoumat závislost mezi spektrálním typem hvězd a jejich skutečnou jasností. Konstruovali proto diagram, kde na osu x zobrazili spektrální typ a na osu y hvězdnou velikost. První takové diagramy publikovali Hertzsprung a Russell, podle nichž se diagram nazývá Hertzsprungův-Russelův (dále HR), ale také Rosenberg. Hertzspung a Rosenberg konstruovali první HR diagramy pro hvězdy z otevřené hvězdokupy Plejády. Protože vzhledem k velké vzdálenosti kupy od nás je rozdíl ve vzdálenostech jednotlivých hvězd kupy zanedbatelný, lze takto porovnávat jasnosti všech pozorovaných hvězd kupy *aniž bychom znali jejich vzdálenost od nás*. Tento trik využívají astronomové pro různé účely dodnes. Navíc je třeba si uvědomit, že v dobře definovaných barevných systémech existuje spolehlivé přiřazení mezi spektrálním typem a barevným indexem, např. barevným indexem $(B-V)$ Johnsonova systému, jak jsme o něm již mluvili. Pro danou hvězdokupu pak stačí provést měření jasnosti jejich členů v nějakém standardním fotometrickém systému a poté zkonstruovat diagram barevný index versus zdánlivá visuální hvězdná velikost. Takový diagram je v zásadě jen jiným provedením HR diagramu.

2.4 Redukce spektrogramů hvězd

Spektrogramy hvězd jsou bohatým zdrojem informací a dovolují nám určovat celou řadu údajů:

- *radiální rychlost hvězdy (dále RV z anglického 'radial velocity')* tj. rychlost do směru k pozorovateli, kterou získáme porovnáním vlnových délek známých spektrálních čar s nepohyblivým laboratorním zdrojem; kladná RV znamená, že se od nás objekt vzdaluje, jeho čáry jsou v důsledku Dopplerova jevu posunuty směrem k delším vlnovým délkám;
- *centrální intenzitu (I_c)*, tj. intenzitu v jádru čáry vyjádřenou v jednotkách úrovně spojitého záření v daném místě; pro absorpční čáry je tedy tato veličina vždy menší než jedna;
- *ekvivalentní šířku (EW)*, což je plocha spektrální čáry měřená opět v jednotkách úrovně spojitého záření v dané vlnové délce;
- *šířku čáry (FWHM)* měřenou v poloviční hloubce čáry mezi centrem čáry a úrovní spojitého záření;
- *promítnutá rotační rychlost hvězdy (dále v sin i)*, tj. rovníková lineární rotační rychlost v průmětu do směru k pozorovateli (i je úhel sklonu rotační osy hvězdy vůči nebeské sféře); tato veličina není přímo měřenou veličinou, určuje se z rotačního rozšíření profilů spektrálních čar; pro konkrétní spektrální čáru lze přirozeně nalézt dobrou korelaci mezi FWHM a v sin i.

Obecněji vzato nám spektra hvězd poskytují informace o chemickém složení jejich atmosfér a díky zavislosti excitace a ionizace jednotlivých chemických prvků na teplotě také o povrchových teplotách hvězd.

Prvotní redukce spekter
Cílem prvotního zpracování spektrogramů je provést dvě kalibrace:

- Stanovit funkční závislost mezi lineární polohou s na desce od nějakého zvoleného nulového bodu a vlnovou délkou λ ve spektru.
- Zajistit, aby zobrazení spektra v relativních intenzitách bylo úměrné toku záření z hvězdy v každé vlnové délce.

Kalibrace vlnových délek
Tento úkol je společný pro fotografické i elektronické spektrogramy a liší se pouze podle toho, zda zpracováváme spektrum z hranolového či z mřížkového spektrografu. Ke kalibraci se obvykle používá čárové emisní spektrum nějakého laboratorního zdroje s čarami o známých vlnových délkách. Běžná byla spektra železného oblouku, později se začaly používat různé druhy výbojek. Nyní je hodně rozšířeno použití čar thoria, protože tento prvek má v celém optickém oboru velké množství čar, dosti rovnoměrně rozložených po celém spektru.

Pro hranolový spektrograf se obvykle používá formule navržená Hartmannem (1906):

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{C}{(s - s_0)^\alpha}, \tag{173}$$

kde C a α jsou přístrojové konstanty a index 0 označuje nulové body lineární škály a škály vlnových délek.

Pro mřížkový spektrograf lze použít formuli

$$\lambda = \frac{D}{k}(\sin\alpha + \sin(\frac{s - s_0}{f} + \alpha - \psi_0)), \tag{174}$$

kde α je úhel mřížky, f je ohnisko kamery, k je řád spektra a $D = 10^6 V^{-1}$ je mřížková konstanta (V označuje počet vrypů mřížky na 1 mm a faktor 10^6 zajišťuje, aby v případě, že všechny měřené údaje budou v mm, byla škála vlnových délek v nm). Rovnici (174) lze pro praktické výpočty přepsat do tvaru

$$\lambda = a_1 + a_4 \sin(a_2 s + a_3), \tag{175}$$

a koeficienty a_i určit metodou nejmenších čtverců z měření srovnávacích čar. Protože pracovní oblast mřížky je obvykle v lineární časti funkce sinus, mění se disperze mřížkového spektrografu jen málo s vlnovou délkou a je v principu možné rovnici (175) nahradit polynomem třetího stupně. Použítí funkce sinus však dává robustnější výsledky a možnost v případě potřeby i extrapolovat vně oblasti pokryté srovnávacími čarami. Kromě toho je možné si z koeficientů a_i zpětně spočítat parametry spektrografu (ohnisko kamery, úhel mřížky a počet vrypů) a ujistit se tak, že proložení funkce není zatíženo většími chybami.

Rozdíl mezi fotografickými a elektronickými spektry spočívá při této kalibraci pouze v tom, že srovnávací spektrum se na fotografickou desku zpravidla exponuje nad a pod hvězdné spektrum během expozice hvězdného spektra, zatímco u elektronických spekter se pořizuje na stejné místo detektoru jako hvězdné spektrum a to před a po expozici hvězdného spektra.

Kalibrace intenzit

Fotografická emulze reaguje jako nelineární detektor, to znamená, že zčernání desky není přímo úměrné dopadajícímu toku zářivé energie. Chceme-li proto dostat potřebné informace z fotografického spektra, stojíme před úkolem kalibrace densit na intenzitu. K tomu účelu se obvykle exponuje na fotografickou desku tzv. kalibrační spektrum, buď proužky nebo kroužky, vzniklé prosvětlením stupňovitého šedého klínu o známých odstupňovaných propustnostech nějakým laboratorním zdrojem bílého světla. Deska se proměří na mikrodensitometru pomocí zdroje světla a fotonásobiče s lineární odezvou, který měří tzv. transparenci T, tj. tok zdroje světla mikrodensitometru, které prošlo v tom kterém místě deskou. Z proměření kalibračních klínů se pak určí vztah mezi densitou, což je záporně vzatý logaritmus transparence, a intenzitou a tato funkční závislost se pak použije na převod density hvězdného spektra do intenzit. Výhodné je místo density použít tzv. Bakerovu densitu D_B (poprvé navrženou Bakerem 1925):

$$D_B = \log\left(\left(\frac{T_c}{T}\right)^\gamma - 1\right), \tag{176}$$

kde T_c je transparence v místě čisté desky. Výhodou Bakerovy density je to, že při vhodné volbě $\gamma \approx 1$ pro daný typ fotografické emulze je intenzita téměř lineární funkcí Bakerovy density.

Klasické učebnice doporučují měřit kalibrační funkci v závislosti na vlnové délce. Podle mých zkušeností je ale tato závislost slabá a pro typická spektra pokrývající asi 100 nm zcela zanedbatelná. V důsledku proměnné citlivosti emulze v závislosti na vlnové délce odpovídá každý řez jinému rozsahu densit a žádný sám o sobě nedefinuje celou kalibrační křivku zcela uspokojivě. Je proto mnohem lepší všechny řezy kalibračního spektra na sebe posunout (intensity jsou totiž definovány pouze relativně, nulový bod lze volit libovolně) a získat tak přesnější popis transformační funkce. Právě to dovoluje program SPEFO, vytvořený zesnulým Dr. Jiřím Hornem a v současnosti zdokonalovaný Dr. Jiřím Krpatou.

S odlišným problémem kalibrace se setkáváme u elektronických spektrer. Elektronické detektory jsou v širokém rozsahu osvětlení lineární, ale každý element detektoru má poněkud jinou citlivost na dopadající světlo. To se řeší tak, že se celý detektor osvětlí bílým světlem, např. halogenovou výbojkou, jaké se používají v reflektorech současných automobilů, a spektrum hvězdy se pak element po elementu dělí takto získaným kalibračním spektrem. Změní se tím přirozeně spektrální průběh, ten je ale stejně ovlivněn barevnými vlastnostmi přístroje a zemské atmosféry. Podstatné je, že tímto postupem odstraníme nespojité změny v citlivosti sousedních prvků detektoru. Od všech spekter se vždy nejprve odečítá vlastní pozaďový signál detektoru získaný expozicí na zakrytý detektor, abychom pracovali s čistým signálem.

Lineární disperze a rozlišovací schopnost spektrografu

Lineární disperse W udává, jaká část elektromagnetického spektra v jednotkách vlnové délky se zobrazí daným disperzním elementem podle rovnic (173) nebo (174) na jednotku délky na použitém detektoru. Pro fotografická spektra se zpravidla udává disperze v Å mm^{-1}. Je zřejmé, že čím je disperze numericky menší, tím větší detaily v profilu čásy můžeme pozorovat. Pozor ale, je to tak trochu jako s hvězdnými velikostmi. Zpravidla se o spektrografu s numericky menší disperzi říká, že má *větší* disperzi.

Rozlišovací schopnost R je definována vztahem

$$R = \frac{\lambda}{n \cdot \mathrm{d}\lambda} = \frac{\lambda}{n \cdot W \cdot s}, \tag{177}$$

kde λ je je uvažovaná vlnová délka spektra v Å, W je lineární disperze v Å mm^{-1}, $\mathrm{d}\lambda$ je rozdíl vlnových délek mezi dvěma sousedními detekčními elementy zobrazeného spektra (zrny elmulze či pixely elektronického detektoru) v Å, s je vzdálenost středů dvou detekčních elementů v mm a n udává, kolikrát je promítnutá šířka štěrbiny v poloviční hloubce (FWHM) větší než $\mathrm{d}\lambda$. Zpravidla se n pohybuje mezi 2 až 3. Obvyklá hodnota parametru s činí pro fotografické emulze 0.020 až 0.025 mm a 10 až 25 μm pro elektronické detektory.

Poměr signál/šum

Jak fotografická, tak elektronická spektra obsahují kromě signálu S odpovídajícího dopadajícímu toku z hvězdy v dané vlnové délce také víceméně náhodný šum N (z anglického 'noise'). U fotografických desek je tento šum dán především zrnitostí fotografických emulzí, u elektronických spekter je určen vlastním šumem použitého detektoru. Ten lze sice ochlazením detektoru značně snížit, ale úplně potlačit jej také nelze. Pro vědecké zpracování spekter je žádoucí dosáhnout co největšího poměru signál/šum při co nejkratší expozici.

Pro dané spektrum lze poměr signál/šum S/N jednoduše odhadnout jako poměr průměrného signálu a jeho střední kvadratické chyby určené pro vhodně zvolený úsek spektra, o kterém víme, že neobsahuje žádné spektrální čáry. Platí tedy

$$S/N = \sqrt{\frac{(\sum S^2 - (\sum S)^2/m)}{m-1}}, \tag{178}$$

kde m je počet bodů rektifikovaného spektra, ve kterých byl uvažován signál S úměrný toku záření z kontinua hvězdy.

Elektronická spektra dosahují běžně poměru signál/šum více než 100, s detektorem Reticon a s nejkvalitnějšími CCD detektory lze dosahovat i hodnot 2000.

Proměřování spektrálních čar v redukovaných spektrech

Jakmile jsme provedli obě výše popsané kalibrace, je možno fotografická i elektronická spektra dále proměřovat již zcela stejným způsobem. Rozdíl je pouze v tom, že elektronická spektra mívají podstatně lepší poměr signál/šum.

Měření radiálních rychlostí

Klasickým způsobem pomocí komparátoru lze měřit pouze fotografická spektra. Spektrum se vhodným způsobem upevní (emulzí nahoru) na průhlednou desku komparátoru s přesným mikrometrickým šroubem a přes okulár se postupně nastavuje do středu vlákna nebo těsné dvojice rovnoběžných vláken jedna srovnávací čára za druhou, přičemž (po předběžné justaci sklonu spektra) se nastavuje současně na horní a dolní proužek srovnávacího spektra. Potom se stejným způsobem proměří i čáry hvězdného spektra. Pak je vhodné spektrum otočit na podložce tak, aby z dolního srovnávacího spektra se stalo horní a celé měření opakovat. Nastavíme-li některou zvolenou srovnávací čáru poblíž středu spektra na zhruba stejné čtení mikrometrického šroubu v obou směrech, je možné rozdílově dopočítat měření z obrácené polohy desky a obě měření poté před vlastním výpočtem zprůměrovat. Vlastní výpočet pak probíhá tak, že se nejprve definuje metodou nejmenších čtverců funkční závislost vlnové délky na čtení mikrometrického šroubu – např. pomocí rovnice (175) nebo pomocí polynomu 3. či 5. stupně. Podle odchylek je ještě možné odstranit měření srovnávacích čar zatížená větší chybou a proložení opakovat. Poté se nalezená funkční závislost použije k výpočtu vlnových délek hvězdných čar a k nim se pro hvězdné čáry o známé laboratorní vlnové délce může dopočítat již i radiální rychlost pomocí formule

$$RV = \frac{c}{\lambda_0}(\lambda - \lambda_0), \tag{179}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu, λ měřená a λ_0 laboratorní vlnová délka uvažované čáry. K takto získané radiální rychlosti musíme ovšem ještě přičíst heliocentrickou korekci rychlosti, která představuje opravu o pohyb Země okolo Slunce a o rotaci Země. (Pro velmi přesná měření radiálních rychlostí, např. v případě hledání poruch způsobených oběhem planety kolem studované hvězdy, je třeba zahrnout i korekci o pohyb kolem těžiště soustavy Země - Měsíc.) O maximální velikosti heliocentrických korekcí radiální rychlosti si snadno můžeme učinit představu následujícími odhady. Při kruhovém oběhu či rotaci platí mezi obvodovou lineární rychlostí V, periodou jedné otočky P a poloměrem kruhové dráhy R zřejmý vztah

$$V = \frac{2\pi R}{P}, \tag{180}$$

který lze pro astronomické účely upravit numericky tak, abychom poloměr udávali v jednotkách poloměru slunečního ($R_\odot = 695835$ km), oběžnou periodu ve dnech a lineární rychlost v $\mathrm{km\,s^{-1}}$. Dostáváme tak užitečný pracovní vztah

$$V = 50,6025\frac{R}{P}. \tag{181}$$

Zanedbáme-li pro orientační odhad malou výstřednost zemské dráhy, pak můžeme za její poloměr do vztahu (181) dosadit astronomickou jednotku dělenou poloměrem Slunce a za periodu tropický rok (365,24219 dne). Zjistíme, že střední oběžná rychlost Země kolem Slunce je 29,786 $\mathrm{km\,s^{-1}}$, což je tedy maximální možná korekce pro hvězdy, které se nacházejí právě v rovině ekliptiky. Analogicky opravu na otáčení Země

Tabulka 4: Změna radiální rychlosti $\triangle RV$ odpovídající změně vlnové délky o 1 nm pro různé vlnové délky

λ	$\triangle RV$	λ	$\triangle RV$
(nm)	(km s^{-1})	(nm)	(km s^{-1})
100	2998	650	461.2
150	1999	800	374.7
400	749.5	1000	299.8

zjistíme, použijeme-li ve vztahu (181) rovníkový poloměr Země (6378 km). Ta může činit maximálně 0,464 km s^{-1}, je tedy mnohem menší. Většina redukčních programů již tyto korekce zahrnuje.

Je také dobře si uvědomit, že při stejné lineární disperzi daného spektrografu je pro měření radiální rychlosti z hlediska přesnosti podstatně výhodnější použít červenou nebo dokonce infračervenou oblast spektra než oblast ultrafialovou. Z rovnice (179) totiž plyne, že změně vlnové délky o 1 nm odpovídá v ultrafialovém oboru mnohem větší změna RV než v oblasti infračervené, jak to ukazuje tabulka 4.

V případě konkrétního redukčního programu SPEFO, o kterém již byla řeč, je průměr radiální rychlosti pro skupinu čar počítán tzv. metodou robustního průměru, který dává lepší výsledky než prostý aritmetický průměr, neboť automaticky potlačuje vliv měření s velkou odchylkou od těžiště určeného většinou čar. Pro spektra získaná v červené či infračervené oblasti spektra lze ještě nulový bod škály vlnových délek zpřesnit tím, že změříme radiální rychlosti vybraného souboru atmosferických čar, které jsou v těchto oblastech pozorovatelné, a pokud se výsledek liší od vypočtené heliocentrické korekce radiální rychlosti, korigujeme výslednou radiální rychlost o zjištěný rozdíl.

Vlastní měření polohy zejména hvězdných čar lze provádět mnohem přesněji, pokud je možno spektrum zobrazit a srovnávat přímý a zrcadlový obraz profilů měřené čáry. Ještě v éře fotografických desek se takové přístroje na několika místech používaly. Na některých amerických a kanadských hvězdárnách to byl komerčně vyráběný přístroj (Grant machine), ale na hvězdárnách ve Victorii v Kanadě a v Potsdamu v Německu se vyrobili zařízení vlastní, s lepšími vlastnostmi. Obvykle se spektrum prosvítilo a snímalo na obrazovku osciloskopu nabo televize a převrácený obraz se vytvářel elektronicky. Pro elektronická spektra je nyní tato metoda metodou základní. Inverze obrazu se děje v počítači a k zobrazení opět slouží obrazovka počítače. Tak funguje i program SPEFO. Mimo to je ovšem možné nějakou matematickou metodou určit střed čáry přímo. Je možno např. jádro či vrchol čáry popsat parabolou a inflexní bod považovat na střed. Jinou metodou je počítání momentu, tj. vlastně plochy čáry váhované lokální radiální rychlostí; střed odpovídá polovině celkového momentu. Předpokladem úspěchu matematických metod určování RV je přirozeně symetrie měřeného profilu.

Měření spektrofotometrických veličin

V rektifikovaných spektrech můžeme pro každý profil měřit několik charakteristických veličin. Pro absorbční čáry jsou to tyto veličiny:

- *Centrální intenzita* I_c měřená od hladiny nulové intenzity (čím silnější absorbční čára, tím menší číslo, rozsah je od 0 do 1).

- *Ekvivalentní šířka EW* je plocha čáry vyjádřená v tzv. ekvivalentních angströmech, jednotkou je plocha obdélníka s výškou od nuly do jedné v rektifikovaném spektru a se šířkou 1 Å na ose vlnových délek. Zde ovšem platí, že čím je čára silnější, tím má větší ekvivalentní šířku. Formálněji můžeme ekvivalentní šířku zapsat výrazem

$$EW = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(1 - \frac{\mathcal{F}_\lambda}{\mathcal{F}_{\mathrm{cont.}}}\right) \mathrm{d}\lambda, \tag{182}$$

  kde $\mathcal{F}_\lambda$ a $\mathcal{F}_{\mathrm{cont.}}$ jsou tok záření v čáře a tok záření v kontinuu stejné vlnové délky a integrace probíhá přes celou šířku čáry.

- *šířka čáry v poloviční hloubce FWHM (full width at half maximum)*, která se udává v jednotkách vlnové délky, nm či Å, někdy též v km s^{-1} (přepočteno podle vztahu pro radiální rychlost).

- *promítnutá rotační rychlost v sin i* se obvykle určuje srovnáváním pozorovaného a rotačně rozšířeného teoretického profilu spektrální čáry. Pro konkrétní čáry udávají někteří autoři vztah mezi pološířkou a promítnutou rotační rychlostí, takže k odhadům lze využít i měření $FWHM$. Na rozdíl od všech předchozích veličin není promítnutá rotační rychlost veličinou přímo měřenou, nýbrž určenou z pozorovaného rozšíření spektrálního profilu na základě určitého modelu a ovlivňují ji i veličiny jako makroturbulence, mikroturbulence a podobně.

Pro emisní čáry můžeme ovšem kromě centrální intenzity měřit i intenzitu fialového I_V a červeného I_R vrcholu emise (pokud je emise dvojitá) a studovat i jejich poměr I_V/I_R. Lze samozřejmě měřit i ekvivalentní šířku emisní čáry a obvykle se používá konvekce, že je-li ve výsledné ekvivalentní šířce emisní příspěvek dominantní, udává se EW numericky záporná.

Je třeba říci něco o vlastnostech těchto veličin. Teoreticky vzato by ideální veličinou pro srovnávání měření z různých spektrografů a pro hledání časových změn měla být ekvivalentní šířka, která by se neměla měnit se spektrálním rozlišením. V praxi tomu ovšem tak není. Důvodů je několik. Ekvivalentní šířka při nižší dispersi může být ovlivněna sléváním blízkých čar (“blendováním”) a její hodnota je nutně ovlivněna chybami jak ve škále vlnových délek, tak intenzit, záleží hodně na přesném proložení úrovně spojitého spektra a v dlouhovlnné části spektra vstupují do hry i atmosferické čáry. Podle mých zkušeností jsou proto jak centrální intenzita, tak pološířka vhodnějšími veličinami pro detekci změn – pokud ovšem nesrovnáváme data ze spektrogramů s výrazně odlišnou disperzí či rozlišovací schopností. Velmi dobrou veličinou je přirozeně i poměr intensit vrcholu dvojité emisní čáry I_V/I_R, neboť jde o měření relativní. Případné nepřesnosti v proložení kontinua ovlivní obě intenzity podobně a jejich podíl příliš ovlivněn není.

Váhování spekter

Pokud studujeme nějakou proměnnou hvězdu, jsou měření radiální rychlosti a spektrofotometrických veličin údaji, jejichž časovou proměnnost můžeme zkoumat, jak je o tom řeč v další kapitole. Je výhodné kombinovat námi získaná data i s údaji, které získali pozorovatelé před námi. Chceme-li ovšem např. radiální rychlosti získané různými přístroji kombinovat, ja žádoucí, abychom je vhodně váhovali a vzali tak v potaz jejich často velmi různou kvalitu a přesnost.

Jsou možné různé přístupy k tomuto úkolu. V zásadě by bylo ideální učinit váhu každého spektrogramu úměrnou jeho rozlišovací schopnosti a poměru signál/šum. Ten ale zpravidla pro starší pozorování neznáme.

Můžeme proto alespoň předpokládat, že poměr signál/šum je pro elektronická spektra několikrát vyšší než pro spektra fotografická a použít k určení váhy w vztah

$$w = \frac{Q \cdot R}{10000}, \tag{183}$$

kde parametr Q položíme roven 1 pro fotografická spektra a např. hodnotě 4 pro spektra elektronická. Použitý normovací faktor zajišťuje rozumné numerické hodnoty vah: váhu 1 bude mít např. fotografické spektrum s rozlišovací schopností 10000. Pokud váhujeme radiální rychlosti získané jako průměr měření několika čar, je vhodné učinit váhu úměrnou i počtu měřených čar. Ten lze často zjistit i pro publikovaná data. Pokud kombinujeme měření radiálních rychlostí z různých oblastí vlnových délek, bylo by logické učinit váhu úměrnou i vlnové délce (viz tabulka 4). Použijeme-li i radiální rychlosti z družice IUE, je rozumné faktor Q brát roven 1, neboť šum použitého detektoru této družice odpovídá spíše šumu fotografických spekter.

Obecný vztah pro váhu spektrogramu bychom tedy mohli zapsat ve tvaru

$$w = \frac{k \cdot Q \cdot R \cdot \lambda}{10000}, \tag{184}$$

kde parametr Q buď bereme úměrný poměru signál/šum, pokud jej známe nebo jej odhadujeme, jak je to popsáno výše; λ je vlnová délka měření a k je počet měřených čar (to pouze, když váhujeme průměr měření z více spektrálních čar).

3 Analýza časových řad a hledání periodicity u proměnných hvězd

3.1 Úvodní úvahy

Definujme si nejprve základní pojmy, které se budou během celého výkladu často opakovat:

- Změna nějaké proměnné veličiny se nazývá periodickou, jestliže se hodnoty, jež veličina postupně nabývá, zcela pravidelně opakují podle určitého zákona (funkce). Délce opakovacího intervalu se říká perioda změn; budeme ji zde důsledně označovat symbolem P.
- Často je výhodné (z důvodů, které vyplynou z dalšího výkladu) pracovat s převrácenou hodnotou periody. Této veličině se říká frekvence a budeme ji označovat symbolem f. Platí tedy:

$$f = 1/P. \tag{185}$$

- Pro jednoduše periodické děje bývá výhodné měření zobrazit ve *fázovém diagramu*, tj. poskládat v čase rozložená data tak, jako by byla všechna získána během časového intervalu odpovídajícího délce jedné periody. Pro měření získané v čase t spočteme *cyklus a fázi* c a normovanou fázi φ vůči periodě P podle vztahů

$$c = (t - T_0)/P, \tag{186}$$

$$\varphi = \mathrm{frac}(c). \tag{187}$$

  (Funkce frac(x) nabývá hodnoty zlomkové části x pro nezáporná x, a hodnoty [1 - absolutní hodnota zlomkové části x] pro $x < 0$. Tedy na př. pro $x = 3.77$, frac(x)=0.77; pro $x = -3.77$, frac(x)=0.23, atd.) T_0 označuje počátek fází: je to nějaký referenční časový bod, pro který se rozhodneme (na př. okamžik maxima či minima studované změny); pokud nás takový okamžik nezajímá, lze pro jednoduchost zvolit $T_0 = 0$. Snadno uvážíme, že vztah (187) transformuje každý čas měření do intervalu hodnot od 0 do 1, a to tak, že stejné hodnoty proměnného děje s periodou P budou mít stejnou hodnotu fáze. Pro konkrétní případ proměnných hvězd se fázovému diagramu obvykle říká světelná křivka. Pro hvězdy s proměnnou radiální rychlostí hovoříme o křivce radiálních rychlostí.

Každé pozorování jasnosti, radiální rychlosti, centrální intenzity nebo kterékoliv jiné fyzikální veličiny se zaznamenaným časem měření představuje jeden bod časové řady pozorování sledovaného objektu. Je to tedy dvojice čísel (t, m), kde m označuje jasnost změřenou v čase t. Pokud se jasnost mění, bude nás přirozeně zajímat, zda jsou tyto změny pravidelné či nepravidelné a vůbec, jaký je jejich charakter. V případě pravidelných změn je prvním úkolem nalézt periodu, se kterou se změny jasnosti opakují. Vzhledem k povaze astronomických pozorování v optickém oboru to nemusí vždy být snadný úkol. Rotace Země (opakování dne a noci) a nepravidelné změny oblačnosti způsobují, že časové řady astronomických pozorování mají své charakteristické zvláštnosti:

- Při pozorování z jednoho místa nutně obsahují 'vzorkovací periodu' jednoho hvězdného dne.
- Jsou velice nepravidelně rozložena v čase (dvě měření mohou po sobě následovat za 1 minutu, ale také třeba za 2 roky).

Správná a úplná analýza časových řad astronomických pozorování je proto i v době výkonných počítačů činností, kterou nelze dělat zcela mechanicky. Je třeba určitého citu pro věc a klidného zvážení, co lze z daných pozorovacích dat určit a co ne.

Prvním krokem analýzy by vždy mělo být grafické zobrazení studované proměnné veličiny v závislosti na čase. Z něj získáme prvotní představu o tom, co můžeme od analýzy dané časové řady očekávat a jakou strategii zvolit.

- Jestliže máme k dispozici bohatý soubor měření, která následují dostatečně hustě po sobě, může se dokonce stát, že již z tohoto grafu odhadneme skutečnou periodu změn. To je ovšem v praxi spíše výjimečný, než typický případ. Každopádně ale z grafu poznáme, zda nedochází k trvalému poklesu či růstu studované veličiny nebo zda nejvýraznější změny nejsou sice plynulé, ale zcela očividně neperiodické, nepravidelné.

- Pokud časová řada, kterou zkoumáme, sestává z měření, pořízených několika různými pozorovateli či přístroji, je vždy užitečné je v grafu odlišit různými symboly, abychom se přesvědčili, zda mezi jednotlivými pozorovateli neexistují *systematické rozdíly* v hodnotách měřené veličiny.

Uveďme několik dalších, skoro banálních, ale důležitých závěrů, které lze při prvotním zkoumání dané časové řady učinit:

1. Z dané řady měření nelze prokázat přítomnost periody, která je delší, než délka celé serie pozorování. Že je změna skutečně periodická, zjistíme teprve z dat, která budou pokrývat několik cyklů.

2. V principu lze zkoumat, zda v daných datech není přítomna perioda kratší než minimální časová vzdálenost dvou pozorování studovaných dat. Musíme si ale být vědomi, že i když nějakou takovou periodu nalezneme, může jít o periodu zdánlivou, vzniklou pouze v důsledku fázového skládání. Představme si pro ilustraci, že bychom pravidelně po 1 dni měřili konstantní jasnost. Lze snadno uvážit, že taková pozorování nevylučují, ale ani nedokazují přítomnost periodického děje s periodou $0\overset{\mathrm{d}}{.}5$, $0\overset{\mathrm{d}}{.}333333$, atd.) Abychom přítomnost takové periody prokázali, musíme získat nové řady pozorování s daty, jejichž časový rozestup bude alespoň o jeden řád menší než je hledaná perioda. Na potřebnou hustotu měření bude mít vliv i to, zda křivka s domnělou periodou má pouze jedno maximum a minimum nebo zda je složitější (jako např. světelná křivka zákrytové nebo elipsoidální proměnné). To znamená, že např. k prokázání přítomnosti periody $0\overset{\mathrm{d}}{.}1$ bychom měli získat alespoň jednu serii pozorování s hustotou měření po $0\overset{\mathrm{d}}{.}01$, jde-li o zhruba sinusovou křivku, či $0\overset{\mathrm{d}}{.}005$, jde-li o křivku se 2 minimy a maximy.

Z toho, co bylo řečeno, vyplývá, že začínáme-li zkoumat proměnnost nějakého objektu, o jehož změnách není dosud nic známo, měli bychom začít pozorování nejprve hustými celonočními řadami měření, abychom si učinili prvotní představu o tom, jaké *nejkratší měřitelné* změny jasnosti můžeme pro zkoumaný objekt očekávat. Pokud na př. spolehlivě vyloučíme měřitelné změny během noci, bude nadále stačit získávat 1–3 měření za noc, atd.

3.2 Obecné zákonitosti a problémy při hledání period

Vyhledávání periodicity nějakého proměnného jevu není přirozeně výlučným problémem astronomie, ale i mnoha dalších vědních disciplin. V řadě případů je však možné získávat souvislé pozorovací řady s pravidelným časovým rozestupem po sobě jdoucích měření. Pro takové řady lze hledat periodicitu metodami klasické Fourierovy analýzy. V případě studia hvězd jsou ovšem podobné metody stěží použitelné a proto zde o nich nebude řeč.

V astronomické literatuře lze nalézt celou řadu matematických a počítačových metod k hledání periodicity, a nové se stále objevují. Lze si však povšimnout, že všechny tyto metody jsou jen různě důmyslnými obměnami *dvou základních principů*, pomocí nichž lze periodicitu v datech s nepravidelným časovým rozložením měření hledat:

1. metody, které modelují křivku změn pomocí konkrétních tříd matematických funkcí, předpokládají určitý konkrétní tvar křivky a hledají periodu, pro kterou je shoda funkce s daty nejlepší, a

2. metody, které pro každou zkusmou periodu setřídí data do fázového diagramu a v jednotlivých malých intervalech fází zkoumají rozptyl bodů. Za nejlepší se považuje ta perioda, pro níž je rozptyl ve všech intervalech fází nejmenší.

Je zřejmé, že každý z těchto postupů má své výhody, a je třeba zvážit, pro který se v daném případě rozhodnout. Výhodou metod, které používají matematické funkce, je, že získáme kromě periody i analytický popis světelné křivky a můžeme vypočítat očekávanou hodnotu jasnosti pro libovolný čas.

Metody minimalizace fázového rozptylu jsou ovšem velice výhodné pro data, pro něž tvar fázové křivky předem neznáme. Kdybychom totiž např. pro hledání periody zákrytové dvojhvězdy se dvěma nestejně hlubokými minimy použili první třídu metod a za modelovou křivku zvolili v praxi nejčastěji používanou sinusovku, je zřejmé, že bychom správnou periodu stěží nalezli.

Pokud tedy o proměnnosti sledovaného objektu předem nic nevíme, doporučuji použít nejprve některou z metod minimalizace fázového rozptylu, a teprve po nalezení správné periody změn uvažovat o vhodném analytickém popisu nalezené křivky.

Z toho, co již bylo řečeno, vyplývá tedy následující obecné schema praktického postupu:

Zvolíme některou metodu, interval možných period a krok změny zkusmé periody, a zadáme hledání. Program zkoumá data postupně vůči jedné zkusmé periodě za druhou a zaznamenává si nejlepší hodnoty nalezené podle daného kriteria té které použité metody, a ty na konci prohledání uživateli sdělí spolu s hodnotami kriteria. Jinou možností je zobrazit průběh hodnoty kriteria v závislosti na frekvenci pro celý rozsah prohledávání.

Pokud o možné periodicitě zkoumané změny předem nic nevíme, lze za minimální a maximální zkusmé periody zvolit na př. minimální časovou vzdálenost dvou pozorování a celkovou délku intervalu pokrytého studovanými daty.

Nejdůležitější je ovšem správná volba kroku prohledávání, se kterým měníme zkusmou periodu. Chceme přirozeně zvolit nejprve krok co nejdelší, aby výpočet netrval zbytečně dlouho. Je ale zřejmé, že pokud bychom zvolili krok příliš velký, mohli bychom přehlédnout správnou periodu. Kdybychom na př. zvolili tak dlouhý krok, že by se dvě po sobě jdoucí zkusmé periody lišily od začátku do konce úseku pokrytého daty o celou 1 zkoumanou periodu, očividně bychom zanedbali možná setřídění pro všechny periody mezi dvěma zkusmými. Pro zhruba sinusovou světelnou křivku je proto bezpečné zvolit krok prohledávání tak, aby žádné pozorování nezměnilo svou fázi mezi dvěma po sobě jdoucími zkusmými periodami o více než $0\overset{\mathrm{P}}{.}1$. Formulujme si takovou podmínku matematicky pomocí frekvencí definovaných vztahem (185). Jestliže zkoumaná měření byla získána v časech t_1 až t_n, pak délka intervalu pokrytého daty je

$T = t_n - t_1$. K největší fázové změně může dojít právě pro časově nejvzdálenější body. Zvolme proto čas t_1 za počátek fází. Požadujeme-li, aby maximální fázová změna mezi zkusmými frekvencemi na celém intervalu nepřesáhla hodnotu $\triangle\varphi$ beze změny hodnoty cyklu, pak je zřejmé, že pro krok ve frekvenci $\triangle f$ s použitím vztahů (185) a (186) platí

$$c = f.T, \quad c + \triangle\varphi = (f + \triangle f).T,$$

a tedy

$$\triangle f = \triangle\varphi/T. \tag{188}$$

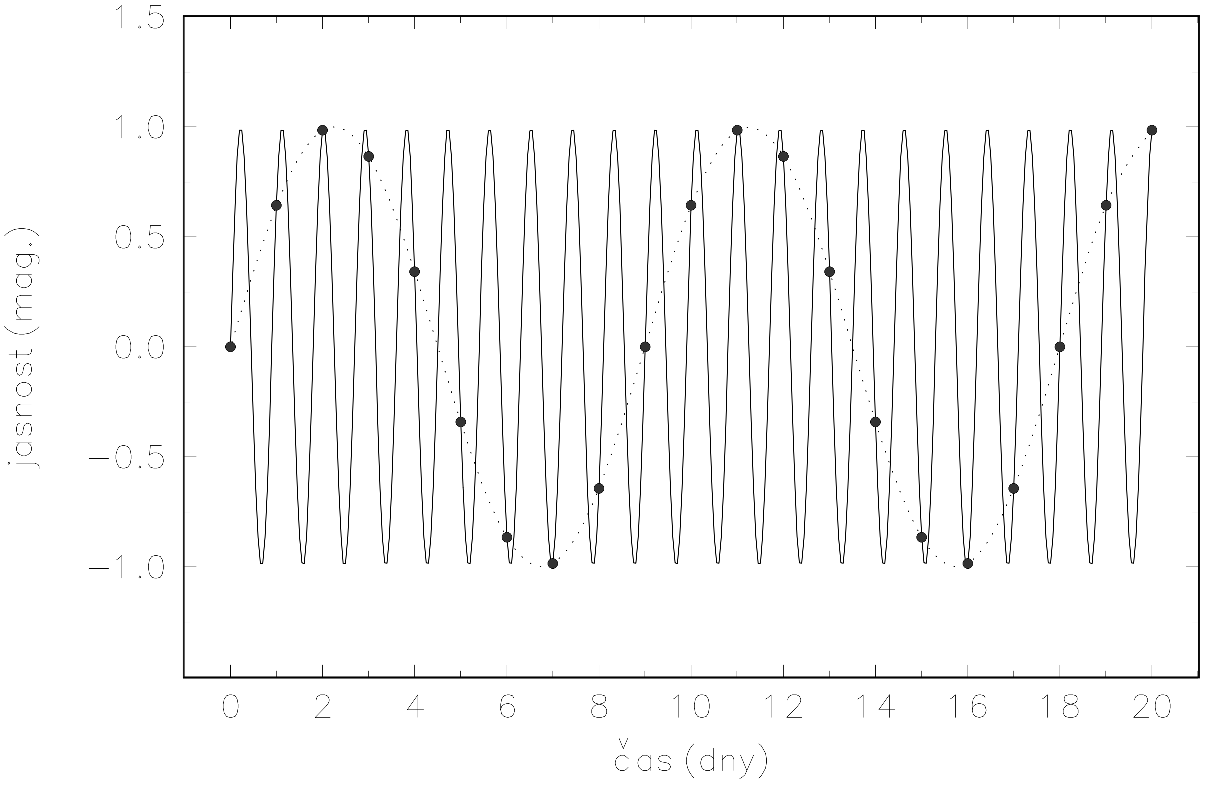
Ze vztahu (188) vyplývá, že pro zvolenou fázovou diferenci $\triangle\varphi$ bude krok ve frekvenci lineární. To je jedním z důvodů, proč je vhodné pracovat s frekvencemi místo periodami.

Je dobré si uvědomit, jaké nároky na prohledávání podmínka (188) klade. Jestliže na př. pozorování pokrývají interval 100 dní a budeme požadovat $\triangle\varphi = 0\overset{\mathrm{P}}{,}1$, musíme zvolit krok $\triangle f = 0.001$ cd^{-1} (cyklů za den), takže na př. k prohledání všech možných period od 100 dní dolů k $0\overset{\mathrm{d}}{,}1$ budeme muset zvolit (10-0,01)/0,001) = 9990 zkusmých frekvencí. Budou-li ale data pokrývat třeba 1000 dní (tedy asi 3 roky), budeme již potřebovat 99900 zkusmých frekvencí. Pro časově rozsáhlá data je proto velice užitečné uvážit, zda v důsledku polohy měřeného objektu na nebi neexistují v datech větší sezonní časové mezery. Jestliže ano, je přirozeně výhodné provést prvotní hledání v datech z každé sezony zvlášť, což nám umožní použití mnohem delšího kroku ve fázi. Je-li studovaná změna periodická, měli bychom stejnou periodu nalézt ve všech sezonách. Její hodnotu pak pouze zpřesníme jemným prohledáním úplného souboru dat v malém okolí přibližné periody nalezené v jednotlivých sezonách.

Jestliže provedeme hledání periodicity v určitém rozsahu zkusmých period, velmi často se stane, že námi zvolená metoda nalezne více možných period. Může to znamenat, že změny jasnosti nejsou jednoduše periodické nebo že jsou tvořeny skládáním dvou či více periodických dějů. Než však takový závěr učiníme, musíme se velice pečlivě přesvědčit, zda zdánlivá multiperiodicita není důsledkem konkrétního časového rozložení dat. Rovněž je třeba identifikovat všechny zdánlivé, falešné a přidružené periody.

Zdánlivé periody (aliasy) Zdánlivým periodám, které vznikají v důsledku určité dlouhodobé pravidelnosti v obecně velmi nepravidelně získávaných astronomických datech se v anglické literatuře říká aliasy (doslova ‘překryvy’) a zde se tohoto stručného a výstižného termínu v dalším výkladu přidržíme. Již na začátku této kapitoly jsem se zmiňoval o tom, že každá řada pozorování proměnné hvězdy z konkrétního místa na Zemi bude v důsledku střídání dne a noci ve větší či menší míře ‘vzorkována’ s frekvencí 1 hvězdného dne (výjimku by mohla představovat pouze souvislá pozorování cirkumpolární hvězdy z Arktidy či Antarktidy během polární noci). Pozorování slabých hvězd, při nichž se pozorovatel vědomě vyhýbá nocem v době úplňku, budou nutně vzorkována s periodou oběhu Měsíce kolem Země. To se může stát i pro jasné hvězdy v těch oblastech, kde je charakter oblačnosti výrazněji modulován měsíčním cyklem. Ze zřejmých důvodů dochází v pozorovacích řadách proměnných hvězd i k výraznému vzorkování s periodou 1 roku.

Vysvětleme si nejprve na názorném příkladu, proč při pravidelném rozestupu pozorování mohou zdánlivé periody či aliasy vznikat. Na obr. 2 je znázorněna periodická sinusová změna jasnosti s periodou 0,9 dne, kterou pozorujeme vždy jedenkrát denně. Je zřejmé, že vyneseme-li tato pozorování do grafu v závislosti na čase, usoudíme, že skutečná perioda změny je 9 dní. Označíme-li časový krok, se kterým získáváme



Obrázek 2: Ilustrace, jak vznikají aliasy při pozorování z jednoho místa: Pokud pozorování získáváme právě jedenkrát denně, když hvězda prochází místním poledníkem, nelze pro znázorněný příklad zřejmě rozhodnout mezi periodami $0\overset{\mathrm{d}}{,}9$ a $9\overset{\mathrm{d}}{,}0$.

pozorování k (v našem příkladu $k = 1$), pak mezi frekvencemi obou period zřejmě existuje vztah

$$f(9,0) = f(0,9) - k. \tag{189}$$

Formulujme si nyní problém astronomických aliasů při pozorování ze Země obecněji. Označme symboly f_r a f_d frekvence 1 tropického roku a 1 hvězdného dne. Protože čas měření udáváme obvykle v jednotkách středního slunečního dne a tropický rok trvá 365,24219 středních slunečních dní – tj. 366,24219 dní hvězdných – je frekvence 1 roku

$$f_r = 1/365,24219\mathrm{d} = 0,002737909\mathrm{cd}^{-1}. \tag{190}$$

Délka 1 hvězdného dne v jednotkách středního času je 365,24219/366,24219; frekvence 1 hvězdného dne je tedy

$$f_d = 1 + f_r = 1,002737909\mathrm{cd}^{-1}. \tag{191}$$

Jestliže se jasnost proměnné, kterou sledujeme, mění periodicky s frekvencí f, pak pro frekvence odpovídajících jednodenních aliasů platí

$$f_1 = f_d - f \ \text{ a } \ f_2 = f_d + f. \tag{192}$$

Uveďme si konkrétní číselný příklad: Bude-li na př. skutečná perioda změn P = $2^{\mathrm{d}}{,}0$, dostaneme podle (192) jednodenní aliasy s periodami $0^{\mathrm{d}}{,}665452$ a $1^{\mathrm{d}}{,}989108$. Pro P = $5^{\mathrm{d}}{,}0$ to bude $0^{\mathrm{d}}{,}831436$ a $1^{\mathrm{d}}{,}245737$ a pro P = $20^{\mathrm{d}}{,}0$ je to $0^{\mathrm{d}}{,}94990$ a $1^{\mathrm{d}}{,}0496$. Pro P = $100^{\mathrm{d}}{,}0$ dostáváme aliasy $1^{\mathrm{d}}{,}00732$ a $0^{\mathrm{d}}{,}98742$. Vidíme tedy, že s rostoucí periodou se jednodenní aliasy zdola a shora blíží periodě 1 hvězdného dne.

Pro frekvence ročních aliasů obdobně platí

$$f_3 = f - f_r \ \text{ a } \ f_4 = f + f_r. \tag{193}$$

Označíme-li ještě $T_r = 1/f_r$ délku tropického roku, lze vztahy (193) přepsat do tvaru

$$T_r/P_3 = T_r/P - 1 \ \text{ a } \ T_r/P_4 = T_r/P + 1. \tag{194}$$

Jestliže si ještě připomeneme definici cyklu (186), vidíme, že názorný smysl ročních aliasů je, že se jedná o periody, které se od skutečné liší o délku $\pm$ 1 cyklu za dobu 1 roku. Na př. roční aliasy periody $2^{\mathrm{d}}{,}0$ budou $1^{\mathrm{d}}{,}9891$ a $2^{\mathrm{d}}{,}0110$. Budeme-li proměnnou hvězdu s periodou $2^{\mathrm{d}}{,}0$ pozorovat dvě sezony po sobě na př. vždy jen během 1 měsíce, může se stát, že nedokážeme rozhodnout mezi skutečnou periodou a jejími ročními aliasy.

Pro pozorné čtenáře dodávám, že numerická shoda denního a ročního aliasu, které si lze všimnout v uvedeném příkladu pro periodu $2^{\mathrm{d}}{,}0$, není obecným pravidlem a nastává pouze pro tuto periodu. Ze vztahů (191), (192) a (193) totiž plyne vztah $f_1 = 1 + f_4 - 2f$, z něhož je zřejmé, že rovnost $f_1 = f_4$ nastává pouze pro $f = 0,5$.

Falešné periody Je nutno pečlivě rozlišovat mezi zdánlivými periodami neboli aliasy, o nichž jsme si právě pověděli, a mezi falešnými periodami, které můžeme v datech nalézt. Aliasy jsou důsledkem přítomnosti určité periodicity v *časovém rozložení* jednotlivých pozorování. Naproti tomu falešné periody vznikají obvykle v důsledku určité periodicity v *systematických chybách* našich měření. Záludné je, že se v obou případech může jednat o podobné periody. Nejlépe si můžeme vznik falešné periodicity vysvětlit opět na příkladech. Budeme-li např. pořizovat dlouhé noční řady měření jasnosti nějaké hvězdy a nebudeme-li naměřené hodnoty opravovat o vliv extinkce (viz kapitola o redukci fotoelektrických měření) nebo budou-li naše korekce chybné, pak se určená jasnost i neproměnné hvězdy bude zdánlivě měnit s periodou 1 hvězdného dne. Zcela analogicky se může stát, že měření během roku se budou systematicky lišit a při hledání periodicity zjistíme falešnou periodu 1 roku.

Násobné periody neboli vyšší harmonické Většina metod hledání periodicity bude v našich datech indikovat i periody dvakrát a třikrát delší, než je skutečná perioda změn. To je logické, a v některých případech je bez dodatečné informace (např. z jiného druhu pozorování) nemožné rozhodnout, zda skutečná fyzikální perioda změn odpovídá jednoduché (zhruba sinusové) křivce nebo křivce se dvěma minimy a maximy a dvakrát delší periodou. To je případ elipsiodálních proměnných nebo zákrytových dvojhvězd se 2 podobně hlubokými minimy. Metody minimalizace fázového rozptylu indikují složitější křivky přirozeně lépe, než metody založené na modelu jednoduše periodické změny.

Poučení Z toho, co jsme si zde pověděli, vyplývá, že pokud v datech nalezneme periody blízké 1 dni nebo 1 roku, měli bychom je zpočátku přijímat s velkou reservou a učinit vše pro to, abychom se ujistili o jejich reálnosti nebo je naopak spolehlivě vyloučili. Články, ve kterých jsou bez seriózního zkoumání podobné periody oznamovány, nacházíme čas od času i v největších světových astronomických časopisech.

Test na falešné periody je zřejmý. Měly by se totiž tou či onou měrou vyskytovat i v měřeních kontrolních neproměnných hvězd podobných vlastností a polohy na obloze jako zkoumaný objekt.

Proti aliasům pomohou pouze pozorování s vhodným časovým rozložením. Nyní je zcela zřejmé, proč jsem již v úvodu doporučoval získat u neznámé proměnné nejprve několik serií celonočních měření. Z těch obvykle zjistíme, zda je změna rychlá nebo pomalá. Ideálním způsobem, jak se bránit jednodenním aliasům, je pozorovat hvězdu po určitou dobu z několika míst na Zemi, která jsou vzdálená v místním čase. Ondřejovští stelární astronomové zorganizovali několik takových pozorovacích kampaní již v sedmdesátých letech a na počátku osmdesátých let. Dnes jsou podobné kampaně celosvětově stále častější.

Závěrem bych rád upozornil, že pečlivé zkoumání jednodenních aliasů není samoúčelné. Typické rotační periody hvězd spektrálních typů O a B jsou blízké právě k 1 dni a rovněž dvojhvězdy s jednodenní oběžnou periodou nejsou žádnou vzácností. Podobné periody proto nelze nikdy předem vyloučit, stejně jako periody blízké 1 roku.

3.3 Metody minimalizace fázového rozptylu

Metody založené na minimalizaci rozptylu ve fázi byly popsány již Whittakerem a Robinsonem (1926) a nověji Laflerem a Kinmanem (1965). Zajímavou modifikaci navrhli Evans a Young (1966). V té se využívá principu spojitosti dat ve fázovém diagramu pro správnou periodu. Statistické vlastnosti podobné metody zkoumal Dworetsky (1983).

Z hlediska rychlosti výpočtu je patrně nejlepší program, který publikoval Morbey (1973). Jeho nápad spočívá v tom, že se nejprve měřená data znormují a zkvantují na celočíselné hodnoty od 1 do 11. Pro každou zkusmou periodu se pak podobně znormují fáze do intervalu celočíselných hodnot 1 až 10 (např. tak, že fázím 0–0,1 se přiřadí index 1, fázím 0,6–0,7 index 7 atd.). Fázový rozptyl pro danou periodu se pak jednoduše zjistí jako součet rozdílů maximální a minimální hodnoty proměnné pro každou skupinu dat se stejným indexem normované fáze. Ideálně by při zvoleném normování mohl být celkový fázový rozptyl nulový; pro zcela nesetříděná data (s maximálním rozptylem ve všech fázových intervalech) bude roven 10 × (11-1) = 100. Genialita Morbeyho nápadu spočívá ve dvou věcech: (1) data není třeba pro každou zkusmou periodu vzestupně třídit podle fází, což u jiných metod představuje nejdelší část výpočtu; a (2) práce s celočíselnými hodnotami dále zvyšuje rychlost výpočtu na libovolném počítači.

V současné době je patrně nejrozšířenější a nejznámější metoda navržená Stellingwerfem (1978). Pro diskrétní pozorování (t_j, m_j), $j = 1, N$ je celkový rozptyl (neboli variance; čtverec střední kvadratické chyby) dán vztahem

$$S = \sum_j (m_j - \bar{m})^2/(N-1), \tag{195}$$

kde

$$\bar{m} = \sum_j m_j/N \tag{196}$$

je střední hodnota měřené veličiny.

Pro libovolně zvolenou podmnožinu všech pozorování (vzorek) lze definovat rozptyl vzorku zcela analogicky podle vztahů (195) a (196). Zvolíme-li M různých vzorků, které budou mít rozptyly s_k, $(k = 1, M)$ a budou obsahovat n_k měření, bude celkový rozptyl pro tyto vzorky dán vztahem

$$s = (\sum_k (n_k - 1)s_k)/(\sum_k n_k - M). \tag{197}$$

Tento rozptyl vůči střední světelné křivce se při hledání periody snažíme minimalizovat. Stellingwerf pro praktické použití vytváří podmnožiny dat - vzorky - tak, že volí diskrétní intervaly blízkých fází (v dalším jim budeme ve shodě s ním říkat též 'fázové biny') a vytvoří několik takových representací. Pro jednoduchou křivku s jedním maximem a minimem ve fázi doporučuje zvolit 5 fázových intervalů (binů) a 2 různé representace, tedy např. v jedné representaci podmnožiny fází z intervalů

$$\langle 0; 0,2), \langle 0,2; 0,4), \langle 0,4; 0,6), \langle 0,6; 0,8), \langle 0,8; 1.0) \tag{198}$$

a ve druhé

$$\langle -0,1; 0,1), \langle 0,1; 0,3), \langle 0,3; 0,5), \langle 0,5; 0,7), \langle 0,7; 0,9). \tag{199}$$

Fázový rozptyl ještě normuje celkovým rozptylem dat, takže za kriterium správnosti periody volí funkci

$$\vartheta = s/S. \tag{200}$$

Je zřejmé, že pro zkusmé periody daleko od skutečné periody změn bude funkce ϑ nabývat hodnot blízkých k 1 a v okolí správné periody bude klesat směrem k nule.

Protože výpočet fází pro každou zkusmou periodu trvá nejdelší dobu, vytvořil jsem na základě Stellingwerfovy metody program HEC27, který může hledat periodicitu současně pro až 8 závisle proměnných veličin získaných pro stejné časy měření (např. pro UBV hvězdné veličiny a barevné indexy $B-V$ a $U-B$ nebo pro různé veličiny měřené ve spektrech). Výpočetní čas se přitom ve srovnání s hledáním periodicity pouze pro jednu proměnnou veličinu prodlouží jen nepatrně.

Nemec a Nemec (1985) navrhli pro Stellingwerfovu metodu test statistické významnosti nalezených period. I když takové testy jistě představují dobrou informační pomůcku, domnívám se osobně, že v nejistých případech stejně nezbude, než domnělou periodicitu potvrdit nebo vyvrátit další vhodně volenou řadou pozorování.

Velkou výhodou Stellingwerfovy metody je možnost libovolně volit počet fázových binů a různých representací. Můžeme díky tomu hledat periodicitu i pro značně složité světelné křivky s více maximy a minimy. Výpočetní čas ovšem citelně narůstá, protože je nutno volit nejen větší počet binů, ale i *příslušně kratší krok ve zkusmých frekvencích*. Jestliže pro jednoduše periodickou křivku stačí volit zkusmé frekvence podle vztahu (188) tak, aby fázová diference $\triangle\varphi$ byla $0\overset{\mathrm{P}}{,}1$, pak třeba pro křivku s očekávanými 5 minimy to již musí být pouze $0\overset{\mathrm{P}}{,}02$, a místo 5 fázových binů jich musíme mít 25, nemáme-li minout žádné významné setřídění.

Jinou dosud často používanou metodu tohoto typu popsal Jurkevich (1971).

3.4 Metody založené na modelování periodických změn matematickými funkcemi

I těchto metod existuje celá řada. Deeming (1975) popsal velmi podrobně, jak je možno metody založené na Fourierově transformaci zobecnit i na případ pozorování získávaných v nepravidelných intervalech. Čtenáře, který by se hlouběji zajímal o teoretické aspekty problému, odkazuji na matematické učebnice a na Deemingovu přehledovou práci. Zde bude řeč pouze o tom, jak lze Deemingovu metodu aplikovat prakticky. Je-li známa změna studované veličiny jako funkce času $(m = m(t))$ pro libovolný okamžik, můžeme definovat komplexní Fourierovu transformaci funkce $m(t)$ jako funkci frekvence f vztahem

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t)e^{i2\pi ft}dt. \tag{201}$$

Dá se ukázat, že pokud je skutečná změna jasnosti periodická a lze ji popsat jako součet kosinových změn pro diskrétní frekvence f_1 až f_N $(m(t) = \sum_{j=1}^{N} A_j cos 2\pi f_j(t - T_j))$, bude amplituda komplexní funkce $F(f)$ nenulová jen v bezprostřední blízkosti frekvencí f_1 až f_N.

V praxi máme ovšem k dispozici pouze řadu měření $m(t_j), j = 1, 2, .., N$ získanou v časech t_1 až t_N. Deeming ukázal, že definujeme-li pro taková data tzv. *diskrétní Fourierovu transformaci* vztahem

$$F_N(f) = \sum_{j=1}^{N} m(t_j)e^{i2\pi ft_j}, \tag{202}$$

platí, že tato diskrétní transformace je konvolucí skutečné Fourierovy transformace s funkcí $\delta_N(f)$, kterou Deeming nazval *spektrálním oknem* a která je definována vztahem

$$\delta_N(f) = \sum_{j=1}^{N} e^{i2\pi ft_j} \tag{203}$$

a pro daný soubor dat závisí tedy pouze na okamžicích pozorování.

Je tedy

$$F_N(f) = F(f) * \delta_N(f) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F(f - f')\delta_N(f')df'. \tag{204}$$

Praktický význam toho všeho je následující: Kdyby skutečná změna jasnosti byla kosinusová s frekvencí f_0, pak amplituda komplexní funkce $F_N(f)(=|F_N(f)|)$ bude nabývat lokálního maxima pro $f = f_0$, ale rovněž pro řadu dalších frekvencí, které jsou dány časovým rozložením měření, čili v zásadě pro aliasy, o nichž byla řeč dříve. Jaké konkrétně jsou tyto aliasy pro daný soubor dat popisuje právě funkce $\delta_N(f)$, která vždy nabývá svého absolutního maxima (rovného počtu měření N) pro frekvenci $f = 0$ a její další maxima jsou dána právě konkrétním rozložením okamžiků měření (obvykle pro frekvence 1 roku, 1 hvězdného dne, frekvence odpovídající délce časového úseku pokrytého daty a další). Je to tedy tak, že pro ideální kosinusovou změnu bude amplituda diskrétní Fourierovy transformace nabývat maxima pro frekvenci f_0 a pro další frekvence, které budou odpovídat frekvencím spektrálního okna zvětšeným právě o frekvenci f_0. (Povšimněme si, že při zvoleném formalismu se uvažují i záporné frekvence. Platí proto, že pokud ve spektrálním oknu existuje např. maximum pro frekvenci jednodenního aliasu f_d, budou kromě frekvence f_0 existovat v amplitudě diskrétní Fourierovy transformace i maxima u frekvencí $f_0 + f_d$ a $f_0 - f_d$.) Pokud tedy spočteme hodnoty amplitudy diskrétní Fourierovy transformace i spektrálního okna v určitém rozsahu frekvencí a s krokem uvážlivě zvoleným podle vztahu (188), můžeme hledat i vícenásobnou periodicitu v datech přítomnou.

Uvedený princip byl později zobecněn do automatické metody hledání multiperiodicity, která je v astronomické literatuře známa jako algoritmus CLEAN. Tato metoda byla popsána Robertsem a spol. (1987) a pracuje tak, že z dat postupně odebírá jednotlivé nalezené periodické změny dokud nedospěje k diskrétní Fourierově transformaci bez statisticky významných amplitudových maxim.

Jinou, velmi rychlou metodu hledání *jednoduše periodické* změny s jedním maximem a minimem ve fázové křivce navrhl Morbey (1978). V ní se za modelovou funkci přijímá lomená čára – rostoucí v první polovině, a klesající ve druhé polovině fázového diagramu. Kriterium periodicity v Morbeyho metodě je poměr amplitudy změny a variance rozptylu právě vzhledem k oné lomené čáře. Využívá se zde opět celočíselného kvantování hodnot studované veličiny i fází – tak jako v dříve popsané Morbeyho metodě minimalizace fázového rozptylu – ke zvýšení rychlosti výpočtu. Praktické testy ukázaly, že pro jednoduše periodické funkce je tato metoda citlivější než klasická Fourierova transformace. Nehodí se ovšem pro složitější světelné křivky ani pro detekci vícenásobně periodických změn.

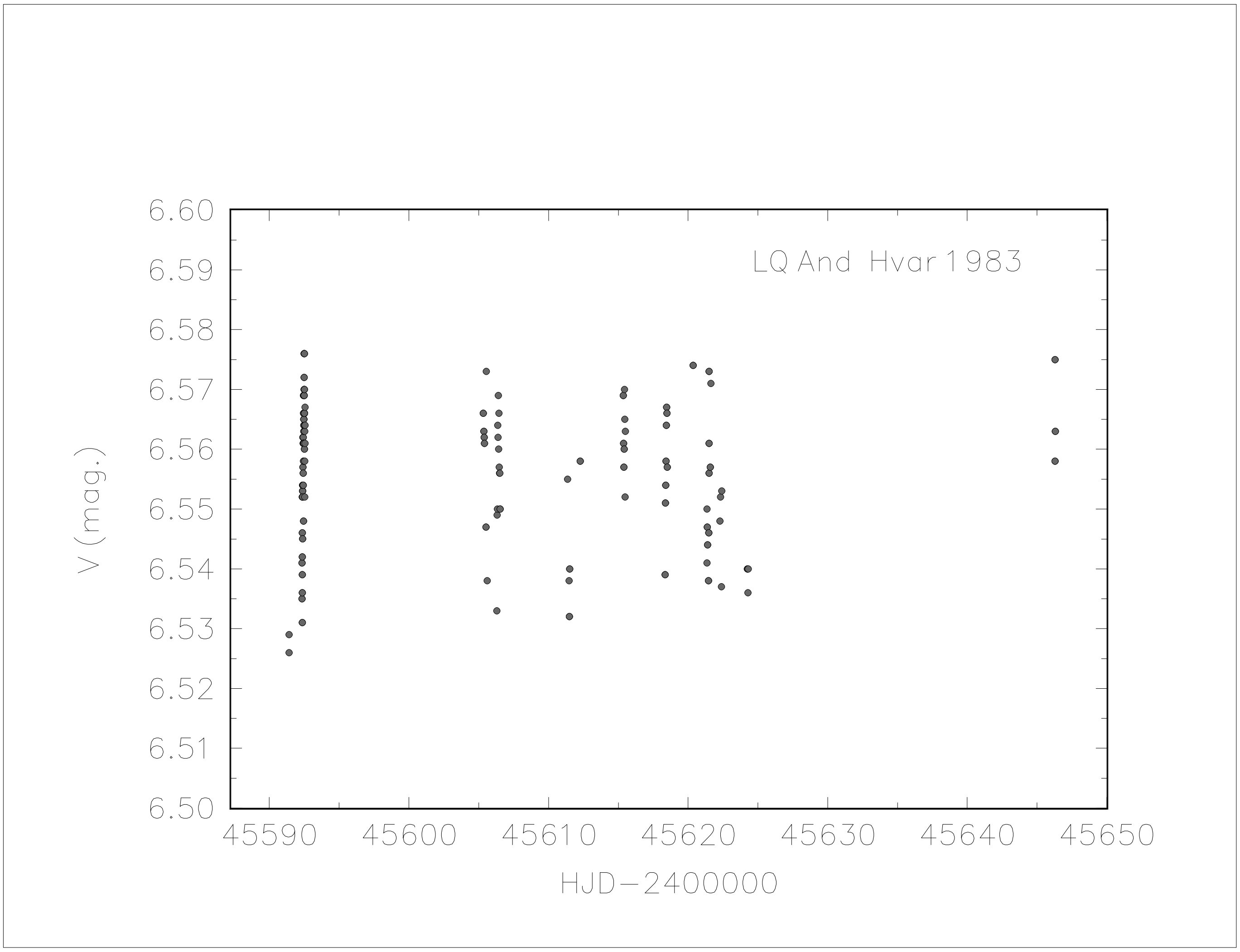
Lomb (1976) a Scargle (1982) navrhli periodogram, který má dobře definovaný statistický test významnosti nalezených period a odpovídá porovnání dat pro každou zkusmou frekvenci se součtem sinové a kosinové změny. Press a Rybicki (1989) přišli s nápadem, jak lze tuto metodu výpočtu zrychlit, a publikovali i příslušný algoritmus ve formě podprogramu v jazyce Fortran.

Grison (1994) navrhl postup, jak lze pomocí ortogonálních funkcí a periodogramu hledat i periody světelných křivek o libovolném tvaru.

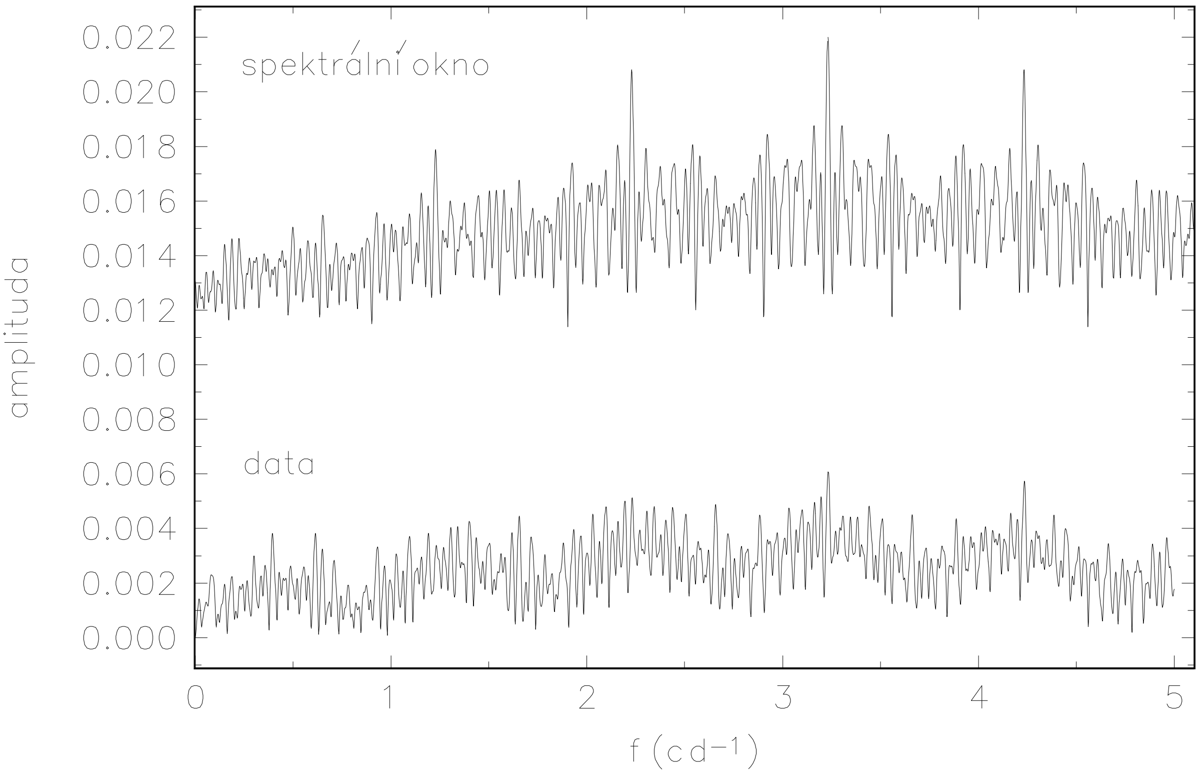
3.5 Odstranění neperiodické změny

Diagram závislosti změny jasnosti na čase, o němž byla řeč již úvodem, nám v některých případech ukáže, že v datech existuje zřetelná, ale nepochybně neperiodická (soustavná nebo cyklická) změna jasnosti. Tak tomu je např. velmi často se změnami jasnosti hvězd se závojem (Be stars). Přesto i v takových změnách může být přítomna i periodická složka, kterou bychom rádi nalezli. K tomu je třeba mít možnost nějakým vhodným způsobem neperiodickou část změn z dat před periodovou analýzou odstranit.

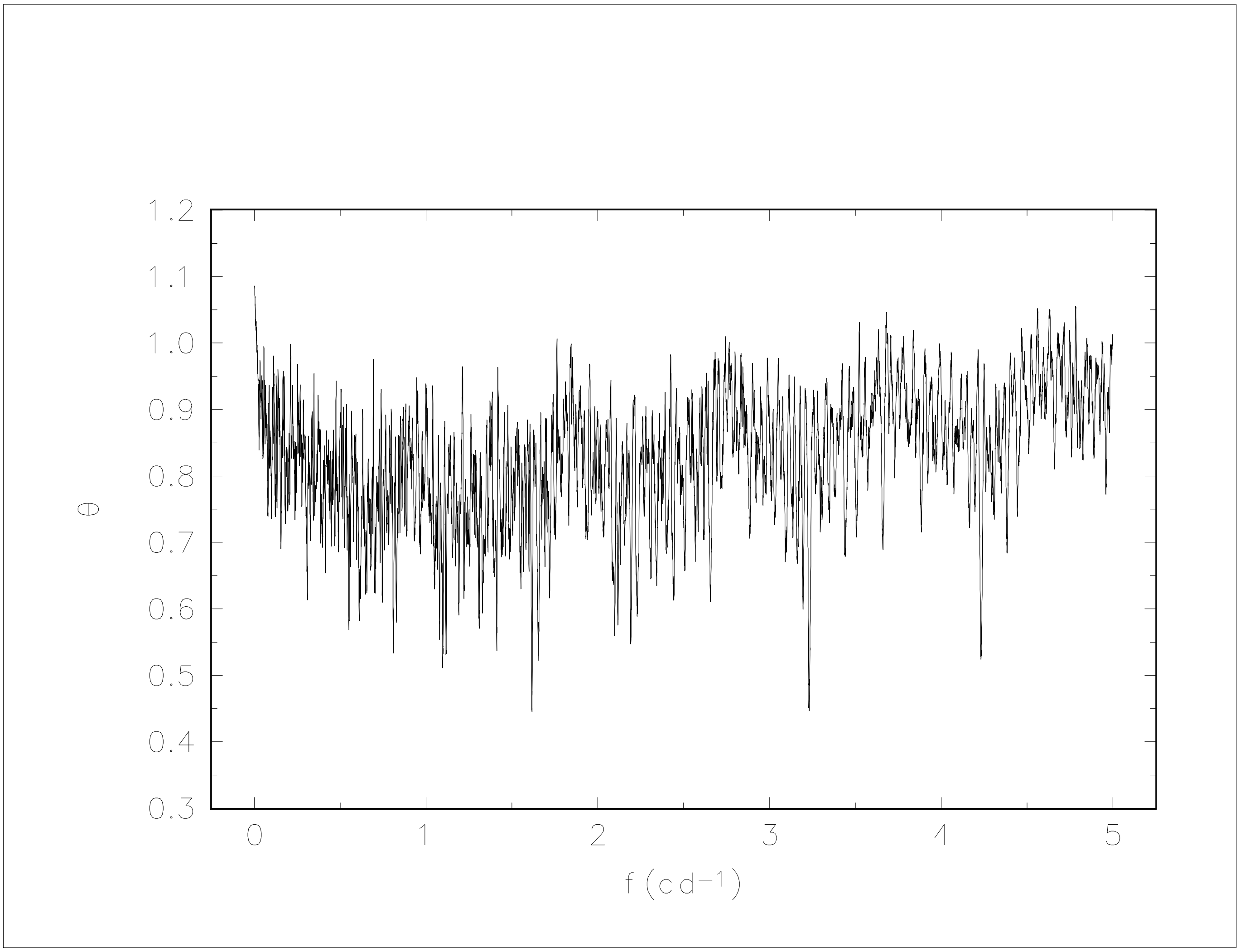
Podle mé zkušenosti k tomu výborně poslouží metoda vyhlazení pomocí polynomů 3. stupně navržená



Obrázek 3: Změny jasnosti hvězdy se závojem LQ And, jak byly v Johnsonově filtru V naměřeny v sezóně 1983 na observatoři na Hvaru.



Obrázek 4: Ilustrace použití Deemingovy metody na data LQ And znázorněná na obr. 3: Horní obrázek ukazuje spektrální okno posunuté ve frekvenci o 3,2308 cd^{-1} a o konstantu 0,01 v amplitudě. Dolní obrázek znázorňuje amplitudu Fourierovy transformace v závislosti na frekvenci. Vidíme, že spektrální okno dobře popisuje aliasy, které se objevují i ve Fourierově periodogramu.



Obrázek 5: Ilustrace použití Stelingwerfovy metody na data LQ And znázorněná na obr. 3: V tomto periodogramu odpovídají nejlepší nalezené periody minimům ϑ statistiky.

Vondrákem (1969, 1977). Musíme se ovšem podle grafického dojmu rozhodnout, zda chceme z dat odstranit jen dlouhodobý trend nebo i kratší cyklické variace. Vondrákova metoda poskytne i střední kvadratickou chybu proložení. Ta by měla odpovídat typické chybě jednoho měření v případě, kdy v datech jiná (rychlejší) změna již není. Je-li větší, můžeme odchylky dat od hladkého proložení podrobit některé z metod periodové analýzy, o nichž byla řeč dříve.

3.6 Numerický příklad

Pro ukázku praktické aplikace jsem zvolil pozorování hvězdy se závojem LQ And získaná roku 1983 na observatoři na Hvaru. Použitá data jsou malou podmnožinou všech měření této proměnné analyzovaných v práci Harmance a spol. (1991). Citovaní autoři nalezli periodu změn 0,61904 dne (f=1,6154 cd^{-1}). Záměrně byla použita individuální pozorování ve filtru V (desetisekundové integrace) bez jakéholiv ‘čištění’, aby byl vidět i vliv náhodných chyb měření, které se v určitém procentu případů obvykle vyskytnou. Na obrázku 3 jsou měření vynesena v závislosti na čase. S mírnou dávkou skepse bychom mohli usoudit, že obr. 3 znázorňuje pouze poněkud větší rozptyl měření z hvarské observatoře, která se nachází jen 260 m nad mořskou hladinou, a že k žádným skutečným změnám jasnosti nedochází.

Obr. 4 ukazuje průběh diskrétní Fourierovy transformace a spektrálního okna posunutého na frekvenci 3,2308 cd^{-1} (a o konstantu 0,01 v amplitudě). Frekvence 3,2308 cd^{-1} odpovídá periodě 0,30952 dne = 0,61904/2 dne. Vidíme, že frekvence 3,23 cd^{-1} odpovídá absolutnímu maximu Fourierovy transformace nalezenému ve zkoumaném rozsahu frekvencí; frekvence skutečné periody 0,61904 dne (1,6154 cd^{-1}) je detekována jen velice slabě.

Na obr. 5 je znázorněn průběh ϑ statistiky spočtené pro stejná data Stellingwerfovou metodou. Je vidět, že perioda $0^{\mathrm{d}},61904$ se detekuje stejně dobře jako její první harmonická $0^{\mathrm{d}},30952$, ve skutečnosti dokonce o trochu lépe.

Obr. 6 ukazuje světelnou křivku LQ And pro správnou periodu $0^{\mathrm{d}},61904$. Vidíme, že se jedná o křivku se dvěma podobnými maximy a minimy a s celkovou amplitudou změn pouze $0^{\mathrm{m}},04$. Tvar světelné křivky vysvětluje různé chování obou použitých metod. Z dlouhodobé statistiky konstantních hvězd pozorovaných na observatoři Hvar bylo zjištěno, že typická chyba jednoho měření ve hvězdné velikosti v barvě V činí $0^{\mathrm{m}},012$. Vidíme tedy, že obě použité metody vedly k detekci periodické změny i pro značně nepříznivý poměr signálu k šumu.

3.7 Existující algoritmy a programy

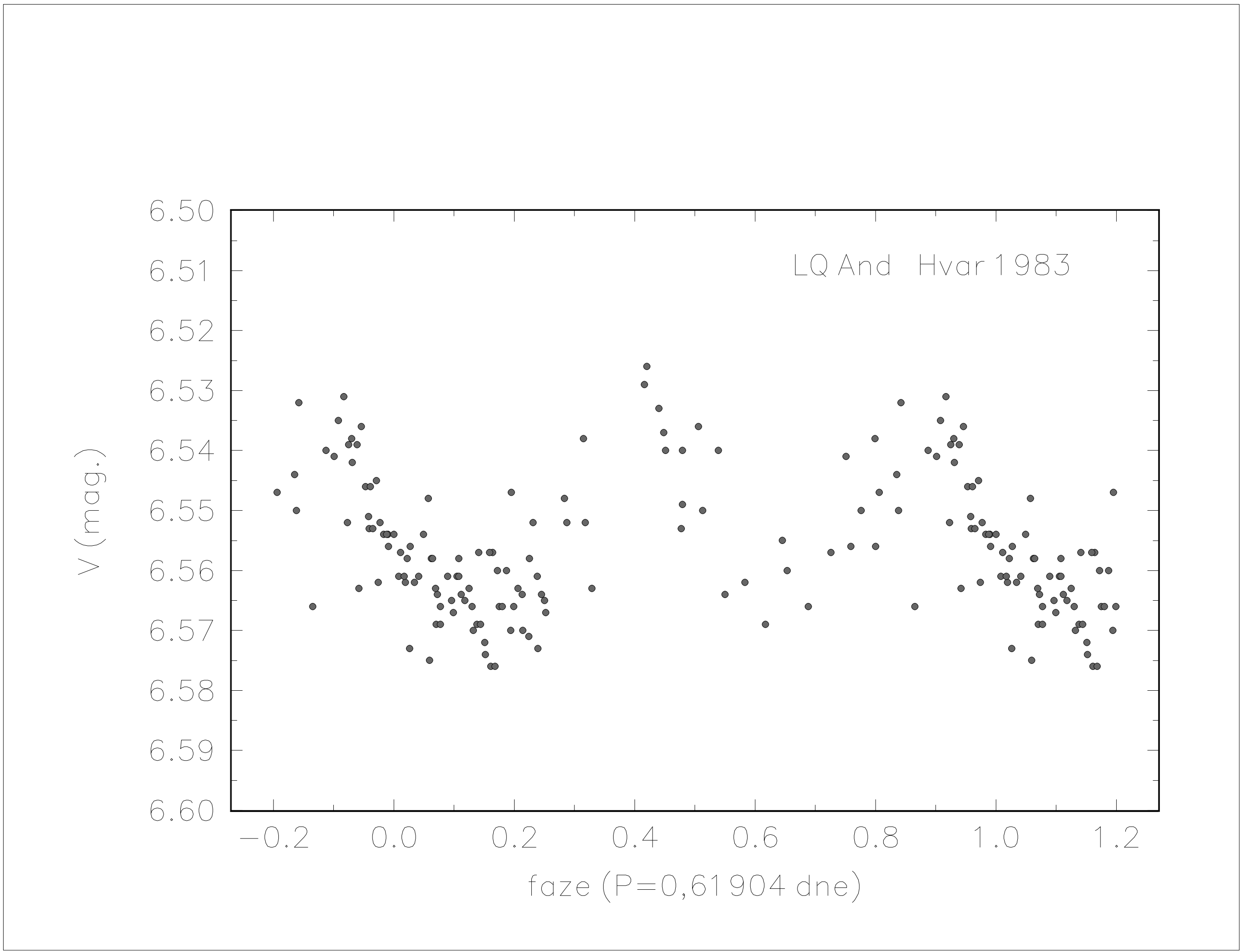
Sám jsem pro potřeby stelárního oddělení Astronomického ústavu AV ČR v Ondřejově vyvinul, převzal a modifikoval řadu programů, které periodovou analýzu dat umožňují. Tyto programy nejsou ve všech případech uživatelsky dokumentovány tak, jak tomu je u programů, určených pro veřejné užívání (ze zde zmiňovaných např. programy HEC22 a VYPAR pro fotometrické redukce). Přesto je mohu vážnějším zájemcům poskytnout s krátkým poučením o jejich praktickém použití. Vítán je i případný zájemce, který by se chtěl celou problematikou zabývat soustavněji a vytvořit uživatelsky orientovanou sadu programů, optimalizovaných co do rychlosti výpočtu.

Zde je tedy přehled mých programů v jazyce Fortran 77:

- **HEC12**... program na výpočet diskrétní Fourierovy transformace a spektrálního okna Deemingovou metodou
- **HEC13**... program na odstranění aperiodické změny Vondrákovou metodou; umožňuje i výpočet normálních bodů ve fázi a lineární transformaci dat z jednoho intervalu do druhého
- **HEC27**... program pro hledání period Stellingwerfovou metodou až pro 8 závisle proměnných současně

Všechny tyto programy jsou koncipovány tak, že vytvářejí pouze potřebné datové soubory výsledků. Jejich grafické zobrazení je ponecháno na uživateli, který tak může zvolit grafické prostředí, které má k dispozici nebo kterému dává přednost.

Breger (1990) popsal a dává k dispozici výpočetní program PERIOD v jazyce Fortran, který pracuje na principu Deemingovy metody a dovoluje rovněž výpočet amplitud a frekvencí násobně periodické kosinusové změny metodou nejmenších čtverců. Tento program byl v nedávné době výrazně zdokonalen



Obrázek 6: Světelná křivka LQ And pro data znázorněná na obr. 3 a pro nejlepší nalezenou periodu $0\overset{d}{,}61904$.

Tabulka 5: Fyzikální a astronomické konstanty a jejich hodnoty použité v tomto textu. Pokud není v poznámce uvedeno jinak, jde buď o konstanty obecně známé nebo o data z databáze NIST (National Institute of Standards and Technology) – viz http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html

Symbol	Název konstanty	Hodnota	Poznámka
$T_{\mathrm{sid.}}$	Siderický rok	$365\overset{\mathrm{d}}{,}2564$	
$T_{\mathrm{Jul.}}$	Juliánský rok	$365\overset{\mathrm{d}}{,}25$	
$T_{\mathrm{trop.}}$	Tropický rok	$365\overset{\mathrm{d}}{,}24219$	
–	Hvězdný den	$365\overset{\mathrm{d}}{,}24219/366\overset{\mathrm{d}}{,}24219 = 0\overset{\mathrm{d}}{,}997269566$	
$R_\odot$	Poloměr Slunce	695835 km	odhad autora z úhlových měření
AU	Astronomická jednotka	$1{,}49597870691\times10^{11}$ m	
pc	Parsek	$3{,}085677581318\times10^{16}$m	
–	Světelný rok	$9{,}4607305\times10^{15}$m	
$M_\odot$	Hmotnost Slunce	$(1,988435 \pm 0,000027).10^{30}\mathrm{kg}$	Gundlach a Merkowitz (2000)
G	Gravitační konstanta	$(6,674215 \pm 0,000092).10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$	Gundlach a Merkowitz (2000)

Bregerovým studentem Martinem Sperlem a je volně k dispozici včetně potřebné dokumentace ve verzích pro Windows i Unix – viz Sperl (1998).

Program na metodu CLEAN získali někteří kolegové od autorů práce Roberts a spol. (1987).

Algoritmy obou Morbeyových metod i rychlé Scargleovy metody jsou popsány v původních pracech autorů ve formě podprogramů v jazyce Fortran.

Poděkování

Za velmi cenné připomínky k předchozím verzím tohoto textu děkuji zvláště Dr. I. Hubenemu, svým kolegům doc. A. Mészárosovi, doc. M. Šolcovi, doc. M. Wolfovi a Mgr. J. Krpatovi a také studentům slečně M. Hrudkové a panu L. Shrbenému. Za cenné konsultace, jak použít grafický program Megapost, děkuji Mgr. M. Brožovi.

Reference

Adams W.S., Kohlschütter A. 1914 Astrophys. J. 40, 385

Baker A.E. 1925 Proc. R. Soc. Edinburgh 45, 166

Beckert D.C., Newberry M.V. 1989, Publ. Astron. Soc. Pacific 101, 849

Blackwell D.E., Shallis M.J. 1977 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 180, 177

Božić H., Ruždjak D., Sudar D. 1999, Astron. Astrophys. 350, 566

Božić H., Harmanec P., Horn J., Koubský P., Scholz G., McDavid D., Hubert A.-M., Hubert H. 1995, Astron. Astrophys. 304, 235

Breger M. 1990 Comm. In Astroseismology No. 20, Computing Center of the Austrian Academy of Sciences, Vienna

Burgasser A.J., Kirkpatrick J.D., Brown m.E., Reid I.N., Gizis J.E., Dahn C.C., Monet D.G., Beichman C.A., Liebert J., Cutri R.M., Skrutskie M.F. 1999 Astrophys. J. 522, L65

Cousins A.W.J., Jones D.H.P. 1976, Mem. R. astr. soc. 81, 1

Deeming T.J. 1975 Ap& SS 36, 137

Dworetsky M.M. 1983 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 203, 917

Evans D.S., Young A.T. 1966 The Observatory 86, 200

Golay M. 1974, *Introduction to Astronomical Photometry*, D. Reidel, Dordrecht

Grison P. 1994 Astron. Astrophys. 289, 404

Gundlach J.H., Merkowitz S.M. 2000 Phys. Rev. Lett. 85, 2869

Guthnick P., Prager R. 1918, Veröff. Berlin Babelsberg 2, No. 3, 113

Gutiérrez-Moreno A., Moreno H., Stock J., Torres C., Wroblewski H. 1966, Publ. Dept. Astron. Univ. Chile 1, 1

Hardie R.H. 1962, in *Stars and Stellar Systems, Vol.II: Astronomical Techniques,*, ed. by G.P. Kuiper and B.M. Middlehurst, Univ. of Chicago Press, USA, p. 178

Harmanec P. 1998, Astron. Astrophys. 335, 173

Harmanec P., Božić H. 2001, Astron. Astrophys. 369, 1140

Harmanec P., Horn J., 1999, Journal of Astron. Data, CD-ROM No. 4, file 5

Harmanec P., Horn J., Juza K. 1994, Astron. Astrophys. Suppl. 104, 121

Harmanec P., Grygar J., Horn J., Koubský P., Kříž S., Ždárský F., Mayer P., Ivanović Z., Pavlovski K. 1977, Bull. Astron. Inst. Czechosl. 28, 133

Harmanec P., Matthews J.M., Božić H., Pavlovski K., Huang L., Guo Z.-H., Percy J.R., Plume R., Ružić Ž, Wehlau W.H., Bohlender D.A., Horn J., Koubský P., Walker G.A.H., Yang S. 1991 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 42, 1

Harris W.E., Fitzgerald M.P., Reed B.C. 1981, Publ. Astron. Soc. Pacific 93, 507

Hartmann 1906, Publ. Astrophys. Obs. Potsdam 18, No. 53

Hayes D.S., Latham D.W. 1975 Astrophys. J. 197, 593

Hill G., Hilditch R.W., Pfannenschmidt E.L. 1976, Publ. Dom. Astrophys. Obs. 15, 1

Hill G., Harmanec P., Pavlovski K., Božić H., Hadrava P., Koubský P., Žižňovský J. 1997, Astron. Astrophys. 324, 965

Holmgren D.E., Hadrava P., Harmanec P., Eenens P., Corral L.J., Yang S., Ak H., Božić H. 1999, Astron. Astrophys. 345, 855

Johnson H.L. 1958, Lowell Obs. Bull. 4, 37

Johnson H.L., Mitchell R.I. 1975, Rev.Mex. Astron. Astrophys. 1, 299

Johnson H.L., Morgan W.W. 1953, Astrophys. J. 117, 313

Johnson H.L., Mitchell R.I., Iriarte B., Wiśniewski W.Z. 1966, Com. Lunar Planet. Lab. 4, 99

Jurkevich I. 1971 Ap& SS 13, 154

King I. 1952, Astron. J. 57, 253

Kirkpatrick J.D., Reid I.N., Liebert J., Cutri R.M. Nelson B., Beichman C.A., Dahn C.C., Monet D.G., Gizis J.E., Skrutskie M.F. 1999 Astrophys. J. 519, 802

Kurucz R.L. 1979 Astrophys. J. Suppl. 40, 1

Lafler J., Kinman T.D. 1965 Astrophys. J. Suppl. 11, 216

Lomb N.R. 1976 Ap& SS 39, 447

Manfroid J., Heck A. 1983, Astron. Astrophys. 120, 302

Morbey C.L. 1973 Publ. Dominion Astrophys. Obs. 14, 185

Morbey C.L. 1978 Publ. Dominion Astrophys. Obs. 15, 105

Nemec A.F.L., Nemec J.M. 1985 Astron. J. 90, 2317

Otero S. 2000 http://ar.geocities.com/varsao

Pogson N. 1856 Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 17, 12

Popper D.M. 1980 Ann. Rev. Astron. Astrophys. 18, 115

Press W.H., Rybicki G.B. 1989 Astrophys. J. 338, 277

Rigolet R. 1936 Bull. Soc. Astron. France 50, 572

Roberts D.H., Lehár J., Dreher J.W. 1987 Astron. J. 93, 968

Scargle J.D. 1982 Astrophys. J. 263, 835

Schönberner D., Harmanec P. 1995 Astron. Astrophys. 294, 509

Sperl M. 1998 http://www.astro.univie.ac.at/˜ dsn (software)

Stebbins J. 1916 Lick Obs. Bull. 8, No. 277, 186 a 192

Stebbins J. 1921 Astrophys. J. 54, 81

Stellingwerf R.F. 1978 Astrophys. J. 224, 953

Strömgren B. 1966, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 4, 433

Tüg H., White N.M., Lockwood G.W. 1977 Astron. Astrophys. 61, 679

Vondrák J. 1969 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 20, 349

Vondrák J. 1977 Bull. Astron. Inst. Czechosl. 28, 84

Whittaker E.T., Robinson G. 1926 *The Calculus of Observations*, Blackie & Son, London

Young A.T. 1974, in *Methods of Experimental Physics 12A*, ed. by N. Carleton, Academic Press, New York-London, p. 1

Young A.T. 1992, Astron. Astrophys. 257, 366